

# Vrednovanje kao strategija učenja matematike

---

Hunjek, Marijana

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:499807>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marijana Hunjek

**Vrednovanje kao strategija učenja matematike**

DIPLOMSKI RAD

Voditeljice rada: prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

doc. dr. sc. Daria Tot

Zagreb, studeni 2015.



Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik

2. \_\_\_\_\_, član

3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

*Ovaj diplomski rad izradila sam uz mentorstvo Doc. dr.sc. Darije Tot te Prof. dr. sc. Aleksandre Čižmešije kojima bih se ovim putem željela zahvaliti na pomoći, uloženoj trudu te vremenu koje su mi pružale za vrijeme izrade ovog rada. Isto tako, željela bih se zahvaliti i svojoj obitelji i prijateljima na potpori tijekom izrade ovog rada te cijelog mog fakultetskog obrazovanja.*

## Sadržaj

|   |    |
|---|----|
| UVOD .....  | 6  |
| 1. OSNOVNE POSTAVKE VREDNOVANJA.....  | 8  |
| 1.1. Pojam vrednovanja i srodni pojmovi .....                                       | 8  |
| 1.2. Zakonska regulativa u Republici Hrvatskoj o odgoju i obrazovanju.....          | 10 |
| 1.3. Vrste vrednovanja .....  | 12 |
| 2. VREDNOVANJE KAO STRATEGIJA UČENJA .....  | 22 |
| 2.1. Svrha vrednovanja .....  | 22 |
| 2.2. Prednosti vrednovanja kao strategije učenja.....                               | 25 |
| 2.3. Prikupljanje informacija o učenicima .....                                     | 29 |
| 2.4. Očekivana učenikova postignuća (ishodi učenja).....                            | 36 |
| 2.5. Poticajne povratne informacije .....   | 42 |
| 2.6. Suvremeni trendovi u vrednovanju i poučavanju .....                            | 48 |
| 2.7. Učeničko samovrednovanje te samovrednovanje učitelja .....                     | 51 |
| 3. STRATEGIJE FORMATIVNOG VREDNOVANJA U NASTAVI MATEMATIKE                          | 54 |
| 3.1. Zašto koristiti strategije formativnog vrednovanja u nastavi matematike? ..... | 55 |
| 3.2. Krug učenja i odabir strategija.....   | 56 |
| 3.3. Korištenje podataka dobivenih iz strategija.....                               | 61 |
| 3.4. Odabrane strategije formativnog vrednovanja.....                               | 62 |
| 3.4.1. Strategija <i>Frustration model</i> .....                                    | 65 |
| 3.4.2. Strategija <i>Riješi i baci</i> .....  | 70 |
| 3.4.3. Strategija <i>Kartice postignuća</i> .....                                   | 75 |
| 3.4.4. Strategija <i>Četiri kuta</i> .....  | 79 |
| 3.4.5. Strategija <i>Opravdaj istinite-neistinite tvrdnje</i> .....                 | 85 |
| 3.4.6. Strategija <i>Slika govori tisuću riječi</i> .....                           | 89 |
| 3.4.7. Strategija <i>Popis terminologije</i> .....                                  | 93 |
| 3.4.8. Strategija <i>Ispitivanje suprotnih pogleda</i> .....                        | 98 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.4.9. Strategija <i>Nizanje kartica</i> ..... | 103 |
| 3.4.10. Strategija <i>3-2-1</i> .....          | 108 |
| 3.4.11. Strategija <i>Pogled unatrag</i> ..... | 110 |
| 4. RUBRIKE I NJIHOVA KONSTRUKCIJA .....        | 114 |
| 4.1. Vrste rubrike .....                       | 115 |
| 4.2. Izrada rubrika .....                      | 118 |
| LITERATURA .....                               | 126 |

## UVOD

Vrednovanje je važan dio školskog sustava kojim se određuju razine postignutih individualnih i općih ciljeva. U školi je tradicionalno služilo kao sredstvo za utvrđivanje razine uspjeha učenika s obzirom na unaprijed definirane norme. Današnje shvaćanje vrednovanja je dinamičnije te polazi od sveobuhvatno razrađenih ciljeva i načina provođenja vrednovanja. Učenici se stavljaju u situacije u kojima će shvatiti ciljeve i zadatke odgoja i obrazovanja te osvijestiti koje su njihove potrebe i ciljevi. Također, učenici trebaju biti osposobljeni za stvaranje strategija u upravljanju svojim učenjem i povećanju sposobnosti samokontrole u učenju. Ostvarivanjem tih zahtjeva učenici postaju uspješniji, a vrednovanje postaje važan čimbenik u ostvarivanju učinkovite nastave (Mužić, Vrgoč, 2005).

Uspješna škola zahtijeva i uspješne učitelje. Da bi učitelj dobro procijenio učenikovo napredovanje, i time pomogao učenicima u procesu učenja, bitno je da kontinuirano istražuje i stvara alternativne metode vrednovanja koje su više usmjerene na proces učenja i motivaciju učenika, a manje na ocjene (Vrgoč, 2002).

Vrednovanje kao strategija učenja pomaže učenicima učiti više i učiti bolje te je usko vezana uz formativno vrednovanje. Formativno vrednovanje je svrhovit proces u kojem učitelj kontinuirano promatra i vodi evidenciju o učenikovom napredovanju i učenju te dobivene informacije koristi u svrhu poboljšanja načina poučavanja, a učenici ga koriste za poboljšanje upravljanja učenjem. Jedan od glavnih ciljeva vrednovanja kao strategije učenja je poboljšanje učenikove motivacije i učenja (Popham, 2013).

Ovaj rad sastoji se od četiri poglavlja. Prvo poglavlje bavi se općim postavkama vrednovanja. U njemu se nalazi definicija pojma vrednovanja te definicije pojmova koji su usko vezani uz pojam vrednovanja. Isto tako, u prvom poglavlju opisuje se zakonska



regulativa u Republici Hrvatskoj o odgoju i obrazovanju temeljena na Pravilniku o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi.

Vrednovanje možemo promatrati s obzirom na različite aspekte: tko provodi vrednovanje, kada se provodi, u odnosu na što se vrednuje, što se vrednuje kod učenika te kako se vrednuje, što je također opisano u prvom poglavlju.

Drugo poglavlje bavi se vrednovanjem kao strategijom učenja. U njemu je opisana svrha vrednovanja te prednosti vrednovanja kao strategije učenja. Da bi vrednovanje unapređivalo učenje i poučavanje, učitelj treba kontinuirano prikupljati informacije o učenicima i njihovim načinima učenja. No, prije svega, bitno je definirati očekivana učenička postignuća kako bi učenici znali čemu teže i što se od njih očekuje. Drugo poglavlje bavi se i poticajnim povratnim informacijama. Poticajna povratna informacija prije svega mora biti informacija o tome što je učenik postigao i što još treba poduzeti kako bi ispunio ciljeve učenja. Drugo poglavlje sadrži i savjete za učitelje kako povratnim informacijama poticati učenike na učenje te ih motivirati za daljnji rad. Danas, postoje različiti načini poučavanja koji aktiviraju učenike. U drugom poglavlju istaknuti su i neki suvremeni trendovi u vrednovanju i učenju poput takozvanog majstorskog učenja i diferenciranog poučavanja. Takvi načini poučavanja i učenja omogućuju prikupljanje informacija o učeniku, motiviraju učenika te ga osposobljavaju za samostalno učenje i samovrednovanje. Samovrednovanje učenika i učitelja bitna je sastavnica suvremenog obrazovanja. Ono osposobljava učenike i učitelje za cjeloživotno obrazovanje i uspješno odgovaranje na zahtjeve i izazove u učenju i poučavanju.

U trećem poglavlju nalaze se konkretne strategije koje unapređuju učenje i poučavanje te daju učiteljima informacije o učenikovom učenju, načinu razmišljanja, strategijama koje koristi da bi riješio problem te konceptima i procesima koje učenik još nije svladao. Na početku poglavlja opisano je zašto je dobro koristiti takve strategije u nastavi matematike te je detaljno razrađeno jedanaest strategija s konkretnim primjerima za osnovnu i srednju školu. Zadnje poglavlje posvećeno je rubrikama za praćenje učenja te njihovoj izradi te su navedena dva korektna primjera izrade rubrike.

# 1. OSNOVNE POSTAVKE VREDNOVANJA

## 1.1. Pojam vrednovanja i srodni pojmovi

Vrednovanje u odgojno-obrazovnom sustavu obuhvaća sve aktivnosti kojima dolazimo do informacija o tome jesu li ostvareni planirani odgojno-obrazovni ciljevi i zadatci (Mužić, Vrgoč, 2005). Za pojam vrednovanje koristi se i istoznačni međunarodni termin *evaluacija*. Uz svaki kurikulum definiran je i postupak vrednovanja, odnosno, vrednovanje je važan element svakog kurikulumuma (Matijević, 2004). Uz sam pojam vrednovanja vežu se i mnogi drugi pojmovi sličnog značenja, no oni ipak nisu posve istoznačni. Neki od tih pojmova su: praćenje, provjeravanje, ocjenjivanje, procjenjivanje i mjerenje (Tot, 2013). U ovome će se radu termin vrednovanja koristiti u širem značenju.

Mužić i Vrgoč (2005) navode da je *praćenje* oblik vrednovanja u kojem se u samom tijeku djelatnosti ustanovljuje njezino napredovanje, odnosno poteškoće i nedostaci koje treba ukloniti da bi se uspješno ostvarili planirani ciljevi te djelatnosti. Praćenje je proces tijekom kojeg se prati i tijek i rezultat rada te se nastoji što bolje upoznati učenika. Također, teži se da što više elemenata utječe na konačnu ocjenu (Kadum-Bošnjak, 2007).

Uz pojam vrednovanja veže se i pojam *provjeravanje*. Svrha provjeravanja slična je praćenju, no razlika između tih termina je što praćenje implicira kontinuiranost, dok se

provjeravanje veže uz iterativnost (Mužić, Vrgoč, 2005). Provjeravanje podrazumijeva utvrđivanje trenutnog stanja, neovisno o kriterijima i polaznim vrijednostima (Tot, 2013). Provjeravanje je dakle postupak kojim učitelj tijekom nastavnog rada utvrđuje razine do koje su učenici usvojili određena znanja, sposobnosti i vještine (Kadum-Bošnjak, 2007).

Pojam *ocjenjivanje* odnosi se na davanje ocjena na temelju određene ljestvice ili pomoću tekstualnog opisa situacije onoga što se ocjenjuje. Taj termin obično implicira i obavijest roditeljima i samim učenicima o njihovom uspjehu (Mužić, Vrgoč, 2005). Ocjenjivanje znanja obavlja se nakon što su nastavni sadržaji provjereni i nakon što su ih učenici svladali i usvojili. Ocjenjuju se učenikovi usmeni i pismeni odgovori, tehnički i praktični radovi te druge aktivnosti (Penca Palčić, 2008). Kod nas se stupanj usvojenosti znanja, sposobnosti i vještina izražava brožčanom ocjenom od 1 do 5, pri čemu valja imati na umu da jednaka ocjena ne znači i jednako znanje jer su ocjene podložne različitim uvjetima u kojima nastaju, ali i subjektivnim osobinama učitelja. Da bi ocjena bila što objektivnija, potrebno je prikupiti što više podataka o znanju i sposobnostima učenika (Kadum-Bošnjak, 2007).

Pojam *procjenjivanje* je postupak u kojem je ponajprije naglasak na subjektivnom mišljenju onoga koji procjenjuje, bez obzira na to temelji li se ta procjena i na objektivnim kriterijima (Mužić, Vrgoč, 2005). Procjena je slična vrednovanju, ali se s njim ne podudara. Naime, procjena se više odnosi na analizu i vrednovanje užeg dijela programa (djelatnosti), dok se pod vrednovanjem smatra vrednovanje cjeline ili više povezanih aspekata (Tot, 2013).

*Mjerenje* je, za razliku od procjenjivanja, aspekt vrednovanja u kojem prevladava težnja za što objektivnijim izrazom njegovih rezultata (Mužić, Vrgoč, 2005). Mjerenje je zapravo kvantitativan opis ponašanja dok vrednovanje označava i kvalitativan i kvantitativan opis ponašanja (Tot, 2013).

## 1.2. Zakonska regulativa u Republici Hrvatskoj o odgoju i obrazovanju

*Pravilnik o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi*<sup>1</sup> definira vrednovanje kao: „sustavno prikupljanje podataka u procesu učenja i postignutoj razini kompetencija: znanjima, vještinama, sposobnostima, samostalnosti i odgovornosti prema radu, u skladu s unaprijed definiranim i prihvaćenim načelima, postupcima i elementima, a sastavnice su praćenje, provjeravanje i ocjenjivanje.”

Pojam *praćenje* u Pravilniku definira se kao: „sustavno uočavanje i bilježenje zapažanja o postignutoj razini kompetencija i postavljenim zadacima definiranim nacionalnim i predmetnim kurikulumom, nastavnim planom i programom te strukovnim i školskim kurikulumom.”

Pod pojmom *provjeravanje* Pravilnik podrazumijeva procjenu postignute razine kompetencija u nastavnome predmetu ili području i drugim oblicima rada u školi i tijekom školske godine.

*Ocjenjivanje* prema Pravilniku je pridodavanje brojčane ili opisne vrijednosti rezultatima praćenja i provjeravanja učenikovog rada prema sastavnicama ocjenjivanja svakog nastavnog predmeta.

Načini, postupci i elementi vrednovanja proizlaze iz nacionalnog i predmetnog kurikulumuma, nastavnog plana i programa, školskog kurikulumuma, iz Pravilnika o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi i pravila ponašanja učenika. Elemente ocjenjivanja i vrednovanja nastavnog predmeta izrađuje učitelj određenog nastavnog predmeta zajedno s učiteljima istog predmeta, odnosno odgojno-obrazovnog područja te su dužni uskladiti načine, postupke i elemente praćenja

---

<sup>1</sup> Pravilnik o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi donesen je na temelju članka 72. stavka 9. Zakona o odgoju i obrazovanju u osnovnoj i srednjoj školi (Narodne novine, broj 87/08., 86/09., 92/10. i 105/10-ispr.) od strane ministra znanosti, obrazovanja i športa 2010. godine. Dalje u navodima: Pravilnik.

na lokalnoj, regionalnoj i nacionalnoj razini. Također, učitelj je na početku i tijekom godine dužan upoznati učenike, razrednika i stručnu službu s elementima, načinima i postupcima vrednovanja. Tijekom praćenja učenikovih postignuća, učitelj u rubriku bilješki u imeniku upisuje zapažanja koja su učitelju uočljiva u praćenju učenika, koja mu pomažu u konačnom ocjenjivanju uspjeha te koja su razumljiva učeniku i roditelju. U tu rubriku učitelj može unositi i, na primjer, datum pisane ili usmene provjere, teme seminara, broj bodova na pisanoj provjeri, redovitost izvršavanja zadataka i sl. (Pravilnik, 2010). Školske godine 2011./2012. uveden je, kao pilot projekt, e-Dnevnik. E-Dnevnik je web aplikacija za vođenje razredne knjige u elektroničkom obliku. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta donijelo je Pravilnik o dopunama Pravilnika o sadržaju i obliku svjedodžbi i drugih javnih isprava te pedagoškoj dokumentaciji i evidenciji u školskim ustanovama (NN 85/12, kolovoz 2012.), koji omogućava školama takvo vođenje razredne knjige. Škole koje na ovaj način vode razrednu evidenciju ne trebaju ju voditi u pisanom obliku, već su dužne na kraju godine ispisati razrednu knjigu i pohraniti ju sukladno Zakonu o odgoju i obrazovanju u osnovnoj i srednjoj školi. Aplikacija ima sve funkcionalnosti postojeće razredne knjige, no dodatno učenicima omogućava pregled ocjena, bilješki, izostanaka, lektira te rasporeda pisanih zadaća, a roditeljima pruža sustav obavještanja o izostancima djece („e-Dnevnik“, 2014).

Kod vrednovanja učenika s teškoćama, treba vrednovati učenikov odnos prema radu i postavljenim zadacima. Načine, postupke i elemente vrednovanja kod takvih učenika učitelji trebaju primjeriti poteškoćama i osobnosti učenika. Vrednovanje tih učenika treba biti usmjereno na aktivno sudjelovanje u nastavi, razvijanje samopouzdanja i osjećaj napredovanja. Također, načini i postupci vrednovanja trebaju biti u skladu s preporukama stručnog tima (Pravilnik, 2010).

U istom pravilniku navedena su i prava i obaveze učenika. Učenik ima pravo znati elemente ocjenjivanja kao i načine i postupke vrednovanja od svakog učitelja te je dužan pridržavati se svih pravila koji se odnose na načine i postupke vrednovanja (Pravilnik, 2010).

### 1.3. Vrste vrednovanja

Vrednovanje možemo promatrati s različitih aspekata: s obzirom na to tko provodi vrednovanje, kada se provodi, u odnosu na što se vrednuje, što se vrednuje kod učenika te kako se vrednuje.

S obzirom na subjekte provođenja vrednovanje može biti unutarnje (interno) i vanjsko (eksterno) (Cindrić, Miljković, Strugar, 2010).

*Unutarnje vrednovanje* je vrednovanje koje provode učitelji zajedno s učenicima praćenjem aktivnosti i utvrđivanjem rezultata ili postignuća. Razina postignuća iskazuje se školskim ocjenama. Unutarnje vrednovanje sastoji se od tri međusobno povezane etape. U prvoj etapi učitelj tijekom školske godine bilježi zapažanja o učenikovim interesima, potrebama i sposobnostima čime nastoji uočiti učenikove kvalitete te ono područje u kojem pokazuje interes i napredak. Bilješke također mogu biti upotrijebljene za usmjeravanje učenikovog razvoja ili za pedagošku intervenciju ukoliko učenik ima poteškoće. Druga etapa vezana je uz provjeravanje postignuća, tj. učitelj sustavno prikuplja podatke o rezultatima učenja uz primjenu tehnika provjeravanja (usmeno, pisano i praktično provjeravanje). Treća etapa vezana je uz ocjenjivanje. Ocjena treba biti sinteza dviju prethodnih etapa vrednovanja (Cindrić, Miljković, Strugar, 2010). Unutarnje vrednovanje povezano je i sa samovrednovanjem. Samovrednovanje učitelja koristi se kada učitelj vrednuje sam sebe, odnosno svoj rad. Prema Tot (2013) to je proces: „prikupljanja te analiziranja informacija koje su dobivene samoprocjenom pri kojem učitelji koriste iskazana mišljenja sudionika nastavnog procesa. Do samovrednovanja dolazi kada pitanja, razmišljanja i interpretacije vode učitelja do donošenja odluka o vlastitom postupanju. Ono je također proces u kojem učitelji donose zaključke o učinkovitosti vlastitog znanja, izvedbe ili uvjerenja na poboljšanje. Učitelj zatim odlučuje o poduzimanju aktivnosti u svrhu profesionalnog razvoja. Ti su temeljna pitanja koja su u središtu procesa samovrednovanja: Koliko je dobro to što radim?, Kako to znam?, Što trebam učiniti za poboljšanja? „ (Tot, 2013, str. 143). Osobito je važno poticati učenikovo samovrednovanje jer je ono učeniku polazište

u ocjenjivanju svojeg napretka. Samovrednovanjem učenici preuzimaju odgovornost za proces i rezultat učenja. Razvijati samovrednovanje znači omogućiti učeniku postavljanje osobnih ciljeva i procjenjivanje vlastitog uspjeha. Pritom mu mogu pomoći sljedeća pitanja: Koja se moja vještina poboljšala od prošle godine?, U čemu sam dobar/dobra?, Koje vještine bih mogao/la poboljšati?, Što se nadam naučiti ove godine? (Vrgoč, 2002).

Svrhu *vanjskog vrednovanja* definiraju prosvjetne vlasti i stručnjaci, neovisni znanstveni instituti, međunarodne ustanove i organizacije za odgoj i obrazovanje (npr. UNESCO, OECD...). Vanjsko se vrednovanje prvenstveno provodi radi ostvarivanja širih društvenih i gospodarskih ciljeva te razina znanja, sposobnosti, vrijednosti i vještina. No, svako vanjsko vrednovanje ima i svoje specifične ciljeve koje određuje organizator. U Republici Hrvatskoj vanjskim vrednovanjem bavi se *Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja (NCVVO)*<sup>2</sup>. Najčešći oblici vanjskog vrednovanja su: nacionalni ispiti, državna matura, međunarodno vrednovanje postignuća pomoću PISA programa (Programme for international Student Assessment) (Cindrić, Miljković, Strugar, 2010). Prednost vanjskog evaluatora je u njegovoj objektivnosti jer on osobno nije uključen. No, ne smijemo zaboraviti, kod svake procjene uključene su vrijednosti onoga koji evaluira. Vanjsko vrednovanje ne može podići kvalitetu škole na višu razinu, ali je može potaknuti na bolji rad i veću učinkovitost (Tot, 2013). Uz pojam vanjskog vrednovanja, veže se i pojam unutarnjeg vrednovanja, tj. u mnogim školama razvijaju se mehanizmi unutarnjeg vrednovanja za osiguravanje kvalitete uz istodobno ostvarivanje vanjskog. Proces vanjskog vrednovanja započinje, organizira i vodi škola u svrhu unapređenja svog rada, dok vanjsko vrednovanje pruža potporu školama u smanjenju subjektivnosti procjene, odnosno ukazuje na njihove slabosti i snage na temelju prikupljenih dokaza. Glavni cilj unutarnjeg vrednovanje je osiguravanje kvalitete, no pored toga, može pridonijeti i boljem samospoznavanju i samorazumijevanju te služi kao pomoć pri samoregulaciji institucije (Tot, 2013). Postupak unutarnjeg vrednovanja sastoji se od sustavnog prikupljanja administrativnih podataka, ispitivanja mišljenja

---

<sup>2</sup> Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obavlja poslove vanjskog vrednovanja u odgojno-obrazovnom sustavu Republike Hrvatske i poslove provođenja ispita temeljenih na nacionalnim standardima. U obavljanju poslova iz svoje djelatnosti, koje obavlja isključivo samostalno, Centar surađuje sa znanstvenim, odgojno-obrazovnim i drugim srodnim ustanovama te fizičkim i pravnim osobama.

studenta, vođenja intervjua s učiteljima i učenicima te periodične izrade izvješća sa samovrednovanja (NCVVO, 2015).

S obzirom na to kada se vrednovanje provodi razlikujemo sumativno, formativno i dijagnostičko vrednovanje.

*Sumativno vrednovanje* je vrednovanje koje se provodi na kraju jednog vremenskog razdoblja (na kraju školske godine) odnosno na kraju proučene sadržajne cjeline. U sumativnom vrednovanju koriste se razne tehnike i postupci, kao na primjer, testovi znanja, procjene referata i drugih učeničkih programskih uradaka (Cindrić, Miljković, Strugar, 2010). Dakle, pojam sumativnog vrednovanja vezan je zapravo uz pojam ocjenjivanja, tj. određuje standard postignuća koji je dostignut u određenom trenutku (Kyriacou, 1995). Osnovni zadatak sumativnog vrednovanja je pretvaranje rezultata vrednovanja u dokument čime se omogućuje njegovom korisniku da prijeđe u sljedeći razred, na sljedeći stupanj obrazovanja ili da uđe u radni odnos (Mužić, Vrgoč, 2005). Cilj sumativnog vrednovanja je ocjenjivanje učenika te davanje povratnih informacija učenicima, roditeljima te stručnoj službi o postignutom uspjehu u nastavi (Perišić, 1988). Sumativno vrednovanje treba odgovoriti na pitanje do koje mjere je učenik ostvario postavljene ishode učenja, odnosno koju ocjenu treba dobiti (Popham, 2013). Nedostatak sumativnog vrednovanja je taj što se sumativno vrednovanje obavlja nakon dužeg vremenskog perioda poučavanja i učenja, kada je često već kasno za izmjene učeničkih odnosa prema nastavi i učenju (Perišić, 1988). Sumativno vrednovanje dominira u tradicionalnim školama što rezultira kampanjskim učenjem, orijentacijom na ocjenu umjesto na znanje i primjeren pristup učenju te također vodi selekcioniranju djece umjesto njihovog poticanja na što kvalitetniji rad (Nimac, 2010).

*Formativno vrednovanje* je planirani proces u kojem učitelji koriste rezultate praćenja učenika u svrhu poboljšanja vlastitog poučavanja, odnosno učenici u svrhu poboljšanja učenja. Formativno vrednovanje je fokusirano na poboljšanje učiteljevog načina poučavanja i učeničkog učenja (Popham, 2013). Glavna svrha formativnog vrednovanja je poticanje učenika na učenje, odnosno motivacija učenika. Da bi nastavnici postigli taj cilj, bitno je da kontinuirano prate učenikov rad, ponašanje, znanja,



vještine i razumijevanje te daju povratne informacije koje sadrže nove strategije i poruku da su pogreške i biti u krivu dio svakog učenja. Formativno vrednovanje uključuje prikupljanje dokaza o učenikovom učenju, pružanje povratne informacije učeniku te pomaže učitelju u poboljšanju načina poučavanja, dakle, uključuje i učenike i učitelje (McMilan, 2010). Formativno vrednovanje treba utvrditi razinu do koje su određeni zadatci nastave ostvareni i zadatke kojima učenici nisu ovladali do zadovoljavajuće razine. Cilj formativnog vrednovanja nije razvrstavanje učenike na odlične, vrlo dobre itd., nego pomoći učiteljima i učenicima da usmjere pažnju i aktivnosti na propuste i nedostatke kako bi se oni otklonili. Po osnovnoj funkciji, formativno vrednovanje je korektivno. Povratne informacije koje daje učitelj jačaju kod učenika njihovo samopouzdanje i oslobađaju ih strahova koji proizlaze iz neobaviještenosti o tome je li dobro ono što rade (Perišić, 1988). Tehnike koje se koriste za prikupljanje podataka radi formativnog vrednovanja iste su tehnike koje se koriste za sumativno vrednovanje (izvedba praktičnih radova, usmeno ispitivanje, učeničke mape...) (Nimac, 2010). Aktivnosti osmišljene u svrhu formativnog vrednovanja povećavaju razinu kvalitete poučavanja, osiguravaju efikasno učenje te osposobljavaju učitelja i učenike za donošenje najbolje moguće odluke vezane uz poučavanje u učenje. Isto tako, te aktivnosti aktiviraju učenikovo mišljenje te im potiču intelektualnu znatiželju. Potiču i razrednu diskusiju, pomažu učenicima da uoče što su naučili i što još trebaju naučiti, ohrabruju učenike da postavljaju pitanja te daju promišljene odgovore. U matematici, strategije formativnog vrednovanja unapređuju učenikovu matematičku pismenost i izražavanje, crtanje, slušanje te dizajniranje vlastitih ideja i zaključaka. Formativno vrednovanje poboljšava interakciju učenik-učenik i učenik-učitelj pružajući pritom prilike za ispitivanje i dijeljenje matematičkih ideja. Kroz formativno vrednovanje učenici su aktivno potaknuti na kontinuirano modificiranje i produbljivanje znanja, sadržaja i procedura (Keeley, Tobey, 2011).

Evidencija rezultata formativnog vrednovanja učenikovih postignuća moguća je na više načina. Jedan od načina koji se pokazao uspješnim je prikazivanje učenikovih postignuća u tablici koja za svakog učenika u razredu prikazuje razinu do koje je svladao planirani sadržaj. Za označavanje te razine mogu se koristiti različiti načini šifriranja ili

različite boje. Na primjer, plava boja može značiti da je učenik u potpunosti svladao sadržaj, žuta da je djelomično svladao sadržaj, a crvena da učenik nije svladao planirani sadržaj. Takva tablica omogućuje nastavniku jedan vizualni pregled napredovanja pojedinog učenika te mu omogućuje procjenu je li za neke učenike potrebno organizirati dopunsku nastavu (Perišić, 1988).

Pojam *Dijagnostičko vrednovanje* preklapa se s pojmom formativnog vrednovanja, no precizno određuje poteškoće u učenju (Kyriacou, 1995). Provođi se prije samog procesa poučavanja pomoću testova i mjerenja. Rezultati tih mjerenja daju informacije učitelju o učenikovim znanjima, vještina, interesima te stilovima učenja, tj. služe učitelju za planiranje tj. modifikaciju poučavanja. Dijagnostički testovi analiziraju učenikovo razumijevanje osnovnih pojmova, koncepata, vještina i ideja potrebnih za nastavak poučavanja. Kod dijagnostičkog vrednovanja važno je da ono bude efikasno, tj. treba paziti da se dobivene informacije dobro iskorištavaju kako se proces poučavanja ne bi pretvorio u pisanje testova u svrhu dijagnosticiranja poteškoća, a ne u proces stjecanja novih znanja (Cook, 2013). Svrha dijagnostičkog učenja je utvrđivanje učenikovih „ulaznih performansi" tj., utvrđivanje imaju li učenici nužna znanja, vještine i sposobnosti za nastavak poučavanja, odnosno jesu li učenici već postigli neke planirane ishode učenja (McMilan, 2010).

Jasno je da vrednovanje učeničkog postignuća treba biti i formativno i sumativno. Treba napomenuti da osnovne razlike između formativnog i sumativnog vrednovanja nisu u strukturi i sadržaju testa, već u tome kako se rezultati tih testova koriste, odnosno razlika je u njihovim ciljevima. Sumativno vrednovanje usmjereno je na ispitivanje poslije jednog relativno dužeg razdoblja, dok formativno vrednovanje omogućava prikupljanje informacija o radu i postignućima učenika tijekom nastave. Formativni testovi ne služe za ocjenjivanje, već isključivo imaju dijagnostičku ulogu (Perišić, 1988).

U odnosu na različite referentne točke, učenike možemo vrednovati kriterijski, normativno (relativno) i ipsativno.

*Kriterijsko vrednovanje* odnosi se na vrednovanje s obzirom na unaprijed definirane obrazovne ishode, odnosno bodovne skale. To vrednovanje pokazuje nam je li učenik postigao određeni ishod i u kojoj mjeri. Kod kriterijskog vrednovanja koriste se prosječno teški i jednostavni zadatci jer se želi postići veći postotak korektnih odgovora (McMillan, 2010). Kod kriterijskog vrednovanja unaprijed se određuje koja količina pokazanog znanja odgovara kojoj ocjeni. U tom slučaju, rezultat učenika ne ovisi o njegovom položaju unutar generacije, već o postignuću na skali koja je unaprijed određena (Vlahović – Štetić, Pavlin – Bernadrić).

Kod *normativnog vrednovanja* učenikov se uspjeh mjeri s uspjehom drugih učenika. Na primjer, ako ocjena odličan označava razinu znanja koju postiže 15% najboljih učenika, to bi značilo da će, bez obzira na rezultate koje učenici postignu, 15% najboljih uvijek dobiti ocjenu odličan (Kyriacou, 1995). Kod normativnog vrednovanja ne koriste se jako lagani niti jako teški zadatci kako bi se rezultati dobro raspršili. To vrednovanje potiče natjecanje, odnosno, služi za rangiranje učenika. Normativno vrednovanje može imati i negativan učinak na motivaciju učenika jer se neki učenici uvijek nalaze na dnu skale (McMillan, 2010). Uz upotrebu normativnog vrednovanja učenički rezultati se dijele prema normalnoj distribuciji. Određuje se minimalni broj bodova za pozitivnu ocjenu te se nakon toga postignuti rezultati dijele prema normalnoj distribuciji (Vlahović – Štetić, Pavlin – Bernadrić). Karakteristike kriterijskog i normativnog vrednovanja navedene su u Tablici 1.

Ovisno o željenoj vrsti interpretacije rezultata moguće je konstruirati i odgovarajuće vrste testova pa tako možemo govoriti o normativnim i kriterijskim testovima. Normativni testovi sastavljeni su tako da što bolje razlikuju učenike, a kriterijski tako da što bolje opisuju stečena znanja. Normativni testovi većinom obuhvaćaju veće cjeline dok kriterijski imaju detaljniju provjeru manjih cjelina. Valja naglasiti da te dvije vrste testova treba promatrati kao dva kraja istog kontinuuma, a ne kao razdvojene oblike. Uz neke kompromise, moguće je napraviti testove koji omogućuju i kriterijsku i normativnu interpretaciju rezultata (Vizek-Vidović i sur., 2003).

*Ipsativno vrednovanje* je vrednovanje učenika u odnosu na sebe samoga. Prati se napreduje li učenik, stagnira ili nazaduje, odnosno ostvaruje li rezultate koji su iznad, ispod ili u rangu njegovih potencijala i sposobnosti (McMillan, 2010). Kriteriji i standardi mogu biti demotivirajući za učenike koji ne postižu visoke rezultate. No, ipsativno vrednovanje ističe koliki napredak je učenik napravio što je motivirajuće. Ono također pomaže učenicima da se razvijaju, naglašavajući gdje više trebaju usmjeriti svoju pažnju i učenje. Ipsativno vrednovanje može pomoći i boljim učenicima da bi postigli više. Najveći problem ipsativnog vrednovanja je taj da učitelj treba imati pristup u prijašnja vrednovanja učenika da bi napravio usporedbe, što nije uvijek moguće. Isto tako, ipsativno vrednovanje zahtijeva drugačiji način razmišljanja o vrednovanju od uobičajenog što može uzimati vrijeme i učiteljima i učenicima (Hughes).

Tablica 1. Karakteristike normativnog i kriterijskog vrednovanja (Popham, 2007).

|                                  | <b>NORMATIVNO<br/>VREDNOVANJE</b>  | <b>KRITERIJSKO<br/>VREDNOVANJE</b>  |
|----------------------------------|--|---|
| <b>INTERPRETACIJA</b>            | rezultat dobiven usporedbom s ostalima učenicima u grupi                           | rezultat dobiven usporedbom unaprijed postavljenim standardima i kriterijima                            |
| <b>PRIRODA REZULTATA</b>         | percentilni prag; ocjenska (Gaussova) krivulja; standardni rezultati               | udio korektno riješenog u cijelom ispitu; opisani standardi postignuća                                  |
| <b>TEŽINA ZADATAKA</b>           | koristiti zadatke od srednje teških do teških kako bi se rezultati dobro raspršili | koristiti prosječno teške i jednostavne zadatke kako bi rezultirao velikim postotkom korektnih odgovora |
| <b>UPOTREBA REZULTATA</b>        | za rangiranje i sortiranje učenika   | opisivanje postignute razine postignuća   |
| <b>UTJECAJ NA<br/>MOTIVACIJU</b> | ovisi o grupi učenika u kojoj se vrši kompetencija; kompetitivno                   | potiče učenike na postizanje specifičnih ishoda učenja  |

|                         |   |  |
|-------------------------|---|--|
| <b>POZITIVNE STRANE</b> | rezultira težim ispitima koji su izazovniji za učenike  | povezuje učenikovo postignuće s jasno definiranim ishodom učenja; smanjuje kompetitivnost među učenicima |
| <b>NEGATIVNE STRANE</b> | učenikove ocjene određene su njegovom usporedbom s ostalim učenicima u grupi; neki učenici su uvijek na dnu skale | postavljanje jasno definiranih ishoda učenja i standarda za njihovo svladavanje je zahtjevno             |

Odgovor na pitanje što se vrednuje kod učenika ponajviše ovisi o kriterijima koji proizlaze iz ciljeva odgoja i obrazovanja. U vezi vrednovanja učenika važnu ulogu imaju taksonomije odgojno-obrazovnih ciljeva (Bloomova taksonomija, Coxova taksonomija...). Bloomova taksonomija dijeli ciljeve odgoja i obrazovanja na sustav razina s područja kognitivnih, afektivnih i psihomotoričkih ciljeva (Mužić, Vrgoč, 2005). Razine (od najniže prema najvišoj) koje Bloom i suradnici razlikuju u kognitivnom području su: znanje, razumijevanje, analiza, sinteza i vrednovanje. Na prvoj razini naglašava se učenikovo pamćenje, a na višim razinama od učenika se očekuje razumijevanje onoga što je naučio, sposobnost primjene tog znanja, sposobnost kritičke analize znanja te sposobnost sintetiziranja rastavljenih cjelina te sposobnost kritičkog vrednovanja o točnosti nekih tvrdnji (Matijević, 2004). U vezi s kognitivnim osobinama mnogo je lakše vrednovati stupanj usvojenosti nastavnih sadržaja nižih nego viših kategorija. Najlakše je vrednovati reproduktivni nastavni sadržaj, a najteže osposobljenost učenika za samostalno vrednovanje pojava i postupaka. Kod mjerenja, odnosno vrednovanja afektivnih osobina katkad je gotovo nemoguće ostvariti valjanost, odnosno objektivnost. Osim toga, na tom se području katkad javlja i problem etičke prihvatljivosti kod vrednovanja nekih područja učenikovih osobina (Mužić, Vrgoč, 2005). Bloom i suradnici navode pet razina afektivne domene: prihvaćanje, reagiranje, usvajanje vrijednosti, organiziranje vrijednosti i integritet. Kod prihvaćanja učenici

svjesno prate i žele čuti. Kod reagiranja učenici aktivno sudjeluju te su motivirani, dok kod usvajanja vrijednosti poštuju i vrednuju osobu vezanu s određenim objektom ili događajem. Zatim učenik organizira vrijednosti po prioritetima te stvara jedinstven sustav vrijednosti. Na zadnoj razini, učenik posjeduje sustav vrijednosti koji kontrolira njegov karakter (Popham, 2007). Psihomotoričke osobine su najpristupačnije, tj. najmjerljivije. Često je moguće direktno mjerenje, a time i valjano objektivno vrednovanje (Mužić, Vrgoč, 2005). One se ponajviše odnose na vještine i motoričke sposobnosti. Bloom i suradnici u toj domeni nude sedam razina: percepcija, spremnost, vođeni razgovor, automatizirani razgovor, automatizacija, prilagodba i organizacija. Učenik prvo upotrebljava osjetila kao vodstvo u motoričkim aktivnostima. Nakon toga, učenik je spreman na radnju te oponaša i razvija vještine, često direktnim koracima. Zatim, učenik s povećanom sigurnošću i okretnošću izvršava radnju te ih automatizirano izvršava i prilagođava problemskoj situaciji. Na kraju, učenik stvara nove obrasce za specifične situacije (Popham, 2007).

Bloomova taksonomija nije pogodna za upotrebu u matematici jer je opširna za svakodnevnu upotrebu. Zato se u matematici najčešće koristi *Coxova taksonomija*. Ona se sastoji od tri kategorije: Znanje, interpretacija i prijenos. Kategorija znanja odnosi se na temeljna znanja. Uključuje koncepte poput: razumijevanje, upotreba činjenica, poznavanje teorema, formula, upotreba teorema i formula u zadacima koji zahtijevaju jednostavniju i direktnu primjenu, primjena tehnika računanja... Interpretacija se odnosi na razumijevanje, analizu i sinetezu. Ona implicira da učenici mogu reproducirati naučeni teorem, razumjeti ga, poznavati njegova ograničenja, poznavati probleme u kojima se taj teorem može koristiti te prilagoditi problem tako da se teorem može primijeniti. Zadnja kategorija odnosi se na prijenos stečenih znanja u nove kontekste i situacije. Ona podrazumijeva da učenik može primjenjivati naučeni teorem u novim i nepoznatim situacijama, povezati dani matematički sadržaj s drugim dijelovima matematike, formulirati hipoteze... (Divjak, 2008).

Vrednovanje učenikovog napredovanja prisutno je tijekom cijelog procesa učenja. Također, individualna procjena je iznimno važna, tj. svakog učenika valja pratiti

pojedinačno, što uključuje kontinuirano promatranje, procjenjivanje, ocjenjivanje te vrednovanje rezultata aktivnosti. Učenikovo učenje valja procijeniti na početku školske godine i nastaviti tijekom godine (Vrgoč, 2002). Izbor instrumenata i postupaka vrednovanja ovisi o tome tko ili što se vrednuje te zašto se vrednuje. Svako vrednovanje temeljeno je na podacima (uz nastojanje da oni budu što objektivniji) pa stoga dolazi u obzir širok raspon postupaka i instrumenata prikupljanja podataka kao na primjer: pretraživanje relevantne dokumentacije, promatranje odgojno-obrazovnih događanja, razgovori, razne ankete, testovi... (Mužić, Vrgoč, 2005).

## **2. VREDNOVANJE KAO STRATEGIJA UČENJA**

### **2.1. Svrha vrednovanja**

Glavne svrhe vrednovanja u nastavi su: vrednovanje naučenog, vrednovanje za učenje i vrednovanje kao učenje.

*Vrednovanje naučenog* je vrednovanje čiji rezultati postaju javni te su dani u obliku izjava ili simbola koji govore o tome koliko dobro je učenik učio, odnosno u kojoj mjeri je postigao očekivana postignuća. Svrha vrednovanja naučenog je mjerenje, odnosno davanje certifikata. Učitelji moraju koristiti razne metode prikupljanja informacija tako da rezultati vrednovanja budu konzistentni, pravedni i utemeljeni na raznolikim informacijama. Da vi vrednovanje naučenog bilo pouzdano i konzistentno učitelj bi se trebao pitati sljedeća pitanja: Imam li dovoljno informacija o učenju da bih mogao donositi zaključke?, Jesu li informacije prikupljene tako da su svi učenici imali jednake prilike za pokazivanje svojeg znanja?, Bi li i drugi učitelj donio isti zaključak? Bih li donio drugačiju odluku ako bih te informacije proučavao na drugačiji način i u drugo vrijeme? („Rethinking Classroom Assessment“, 2006). Vrednovanje naučenog je sumativnog karaktera, potvrđuje učenje, povremeno je, najčešće se provodi na kraju nastavne cjeline te se koristi kao potvrda jesu li učenici postigli postavljene ishode učenja. Nedostatci vrednovanja naučenog su to što učenicima i ostalim zainteresiranim subjektima daje kasnu povratnu informaciju koja je sažeta (Popham, 2013).



Učitelji koriste *vrednovanje za učenje* kada žele unaprijediti učenikovo učenje. Informacije koje dobiju kod vrednovanja koriste u svrhu otkrivanja koja su učenikova prijašnja znanja, percepcije, „rupe“ u znanju te koje stilove učenja koriste. Također, koriste ga da bi modificirali poučavanje u svrhu građenja produktivnog učenja i otkrivanja problema koji onemogućuju sljedeći korak u učenju. Metode koje koriste za prikupljanje takvih informacija su različite. Neke od tih metoda su razgovori, pitanja, kvizovi... Učitelji prije svega trebaju dobro planirati vrednovanje koje će dati što detaljnije informacije o tome kako učenici uče i misle. Također, učiteljeve bilješke prije svega moraju biti u skladu s ishodima učenja u kurikulumu. Učitelj isto tako mora davati detaljne povratne informacije koje će učenicima sugerirati kako da poboljšaju učenje i u kojem smjeru ide njihovo učenje. Kada se učitelji fokusiraju na vrednovanje kao učenje, bitno je da rade usporedbe između očekivanja u kurikulumu i tijeka učenja tako da svaki učenik može dobiti materijale za potporu koje treba bez frustracija i zbnunjenosti. Da bi vrednovanje za učenje bilo uspješno, prije svega važna je otvorena komunikacija između roditelja, učenika i učitelja („Rethinking Classroom Assessment“, 2006). Dakle, vrednovanje za učenje formativnog je karaktera te daje informaciju kako prilagoditi poučavanje i učenikove aktivnosti. Ono opisuje potrebe za buduće učenje, sugerira korekcije u učenju te je kontinuirano. Glavna svrha vrednovanja kao učenja je povećanje učenikove motivacije, odnosno koristi se kao povratna informacija za učenike (Popham, 2013).

*Vrednovanje kao učenje (vrednovanje kao strategija učenja)* karakterizirano je učenikovom refleksijom vlastitog učenja. Ono se fokusira na učenike kao aktivne sudionike koji se kritički odnose prema novim informacijama. Učitelji su kod vrednovanja kao učenje fokusirani na to kako učenici razumiju koncepte te kako koriste svoje metakognitivne sposobnosti za njihovo bolje razumijevanje. Glavna uloga učitelja je učenike naučiti metodama koje im pomažu u vođenju vlastitog učenja i razmišljanju o situacijama kada se osjećaju zbnunjeno i nesigurno u procesu učenja. Bitno je također stvoriti ozračje u kojem će učenici imati povjerenja u vlastita kritička mišljenja. U takvim ozračjima, učenici bi trebali moći razviti vještine koje im pomažu u aktivnim sudjelovanju u procesu učenja te koje im pomažu u praćenju vlastitog napretka, odnosno

u donošenju odluke o potrebama u učenju da bi napravili napredak. Efektivne povratne informacije su jako bitne jer stvaraju kod učenika vjerovanja da oni mogu sami doći do nekih zaključaka. U pozitivnim ozračjima i efektivnim povratnim informacijama učenici razvijaju vještine za samovrednovanje, nadziranje vlastitog učenja, uče se pitati za potporu te su spremni za traženje novih informacija i izazova. Kod vrednovanja kao učenja naglasak nije na točnom odgovoru, nego prije svega na procesu učenja („Rethinking Classroom Assessment“, 2006). Kod vrednovanja kao učenja glavni naglasak je na učenikovo poznavanje kriterija vrednovanja. Cilj vrednovanja kao učenja je učenje samoispitivanjem te razvijanje refleksije i kritičkog mišljenja o vlastitom učenju. Vrednovanje kao učenje je formativnog karaktera, provodi se kontinuirano te također povećava učenikovu motivaciju (Popham, 2013).

Učitelj, kako bi s lakoćom provodio vrednovanje za učenje i vrednovanje kao učenje, trebao bi (McMillan, 2010):

- razumjeti ishode učenja
- informirati učenike o ishodima učenja na početku procesa poučavanja
- razviti vještine vrednovanja i sposobnost transformiranja očekivanja u aktivnosti vrednovanja koje precizno reflektiraju učenička postignuća
- primijeniti vrednovanje u svrhu izgradnje učeničkog samopouzdanja i odgovornosti za vlastito učenje
- interpretirati rezultate vrednovanja u učestale opisne povratne informacije koje učenika pravovremeno obavještavaju o potrebnom napretku
- koristiti rezultate u svrhu poboljšanja poučavanja
- poticati učenike na samovrednovanje
- aktivno uključiti učenike u komunikaciju s roditeljima o njihovim postignućima.

Svrha vrednovanja za učenje i kao učenje nije zamijeniti vrednovanje naučenog. U obrazovanju postoji mnogo situacija u kojima nastavnici žele znati što učenici znaju, a što ne znaju. Vrednovanje naučenog nije loše vrednovanje, no, u obrazovanju je potrebno više situacija i vrednovanja u kojima dominira vrednovanje za učenje, odnosno vrednovanje kao učenje. Karakteristike vrednovanja za učenje,

vrednovanja kao učenje i vrednovanje naučenog navedene su u Tablici 2 (Popham, 2013).

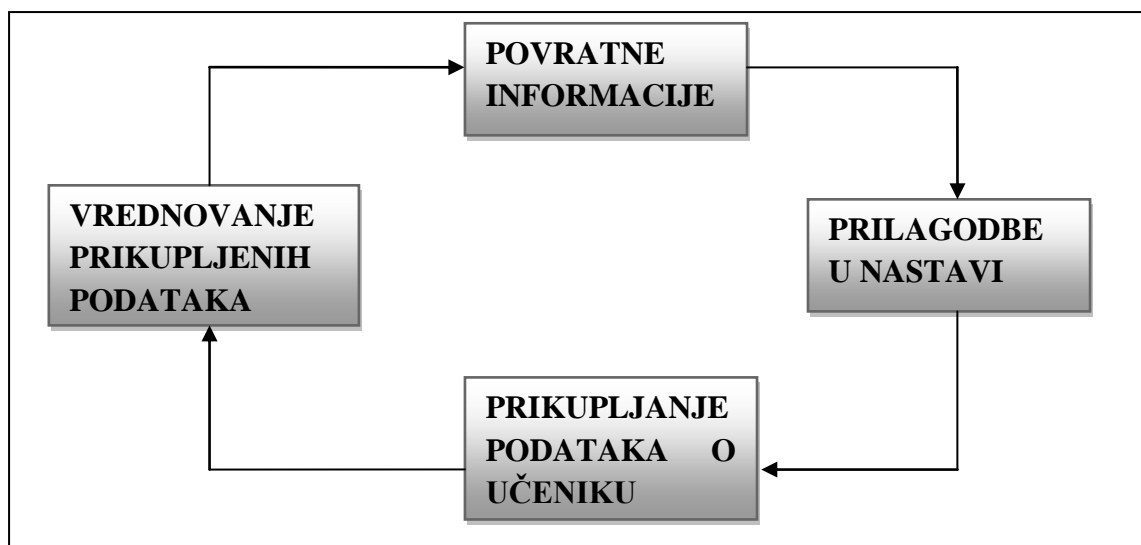
Tablica 2. Svrha vrednovanja (McMillan, 2010).

| Vrednovanje naučenog   | Vrednovanje kao učenje                               | Vrednovanje za učenje                                   |
|--|--|---|
| Sumativno vrednovanje  | priroda vrednovanja potiče učenike u učenje          | formativno vrednovanje                                  |
| potvrđuje učenje   | potiče učenike na nadgledavanje svojeg učenja        | opisuje potrebe za buduće učenje                        |
| provodi se na kraju nastavne jedinice, odnosno cjeline; povremeno je | provodi se na satu                                   | provodi se na satu                                      |
| često koristi smjernice normativnog vrednovanja                      | naglašava učenikovo poznavanje kriterija vrednovanja | pomaže učitelju u modificiranju i prilagodbi poučavanja |
| povratna informacija za roditelje                                    | učenici sami nadziru svoje učenje                    | povratna informacija za učenike                         |
| može smanjiti motiviranost   | povećava motivaciju                                  | povećava motivaciju                                     |
| kasna povratna informacija   | trenutna povratna informacija                        | trenutna povratna informacija                           |

## 2.2. Prednosti vrednovanja kao strategije učenja

Glavni cilj vrednovanja kao strategije učenja je poboljšanje učenikove motivacije i načina učenja. Da bi se to postiglo, učitelj treba stvoriti kontinuirani proces koji uključuje prikupljanje podataka o učeniku, evaluaciju učenikovih radova i ponašanja, povratne informacije učenicima te korekcije kod kojih je važno da sadrže nove strategije učenja. Taj proces prikazan je na Slici 1. (McMillan, 2010).

Slika 1. Kružni proces (McMillan, 2010).



Vrednovanje kao strategija učenja formativnog je karaktera te se odnosi na pojam *vrednovanje kao učenje* opisanog u prethodnoj cjelini. Način na koji učitelj vrednuje učenika može uvelike utjecati na učenikovo učenje, tj. može pomoći učeniku u učenju. Ako učitelj želi pomoći učenicima da postignu određenu razinu obrazovanja, bitno je da razmišlja o tome kako da organizira poučavanje koje će pomoći učenicima u učenju, tj. treba razmišljati o tome kako da vrednovanje bude dio učenja (Brown, 2004/2005). Pri tome, nastavnik treba stvoriti ozračje koje najbolje pomaže u učenju. Poticajno ozračje učenja obilježava uzajamno poštivanje između učenika i nastavnika, pridržavanje pravila, zajednička podjela odgovornosti, pravednost nastavnika prema svakom pojedincu i cijelog grupi za učenje te skrb nastavnika za učenje i učenike. Pozitivna okolina za učenje dovodi do toga da učenici više surađuju u nastavi, pokazuju manji strah od nastave, manje pate od neraspoloženja i stresa te su više zadovoljni školom. U pozitivnom nastavnom okruženju rjeđe je ometanje nastave te se smanjuje agresivno ponašanje i nasilje. Također, stvara se i snažnije zanimanje za predmet, odnosno, ako učenici ozračje doživljavaju pozitivno, bolje razvijaju svoje sposobnosti i interese te time dolaze do boljih kognitivnih, metodičkih i društvenih postignuća u učenju (Meyer, 1998). Dobra organiziranost i brižljivo praćenje učeničkog napretka osiguravaju nesmetan tijek nastavnog sata i aktivno sudjelovanje učenika. Bitno je da se

u tome ustraje i tada učenici prihvaćaju učiteljev autoritet kao organizatora i voditelja nastavnih aktivnosti i očekuju da će dobro napredovati. Važnost uspostave takvih pozitivnih učeničkih očekivanja je u potrebi da učenici sebe poštuju i uvažavaju. Dobro je odrediti realistična očekivanja uspjeha i pružati podršku i pomoć učenicima kad zapadnu u teškoće. Uzastopni neuspjesi ili podrugljive nastavnikove primjedbe mogu pogubno djelovati na učenikovo samopouzdanje; opuštenost, srdačnost i poticajnost temelje se na vrsti odnosa koje nastavnik uspostavi s učenicima. Ako nastavnik probleme rješava smireno, to pomaže i učenicima da se opuste i lakše razvijaju znatiželju i zanimanje za nastavne aktivnosti (Kovač, 2005).

Razredno okruženje trebalo bi biti dizajnirano tako da podržava poučavanje i učenje. To okruženje uključuje: učenik je u središtu zbivanja, znanje je u središtu zbivanja, vrednovanje je u središtu zbivanja, zajedništvo je u središtu zbivanja (Keeley, Tobey, 2011).

*Učenik je u središtu zbivanja:* Na tako organiziranoj nastavi pozornost je usmjerena na znanje, vjerovanje, stavove i vještine s kojima učenik pristupa u nastavu. Kada je učenik u centru zbivanja, učitelj koristi strategije formativnog vrednovanja prije i za vrijeme poučavanja pazeći pritom pažljivo na napredak svakog učenika te je bitno da u svakom trenutku zna na kojoj su razini učenici (Keeley, Tobey, 2011). Učitelj također usklađuje ciljeve učenja s učeničkim potrebama, predznanjima i interesima te prilagođava poučavanje bazirano na informacijama formativnog vrednovanja. Učenici također vrednuju svoje ideje znajući da njihovi postojeći koncepti, koji se javljaju prilikom korištenja strategije, pokazuju početak novih saznanja i razumijevanja („Learner-Centered Classrooms“, 2014).

*Znanje je u središtu zbivanja:* U okruženju u kojem je znanje u centru, učitelji postavljaju jasne ciljeve učenja te trebaju znati koji koncepti pridonose ostvarivanju tih ciljeva kao i preduvjete potrebne za nadogradnju učeničkog razumijevanja koncepata i procesa. Učitelji također trebaju znati koje vrednovanje koristiti tako da dobiju informacije o učenikovom učenju. Dobro je i da učenici znaju što se od njih očekuje kako

bi i oni sami mogli pratiti vlastiti napredak. U takvom okruženju, koriste se strategije koje otkrivaju ili produbljuju razmišljanje učenika (Keeley, Tobey, 2011). Učitelj prati rad učenika i njihovu angažiranost u aktivnosti. Takve strategije, u kojima je znanje u centru zbivanja, promiču i nadziru učenje s razumijevanjem. Učitelj u takovom okruženju traži od učenika da svojim riječima opisuju naučeno te ih potiče na aktivno učenje. U takvim razredima na panoima često su istaknuti plakati koji služe kao podsjetnik o onome o čemu se učilo (Sevian).

*Vrednovanje je u centru zbivanja:* Okruženje u kojem je vrednovanje u centru zbivanja pruža prilike za učenike da ispituju svoje znanje i mišljenje. Kontinuirano korištenje strategija formativnog vrednovanja učeniku i učitelju pružaju priliku za potvrđivanje svojeg razmišljanja te priliku za nadgledavanje svojeg učenja. U takvom okruženju, učenici međusobno dijele svoja razmišljanja te objašnjavaju kako su došli do njih i zašto. To je važan trenutak kada se učenici povezuju s procesom učenja (Keeley, Tobey, 2011). U takvom okruženju velik je naglasak i na povratne informacije koje učitelj daje učenicima koje prije svega trebaju biti kontinuirane. Učitelji također pomažu učenicima u upravljanju učenjem, dok učenici u takvom okruženju često vode portfolije<sup>3</sup> (Sevian).

*Zajedništvo je u središtu zbivanja:* Takovo okruženje je ozračje u kojem učenici uče jedni od drugih te u kojem kontinuirano poboljšavaju svoje učenje. To je okruženje u kojem se vrednuju socijalne norme i u kojem se razvija socijalna inteligencija. Strategije u kojima je zajedništvo u središtu zbivanja podrazumijevaju javnu razmjenu svih ideja za rješavanje problema, a ne samo točnih, sigurnost u preuzimanju rizika, refleksiju svih ideja, pitanja, razrednu diskusiju te povratnu informaciju (Keeley, Keeley, 2011). Isto tako, često se koristi i tehnologija za stvaranje novih načina učenja i izradu grupnih projekata. Učenici u takvom okruženju uče biti odgovorni jedni za druge, a često su u takvim okruženjima u rad uključeni i roditelji (Sevian).

---

<sup>3</sup> Portfolio će detaljno biti opisan u poglavlju 2.7.

Ako se u učionici svakodnevno isprepliću ova četiri ozračja, ona postaje mjesto u kojem se učenici i učitelji osjećaju kao ravnopravni članovi intelektualne zajednice te se kao takvi kontinuirano razvijaju i unapređuju učenje i poučavanje u nastavi te poboljšavaju vezu između vrednovanja, poučavanja i učenja (Keeley, Tobey, 2011).

Učitelj svojim stilom vođenja razreda znatno utječe na razredno ozračje. Govori se o tri stila vođenja: demokratskom, autoritarnom i indiferentnom stilu vođenja (Matijević, 2004).

U demokratskom stilu vođenja učitelj se s učenicima dogovara o svemu što se radi, kako se radi i kako se vrednuje učinak rada. Kod autoritativnog stila vođenja učitelj autonomno vodi sve aktivnosti i način ocjenjivanja ne dajući učenicima mogućnosti komentiranja ili utjecaja na to. Uz takav stil vođenja, kod učenika se često javlja strah od škole. U indiferentnom stilu vođenja učitelj ne uspijeva uspostaviti suradnički odnos s učenicima pa su učenici prepušteni sami sebi, osjećaju se izgubljeno te često ne uspijevaju zadovoljiti svoje osnovne razvojne potrebe. Osim oblika razrednog ozračja koji su uvjetovani učiteljevim stilom vođenja, na razredno ozračje utječe i stavovi učitelja. Ako u razrednoj komunikaciji prevladava natjecateljski stil, ono kod učenika može stvoriti lošu sliku o sebi jer možda nikad ne postižu da se o njihovom radovima govori pozitivno. Zato bi učitelji trebali težiti stvaranju suradničkog ozračja u kojem učitelji i učenici sudjeluju u aktivnostima kao suradnici. Učenici se tada raduju aktivnostima jer svi nastoje pomoći jedni drugima (Matijević, 2004).

### **2.3. Prikupljanje informacija o učenicima**

Prikupljanje informacija o učenikovom učenju važan je dio vrednovanja kao strategije učenja, tj. formativnog vrednovanja koji obuhvaća širok spektar formalnih i neformalnih tehnika kojima učitelji i učenici mogu skupljati dokaze o učenikovom učenju. Takvi podatci mogu se tada koristiti za donošenje zaključaka o statusu učenikovog učenja, na primjer, uključivanje u diskusiju, brojna ključna pitanja na koja

učenici odgovaraju u svrhu utvrđivanja koliko dobro su svladali pojedini dio vještina i znanja koja su bitna da bi savladali veći kurikulovski cilj (Popham, 2013). Koje metode, postupke, tehnike i instrumente koristiti ovisi o namjeri vrednovanja. Da bi podatci bili pouzdani i valjani, treba ih prikupljati putem širokog raspona podataka i instrumenata, počevši od pretraživanja, studiranja i korištenja dostupne pedagoške dokumentacije, različitih anketiranja, testiranja te drugih instrumenata procjenjivanja i prosuđivanja (Mužić, Vrgoč, 2005). Ključan element u procesu poučavanja je kontinuirano praćenje učenikovih reakcija na poučavanje i učenikovog napretka prema razumijevanju određenog sadržaja ili svladavanja određene vještine. Pitanja koja si pritom postavlja učitelj su: Kakav je tijek aktivnosti?, Kako učenici reagiraju na aktivnosti?, Koliko su zainteresirani i koliko prate?, Bih li trebao ubrzati/usporiti?, Trebam li dati više primjera?... U tom procesu, dobro vrednovanje je ključno za efektivno učenje i usmjeravanje poučavanja. Učitelj kod poučavanja treba znati na što treba obratiti pažnju kod svojih učenika, kako interpretirati to što vidi i čuje, kako reagirati prema učenicima i kako prilagoditi svoje poučavanje. Uspješniji su oni učitelji koji uvijek tragaju za obrascem ponašanja, koji podupiru učenike kada riskiraju i kreću se naprijed te usmjeravaju njihovo učenje i pokušavaju razumjeti kako svaki učenik napreduje (McMilan, 2010).

Formativno vrednovanje može biti korišteno formalno i neformalno, ali je uvijek provedeno s namjerom. Učitelji mogu poduzeti akcije trenutno, sljedeći dan ili tijekom cjeline bazirane na informacijama prikupljenih prilikom korištenja raznih strategija. Ako su informacije o učeniku i njegovom učenju prikupljene, ali ne i korištene u svrhu poboljšanja učenja i poučavanja, onda to nije formativno vrednovanje. Tada te informacije postaju informacije za informacije. Proces prikupljanja informacija o učenicima sadrži i donošenje odluka kao rezultat pažljivog proučavanja podataka koje spajaju učenje i poučavanje (Keeley, Tobey, 2011).

Neformalno formativno vrednovanje može se provoditi bilo kada kao rezultat interakcije učenik-učitelj ili učenik-učenik. Ono može obuhvatiti zasebne učenike, male grupe ili cijeli razred. Bitno je da ih učitelj prikuplja kontinuirano tijekom poučavanja i



učenja. Oni mogu biti neverbalni i verbalni te su prije svega spontani. Kod neformalnog vrednovanja od velike je važnosti koristi različite metode učenja s različitom skupinom zadataka da bi se dobilo dokaze o učenikovom razumijevanju, pomnije pratiti učenikovo ponašanje te dobivati u tom trenutku specifičnu povratnu informaciju. Naglasak je na dobivanju informacija od učenika koje prikazuju njihovo razumijevanje. Neformalno opažanje trebalo bi prikazivati faktore poput prirode učenikovog sudjelovanja u diskusiji, interpersonalne vještine rabljene u grupnom radu, točnosti učenikovih odgovora na pitanja, verbalne vještine u iskazivanju misli, stupanj znanja koji pokazuju u svojim odgovorima itd. Neformalno opažanje je nestrukturirano u smislu da nema procedura i zadanih obrazaca, no ono nije nasumično. Prvo učitelj razmatra neverbalno ponašanje, a zatim vokalne znakove poput pauzi i intonacija glasa. Tijekom prvih nekoliko školskih dana, učitelji često koriste neformalno opažanje da bi upoznali svoje učenike. Ako skupljeni podatci nisu odmah korišteni za prilagodbu poučavanja, kao posljedica se može javiti niski nivo formativnog vrednovanja. Ova opažanja učitelju daju uvid u karakteristike učenika koje treba uzeti u obzir kod načina poučavanja. Također, učitelj treba imati na umu da se kod neformalnih promatranja često javljaju greške zbog velikih razreda (McMillan, 2010). Učitelj također treba promatrati učenike i u različitim situacijama, kao na primjer, u školskom dvorištu, na izletu... Na osnovi zapažanja učeničkih stavova prema drugim učenicima i učiteljima moguće je prikupiti raznovrsne informacije o učeniku koje se mogu koristiti za poboljšanje njegovog rada (Perišić, 1988).

Prilikom poučavanja učitelj bi trebao gledati u učenike kako bi prosudio je li poučavanje prilagođeno njihovim potrebama pa ga s obzirom na njihov izraz lica može dopuniti, usporiti, ubrzati... Nevažni načini ponašanja npr. igranje predmetom, neprestano gledanje uokolo mogu biti sigurni pokazatelji učenikovog nerazumijevanja (Kyriacou, 1995). Zainteresirani izraz lica, tijelo i glava u pozi slušanja, gledanje u oči učitelja, aktivno praćenje njegovog izlaganja znakovi su koji pokazuju učeničko razumijevanje. Uz razumijevanje vezuje se i zadovoljstvo pa će zadovoljan izraz lica i iskra u očima učenika pokazivati nastavniku da ga učenik pažljivo prati i razumije. Međutim, i onda kada smo gotovo sigurni da neverbalni znaci ukazuju na razumijevanje,

nije na odmet i verbalna povratna informacija jer, iako su ti neverbalni znakovi češće značajniji od verbalnih jer su nekontrolirani, valja imati na umu da se učenici često koriste raznim tehnikama kako bi samo površno pokazali svoje razumijevanje (Bratanić, 1993). Što se tiče znakova vezanih uz govor, oni su povezani s tonom glasa, glasnoćom, pauzama, intenzitetom te ostalim aspektima koju dodaju značaj sadržaju koji je rečen. Na primjer, na temelju govora očekujemo da učenici koji su sigurni u svoje znanje i vještine budu glasniji, da govore višim tonovima i imaju brži tempo glasa, dok učenici koji nisu sigurni u svoje znanje govore tiho, sporije i s mnogo pauzi (Kyriacou, 1995). Tehnika „Semafor“ može biti efektivno mjerilo učenikova razumijevanja. S tom tehnikom učenici su naučeni kako koristiti zelene, žute i crvene kartice da bi označili shvaćanje gradiva. Crveno označava „Stani- ne razumijem“, žuto označava „nisam siguran“, a zeleno označava „Razumijem- može dalje“ (McMillan, 2010).

Jedna od ključnih komponenti uspješnog poučavanja je i provjera razumijevanja izloženog nastavnog sadržaja. Tijekom poučavanja učitelj postavlja pitanja u svrhu provjeravanja koliko su učenici razumjeli. Pri tome, trebao bi koristiti pitanja otvorenog tipa ili pitanja višeg reda (pitanja koja zahtijevaju elaboraciju, zaključivanje i kritičko prosuđivanje) jer ona produbljuju učeničko razumijevanje i potiču ih na razmišljanje. Isto tako, važno je također i osigurati ravnomjerno postavljanje pitanja svim učenicima u razredu da bi se izbjeglo ispitivanje samo onih učenika čije su ruke u zraku ili koji će znati odgovor. Tako se ne zanemaruju sramežljivi učenici kao i oni koji izbjegavaju prozivanje. U suprotnom, određeni se učenici sve više isključuju iz procesa aktivnog učenja i tako počinju zaostajati u učenju (Vizek- Vidović i sur., 2003). Učiteljev je cilj pitati pitanja tijekom poučavanja koja pružaju točne informacije o tome što učenik zna, razumije i može napraviti. Imajući to na umu, nastavnik bi pitanja trebao formulirati tako da budu jasna, tj. da učenik razumije pitanje, jer u suprotnom učenici postaju nesigurni i ne znaju što se od njih očekuje. Prilikom postavljanja pitanja, sugerira se izbjegavanje pitanja s odgovorima da/ne. Učenici kod takvih pitanja lako mogu pogoditi točan odgovor. Isto tako, odgovori na takva pitanja ne govore puno o učenikovom razumijevanju. Ipak, ako učitelj postavlja takva pitanja, dobro ja na kraju postaviti pitanje „Zašto?“ da se izbjegne mogućnost pogađanja točnog odgovora. Također,

prilikom usmenog ispitivanja učitelj može dodatno ispitivati da bi produljio početne odgovore. Takva pitanja učitelj koristi kako bi razumio kako su učenici došli do odgovora, njihovo razumijevanje te logiku njihovih odgovora. Primjeri takvih pitanja su: Kako si došao do tog zaključka?, Objasni zašto misliš da je to točno, Daj druge primjere... Tim pitanjima nastavnik potiče učenike na proširivanje razumijevanja te na razmišljanje o naučenom. Također, učitelj prije svega treba postavljati pitanja koja reflektiraju ciljeve učenja. Točnije vrednovanje učenikovog znanja postići će se i davanjem dovoljno vremena učeniku za odgovor. Učenici trebaju vremena za procesuiranje misli i formuliranja odgovora (McMillan, 2010). Dužina vremena čekanja na odgovor trebala bi ovisiti o vrsti pitanja. Ako se traže odgovori na zatvorena pitanja ili činjenice koje se automatski dozivaju iz dugoročnog pamćenja, vrijeme će biti kraće nego kod pitanja otvorenog tipa koja zahtijevaju dužu elaboraciju. Učiteljevo reagiranje na učenikov odgovor također je važno za prikupljanje informacija o učenikovom napredovanju jer učiteljev stav i pristup utječu na to i jesu li učenici voljni odgovoriti na pitanja. Svaki učenikov odgovor treba biti priznat i popraćen iskrenim povratnim informacijama i pozitivnim potkrepljenjem za točan odgovor. To ne uključuje samo pohvalu i potvrđivanje točnog odgovora nego i podržavanje kada je odgovor približno točan i kada se učenik trudio. Nasuprot tome, neprijateljski stav i omalovažavanje vjerojatno će učenike obeshrabriti za daljnje sudjelovanje (Vizek- Vidović i sur., 2003).

S druge strane, u nastavi postoji i formalno formativno vrednovanje. Formalno formativno vrednovanje je planirana aktivnost, obično za cijeli razred, koja ima specifičan slijed aktivnosti. Učenikovo znanje i razumijevanje je vrednovano te učitelj te rezultate koristi za davanje povratih informacija uenicima i planiranje poučavanja. Često se dešava da između vrednovanja i povratnih informacija uenicima prođu dani pa i tjedni ili učitelj tek na rezultatima testa koji pokriva gradivo nekoliko tjedana poučavanja saznaje što učenici nisu razumjeli. Da bi se to promijenilo, koriste se različiti tipovi formalnog formativnog vrednovanja koji se koriste za prikupljanje informacija o učenikovim postignućima. Neki od tih su: vježbe prije poučavanja, predtest, domaća zadaća, zadatci unutar nastave, kvizovi... (McMillan, 2010).

Dobar pristup vrednovanju trenutnog znanja i vještina učenika prije početka formalnog poučavanja je dizajniranje neformalnih vježbi koje će pružiti učitelju mogućnost nadziranja učenika u kontekstu specifične situacije. Te vježbe nisu poput formalnog predtesta, ali su više strukturirane od neformalnog promatranja. Takve aktivnosti mogu biti na primjer, pisani zadatci, grupni rad, usmena prezentacija... Na primjer, učitelj može učenicima zadati da napišu kako su proveli ljetne praznike ili da intervjuiraju jedni druge o tome te to kratko prezentiraju. Igre također mogu biti korištene i za proučavanje učenikovih matematičkih sposobnosti. Te aktivnosti nisu dovoljne učitelju za planiranje poučavanja, no informacije koje dobiva o učeniku iz tih aktivnosti pomažu mu graditi sliku o učeniku (McMillan, 2010). Prije početka poučavanja neki učitelji daju učenicima inicijalne ispite koji bi trebali inducirati što učenici znaju i što mogu, odnosno ne mogu učiniti. Na primjer, prije obrade racionalnih brojeva u šestom razredu osnovne škole učitelj može provjeriti koliko učenici razumiju koncept razlomka. Uspoređivanjem inicijalnog testa i testa nakon obrađene cjeline, učitelj može vidjeti što su učenici novo naučili. Učenicima inicijalni test daje pregled što se od njih očekuje te im pomaže u fokusiranju svojeg učenja na bitne dijelove nastavnog sadržaja. No, malo je vjerojatno da će informacije dobivene iz inicijalnog ispita biti korisne u planiranju poučavanja jer je često teško motivirati učenika da daju sve od sebe na tim ispitima. Također, da bi inicijalni ispit bio koristan za dijagnozu, on bi trebao biti prilično dug i detaljan. Ako želimo da inicijalni ispit ipak bude uspješan, treba biti kratak i ciljan na specifična znanja i vještine. Učenike pritom treba motivirati te im naglasiti da je namjera inicijalnog ispita da oni više nauče te da učitelj bolje isplanira poučavanje (Kelly).

Jedan od načina formalnog formativnog vrednovanja je i domaća zadaća. Domaća zadaća važna je povratna informacija koja pokazuje kako učenik radi bez tuđe pomoći. Posebice je korisna i za razvitak učničkih organizacijskih sposobnosti i radnih navika. Domaća zadaća može biti dobar pokazatelj učničkih poteškoća koje je možda teže uočiti u razredu. U tom smislu, domaća zadaća se može koristiti u dijagnostičku svrhu za utvrđivanje specifičnih područja i znanja koja trebaju dodatnu pažnju. Primarni razlog domaće zadaće za većinu učitelja je pružanje više vježbe i apliciranje znanja i

vještina, no također se koristi i za proširivanje učeničkog znanja (Kyriacou, 1995). Izrada domaće zadaće pozitivno djeluje na ishode učenja ako je povezana s nastavnim sadržajem, uključena je u ocjenu, potiče dubinsku obradu nastavnog sadržaja, kraćeg je opsega, omogućuje postizanje uspjeha te je redovito pregledana (Vizek- Vidović i sur., 2003). Domaća zadaća ima važnu ulogu pri usvajanju novih sadržaja pa zato njezina izrada treba biti stalna navika učenika. Ta će se navika prirodnije razvijati ako se pri zadavanju zadaće nastoji smanjiti faktor prisile. To se može postići primjerenim izborom zadataka. Osim tradicionalnih načina izbora zadataka, učitelj može izabrati zadatke kojima težina postupno raste. Isto tako, učenici sami mogu birati zadatke koje će riješiti ili mogu sami sastavljati zadatke. Predmet vrednovanja mogu biti i originalnost rješenja, primjena novih metoda, rješavanje težih zadataka ili sastavljanje zadataka od strane učenika (Kurnik, 2007).

Kroz korištenje različitih razrednih zadataka učitelji su u mogućnosti dobiti povratnu informaciju o učenju učenika iz više perspektiva čime se povećava valjanost njihovih zaključaka o tome što učenici znaju, razumiju i mogu napraviti. Putem individualiziranih aktivnosti učitelji mogu promatrati učenikove izvedbe te pružiti trenutnu specifičnu povratnu informaciju. Individualizirani rad može pridonositi formativnom informiranju tako dugo dok postoje česte povratne informacije i mogućnost učeničkog samovrednovanja<sup>4</sup>. Da bi učitelji koristili individualni rad za formativno vrednovanje, učenici i učitelji moraju biti aktivno uključeni (McMillan, 2010). Odabrane aktivnosti trebaju pružiti korisne informacije učiteljima za donošenje odluka u poučavanju, no također trebaju biti osmišljene tako da aktiviraju i produbljuju učeničko znanje. Dakle, takve aktivnosti ne bi trebale biti samo za saznavanje što učenik zna, već trebaju promovirati i učenje (Tobey, Keeley, 2011).

Učitelji kvizove i kratke testove koriste i u formativne i u sumativne svrhe. Sa formativnog stajališta kviz je strukturirani proces koji provjerava učenikovo učenje specifičnih vještina i standarda koji su dio općenitijeg cilja veće nastavne cjeline.

---

<sup>4</sup> Pojam učeničkog samovrednovanja detaljnije će biti opisan u poglavlju 2.7.

Kvizovi su većinom objektivni te im je svrha da brzo pokazuju učitelju trenutna znanja i vještine. Te informacije se tada odmah mogu koristiti za individualizaciju poučavanja, grupiranja manjih grupa, pružaju mogućnosti za nastavne korekcije koje će ukloniti manjkavosti u učenju te potiču učenike na postizanje sljedeće razine učenja. Ovo je relativno nov razvoj u vrednovanju, no postat će sve više popularan jer je njime relativno lako prikupiti informacije o učenikovim znanjima (McMillan, 2010).

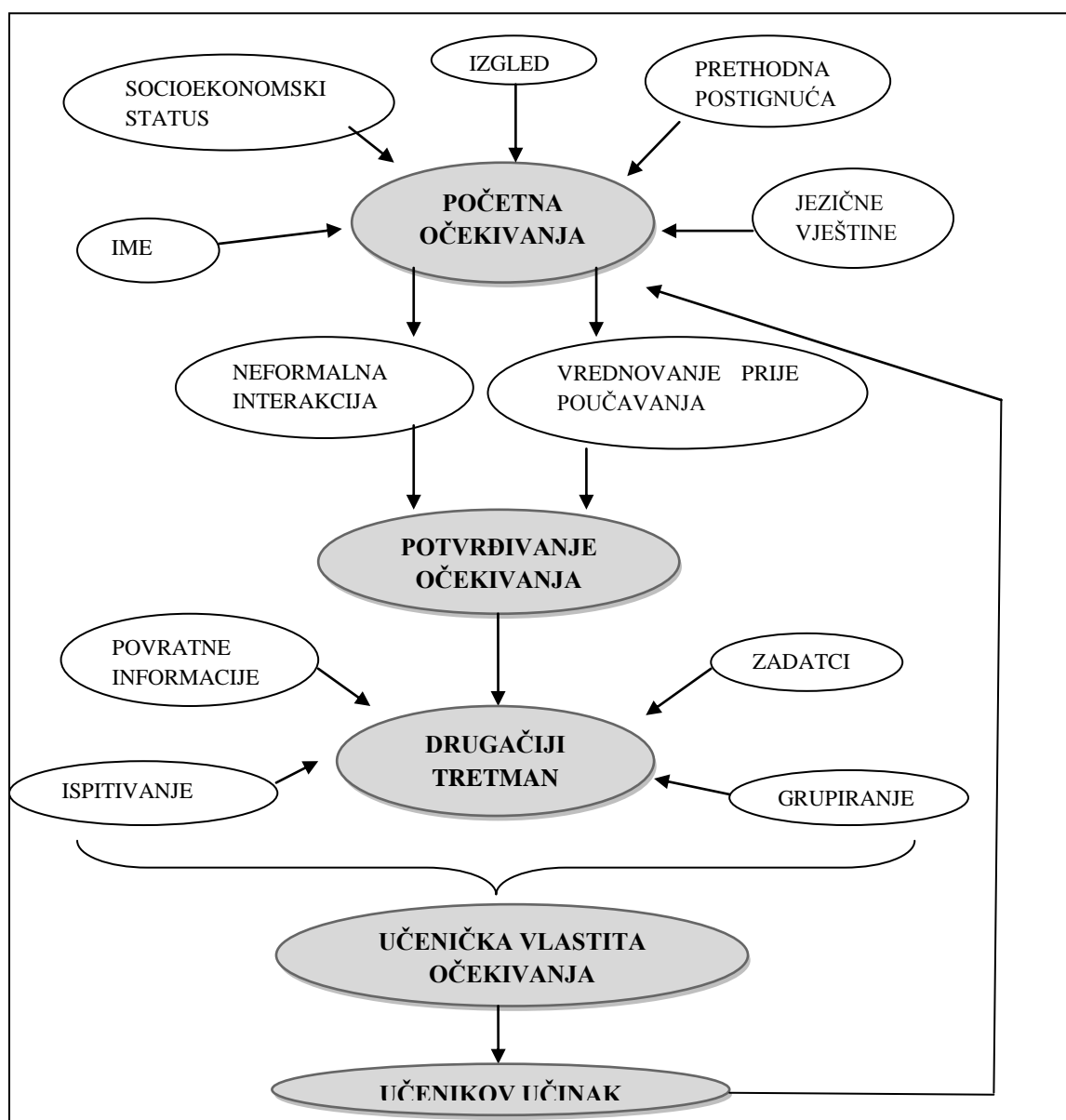
Obrazovnu tehnologiju u suvremenoj školi posebno je obogatila informatička tehnološka revolucija primjenom računala i korištenjem svjetske mreže računala (Internet). Njihova primjena znatno može utjecati na organizaciju odgojno–obrazovnog procesa, osposobljenost i pripremanje učitelja te aktivnost učenika u učenju (Cindrić, Miljković, Strugar, 2010). Relativno novi tip strukturirane aktivnosti, često korišten u sistemu razredne reakcije, je korištenje tehnologije za utvrđivanje učeničkog razumijevanja tako da učenici odgovaraju na pitanja preko tipkovnice, tableta, mobitela... Učitelj prezentira materijale učenicima, učenici odgovaraju na pitanja elektronički što pomaže učitelju da direktno provjeri znanje učenika. Također, učitelj može dati i učenicima da i sami, u manjim grupama, diskutiraju rezultate. Takvi sistemi potiču učenikov angažman i sudjelovanje (McMillan, 2010). Takova tehnologija zgodan je alat za brzu provjeru znanja s veoma brzom analizom podataka. Učenici pristupaju pitanjima pomoću mobitela ili računala tako da učitelj bez dodatnih troškova i u kratkom vremenu vidi tko je najbrži i koliko je točnih odgovora. Isto tako, učitelji lako mogu usporediti odgovore te raditi tablice ili grafički prikazivati rezultate koji će koristiti i kasnije za daljnje analize (Veža, 2015).

#### **2.4. Očekivana učenikova postignuća (ishodi učenja)**

Kod prikupljanja informacija o učenicima, bilo to pomoću formativnog ili sumativnog vrednovanja, učitelji često formiraju očekivanja o tome što učenici trebaju postići. Učiteljeva očekivanja su vjerovanja o tome što su učenici sposobni učiniti i znati. Početna očekivanja mogu bazirana su na informacijama o učeniku prije

upoznavanja, odnosno prilikom početnog upoznavanja. Ta početna očekivanja bazirana su na socioekonomskom statusu, prethodnim postignućima na testovima, izgledu, imenu, spolu jezičnim vještinama i sl. te mogu utjecati na sve slijedeće interakcije i na strukturu vježbi kojima se ona utvrđuju. Te informacije mogu voditi do potvrđivanja očekivanja te tako utjecati na vezu učenik-učitelj pa učenik ostvaruje vlastita očekivanja i učinke. Ti učenikovi učinci potvrđuju tada početna očekivanja. Taj krug prikazan je na Slici 2. (McMillan, 2010).

Slika 2. Model učiteljeva očekivanja (McMillan, 2010).



Očekivana učenička postignuća (ishodi učenja) predstavljaju jasno iskazane kompetencije, tj. očekivana znanja, vještine i sposobnosti te vrijednosti i stavove koje učenici trebaju steći i moći pokazati po uspješnom završetku određene nastavne teme, programa, stupnja obrazovanja ili odgojno–obrazovnog ciklusa. Ona jasno pokazuju što učenici trebaju znati i biti u stanju učiniti, ali i način na koji će pokazati stečeno znanje, vještine i stavove. Ishodi učenja usmjereni su na učenike i njihove aktivnosti zbog čega se uvijek iskazuju aktivnim glagolima. Također, valja ih uvijek pisati kao mjerljive aktivnosti te je dobro izbjegavati duge i složene tvrdnje, nepoznate riječi te preopćenite glagole. Očekivana postignuća trebaju obuhvatiti znanja, vještine, vrijednosti i stavove, trebaju biti povezana s ciljevima i sadržajem te trebaju biti praćena prikladnim kriterijima vrednovanja prema kojima tada učitelj može utvrditi jesu li očekivanja ostvarena (Soldić, 2014). Kada učitelj formira očekivanja, bitno je da ih formira na početku godine, da s učenicima razgovara o njima te uvažava i njihova očekivanja. Učitelj se drugačije ponaša prema učenicima, u skladu s očekivanjima, a očekivanja učeniku pokazuju što se od njega očekuje te kako se treba ponašati. Za učitelja je također važno prikupiti što više informacija o učeniku prije formiranja očekivanja tako da ona budu ostvariva. Promatranja u razredu i učenikove izvedbe učitelju najviše pomažu kod formuliranja očekivanja. Standardizirani testovi i drugi slični izvori informacija također pomažu jer su neovisni o subjektivnom učiteljevom mišljenju. Na taj način učitelj stvara realna očekivanja koja mu tada pomažu u boljem planiranju poučavanja te pomaže u provođenju odgovarajućeg vrednovanja učenika (McMillan, 2010).

Ishodi učenja bitni su učiteljima i roditeljima. Učiteljima pružaju jasnu osnovu za odabir tome što će poučavati, koje će metode pritom primjenjivati, kako će definirati ispitne zadatke te kako će vrednovati ostvarenost kurikuluma. Roditeljima ona omogućuju stjecanje jasne slike o tome koju dubinu znanja, vještina i vrijednosti će djeca moći steći te im omogućuje uspješno pomaganje i praćenje napredovanja njihovog djeteta (Soldić, 2014).



Očekivanje postignuća nastavnik priopćuje verbalnim, ali i neverbalnim sredstvima, kao na primjer, pisanim ocjenama, usmenim priopćenjima ili tjelesnim držanjem i mimikom. Očekivana učenikova postignuća trebaju stvoriti poticaj za učenje te učitelj treba individualno zahtijevati i od boljih i od slabijih učenika njihovo ostvarivanje. To je jedino moguće ako učenici dobro shvaćaju što je učitelj zamislio. Zato je bitno jasno formulirati očekivana postignuća, tj. učitelj treba raspravljati s učenicima o svojim očekivanjima. Tijekom nastave, učenici u svakom trenutku trebaju znati koji je njihov zadatak te trebaju biti informirani o stupnju težine zadataka. Kod provjere postignuća, dobro je primjenjivati različite oblike provjere te svoje povratne obavijesti o postignućima objašnjavati jasnim riječima (Meyer, 2005).

Ishodi učenja razrađuju se na više razina detaljnosti: stupanj obrazovanja, odgojno-obrazovni ciklus, godina učenja, sadržajna cjelina, sadržajna tema, sadržajna jedinica, učenička aktivnost te vanjsko vrednovanje. Ostvarivanjem ishoda učenja tijekom obrazovanja učenik stječe kompetencije za nastavak obrazovanja, aktivno građanstvo te zapošljavanje. Kompetencija je dinamička kombinacija kognitivnih i metakognitivnih vještina, znanja i razumijevanja, međuljudskih, intelektualnih i praktičnih vještina te etičkih vrijednosti koja osobi pruža mogućnost odgovora na zahtjeve koji su bitni za neku funkciju ili ulogu (Popham, 2007). Ključne kompetencije koja navode dokumenti Europskog parlamenta (Preporuka Europskog parlamenta i savjeta o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje, 2006) su:

- komunikacija na materinjem jeziku
- komunikacija na stranom jeziku
- matematička kompetencija i temeljne kompetencije u prirodnim znanostima i tehnologiji
- digitalna kompetencija
- kompetencija učenja
- društvena i građanska kompetencija
- smisao za inicijativu i poduzetništvo
- kulturološka senzibilizacija i izražavanje.

Matematička kompetencija odnosi se na osposobljenost učenika na razvijanje i primjenu matematičkog mišljenja u rješavanju problema u nizu različitih svakodnevnih situacija („Nacionalni okvirni kurikulum“, 2011). Potrebna znanja u matematici jesu dobro poznavanje brojeva, mjera i struktura, osnovnih operacija i matematičkog prikazivanja, razumijevanje matematičkih izraza i pojmova te osjećaj na koja pitanja matematika može dati odgovor. Pojedincu je potrebno vještina primjena matematičkih načela svakodnevno u životu. Isto tako, potrebno je i matematički rasuđivati, razumjeti matematičke dokaze, komunicirati matematičkim jezikom te se koristiti odgovarajućim pomagalicama. Pozitivan stav prema matematici zasniva se na poštivanju istine i volje za pronalaženjem argumenata i procjenjivanjem njihove valjanosti (Cindrić, Miljković, Strugar, 2010).

Kompetencije koje učenik treba usvojiti nakon određenog razdoblja poučavanja opisane su i u ciljevima učenja. Ciljevi učenja pisani su za učitelja te opisuju svrhu i očekivane rezultate učeničkih aktivnosti u procesu učenja. Opisuju i vještine kojima učenik treba ovladati, ali gledano od perspektive učitelja. Kada su specifični ciljevi učenja opisani u terminima očekivanih učeničkih postignuća umjesto u terminima učiteljevih namjera, tada govorimo o ishodima učenja (Soldić, 2014). Ciljevi učenja mogu biti unutarnji ili vanjski. Unutarnji ciljevi odnose se na promjene koje bi se trebale dogoditi unutar učenika. One utječu na njegov osobni razvoj, a ostvaruju se učenjem. Vanjski ciljevi učenja su učinci odgoja i obrazovanja, odnosno one promjene u okruženju koje su rezultat naučenih ponašanja. Naučenom se osposobljenošću uspješno djeluje na obrazovanje, proizvode u gospodarstvu, kulturi... Tek zadovoljavanjem unutarnjih i vanjskih ciljeva obrazovanja zadovoljavaju se pojedinačne ljudske potrebe i potrebe društvenih skupina. Ciljevi odgoja i obrazovanja trebaju odgovoriti na sljedeća pitanja: Po čemu se razlikuje učenik prije i poslije učenja?, Što će učenik nakon učenja moći napraviti, a prije nije mogao?, Kako ćemo znati je li učenik doista naučio ono što je predviđeno ciljevima? (Cindrić, Miljković, Strugar, 2010).

Budući da se društvene vrijednosti stalno mijenjaju, potrebno je trajno preispitivati ciljeve odgoja i obrazovanja. Alati koji pomažu pri konstrukciji ciljeva

učenja su taksonomije misaonih procesa. Najpoznatije su Bloomova i Coxova koje su opisane u prošlom poglavlju (Cindrić, Miljković, Strugar, 2010). Isto tako, ciljeve učenja mogu se dijeliti na minimalne i prosječne. Minimalni ciljevi postavljaju se na razini države te moraju biti takvi da ih postiže više od 95% učenika. Prosječni ciljevi obično su navedeni u kurikulumima (Popham, 2007).

Nacionalni okvirni kurikulum (str.115.) navodi ciljeve učenja matematičkog obrazovanja na razini odgojno – obrazovnog ciklusa. To su:

Učenik/ca će:

- prepoznati i razumjeti povijesnu i društvenu ulogu matematike u znanosti, kulturi, tehnologiji te privatnom i profesionalnom životu
- usvojiti temeljna matematička znanja i vještine te ih primjenjivati u privatnom, društvenom i budućem profesionalnom životu
- razviti matematički način mišljenja i komunikacije
- razviti pozitivan odnos prema matematici i svijest o vlastitom matematičkom umijeću
- steći temelje za cjeloživotno učenje i nastavak matematičkog obrazovanja
- učinkovito primjenjivati tehnologiju.

U Nacionalnom okvirnom kurikulumu ističu se dvije dimenzije matematičkog obrazovanja: matematički procesi i koncepti. Matematički procesi opisuju kognitivne sposobnosti i vještine koje učenici trebaju razviti u odgojno–obrazovnom procesu, dok matematički koncepti definiraju najvažnije matematičke sadržaje. Matematički procesi su: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije. Matematički koncepti su: brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje, podatci te infinitezimalni račun („Nacionalni okvirni kurikulum, 2010, str.116.).

Primjer očekivanih učenikovih postignuća u nastavi matematike za temu

Razlomci (5. razred):

Učenik/ca:

- prikazuje razlomke pomoću konkretnih modela grafički, riječima i simbolima

- s lakoćom prelazi iz jednog prikaza razlomka u drugi
- samostalno po veličini reda niz razlomka koji u sebi sadrži različite kombinacije uvjeta
- uz dani razlomak može pronaći i iskazati cijeli niz njemu ekvivalentnih razlomaka
- prikazuje svoj rad jasnim i s potpunim objašnjenjima
- precizno upotrebljava matematički jezik vezan uz razlomke
- radi u skupinama uz razmjenu ideja, mišljenja i stavova.

## **2.5. Poticajne povratne informacije**

Jedan od načina kako učitelj može koristiti informacije prikupljene kod vrednovanja je da daje odgovore učenicima nakon što oni pokažu svoja znanja i vještine. Taj učiteljev odgovor naziva se povratna informacija - prijenos informacija od učitelja do učenika prateći vrednovanje. Povratne informacije mogu biti dane na razne načine, u različito vrijeme, ali se mogu razlikovati i sadržajno. Kada su dane u obliku ocjene, one su ograničene te ne pokazuju učeniku kako da poboljša svoj rezultat. Često učitelji kao rezultat pisanog ispita znanja učenicima kažu što su točno riješili, a što su pogriješili, ili, kod usmenog odgovaranja učitelj odgovara učenicima s „dobro“, „to je točno“, „blizu“... Povratne informacije tog tipa su samo jedan dio potvrđivanja učenikovog učenja, no, učenici također trebaju znati kako njihovo izvođenje komparira ciljevima učenja te što trebaju učiniti kako bi postigli te ciljeve. Kada učitelj kaže što je učenik pogriješio i na čemu treba još poraditi i na koji način će to postići, tada je ta povratna informacija efektivna. Povratne informacije su efektivne ako se daju tijekom i nakon poučavanja. Kada su povratne informacije dane kao informacije koje smisleno vode učenike u konstruiranju dodatnog znanja i razumijevanja, unutarnja motivacija i motivacija za učenje su pojačane (McMillan, 2010). Povratnu informaciju treba davati više puta tijekom procesa učenja te je učenik mora znati upotrijebiti za daljnje učenje. Ona također mora biti usmjerena prema određenim kvalitetama učeničkog rada te mora sadržavati što još je potrebno unaprijediti. Pri tome, valja izbjegavati uspoređivanje s drugim učenicima. Povratna informacija smatra se učinkovitom ako usmjerava pozornost

učenika prema napretku te mu daje osjećaj učinkovitosti. Svrha povratne informacije je unapređenje rada učenika. Učinkovita povratna informacija je korektna i pravovremena. Isto tako, pisana povratna informacija je učinkovitija od usmene jer se učenik na nju može osvrnuti i kasnije. Povratnom informacijom učitelj treba kakvo je znanje učenika s obzirom na ciljeve i standarde te ona mora biti izražena konkretnim izrazima (Penca Paličić, 2008). Poželjno je da povratna informacija započne s pohvalama i naglaskom na ono što je učenik dobro uradio, zatim valja prijeći analizu grešaka te završiti sugestijama kako ispraviti te greške. Pohvala pomaže učeniku u uočavanju koji elementi u njegovom radu su dobri, dok kritika treba pokazivati načine na koje učenik može ispraviti greške (Kuleto, 2013). Da bi vrednovanje bilo dio učenja, bitno je da su prisutne poticajne povratne informacije. Učitelj ne bi trebao trošiti energiju samo na pomaganje učenicima da shvate nešto ili na ukazivanje greški, već bi pažnju trebao usredotočiti i na potrebe učenika za napredovanjem. Učenicima su potrebne povratne informacije koje im kazuju što su učinili dobro, koje im pomažu u shvaćanju gdje su pogriješili te iz kojih mogu saznati što trebaju učiniti kako bi napredovali. Poticajne povratne informacije trebaju biti detaljne, pravedne i izazovne (Brown, 2004/2005). No, isto tako, postoje i limiti specifičnih povratnih informacija. Moguće je pružati toliko specifičnih povratnih informacija koje previše toga daju ili su preteške za razumjeti. Korisna povratna informacija nije niti pregeneralna niti prespecifična. Negdje između toga može pomoći učeniku da se kreće naprijed. Na primjer, ako učitelj vrati test s komentarima o svakom paragrafu ili rečenici, učeniku je teško raspoznati važnije stvari. Ne samo da to učitelju uzme puno vremena, nego nije niti toliko efektivno kao da učitelj uzme nekoliko ključnih paragrafa i rečenica te daje specifične komentare. Povratne informacije bi se trebale razlikovati ovisno i o predmetu koji se uči jer povratne informacije nisu jedinstveni proces te postoje razlike u pojedinim predmetima. Čak i u više razrednih odjela s istim ciljem učenja mogu stimulirati drugačiji tip povratne informacije baziran na tome što se događa u pojedinom razredu. Matematika i prirodne znanosti imaju relativno jasan put napretka učenja i razumijevanja dok društvene znanosti i jezici imaju naglasak na idejama i kreativnosti. No, bez obzira na predmet, učitelji donose odluke o tome kada dati povratne informacije, kako će izgledati i kako će pomoći učenicima da nauče više (McMillan, 2010).

Konstruktivne povratne informacije učenicima valja dati kao podršku i kao poticaj za napredak. Takve povratne informacije pokazuju učenicima da se njihov rad prati i da je učitelju stalo do njegovog napretka. Zato dobre povratne informacije znače poticaj učenikovoј motivaciji i zalaganju (Kyriacou, 1995). No, valja imati na umu da povratne informacije ne moraju nužno utjecati pozitivno na učenikovo učenje. Zato povratne informacije trebaju biti pažljivo napravljene tako da učenikovu pažnju usmjeravaju na „što dalje" umjesto na ono što je već postignuto. Dobre povratne informacije trebale bi kod učenika poticati kognitivne reakcije prije nego emocionalne (Popham, 2013). Dakle, važno je imati na umu opasnosti do kojih se može doći ukoliko povratne informacije nisu poticajne. Neki učenici iz svojih povratnih informacija mogu zaključiti da zaostaju za svojim kolegama ili za nekih standardima pa se mogu uzrujati i obeshrabriti. Isto tako, važno je imati na umu da postupci za vrednovanje napretka ne oduzimaju previše vremena te da povratne informacije ne budu previše birokratske za učenike. Dakle, umijeće pružanja povratnih informacija je prilično složeno te je potrebna vježba da je se stekne. Osjetljivost na učenikove osjećaje smatra se važnim dijelom davanja poticajnih povratnih informacija. Važno je davati povratne informacije na neprijeteći način te govoriti s puno razumijevanja. Isto tako, bitno je ne svaljivati krivnju na učenika (Kyriacou, 1995). Povratne informacije su efektivne ako učenici uče, motivirani su za učenje, vjeruju da mogu učiti i žele učiti, a razred postaje mjesto gdje su povratne informacije vrijedne i produktivne (Brookhart, 2008).

Proces poučavanja uvelike ovisi o učenicima i kontekstu stoga efektivne povratne informacije nisu jednostavno davati. Postoje mnogi načini kako, kada i koliko dati povratnih informacija učenicima, što ovisi o ciljevima učenja i karakteristikama učenika. Dakle, efektivne povratne informacije su promjenjive - što je efektivno jednom učeniku, ne mora nužno biti i efektivno drugome. Prije svega, bitno je dati povratne informacije koje potiču učenika na učenje i motivaciju (McMillan, 2010).

Neki od savjeta kako davati povratne informacije koje daju Penca Palčić (2008) i McMillan (2010) nalaze se u Tablici 3.

Tablica 3. Poticanje povratne informacije (prilagođeno prema McMillan,2010 i Penca Palčić, 2008).

| <b>Što raditi</b>  | <b>Što ne raditi</b>   |
|--|--|
| <b>postavljati izazovne ciljeve</b>                              | postavljati ciljeve koji su nedostižni ili prelagani za postizanje |
| <b>davati informacije koje su razumljive</b>                     | davati povratne informacije koje je teško razumjeti                |
| <b>uspoređivati učenikove mogućnosti prijašnjim postignućima</b> | uspoređivati učenikova postignuća s drugim učenicima               |
| <b>davati informacije što prije</b>                              | davati kasne povratne informacije                                  |
| <b>davati informacije u skladu s sposobnostima</b>               | koristiti iste povratne informacije za sve učenike                 |
| <b>fokusirati se na ključne greške</b>                           | ignorirati ključne greške  |
| <b>davati povratne informacije za vrijeme učenja</b>             | davati povratne informacije nakon postignuća                       |
| <b>omogućiti učeniku samovrednovanje</b>                         | ne omogućiti učeniku samovrednovanje                               |
| <b>ukazivati učeniku na njegova moćna područja</b>               | tražiti slaba mjesta i pogreške                                    |

Postoje razni tipovi povratnih informacija. Jedan od tih tipova je usmjerenost cilju. Povratna informacija koja je usmjerena cilju pruža informacije o učenikovom napretku prema dostizanju specifičnih ciljeva učenja. Pritom je važno da ciljevi budu izazovni, ali dostižni, tj. da učenik ima očekivanje da može ostvariti taj cilj. Ciljevi koji su previsoki, promovirat će više neuspjeha i obeshrabit će učenike, dok ciljevi koji su preniski neće rezultirati povećanjem efektivnosti. Srednje teški, ostvarivi ciljevi, utječu na povećanje motivacije. To se posebno postiže ako je povratna informacija usmjerena većem, dubljem svladavanju i razumijevanju nego dobivanju točnog odgovora (Shute, 2007).

U svrhu poboljšanja učeničkog učenja, učitelj može rastaviti veće zadatke na manje podzadatke te komunicirati s učenicima o načinima na koje mogu postići veće

ciljeve. Učitelj učenicima daje upute, strategije, materijale, sugestije kao potporu na koji način da razmišljaju o problemu. Učitelj daje te upute sve dok učenik sam ne dođe do točnog zaključka ili rješenja. Pomoć se smanjuje kako učenici napreduju u učenju (Finn, Metcalfe, 2010). Iako je mnogo razina i tipova pomoći, elementi postavljanja tih razina koji su bitni za povratne informacije sadrže naglasak na ostvarivim, sekvencijalnim koracima te je cilj toga da postepeno prenose odgovornost za učenje s učitelja na učenika. Povratne informacije pritom su fokusirane na vještine koje su malo iznad učenikovih mogućnosti sa usmjeravanjem na to da učenici žele naučiti više. Taj se princip temelji na radu Lava Vygotskog u kojem se učitelji usmjeravaju na vještine koje su unutar učenikovih mogućnosti te potiču učenike na postizanje većih ciljeva učenja (McMillan, 2010).

Također, postoji i vrsta povratne informacije koja uspoređuje učenikov rad s prethodnim učincima. One opisuju učenikov napredak ili poboljšanje strategija učenja koje koristi učenik. Na primjer, izjavom „Vidim da si ovaj put provjerio točnost rezultata“ učitelj ističe učenikovo poboljšanje u radu. Takve povratne informacije korisne su slabijim učenicima jer im pokazuju da i oni mogu napraviti napredak (Brookhart, 2008). Pokazujući učenicima kako napreduju u odnosu na ono što su prije postigli pomaže im da vide napredak koji su postigli. Fokus je na tome kako rad nadograđuje prijašnja znanja, poticanju učenika da vjeruju da su sposobni za sljedeći korak u učenju te definiranju što dalje trebaju raditi. Kada učenici riješe neki zadatak, oni često misle o tome zašto su bili uspješni, odnosno neuspješni. Motivacija će biti poboljšana ako učenici vjeruju da su bili uspješni zbog napora koji su uložili. To je jako bitno za učenike s niskim samopouzdanjem koji često misle da je razlog njihovog postignuća nešto što nije u njihovoj kontroli (McMillan, 2010).

Efektivan način davanja povratnih informacija koje potiču učenike na postizanje viših ciljeva u učenju je i uspoređivanje učenikovih postignuća sa standardima. Takve povratne informacije pomažu učenicima u odlučivanju koji sljedeći cilj trebaju postići. One nastoje odgovoriti na pitanja: Koji cilj učenici trebaju postići?, Koliko su učenici blizu postizanja cilja?, Koliko su se u promatranoj aktivnosti približili



cilju? (Brookhart, 2008). Isto tako, pomažu učenicima uočiti u kakvom su odnosu njihova prethodna postignuća s kriterijima koji demonstriraju ciljano učenje. Naglasak je na pokazivanju učenicima kako njihov prijašnji rad komparira s kriterijima i standardima radije nego s prijašnjim postignućima i postignućima drugih učenika. Dakle, za učenike je jako važno da dobro poznaju kriterije kojima teže. S druge strane, postoje i one povratne informacije koje uspoređuju postignuća učenika s postignućima drugih učenika. To može biti usporedba s ostalim učenicima u razredu ili s učenicima u prijašnjim razredima. Generalno, takve povratne informacije su obeshrabrujuće, pogotovo za slabije učenike i učenike s poteškoćama. Razlog tomu je što takve povratne informacije mogu kod učenika stvoriti osjećaj da nije sposoban ostvariti ciljeve. No, učenike s visokim sposobnostima one mogu motivirati (McMillan, 2010).

Dva su načina davanja povratnih informacija: usmeno i pismeno. Usmena povratna informacija je potrebna kada učitelj kruži i nadgledava samostalan učenički rad i vidi prilike za efektivnu povratnu informaciju. Usmena povratna informacija efektivnija je za mlađe učenike. Pisana povratna informacija najefektivnija je kada se trebaju pružiti specifični komentari na učeničkim testovima i provjerama. Pisana povratna informacija također pruža komentare koje učenici mogu sačuvati i koristiti kasnije (McMillan, 2010). Neke povratne informacije mogu biti dane i u razgovoru s učenicima. Na primjer, radije nego da učitelj kaže učeniku što je primijetio u njegovom radu, učitelj može započeti razgovor pitanjima poput: Jesi li što primijetio u svojem radu?, Je li te što iznenadilo?... Odluka o tome dati povratnu informaciju usmeno ili pismeno trebala bi biti bazirana na učeničkim sposobnostima, odnosno dobi učenika. Razgovor s učenicima je ponekad bolji, no često učitelj nema vremena razgovarati sa svakim učenikom. Što se tiče pisane provjere, ona ne bi trebala biti predugačka jer time gubi efektivnost. Isto tako, u pisanoj provjeri bitno je odabrati prave riječi i fraze koje pokazuju poštovanje prema učeniku. Također, treba koristiti jednostavne riječi i strukture rečenice koje su na razini učeničkog razumijevanja (Brookhart, 2008).

Povratna informacija je dana ili pojedincu ili grupi. Povratna informacija dana pojedincu utjecajnija je jer učenik dobiva osjećaj da je učitelju stalo do njega te da prati

njegov napredak. No, davanje pojedinačne povratne informacije svakom učeniku u većim razredima može biti naporno (Brookhart, 2008). Zato, kada je ista poruka korisna mnogim učenicima, grupna povratna informacija je korisnija. Često učitelji uočavaju da više učenika ima problema kod rješavanja individualnog rada te će tada prekinuti njihov rad i dati objašnjenje ili grupnu povratnu informaciju. Bilo bi neprikladno zaustaviti individualni rad i davati grupnu povratnu informaciju ako samo dvoje ili troje učenika treba pomoć (McMillan, 2010).

Dakle, povratna informacija mora učeniku pokazivati što se, odnosno što se nije dogodilo u učenju. Treba opisivati aktivnost pomoću korištenja specifičnog i konkretnog jezika te treba pomoći učeniku u pozitivnom reagiranju na dobre stvari u svom radu, u prihvaćanju prijedloga za poboljšanje svog rada, ispravljanju greške te u shvaćanju kako ubuduće može promijeniti svoj način rada (Penca Palčić, 2008).

## **2.6. Suvremeni trendovi u vrednovanju i poučavanju**

U današnje vrijeme još uvijek u procesu praćenja i vrednovanja ostvarenosti zadataka nastave dominira orijentacija na provjeru znanja. Slika o učeniku stvara se na temelju uspjeha na ispitima znanja na kojima je još uvijek naglasak na kognitivno područje. Nastava orijentirana na učitelja, nastavne situacije u kojima učenici sjede i slušaju najmanje je zanimljiva današnjim učenicima te nije pogodna za pripremanje učenika na budućnost. Nastava treba omogućiti i stjecanje vještina i sposobnosti te se trebaju stvoriti uvjeti za upoznavanje i usvajanje osnovnih vrijednosti. Danas mnogo više nego prije škola treba učenike osposobiti za samostalno učenje. Na ostvarivanju tog cilja trebaju se angažirati svi učitelji te spoznati da cjeloživotno učenje treba imati sve veću ulogu u obrazovanju (Matijević, 2004).

U današnje vrijeme, uloga učitelja je da vodi učenike kroz proceduralno i konceptualno učenje; da im pruža pomoć u korištenju strategija koje koriste da bi razumjeli koliko dobro uče. Kao rezultat, učenici postaju svjesniji procesa učenja i

preuzimaju veću odgovornost za svoje učenje. Učenici dakle, igraju aktivnu ulogu u procesu učenja. Isto tako, uče koristiti razne strategije koje im pomažu da mijenjaju vlastito učenje i vrednuju u kojoj mjeri su postigli ciljeve učenja (Keeley, Tobey, 2011).

U svim nastavnim predmetima učenici trebaju upamtiti neke važne informacije, no na učiteljima je da procjene koje informacije treba upamtiti, a za koje je dovoljno znati gdje se nalaze kako bi ih iskoristili za određene svrhe, na primjer, pamćenje formula. Mnogo je korisnije znati formule primijeniti i koristiti ih za rješavanje određenih problema. Da bi učenici postigli te ciljeve, trebaju se desiti prilagodbe u nastavi i učenju. Jedna od komponenti formativnog vrednovanja je da pruža učenicima prilagodbe u poučavanju koje će im pomoći da ostvare ciljeve učenja te da smanje razliku između trenutnih postignuća i onoga što je specifično u ciljevima učenja. Kada je cijeli razred efektivno nadgledan, učitelj može odlučiti usporiti, ubrzati ili isprobati nove prilagodbe u poučavanju za cijeli razred, grupe učenika ili individualno (McMillan, 2010).

Šezdesetih godina dvadesetog stoljeća Benjamin S. Bloom uvodi koncept *učenje za majstorsko učenje*. Cilj majstorskog učenja je promijeniti prevladavajući pogled na obrazovanje u kojem je poučavanje jednako za sve učenike što rezultira razlikama u učeničkim postignućima. Majstorsko učenje temelji se na ideji pružanja učenicima više od jedne šanse u demonstriranju vještina i koncepata. U majstorskom učenju, kao i u tradicionalnom, učenici su poučavani, a zatim rješavaju ispit znanja kako bi utvrdili svoje razumijevanje. No, u majstorskom učenju tu nije kraj. Učitelj na temelju vrednovanja rezultata ispita odlučuje tko je svladao koncept, a tko još treba pomoć. Novo poučavanje radi se na drugačiji način, nakon kojeg učenici opet rješavaju ispit znanja. Prednost majstorskog učenja je da svi učenici mogu učiti i razvijati se te nitko ne zaostaje. Ono se ne bazira na kontekstu, već na procesu. Tijekom majstorskog učenja, učenici primaju povratne informacije o napretku kontinuirano tijekom poučavanja koje im pomažu u identificiranju što su naučili, a što još trebaju svladati (Share, 2010). U majstorskom učenju poučavanje se razlikuje kako bi učenici postigli ujednačene ciljeve, tj. takvo poučavanje postiže da sva djeca mogu učiti zbog dobrog vrednovanja i korektivnog poučavanja. Vrednovanje pritom dijagnosticira što učenici znaju i mogu napraviti, pruža

značajnu povratnu informaciju i određuje svakom učeniku individualno napravljeno poučavanje koje bi ih dovelo do majstorstva. Isto tako, efektivno korektivno poučavanje treba biti drugačije od početnog pristupa u poučavanju. Te korekcije trebaju biti bazirane na individualnom učeničkom razumijevanju uz osjetljivost prema drugačijim stilovima i metodama učenja kao i interesima (McMillan, 2010).

Uz pojam majstorskog učenja usko je vezano i diferencirano poučavanje. Ono uključuje novija istraživanja i sveobuhvatniji pristup poučavanju. Diferencirano poučavanje vodi računa o konkretnoj razrednoj situaciji te uvažava razlike među učenicima. Najčešći oblik je poučavanje u homogenim grupama. Ovaj oblik naziva se još i grupiranje po sposobnostima jer učitelj fiktivno dijeli razred na grupe prema predznanju i sposobnostima. Obično se radi o tri grupe: u prvoj su slabiji učenici, u drugoj dobri, a u trećoj vrlo dobri i odlični. Tijekom poučavanja, učitelj predstavlja pred učenike svake od ovih grupa zadatke primjerene upravo njihovom predznanju i sposobnostima. Cilj diferenciranog poučavanja je pomicanje učenika na višu razinu. Prednost takve vrste poučavanja je da aktivira sve učenike, zadržava pažnju svih učenika, povećava efikasnost nastave te potiče učenje na satu (Varošaneć, 2004). Diferencirano poučavanje je organizirano, ali fleksibilno jer se mijenja po potrebi da bi maksimiziralo poučavanje svih učenika. Učitelji trebaju imati skup tehnika i pristupa da bi adekvatno diferencirali poučavanje, tj. na temelju učenikovih vrijednosti, interesa, stilova učenja i prijašnjih postignuća učitelji pružaju najusklađenije poučavanje da bi poboljšali učenikovu motivaciju i učenje (McMillan, 2010).

Bez obzira je li poučavanje bazirano na diferenciranom poučavanju, majstorskom učenju ili ostalim pristupima u poučavanju, važno je da su korekcije u poučavanju korištene u svrhu upotpunjavanja procesa formativnog vrednovanja. Zato je važno da vrednovanje bude zaista integrirano u poučavanje. Važna poanta prilagodbi u poučavanju je također da one nisu uvijek određene od učitelja. Proces identificiranja sljedećih koraka je ponekad efektivan ako su učenici uključeni u odabir. Učenici pritom nisu tretirani kao pasivni primatelji povratnih informacija i sugestija za daljnje učenje, nego učenici postaju partneri s učiteljima. To je dosta važno jer poboljšava učenikovu samoeфикаsnost i osjećaj unutarnje kontrole vlastitog učenja (McMillan, 2010).

## 2.7. Učeničko samovrednovanje te samovrednovanje učitelja

Da bi nastava zadovoljila suvremene zahtjeve, tj. osposobljenost učenika za uspješan susret sa zahtjevima i izazovima sadašnjice i bliske budućnosti potrebno je osposobiti učenike za valjano i pouzdano samovrednovanje pri čemu je bitno da se osposobljavanje odnosi i na one razine koje su više od samovrednovanja činjeničnog znanja. To su znanja o povezanostima, uzrocima, posljedicama, primjenama te vrednovanju. Pretpostavka za tako usmjereno vrednovanje je elementarna osposobljenost učenika za tu aktivnost koja je povezana s usvojenosti prikladne tehnike učenja jer učenje ne može biti učinkovito ako nije vezano uz samovrednovanje. Bitno je da učenik je osposobljen da sam sebi postavlja zadatke, da zna izraditi niz zadataka za samovrednovanje te da traži povratne informacije o točnosti svojih rješenja. Dešava se da danas učenici završavaju svoje školovanje bez da su usvojili tehniku učenja koja bi im bila prikladna, a kamoli tehniku samovrednovanja razine koju su postigli. (Mužić, Vrgoč, 2005). Za učitelja učenikovo samovrednovanje može biti značajan izvor informacija. Često se događa da učitelj nakon ispitivanja traži od učenika da kaže koju ocjenu je zaslužio. Iako je nastavnik zainteresiran utvrditi je li učenik naučio što je trebao, korisno je i da sam učenik kaže što je on, po svojem mišljenju, naučio i shvatio. To doprinosi učiteljevoj pouzdanijoj procijeni učenikovog uspjeha i njegovih propusta u radu. U svakom slučaju, učenikova samoprocjena pruža učitelju informacije o učenikovom radu i postignućima. U praksi se najčešće koristi usmeno i pismeno ispitivanje učenika koje zajedno s rezultatima učenikovog samovrednovanja ukazuje učitelju na područja i probleme: gdje je proces učenja za učenika bio neuspješan, na elemente učenikovog pristupa kod učenja. Pritom je korisno da učitelj, kada za to ima potrebe, argumentirano objasni razliku i nepodudarnost svog suda o učenikovom postignuću s učenikovim samovrednovanjem (Perišić, 1988).

Jedno od didaktičkih pravila je da svako poučavanje treba dovesti do samostalnog učenja, a ocjenjivanje do samostalnog ocjenjivanja. Učitelji svojim stilom rada znatno mogu pomoći učenicima u osposobljavanju za praćenje vlastitih aktivnosti te za samovrednovanje. To osposobljavanje započinje već u prvim danima zajedničkog rada

koje koriste za dogovor o pravilima ponašanja te načinima učenja. Na kraju svakog radnog dana, učitelj bi trebao pitati učenike o njihovim dojmovima očekujući pritom prijedloge za promjene i poboljšanja te bi zajednički trebali analizirati ostvarene rezultate. Učenicima s posebnim potrebama učitelji pomažu u planiranju aktivnosti i plana napredovanja. Već od prvog dana škole učitelji mogu poticati učenike da zapisuju svoje planove i napretke. Učitelj može unaprijed pripremiti posebne obrasce za to koji mogu sadržavati tablice za individualne planove učenika koji služe za sastavljanje realnih planova koji će kasnije poslužiti za vrednovanje, ocjenjivanje i samovrednovanje. Također, učitelj može učenicima ponuditi neke tvrdnje u obliku rečenica koje počinju sa sintagmama „Ja to znam“, „Ja to mogu“ uz koje tada učenik stavlja odgovarajuće znakove „+“ ili „-“ (Matijević, 2004).

Poznata je i često rabljena tehnika samostalnog praćenja i ocjenjivanja *portfolio*, odnosno mapa učenikovih radova. Izvorno izraz *portfolio* znači torba, mapa...U školskoj dokumentaciji izraz je našao mjesto kao praktično rješenje za praćenje i prikupljanje informacija o učeniku. Pri izboru radova aktivno sudjeluje i učenik pa možemo govoriti i o osposobljavanju učenika za samovrednovanje. Radove povremeno analiziraju i učenici i učitelji (Matijević, 2005). Dakle, učenički portfolio je mapa, zbirka učeničkih radova koje učenik prikuplja tijekom dužeg vremenskog razdoblja i na temelju kojeg se može sagledati uloženi trud, postignuća i napredak učenika. Cilj je potaknuti učenika na promišljanje o sebi, a budući da učenik sam bira radove, to pridonosi i jačanju samopouzdanja. Važno je također da učenici međusobno razgovaraju o svojim radovima. Portfolio može sadržavati: crteže, fotografije, sastavke, članke, umne mape, istraživanja i sl. Vođenje portfolija predstavlja važnu tehniku u osposobljavanju učenika za praćenje vlastitog napretka te za samoocjenjivanje. Ono učeniku pruža uvid u svoje snage, kao i u ono što još ne razumije te omogućava učeniku praćenje učenja. Takve mape mogu pomoći učiteljima za uspoređivanje napretka učenika s obzirom na prethodno razdoblje te omogućuju temeljitiji uvid u učenikove sposobnosti i nedostatke kao i regulaciju procesa učenja i poučavanja (Tot, 2013).

Samovrednovanje učenika pomaže razvoj kritičnosti i samokritičnosti učenika prema vlastitom radu i rezultatima. Također, time se kod učenika razvija i odgovornost za preuzete obaveze te kvalitetu izvršavanja tih obaveza (Matijević, 2004).

S druge strane, učitelji provode puno vremena razmišljajući i procjenjujući svoj rad. Samovrednovanje učitelja koristi se kada učitelj vrednuje sam sebe, odnosno svoj rad. To je proces prikupljanja i analiziranja informacija dobivenih samoprocjenom djelatnika pri kojem učitelji koriste iskazana mišljenja sudionika nastavnog procesa. Tri su temeljna pitanja na koja učitelj nastoji odgovoriti: Koliko je dobro to što radim?, Kako to znam?, Što trebam učiniti za poboljšanje? (Tot, 2013, str. 145.). Osvrt i prosudba vlastitog rada dio su učiteljevog posla jer je nemoguće zadovoljiti potrebe poučavanja bez planiranja, organizacije, praćenja i vrednovanja aktivnosti koje provodi učitelj. Učitelji se međusobno razlikuju po umijeću kojim to čine. Takvo kritičko razmišljanje o vlastitom radu naziva se reflektivno poučavanje, razmišljanje koje bi trebalo poticati kao dio svakodnevnog rada učitelja. Učitelji to većinom rade intuitivno, no neki učitelji su ipak uključeni u sustavnije samoocjenjivačke postupke. U vrijeme velikih promjena u kurikulumu u vezi s obrascima poučavanja, učenja i ocjenjivanja, često učitelji razmišljaju i prosuđuju o svojem poučavanju s kojim su uglavnom zadovoljni, ali za koje osjećaju da bi se moglo poboljšati. Pri tome im najviše pomaže prikupljanje podataka o svojem radu. Učitelji to mogu činiti na mnoge načine, kao na primjer, vođenje dnevnika, snimanje nastave, prikupljanje povratnih informacija od kolega... Jedan od važnih metoda prikupljanja informacija je prikupljanje povratnih informacija od učenika. Učitelj od učenika može na razne načine dobiti puno korisnih informacija. Na primjer, može zamoliti učenike da vode dnevnik satova. Takvi dnevnicima mogu također poticati učenike da razmisle o svojem učenju. Isto tako, učitelj može zamoliti učenike da popune upitnik o nastavi koji je vezan uz obilježja poučavanja ili razgovorom s učenicima prikupiti korisne informacije. Dobro je i da učitelji provode praktične aktivnosti pomoću kojih će analizirati svoje poučavanje. Na primjer, prikupljanje podataka o tome kako djeca doživljavaju aktivnosti u školi, ocjenjivanje kako pojedini učenici doživljavaju nastavu tijekom dana ili tjedna, ispitivanje zadataka s obzirom na zahtjeve koje stavljaju pred učenike... (Kyriacou, 2007).

### **3. STRATEGIJE FORMATIVNOG VREDNOVANJA U NASTAVI MATEMATIKE**

Zanemarujući geografsko područje, školu i razlike među učenicima, svaki učitelj, pa tako i učitelj matematike, ima isti cilj: osigurati najveću moguću kvalitetu nastave koja će učenicima omogućiti otkrivanje koncepata, procedura i vještina koje će im pomoći da postupno razviju matematičku kompetenciju. Strategije formativnog vrednovanja pružaju prilike učiteljima za promatranje učeničkog razvoja u pojedinoj fazi obrazovanja te daju informacije o tome kako učenici reagiraju na određene pristupe u poučavanju. Interakcija učenik-učitelj te učenik-učenik na satu matematike zahtijeva različite strategije vrednovanja koje potiču učenike na razmišljanje o svojim idejama te koje pomažu učiteljima u utvrđivanju koliko dobro pojedini učenici i cijeli razred napreduju u izgradnji matematičkog mišljenja. Svaka strategija opisana u poglavlju 3.4. oblik je aktivnosti koja pruža učiteljima i učenicima informacije o učenikovom činjeničnom, konceptualnom i proceduralnom razumijevanju u matematici. Bogat repertoar strategija učenicima omogućuje poboljšanje matematičkog izražavanja, crtanja te osmišljavanja ideja i zaključaka, dok učitelju pružaju informacije koje može koristiti za prilagodbu poučavanja.



### **3.1. Zašto koristiti strategije formativnog vrednovanja u nastavi matematike?**

Svrishodno korištenje strategija formativnog vrednovanja osigurava priliku za konstrukciju i organiziranje mišljenja o principima, svojstvima i primjeni matematike pri rješavanju problema te pomaže učenicima u uočavanju važne uloge matematike u svakodnevnom životu.

Strategije formativnog vrednovanja dane u poglavlju 3.4. pružaju učitelju kontinuirano prikupljanje informacija o učenikovom razmišljanju i učenju radi donošenja odluka o prilagođavanju poučavanja. Te prikupljene informacije također mogu ukazivati na greške i prepreke koje se javljaju u učenju te na koncepte ili procedure s kojima učenici imaju poteškoće. Isto tako, strategije se koriste za pružanje povratnih informacija učenicima te poticanje učenika na vrednovanje vlastitog razmišljanja. Sve opisane strategije u poglavlju 3.4. dizajnirane su tako da se lako mogu implementirati u nastavu. Većina strategija plod su rada učitelja koji u svojim učionicama godinama primjenjuju ovakav način vrednovanja. Primarno se koriste za vrednovanje prije i tijekom procesa učenja, osim kada se koriste ta refleksiju na kraju učenja. Njihova svrha je poboljšavati učenikovo učenje, poticati interese učenika, inicirati matematička istraživanja te ohrabrivati učenike u razrednim diskusijama, tj. generalno se ne koriste za sumativno vrednovanje.

Postoje još mnogi razlozi i svrhe korištenja strategija formativnog vrednovanja u nastavi matematike. Na primjer, one:

- aktiviraju učenikovo mišljenje
- obavezuju učenike na učenje te potiču intelektualnu znatiželju
- potiču učenike na razmišljanje i o alternativnim idejama
- ohrabruju učenike na postavljanje boljih pitanja te na davanje promišljenih odgovora
- pomažu u razvoju konceptualnog znanja
- pomažu učenicima u uočavanju što su naučili i što još trebaju naučiti

- potiču razrednu diskusiju, razmjenu ideja i njihovu matematičku argumentaciju
- utvrđuju mogu li učenici primjenjivati matematičke ideje i u drugim situacijama
- potiču korištenje preciznog matematičkog jezika
- osiguravaju prostor za matematičko istraživanje
- pomažu učenicima u razvijanju vještina samovrednovanja te kritičkom osvrtu na svoje učenje
- daju povratne informacije (učenik sam sebi, učenik učeniku, učitelj učeniku)
- informiraju učitelja o mogućim izmjenama u načinu poučavanja
- smanjuju strah od javnog prezentiranja svojih ideja i stavova
- procjenjuju uspješnost odrađenog nastavnog sata
- podrazumijevaju sudjelovanje svih učenika.

Učitelji koji koriste strategije formativnog vrednovanja u poučavanju započinju poučavanje idejama učenika te identificiraju učenička mišljenja koja će ih dovesti do otkrivanja i razumijevanja važnih matematičkih koncepata i procedura. Što više učitelji uključuju strategije u svoje poučavanje, njihovo razumijevanje učeničkog učenja raste. Bitno je imati na umu da strategije nije dobro birati nasumično, već trebaju biti pažljivo odabrane kako bi odgovarale namjeni poučavanja. Iako neke strategije mogu biti ocijenjene ocjenom, primarna namjena je da potvrđuju učenje i poučavanje. To i od učitelja zahtjeva odmak od izlaganja sadržaja i dodjeljivanja ocjena prema pažljivom sakupljanju i analiziranju podataka o tome što učenici misle i uče. Ti podatci pružaju učiteljima informacije kako sadržaj poučavanja učiniti pristupačnijim učenicima.

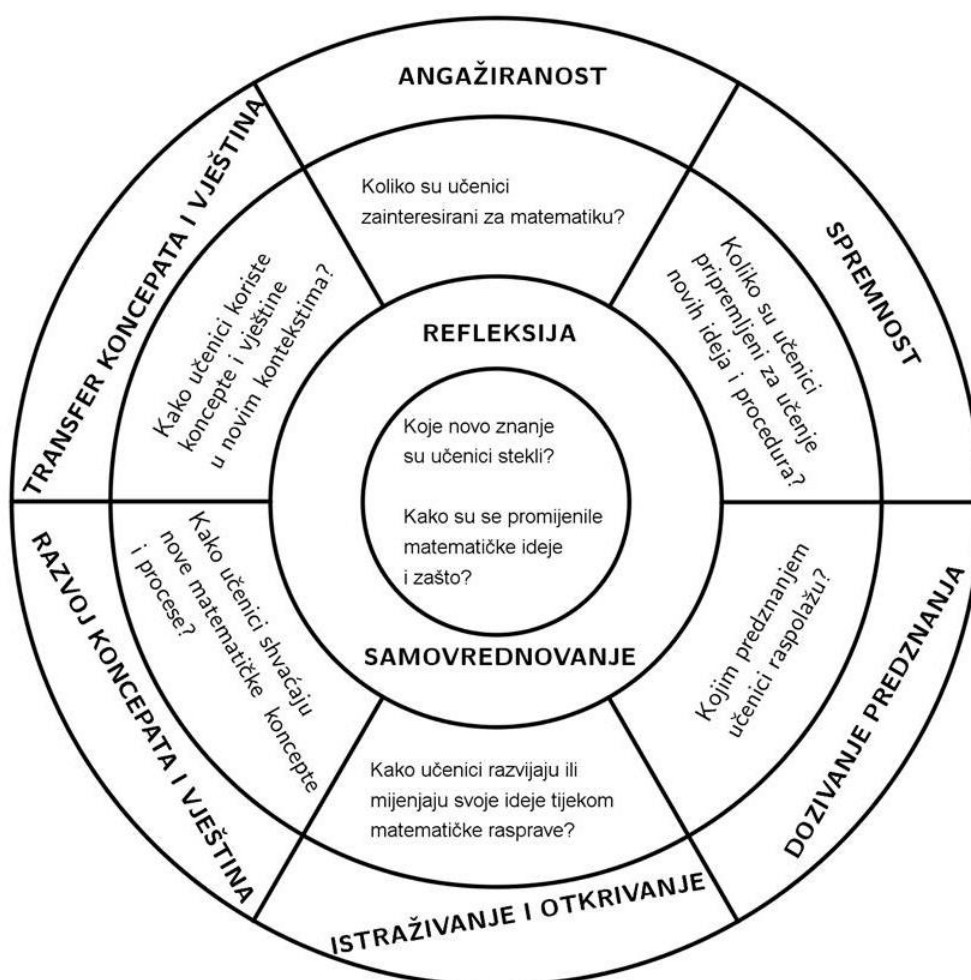
### **3.2. Krug učenja i odabir strategija**

U nastavi matematike i primjeni strategija formativnog vrednovanja koristan može biti tzv. krug učenja tj. *krug kontinuiranog vrednovanja, poučavanja i učenja u nastavi matematike* (Keeley, Tobey, 2011) prikazan na Slici 3.2.1.

Taj model pomaže učiteljima matematike u odabiru primjerene strategije koja odgovara određenoj razini i svrsi poučavanja te koja pojačava vezu između vrednovanja, poučavanja i učenja. Korištenje strategija formativnog vrednovanja zajedno s krugom učenja pruža okvir za neprimjetnu integraciju strategija vrednovanja u učenje i poučavanje.

Krug učenja pruža učenicima mogućnosti preispitivanja ranije učenih koncepata. Nakon što su njihove ideje otkrivene, učenici imaju mogućnost istraživati ih, raspravljati o njima te ih testirati. Kada učenici primijete da njihove postojeće ideje ne odgovaraju u potpunosti njihovim prethodnim zaključcima, neravnoteža rezultata otvara vrata prema konstruiranju novih koncepata. Kada učenici napokon razviju formalno znanstveno razmišljanje i obrasce rasuđivanja koji im pomažu u stvaranju smislenih koncepata, ohrabreni su za proširivanje svojeg učenja i za prilagođavanje svojih ideja novim situacijama. Učitelj dizajnira i nadzire poučavanje tako da učenici postanu svjesni svojeg znanja i ideja, ali i ideja drugih. Učenik razvija povjerenje u svoje mogućnosti učenja, snalaženja u novim situacijama te korištenja matematičkog načina razmišljanja za konstruiranje valjanih argumenata. Učitelj vodi učenikovo učenje na različite načine, stvarajući razredno ozračje u kojem učenici slobodno izražavaju svoje ideje, imaju dovoljno vremena za razmišljanje i otkrivanje novih ideja. Kada učitelj olakšava učeniku razvijanje ideja, on također može provoditi formativno vrednovanje nadgledavajući učenikovo mijenjanje koncepata i strategija te prilagođavajući njegovo učenje i tehnike vrednovanja tako da prate njegove potrebe.

Slika 3.2.1. Krug učenja (Keeley, Tobey, 2011).



Kružni dijagram pokazuje jasnu povezanost pojmova *vrednovanje, poučavanje i učenje*. Samovrednovanje i refleksija središte su metakognicije<sup>5</sup> te su povezani sa svakom sljedećom razinom u *krugu učenja*. Svaka razina u krugu učenja ima eksplicitnu svrhu povezanu s vrednovanjem, učenjem i poučavanjem, kao što je prikazano na slici 3.2.1.

<sup>5</sup> Metakognicija je „mišljenje o mišljenju“ ili „znanje o znanju“, tj. metakognicija je skup znanja i izvršnih kontrola o procesu učenja.

**Angažiranost i spremnost.** Korištenje strategija formativnog vrednovanja na početku nastavne cjeline daje učitelju jasniju sliku spremnosti, motivacije i interesa učenika za temu koja slijedi. Također, strategije pružaju učenicima mogućnosti za razmišljanje i znatiželju.

**Dozivanje predznanja.** Iznošenje ideja koje su učenici razvili tijekom prijašnjih iskustava u učenju pruža temelj na kojem učitelj gradi poučavanje. Učitelj postaje svjestan učeničkog znanja te uočava gdje i kako učenik može svoje prijašnje znanje povezati s novim konceptima i procedurama. Strategije formativnog vrednovanja promiču razmišljanje te dozivaju učenikovo predznanje. Rasprava među učenicima dopušta im dijeljenje svojih razmišljanja s drugima, dublje preispitivanje ideja te potiče učenike na promišljanje o mogućim izmjenama i dopunama vlastitih ideja.

**Istraživanje i otkrivanje.** Faza istraživanja i otkrivanja uključuje direktno iskustvo u konkretnim ili virtualnim manipulacijama podacima, tekstom, matematičkim problemom ili neotkrivenim idejama diskusijom s drugim učenicima. Ova razina često uključuje procjenu i diskusiju o strategijama, što izaziva matematičko istraživanje. Pružanje učenicima mogućnosti testiranja ideja, smišljanja vlastitih procedura i rješavanja problema osigurava im temelj za gradnju novih koncepata. Ovaj period istraživanja i otkrivanja dopušta učitelju utvrđivanje koja mišljenja i pitanja učenici imaju prije formalnog ostvarivanja konkretnih ciljeva učenja. Tijekom ove faze, strategije otkrivaju koliko dobro učenici reagiraju na zadane probleme i tuđe ideje. Vrednovanje tijekom ove faze daje učenicima priliku za podjelu svojih ideja i primanje povratne informacije od učitelja i drugih učenika u neosuđujućem razrednom okruženju.

**Razvoj koncepata i vještina.** Vrednovanje konceptualnog razumijevanja i korištenja matematičkih vještina tijekom otkrivanja i razvoja formalnih koncepata pomaže učenicima u poboljšanju učenja te razotkriva poteškoće i nejasnoće koje možda postoje u razumijevanju matematičkih sadržaja. Strategije korištene na ovoj razini pomažu učiteljima u utvrđivanju ozbiljnosti konceptualnog razumijevanja učenika. Rezultati informiraju učitelja te pokazuju razinu razumijevanja matematičkih koncepata ili

procedura na kojoj bi učenici trebali biti ili signaliziraju da su učenici spremni za prijelaz na iduću razinu na kojoj će povezati matematičko razumijevanje s novim kontekstom.

**Transfer koncepata i procedura.** Informacije vrednovanja na toj razini učitelj koristi za otkrivanje prepreka koje se javljaju u transferu učeničkog znanja u nove matematičke koncepte. Te informacije koriste se i za modificiranje poučavanja te za stvaranje prilika u kojima će učenici moći primjenjivati novonastale ideje. Također, učenici otkrivaju kako nova saznanja primijeniti u novim situacijama i novim matematičkim problemima.

**Samovrednovanje i refleksija.** Ohrabrivanje refleksije i samovrednovanja pomaže učenicima razvijati metakognitivne vještine koje koriste u nadziranju vlastitog učenja i mišljenja. Učenici uče razmišljati o učenju i razmišljanju. Samovrednovanje pomaže učenicima razmišljati o tome kako sami mogu matematiku činiti smislenom. Učeničko samovrednovanje i refleksija osiguravaju vrijednu povratnu informaciju učitelju o poučavanju te koliko ono potiče razvoj učeničkih metakognitivnih vještina. Isto tako, upućuju učitelja na učenike koji možda trebaju drugačije poučavanje.

Prije biranja strategije formativnog vrednovanja, treba uzeti u obzir mnoge faktore. Strategija treba biti prikladno odabrana u skladu s matematičkim kontekstom, s potrebama i stilom poučavanja učitelja te osobinama učenika u razredu. Odabir strategija koje potvrđuju poučavanje i promoviraju razmišljanje prvi je korak u korištenju vrednovanja za učenje. Kod planiranja i implementiranja strategija dobro je da učitelj pokuša prvo neke strategije primijeniti na sebi da vidi jesu li dobre za korištenje u odabranom kontekstu. Isto tako, bitno je predstaviti strategiju učenicima i dati im jasne upute. Ukoliko treba, učitelj prilagođava strategiju tako da bude primjerena dobi učenika. Učenici trebaju znati zašto koriste određenu strategiju jer kada im je jasna namjena i razumiju kako ta strategija pomaže u učenju, kvaliteta odgovora na strategiju bit će veća. Na kraju strategije, učitelj može pitati učenike o mišljenju o strategiji, no isto tako može zapisati svoje bilješke o strategiji. Pritom se može pitati sljedeća pitanja:

- Jesu li učenici bili angažirani?
- Jesam li bio/la siguran/na u korištenju strategije?
- Je li informacija stečena u strategiji korisna?

- Bih li dobio/la iste informacije bez korištenja strategije?
- Jesam li koristio/la strategiju samo da bih radio/la nešto drugačije?
- Hoću li opet koristiti tu strategiju?

### **3.3. Korištenje podataka dobivenih iz strategija**

Čak i s pažljivim odabirom, planiranjem i implementacijom, vrednovanje nije formativno ako se informacije ne koriste za poboljšanje učenja i poučavanja. Strategije pružaju različite podatke o učenikovom učenju koji mogu biti analizirani za različite namjene. Strategije opisane u sljedećem poglavlju nisu formativne ukoliko učitelj ne koristi podatke za poduzimanje akcija. Izazov je ne samo u sustavnom prikupljanju podatka, nego i u razumijevaju što s njima napraviti. Način odabira, planiranja i implementiranja podataka prikupljenih od strategija ovisi o namjeni za koju se koriste. Neki savjeti koji mogu pomoći kod korištenja podataka sakupljenih u strategijama su sljedeći:

- Ukoliko strategija uključuje davanje povratnih informacija učenicima, treba ih dati učenicima što prije nakon vrednovanja.
- Učenici trebaju biti upoznati s time kako učitelj planira upotrijebiti podatke za poboljšanje poučavanja.
- Dobro je izbjegavati previše podataka jer učitelji često nemaju vremena za analiziranje svih dobivenih učeničkih odgovora. Učitelj pritom može odabrati uzorke učeničkih odgovora za ispitivanje i dijeljenje s razredom.
- Učitelj ne bi trebao previše čitati između redova te bi trebao dijeliti podatke s drugima u svrhu poduzimanja zajedničkih akcija za poboljšanje učenja i poučavanja.

### 3.4. Odabrane strategije<sup>6</sup> formativnog vrednovanja

U nastavku rada detaljnije ćemo opisati sljedećih 11 strategija formativnog vrednovanja:

1. Frayerov model
2. Riješi i baci
3. Kartice postignuća
4. Četiri kuta
5. Opravdaj istinite-neistinite tvrdnje
6. Slika govori tisuću riječi
7. Popis terminologije
8. Ispitivanje suprotnih pogleda
9. Nizanje kartica
10. Pogled unatrag
11. 3-2-1

Namjena svih njih je promicanje učenja i poboljšanja poučavanja. Tablica 3.2.1. prikazuje primarnu namjenu strategije A. Znakom B prikazana je sekundarna namjerna pojedine strategije.

---

<sup>6</sup> Primjeri uz odabrane strategije osmislila sam sama uz pomoć materijala prof.dr.sc. Aleksandre Čižmešija iz kolegija Vrednovanje u matematičkom obrazovanju.



Tablica 3.2.1. Popis i namjena strategija (Keeley, Tobey, 2011).

| Strategije formativnog vrednovanja | Dohvaćanje i identificiranje predznanja | Angažiranje i motiviranje učenika | Aktiviranje razmišljanja i promoviranje metakognicije | Pružanje poticaja za matematičku diskusiju | Iniciranje istraživanja matematičkih ideja | Formiranje koncepata, istraživanja i prijenos | Poticanje ispitivanja i odgovora | Pružanje povratne informacije učenicima ili učitelju | Vrednovanje među učenicima i samovrednovanje | Refleksija |
|------------------------------------|---|-----------------------------------|---|--|--|---|----------------------------------|--|--|------------|
| 1.Frayerov model                   | A                                       | A                                 | A   |  |  | A   |                                  |  |  |            |
| 2. Riješi i baci                   | A                                       | A                                 | A   | B  |  | B   |                                  |  |  |            |
| 3.Kartice postignuća               | A                                       | A                                 | A   | B  |  | A   |                                  | A  |  |            |
| 4. Četiri kuta                     | A                                       | A                                 |   | B  | B  | B   |                                  |  |  |            |
| 5. Opravdaj I-N tvrdnje            | A                                       | A                                 | A   | A  | B  | A   |                                  |  |  |            |
| 6. Slika govori tisuću riječi      |   | A                                 | A   |  | B  | B   | A                                | A  |  | A          |
| 7.Popis terminologije              | A                                       | A                                 | A   |  |  | B   |                                  |  | B  | A          |
| 8. Ispitivanje suprotnih pogleda   | A                                       | A                                 | A   | B  | B  | A   |                                  |  |  |            |
| 9.Nizanje kartica                  | A                                       | A                                 | A   |  |  | A   |                                  |  | B  | A          |
| 10. Pogled unatrag                 |   | A                                 | A   |  |  |   |                                  | A  |  | A          |
| 11. 3-2-1                          |   | A                                 | A   |  |  |   |                                  |  | B  | A          |

Za svaku navedenu strategiju u radu dan je opis, primjeri, kako promiče učenje te kako unapređuje nastavu. Uz to, opisano je planiranje i upravljanje strategijom, opća svojstva provedbe, moguće prilagodbe i napomene. Konkretnije, za svaku strategiju dano je sljedeće:

#### **a) Opis i primjeri primjene strategije**

**Opis strategije.** Ovaj odlomak daje brz pregled strategije. Također, daje i opis strategije i upute za korištenje.

**Primjeri primjene strategije.** Uz svaku strategiju dani su primjeri vezani uz konkretan matematički sadržaj za osnovnu i srednju školu. Mogući učenički odgovori napisani su zelenom bojom.

#### **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija potiče učenje?** Odgovarajući odlomak za svaku strategiju ističe kako ona utječe na učenike. Opisuje načine na koje strategija potiče učenje, uključujući stimuliranje metakognicije, poticanje matematičkog izražavanja i mehanizama za povratne informacije. Isto tako, ističe kako strategija potiče učenikovo samovrednovanje i refleksiju. Nakon što učitelj koristi strategiju, dobro je zabilježiti kako su učenici reagirali na nju.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Odgovarajući odlomak ističe utjecaj strategije na učitelja. Opisuje načine na koje strategija može biti korištena za poticanje razredne diskusije i prilagodbu poučavanja, kao na primjer za: izmamljivanje učeničkih odgovora, prikupljanje informacija o učeničkom načinu razmišljanja koje se koriste u svrhu unapređenja nastave, razlikovanje pristupa grupi učenika ili individualnom učeniku, davanje povratnih informacija, ohrabrivanje korištenja matematičkog jezika...

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Odlomak daje informacije o matematičkom sadržaju za koji je strategija prikladna, uključujući i materijal, vrijeme i organizaciju rada. Također, opisuje što rade učenici i učitelji u određenoj strategiji.

**Opća svojstva provedbe.** Za svaku strategiju opisuju se opća svojstva za provođenje u razredu, rangirajući svojstva na ljestvici od nisko do visoko. *Lakoća korištenja* odnosi se na općenito korištenje strategije, kao na primjer: dostupnost i priprema materijala te razina uvježbanosti koju trebaju postići učenici prije korištenja strategije. *Potrebno vrijeme* rangira koliko brzo i efektivno strategija može biti provedena. Visoka razina potrebnog vremena ne mora nužno značiti da strategija nije korisna, već da je potrebna velika količina vremena da bi se provodila efektivno. *Kognitivna razina* opisuje razinu kompleksnosti strategije u terminu koliko promišljanja i odgovora zahtijeva od učenika. To ovisi o kontekstu u kojem se strategija koristi.

**Moguće prilagodbe.** Odlomak daje sugestije za modificiranje strategije za različite uzraste. Na primjer, može opisivati načine kako prilagoditi kognitivno opterećenje za učenike ovisno o njihovoj dobi. Također opisuje načine modificiranja korištenja strategije, kao na primjer: mijenjanje načina na koji se učenici grupiraju za diskusiju ili korištenje materijala za provedbu strategije.

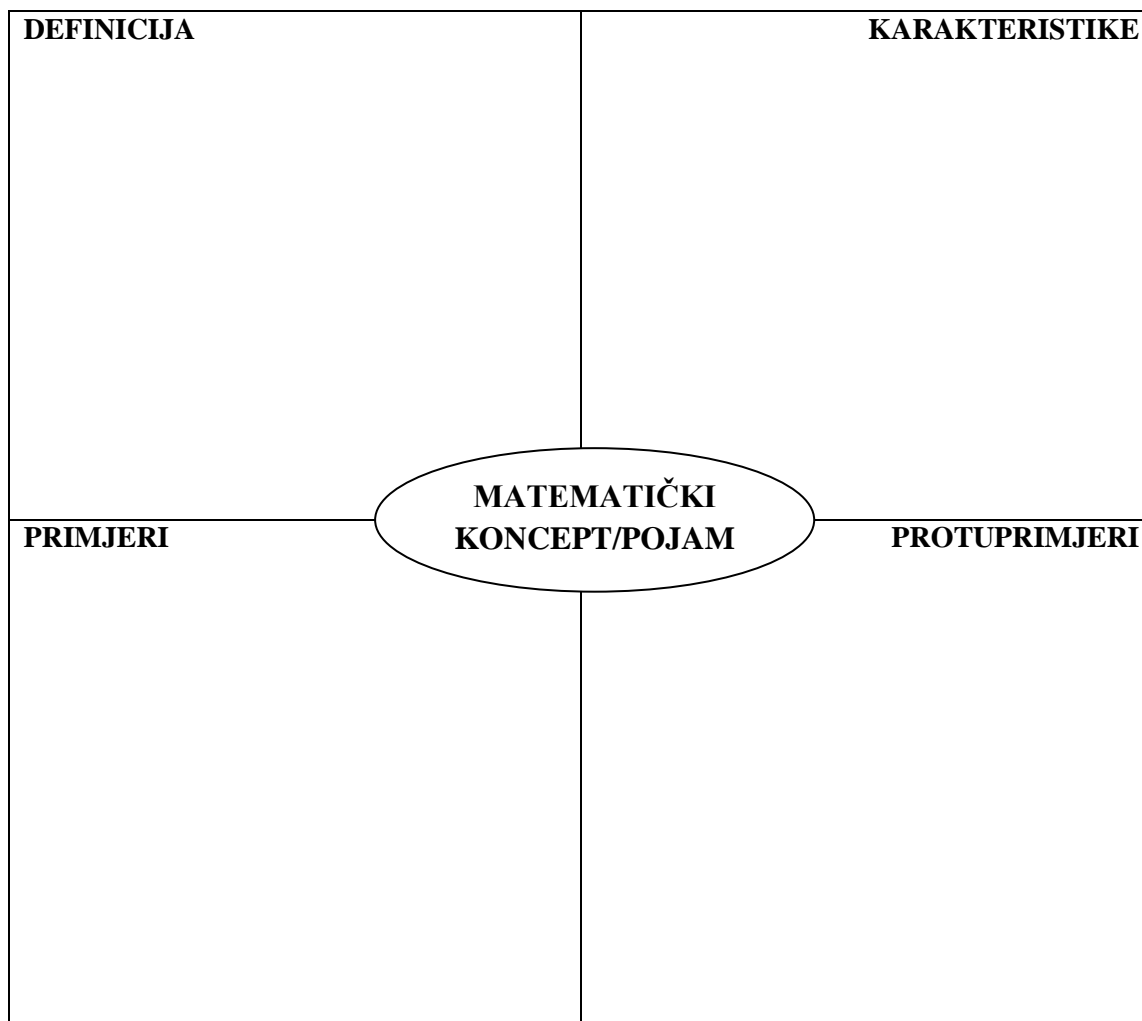
**Napomena.** Sa svakom strategijom dane su i napomene za učitelje koje opisuju kada koristiti strategiju. Isto tako, istaknuti su mogući problemi u provođenju i primjeni određene strategije.

### **3.4.1. Strategija *Frayerov model***

#### **a) Opis i primjeri primjene strategije**

**Opis strategije.** Frayerov model grafički organizira učenička prijašnja znanja o matematičkim konceptima ili matematičkim pojmovima uz njihovu definiciju, karakteristike, primjere i protuprimjere. Učenici u ovoj strategiji popunjavaju tablicu koja je prikazana na slici 3.4.1.1.

Slika 3.4.1. Prazna tablica za strategiju Frayerov model.



**Primjeri primjene strategije.**

**Primjer 3.4.1.1. Cijeli brojevi.** Primjer je primjeren učenicima šestog razreda osnovne škole i prvog razreda srednje škole. Učenik popunjava Frayerov dijagram svojom definicijom, karakteristikama, primjerima i protuprimjerima cijelih brojeva. Učenički odgovori naznačeni su zelenom bojom.

Tablica 3.4.1.1. Cijeli brojevi

| <p><b>DEFINICIJA</b></p> <p><i>Skup cijelih brojeva je skup <math>\{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}</math>.</i></p> <p><i>Skup cijelih brojeva označavamo sa <math>\mathbb{Z}</math>.</i></p> <p><i>Skup cijelih brojeva možemo zapisati na razne načine, na primjer:</i><br/> <math>\{\dots, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \dots\}</math></p> | <p><b>KARAKTERISTIKE</b></p> <p><i>Znak + ili – ispred broja naziva se predznak. Ako ispred broja ne piše predznak, znači da je taj broj pozitivan ili nula. Negativni brojevi su brojevi koji imaju ispred sebe znak -. Nula nije niti pozitivan niti negativan broj.</i></p> <p><i>Cijele brojeve možemo prikazivati na brojevnom pravcu. Na brojevnom pravcu negativni brojevi se nalaze lijevo od nule, a pozitivni brojevi desno od nule.</i></p> <p><i>Brojevi koji se razlikuju samo u predznaku su suprotni brojevi. Broj nula je suprotan sam sebi. Na brojevnom pravcu parovi suprotnih brojeva međusobno su simetrično smješteni obzirom na nulu.</i></p> <p><i>Apsolutna vrijednost cijelog broja je udaljenost tog broja od nule na brojevnom pravcu.</i></p> <p><i>Apsolutna vrijednost svakog broja osim nule je pozitivan broj. Suprotni brojevi imaju jednake apsolutne vrijednosti.</i></p> |
|--|---|
| <p><b>PRIMJERI</b></p> <p><math>-8, -12, 89</math></p> <p><math>10\ 879, 1\ 000\ 000</math></p> <p><math>598\ 693, -52\ 529</math></p>   | <p><b>PROTUPRIMJERI</b></p> <p><math>\frac{7}{8}, 7\frac{1}{3}, -0.58796</math></p> <p><math>0.\dot{3}, -\frac{12}{53}</math></p>   |
| <p><b>CIJELI<br/>BROJEVI</b></p>   |   |

**Primjer 3.4.1.2. Drugi korijen.** U prvom razredu srednje škole učenici usustavljaju znanje o drugom korijenu broja. U danom primjeru, učenici popunjavaju Frayerov dijagram svojom definicijom drugog korijena, karakteristikama, primjerima i protuprimjerima. Dan je i primjer ispunjenog nastavnog listića s mogućim učenikovim odgovorima. Učenikovi odgovori naznačeni su zelenom bojom.

Tablica 3.4.1.2. Drugi korijen

| <b>DEFINICIJA</b>  | <b>KARAKTERISTIKE</b>   |
|--|---|
| <p><i>Drugi korijen nenegativnog realnog broja <math>a</math> je nenegativan realan broj <math>x</math> takav da je <math>x^2 = a</math>.</i></p> <p><i>Oznaka: <math>\sqrt{a}</math>.</i></p> | <p><i>Drugi korijen nenegativnog realnog broja je jedinstven.</i></p> <p><i>Za realne brojeve <math>a, b</math> takve da je <math>a, b \geq 0</math> vrijedi: <math>\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}</math>.</i></p> <p><i>Za realne brojeve <math>a, b</math> takve da je <math>a \geq 0, b &gt; 0</math> vrijedi: <math>\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}</math>.</i></p> <p><i>Za svaki realan broj <math>a \geq 0</math> vrijedi:</i></p> $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}.$ <p><i>Za svaki realan broj <math>a</math> vrijedi:</i></p> $\sqrt{a^2} =  a .$ |
| <p><b>PRIMJERI</b></p> <p><math>\sqrt{4} = 2</math></p> <p><math>\sqrt{9} = 3</math></p> <p><math>\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}</math></p> <p><math>\sqrt{1.57}</math></p>                  | <p><b>PROTUPRIMJERI</b></p> <p><math>-9</math></p> <p><math>\sqrt{-25}</math></p> <p><math>\sqrt{-\frac{1}{3}}</math></p> <p><math>-0.25</math></p>   |

**DRUGI KORIJEN**

## **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija potiče učenje?** Frayerov model pomaže aktivirati učenikova prijašnja znanja o matematičkim konceptima ili pojmovima. Pruža učenicima priliku za razjašnjavanje koncepata ili matematičkih termina i razgovor o njihovom razumijevanju pružajući operacionalne definicije, opisujući karakteristike i dajući primjere i protuprimjere iz njihovog prijašnjeg znanja. Ova strategija može također biti korištena za učvršćivanje konceptualnog razumijevanja nakon što su učenici imali priliku učiti o tom konceptu ili ga koristiti.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Frayerov model tipično se koristi za predstavljanje nove terminologije. Međutim, u svrhu formativnog vrednovanja, može biti korišten za usustavljivanje učenikovih prijašnjih znanja o konceptima ili matematičkim terminima prije planiranja nove nastavne jedinice. Prepreke koje mogu otežati učenje mogu biti otkrivene ovom strategijom. Učenikov popunjen Frayerov model pruža startnu točku s operacionalnim definicijama i razumijevanjima dobivenima tijekom prijašnjeg obrazovanja koje potom mogu biti dalje razrađene tijekom razredne diskusije i formalnim objašnjavanjem koncepta.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** U ovoj strategiji krećemo biranjem poznatog koncepta za objašnjavanje Frayerovog modela te demonstriranja kako ispuniti tablicu. Biramo koncept ili riječ koja je ključna za razumijevanje matematičke ideje. Umjesto riječi također može biti izabran simbol ili prikaz, na primjer, simbol % ili slika sa suplementarnim kutovima. Želimo postići da učenici razmišljaju o zadanom konceptu, terminu ili simbolu te je bitno da im dajemo dovoljno vremena za popunjavanje dijagrama. Nakon što učenici popune dijagram, trebamo dopustiti da dijele svoje ideje s ostalim učenicima, modificiraju svoje dijagrame te apsorbiraju nove informacije. Učenici također mogu popunjavati dijagram u paru ili u manjim grupama koje zatim koriste u razrednoj diskusiji o tom konceptu i dorađuju ga novim informacijama.

**Opća svojstva provedbe.** Ova se strategija smatra lakom za korištenje, s niskom vremenskom zahtjevnosću, dok je kognitivni zahtjev za učenike srednji.

**Moguće prilagodbe.** Frayerov model može također biti proširen tako da se od učenika traži da daju vizualni primjer ili osobnu poveznicu. Isto tako, može se središnji krug ostaviti prazan te tražiti od učenika da otkriju koja riječ, simbol, slika ili koncept bi se mogla nalaziti u tom krugu na temelju danog popunjenog Frayerovog dijagrama. Bitno je također da pritom učenici i objasne zašto su odabrali upravo taj odgovor.

**Napomena.** Strategija se ne bi smjela provesti tako da učenici samo popune dijagram. Važan dio ove strategije je razredna diskusija i razmjena ideja s drugim učenicima.

### **3.4.2. Strategija *Riješi i baci***

#### **a) Opis i primjeri primjene strategije**

**Opis strategije.** Strategija *Riješi i baci* anonimna je tehnika koja se koristi s ciljem da učeničko razmišljanje postane vidljivo cijelom razredu. Pruža siguran i zabavan način kojim učeničke ideje postaju javne bez davanja informacija čiji je koji zaključak. Učenicima su dani zadatci za vrednovanje. Nakon što riješe zadatak, učenici zgužvaju papire te se, nakon signala profesora, dobacuju papirima sve do znaka za prestanak. Učenici zatim s razredom dijele odgovor i objašnjenje koje je napisano na papiru koji drži.

#### **Primjeri primjene strategije.**

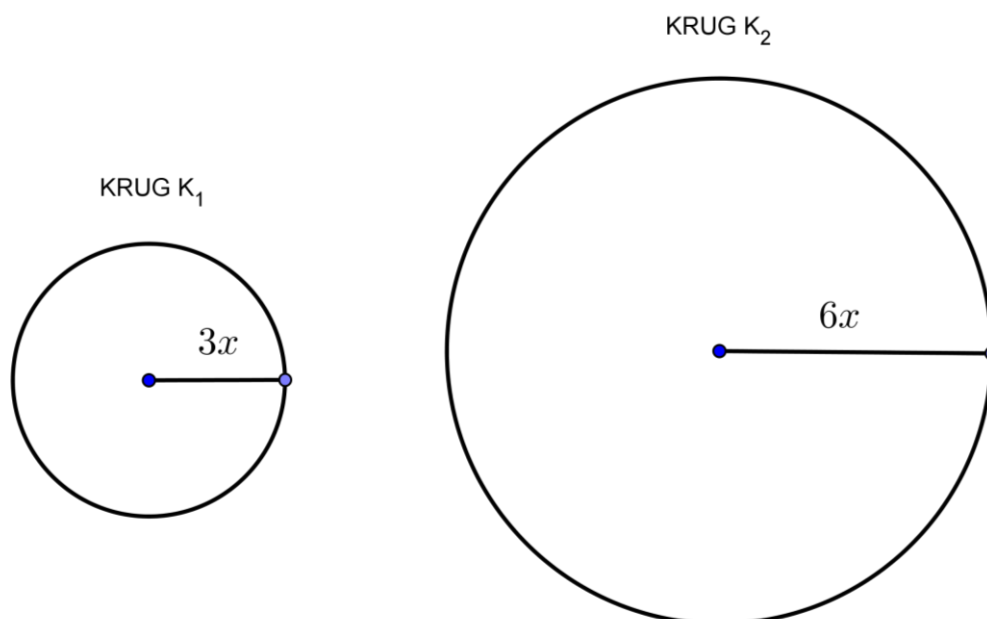
**Primjer 3.4.2.1. *Opseg kruga.*** U danom primjeru, koji je primjeren za učenike sedmog razreda osnovne škole, učenicima je dana slika dvaju kruga s naznačenim polumjerima te su im ponuđena četiri odgovora vezana uz odnos opsega tih krugova. Učenici zaokružuju slovo ispred odgovora za koji smatraju da je točan te ga objašnjavaju. Učenički mogući odgovori naznačeni su zelenom bojom.



Tablica 3.4.2.1. Opseg kruga

**OPSEG KRUGA**

Zaokruži izjavu koja opisuje kako se opseg kruga  $K_1$  odnosi prema opsegu kruga  $K_2$ .



- A Opseg kruga  $K_1$  dvostruko je veći od opsega kruga  $K_2$ .
- B Opseg kruga  $K_1$  jednak je opsegu kruga  $K_2$ .
- C Opseg kruga  $K_2$  je za tri veći od opsega kruga  $K_1$ .
- D Nema dovoljno informacija za uspoređivanje.

**Objasni svoje razmišljanje.**

*Opseg kruga računa se po formuli  $O = 2r\pi$ , gdje je  $r$  polumjer tog kruga.*

*Opseg kruga  $K_1$  jednak je  $O_1 = 2 \cdot 3x \cdot \pi = 6x\pi$ .*

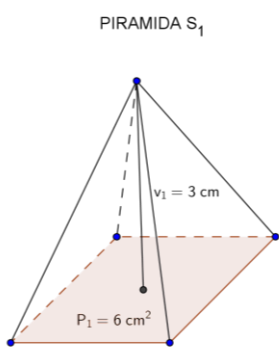
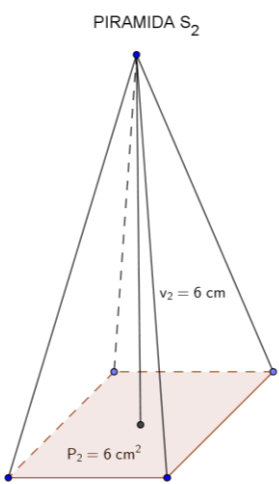
*Opseg kruga  $K_2$  jednak je  $O_2 = 2 \cdot 6x \cdot \pi = 12x\pi$ .*

*Omjer opsega zadanih krugova je  $\frac{O_1}{O_2} = \frac{6x\pi}{12x\pi} = \frac{1}{2}$ .*

*Dakle, opseg kruga  $K_2$  je dvostruko veći od opsega kruga  $K_1$ . Točan odgovor je A.*

**Primjer 3.4.2.2. Volumen piramide.** Primjer je primjeren za učenike drugog razreda srednje škole. Učenicima je ponuđena slika na kojoj se nalaze dvije uspravne piramide baza jednakih površina, ali različitih visina te su ponuđena četiri odgovora vezana uz volumene tih piramida. Učenici trebaju zaokružiti slovo ispred odgovora za koji smatraju da je točan te trebaju obrazložiti svoje zaključivanje. Mogući učenički odgovori naznačeni su zelenom bojom.

Tablica 3.4.2.2. Volumen piramide

| <b>VOLUMEN PIRAMIDE</b>  |  |
|--|--|
|  <p>PIRAMIDA <math>S_1</math><br/><math>v_1 = 3 \text{ cm}</math><br/><math>P_1 = 6 \text{ cm}^2</math></p>  |  <p>PIRAMIDA <math>S_2</math><br/><math>v_2 = 6 \text{ cm}</math><br/><math>P_2 = 6 \text{ cm}^2</math></p> |
| <p>Zaokruži izjavu koja opisuje kako se volumen piramide <math>S_1</math> odnosi prema volumenu piramide <math>S_2</math>.</p> <p><input checked="" type="radio"/> A Volumen piramide <math>S_1</math> dvostruko je manji od volumena piramide <math>S_2</math>.</p> <p><input type="radio"/> B Volumen piramide <math>S_1</math> jednak je volumenu piramide <math>S_2</math>.</p> <p><input type="radio"/> C Volumen piramide <math>S_1</math> za tri je manji od volumena piramide <math>S_2</math>.</p> <p><input type="radio"/> D Nema dovoljno informacija za uspoređivanje.</p> |  |
| <p><b>Obrazloži svoje zaključivanje.</b></p> <p><i>Volumen piramide računa se po formuli <math>V = \frac{1}{3}B \cdot v</math> gdje je <math>B</math> površina baze, a <math>v</math> je duljina visine te piramide. Volumen piramide <math>S_1</math> jednak je <math>V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^3</math>. Volumen piramide <math>S_2</math> jednak je <math>V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 12 \text{ cm}^3</math>. Dakle, volumen piramide <math>S_1</math> dvostruko je manji od volumena piramide <math>S_2</math>. Točan odgovor je A.</i></p>             |  |

**Kako ova strategija potiče učenje?** Strategija *Riješi i baci* uključuje ključnu komponentu konceptualnog učenja i poučavanja – donošenje odluke o izboru odgovora koji najbolje odgovara vlastitom razmišljanju i pružanje razloga zašto je taj odgovor odabran. Prije no što učenici izgužvaju svoj papir i bace ga, moraju razmišljati o danom pitanju, odlučiti se za jedan odgovor i objasniti svoje razmišljanje. Ova tehnika pomaže učenicima shvatiti da je normalno da drugi učenici u razredu imaju drugačije ideje. Pomaže učenicima vidjeti da „krivi“ odgovor može biti jednako vrijedan kao i „točan“ odgovor. Također, pruža priliku da ideje svih učenika postanu javne bez obzira bile one točne ili ne. Isto tako, omogućuje učenicima shvatiti razmišljanja drugih te usporediti svoje ideje s tuđima. Budući da je strategija anonimna, pojedini učenici će biti skloniji otkriti vlastite ideje umjesto davanja sigurnog odgovora za koji misle da učitelj želi čuti, a koji možda nije ono u što oni vjeruju.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Strategija *Riješi i baci* daje učiteljima brzi pregled ideja i objašnjenja koja razred posjeduje. To je dobar način za dobivanje slike učeničkog razmišljanja. Informacije dobivene u toj aktivnosti mogu se koristiti za dizajniranje ciljeva učenja. Aktivnost bi trebala pružati učenicima priliku za testiranje vlastitih ideja te im davati što više informacija koje potkrepljuju ili modificiraju njihovo razmišljanje.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Kod ove strategije, učitelj osmišljava vrednovanje koje od učenika zahtijeva odabir odgovora i pružanje objašnjenja za njega. Učitelj treba na početku podsjetiti učenike da ne pišu svoja imena na papire. Bitno je učenicima dati vrijeme za razmišljanje i pisanje odgovora, ohrabrujući ih pritom da objašnjavaju svoje ideje na najbolji način koji mogu, tako da drugi učenici mogu razumjeti njihovo razmišljanje. Kada su učenici spremni, učitelj daje znak za gužvanje papira u loptu i bacanje drugim učenicima. Učenici bacaju papire sve dok im učitelj ne kaže da prestanu. Bitno je napomenuti učenicima da je papir koji imaju u ruci onaj o kojem će pričati, a ne o odgovoru i objašnjenju koje su oni napisali na svoje papire. Nakon što učenici uhvate papir, učitelj bi im trebao dati dovoljno vremena za proučavanje tuđeg odgovora koji su dobili. Učitelj može koristiti strategiju *Četiri kuta* (točka 3.4.4.) ili tražiti od učenika da dignu ruku za vizualiziranje broja učenika koji su

odabrali iste odgovore. Isto tako, učitelj može podijeliti učenike u manje grupe s obzirom na odgovor koji su odabrali na svojem papiru da diskutiraju o sličnostima i razlikama u objašnjenjima te da zaključke izlažu ostatku razreda. Nakon što su sve ideje pročitane i diskutirane, učitelj može krenuti na obradu planirane teme. Ili, ako je strategija korištena za poticanje razredne diskusije, učitelj može angažirati učenike u odlučivanju čija ideja je najbolja. Ovo je vrijeme kada učenici mogu dijeliti svoje vlastite ideje. Nakon pružanja prilike za razmjenu mišljenja u razredu, učitelj može pitati učenike koliko njih je modificiralo ili potpuno promijenilo svoje mišljenje. Nakon suglasnosti od razreda, odbacuju se ideje koje više nisu prihvatljive. Ako razred prihvaća više od jedne ideje, na učitelju je da odluči kako će istražiti koja je matematički korektna. Bitno je pružati učenicima prilike za korištenje koncepata i procedura koje su im poznate u svrhu testiranja svojih ideja ili pretraživanja informacija koje će im pomoći u otkrivanju točnog odgovora.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se visokom, s niskom vremenskom zahtjevnosti, dok je kognitivni zahtjev na učenike srednji.

**Moguće prilagodbe.** Ova strategija može se modificirati tako da učenici savijaju svoj papir napola i dodaju ga okolo sve dok učitelj ne daje znak za prestanak. Može također biti modificirana tako da svi učenici ubacuju svoje papire u kutiju ili kapu. Kada je kutija puna, svaki učenik izvlači jedan papir te čita odgovor i objašnjenje na tom papiru. Isto tako, učenici mogu izrađivati i grafički prikaz svojih odgovora tako da, nakon što pročitaju odgovor na izvučenom papiru, nose ljepljivi papirić do zida te ga lijepe uz odgovarajuće slovo koje je zaokruženo na papiru. Taj vizualni prikaz može biti popraćen diskusijom o različitim objašnjenjima na papirima.

**Napomena.** Ovo je zabavna i privlačna strategija pa se zbog tog razloga ne bi trebala koristiti prečesto da ne bi izgubila svoju efikasnost. Bitno je podsjetiti učenike na poštivanje anonimnosti iako možda prepoznaju nečiji rukopis ili ako dobiju svoj papir natrag. Isto tako, bitno je upozoriti učenike na izbjegavanje omalovažavanja i podcjenjivanja tuđih odgovora.

### 3.4.3. Strategija *Kartice postignuća*

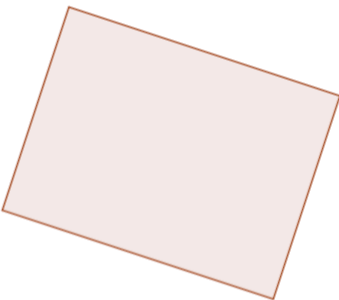
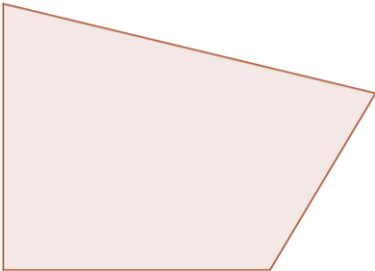
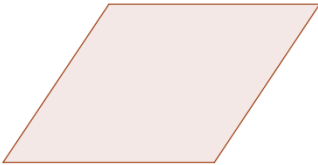
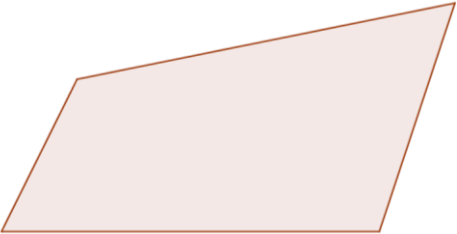
#### a) Opis i primjeri primjene strategije

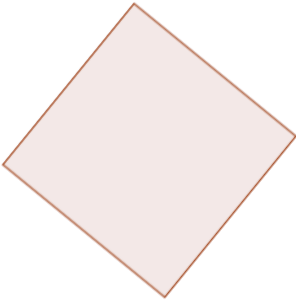
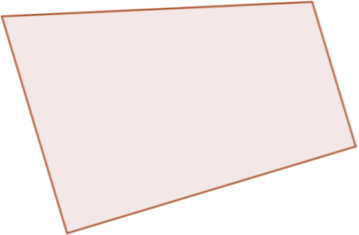
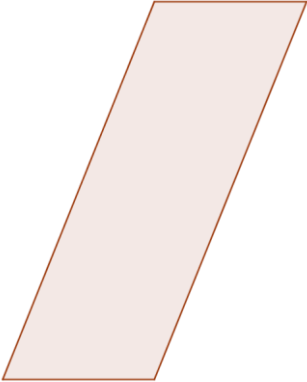
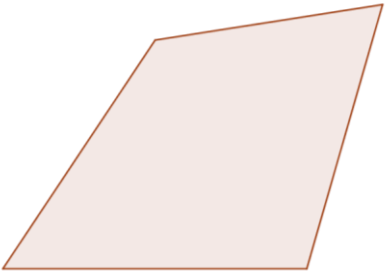
**Opis strategije.** Ova strategija potiče učenike na razvijanje vlastitih definicija ili koncepata pomoću razmatranja obilježenih kartica koje pokazuju primjere i protuprimjere promatranog koncepta. Uspoređujući različite karakteristike i attribute danih primjera i protuprimjera, učenici identificiraju značajke koncepta te primjenjuju uočene značajke za kreiranje definicije i dodatnih primjera i protuprimjera.

#### **Primjeri primjene strategije.**

**Primjer 3.4.3.1. Paralelogram.** Dani primjer primjeren je učenicima šestog razreda osnovne škole. Učenici dobivaju primjere i protuprimjere paralelograma pomoću kojih, uočavajući njegova obilježja, dolaze do definicije paralelograma. Učenička razmišljanja naznačena su zelenom bojom.

Tablica 3.4.3.1. Paralelogram.

| PRIMJERI  | PROTUPRIMJERI  |
|---|--|
|  |  |
|  |  |

| PRIMJERI   | PROTUPRIMJERI   |
|--|---|
|   |   |
|  |  |

Učenici će obrazložiti:

*U svim primjerima paralelograma uočavam da su nasuprotne stranice četverokuta paralelne. Kod protuprimjera uočavam da je jedan par nasuprotnih stranica paralelan ili nema paralelnih nasuprotnih stranica. Dakle, bitno svojstvo paralelograma je da su nasuprotne stranice međusobno paralelne. Stoga je paralelogram četverokut koji ima dva para nasuprotnih paralelnih stranica.*

**Primjer 3.4.3.2. Iracionalna jednadžba.** Dani primjer primjeren je učenicima prvog razreda srednje škole. Učenici dobivaju primjere i protuprimjere iracionalnih jednadžbi te, na temelju njih, proučavajući obilježja, dolaze do definicije iracionalnih jednadžbi. Definicija do koje bi učenici trebali doći označena je zelenom bojom.

Tablica 3.4.3.2. Iracionalna jednadžba

| PRIMJERI                                  | PROTUPRIMJERI              |
|---|----------------------------|
| $\sqrt{2-x} = \sqrt{x+5}$                 | $x + 7\sqrt{7} - 2 = 0$    |
| $\sqrt{3x+2} + x = 0.7$                   | $2x + \frac{1}{7} = 7x$    |
| $\sqrt{5 + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} + x$ | $x^2 + 2x - 0.3 = 0$       |
| $2 + \sqrt{x-16} = \sqrt{x}$              | $x + 2 = 7x - \frac{1}{3}$ |
| $2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6} = \sqrt{x+10}$  | $7 + \sqrt{2} = x + 2$     |

Učenici se obrazložiti:

*U svim primjerima iracionalnih jednadžbi nepoznanica se nalazi pod znakom korijena. U protuprimjerima nepoznanica nikad nije pod znakom korijena. Dakle, definicija iracionalne jednadžbe mogla bi glasiti:*

*Iracionalna jednadžba je jednadžba kod koje se nepoznanica nalazi u algebarskom izrazu oblika polinoma koji je na bar jednom mjestu pod znakom korijena.*

#### **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija unapređuje učenje?** U ovoj strategiji dolazi do definiranja obilježja pojma razmatranjem primjera i protuprimjera. Pritom su potrebne različite kognitivne vještine koje se koriste za pamćenje pravila ili definicija. Učenici trebaju

pažljivo promotriti karakteristike ili atribute brojeva ili objekta koji su dani. U ovoj strategiji od učenika se traži stvaranje vlastitih pravila i definicija te dodatnih primjera i protuprimjera. Tražeći od učenika izlaganje vlastitih pravila, definicija i dodatnih primjera, ova strategija im pomaže u učenju generaliziranja primjera te u kritičkom mišljenju koje koriste tijekom učenja matematike.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Razumijevanje matematičkih koncepata i terminologije presudno je za učenikove sposobnosti razumijevanja i rješavanja problema. Ova strategija može pomoći učiteljima kod procjenjivanja granice do koje su učenici sposobni generirati pravila i definicije kada uče o novim konceptima ili matematičkim terminima.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Ova strategija koristi se nakon što su učenici upoznati s konceptom ili terminom, ali prije nego što im je dana njegova formalna definicija. Od učenika se traži razmišljanje o prijašnjim znanjima o danom konceptu te da, proučavajući primjere i protuprimjere, osmisle svoje pravilo ili definiciju. Učitelj prvo treba identificirati koncept ili matematički termin za koji želi saznati koliko dobro su učenici sposobni generirati pravilo ili definiciju. Nakon toga, učitelj osmišljava listu primjera i protuprimjera i prezentira ih učenicima na karticama koje oni razvrstavaju na odgovarajući način. Učenici mogu raditi samostalno, u paru ili u manjim grupama. Učitelj može izdvojiti neke atribute za razrednu diskusiju te razvijati opću suglasnost oko pravila ili definicije.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se srednjom sa srednjom vremenskom zahtjevanošću. Kognitivni zahtjev na učenike smatra se srednjim.

**Moguće prilagodbe.** Ova strategija može biti korištena sa strategijom *Fruyerov model* opisanom u točki 3.4.1. Posebno je korisna za učenike kojima su potrebni vizualni znakovi i tragovi. Učenicima koji nisu sposobni identificirati atribute na danom setu kartica, učitelj može dati dodatne primjere i protuprimjere.

**Napomena.** Ova strategija može biti korištena za prisjećanje prijašnjeg znanja, no ipak ju je bolje koristiti za kontroliranje koliko su dobro učenici naučili pojedine koncepte ili



koliko dobro mogu razvijati svoju definiciju ili pravilo. Bitno je paziti na vrijeme kako bi se učenicima pružila i povratna informacija.

#### 3.4.4. Strategija *Četiri kuta*

##### a) Opis i primjeri primjene strategije

**Opis strategije.** U strategiji *Četiri kuta* koriste se pitanja s ponuđenim odgovorima za identificiranje i grupiranje učenika koji imaju slične odgovore na njih. Učenici odlaze u kut učionice namijenjen za njihov odgovor ili sličan način razmišljanja.

##### **Primjeri primjene strategije.**

**Primjer 3.4.4.1. Zbrajanje cijelih brojeva.** Ovaj primjer primjeren je učenicima šestih razreda osnovne škole. Učenicima su dani nastavni listići na kojima se nalazi pitanje i ponuđeni odgovori. Učenik odabire jedan odgovor, pisano ga obrazlaže te odlazi u kut koji je označen istim slovom kao i njihov odgovor. Učenički odgovor u primjeru naznačen je zelenom bojom.

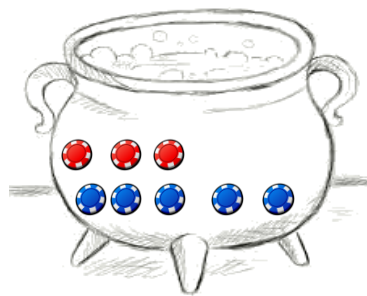
Tablica 3.4.4.1. Zbrajanje cijelih brojeva.

|   |                  |
|---|------------------|
| <b>Zbroj pozitivnog i negativnog cijelog broja je negativan broj.</b> |                  |
| A   | slažem se        |
| B   | ne slažem se     |
| <input checked="" type="radio"/>                                      | C ovisi          |
| D   | nisam siguran/na |

**Objašnjenje:**

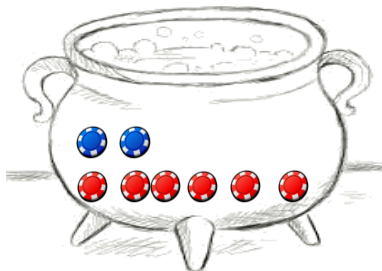
*Primjer:*

$$3 + (-5) = -2$$



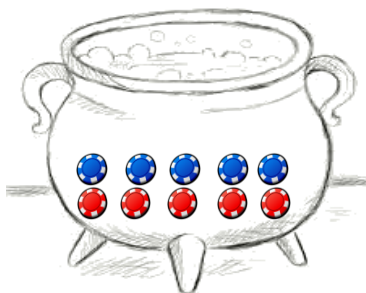
*Zbroj pozitivnog i negativnog cijelog broja je negativan cijeli broj.*

$$6 + (-2) = 4$$



*Zbroj pozitivnog i negativnog broja je pozitivan cijeli broj.*

$$5 + (-5) = 0$$



*Zbroj suprotnih brojeva je nula.*

*Dakle, zbroj pozitivnog i negativnog cijelog broja može biti ili pozitivan ili negativan cijeli broj ili nula.*

*Točan odgovor je C.*

**Primjer 3.4.4.2. *Mnogokuti.*** Dani primjer primjeren je učenicima sedmih razreda osnovne škole. Učenici zaokružuju slovo uz jedan ponuđeni odgovor vrednujući danu tvrdnju vezanu uz zbroj veličina vanjskih kutova proizvoljnog konveksnog mnogokuta. Učenici također obrazlažu svoj odgovor. Učenička moguća obrazloženja i odgovor označeni su zelenom bojom.

Tablica 3.4.4.2. Mnogokuti.

**Zbroj veličina svih vanjskih kutova nije isti za sve konveksne mnogokute.**

A slažem se

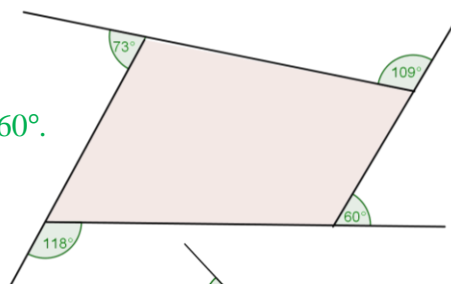
**B** ne slažem se

C ovisi

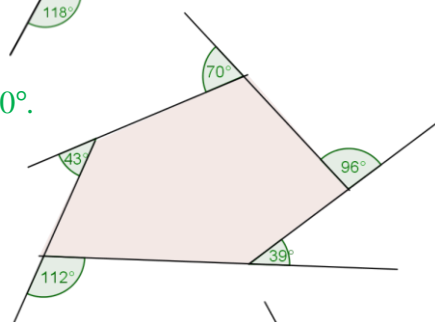
D nisam siguran/na

**Objašnjenje:**

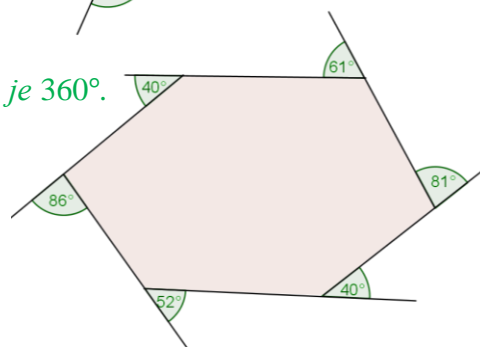
*Zbroj vanjskih kutova konveksnog četverokuta je  $360^\circ$ .*



*Zbroj vanjskih kutova konveksnog peterokuta je  $360^\circ$ .*



*Zbroj vanjskih kutova konveksnog šesterokuta je  $360^\circ$ .*



*Zbroj vanjskih kutova svakog konveksnog mnogokuta iznosi  $360^\circ$ .*

*Dakle, odgovor je B.*

**Primjer 3.4.4.3. Ortocentar trokuta.** Dani primjer primjeren je učenicima prvih razreda srednje škole. Učenici dobivaju nastavne listiće na kojima se nalazi tvrdnja te su

ponuđena četiri odgovora. Tvrdnja je vezana uz ortocentar trokuta. Učenici zaokružuju jedan odgovor, tj. odlučuju je li tvrdnja istinita, neistinita ili je u nekim situacijama istinita, a u drugim neistinita ili trebaju zaokružiti da nisu sigurni. Učenici daju i objašnjenje svojeg odgovora. Mogući učenički odgovor naveden je zelenom bojom.

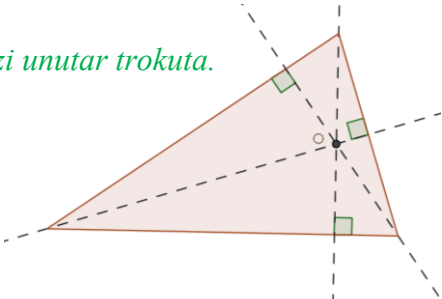
Tablica 3.4.4.3. Ortocentar trokuta

**Ortocentar trokuta uvijek se nalazi unutar trokuta.**

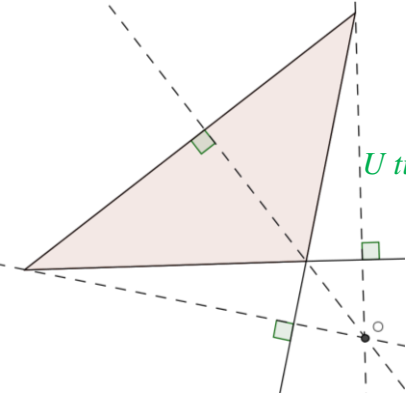
A slažem se  
B ne slažem se  
**C** ovisi  
D nisam siguran/na

**Objašnjenje:**

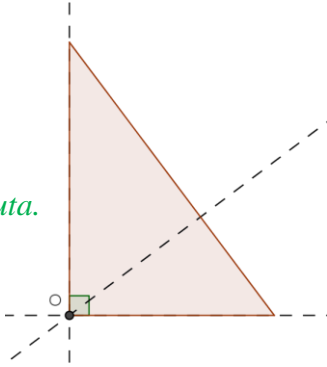
*U šiljastokutnom trokutu ortocentar trokuta se nalazi unutar trokuta.*



*U tupokutnom trokutu ortocentar se nalazi izvan trokuta.*



*U pravokutnom trokutu ortocentar se nalazi u vrhu pravog kuta.*



*Dakle, ortocentar trokuta može se nalaziti unutar trokuta, izvan trokuta ili u vrhu trokuta.*

*Točan odgovor je C.*

**Primjer 3.4.4.4. Geometrija prostora.** Dani primjer primjeren je učenicima drugih razreda srednje škole. Učenicima je dana tvrdnja vezana uz određenje ravnine. Učenici odlučuju slažu li se s tvrdnjom ili ne ili to ovisi o matematičkoj situaciji. Isto tako, učenici mogu zaokružiti ponuđen odgovor „nisam siguran“ ukoliko nisu sigurni vrijedi li tvrdnja ili ne. Učenici također obrazlažu svoja razmišljanja. Mogući učenički odgovori naznačeni su zelenom bojom.

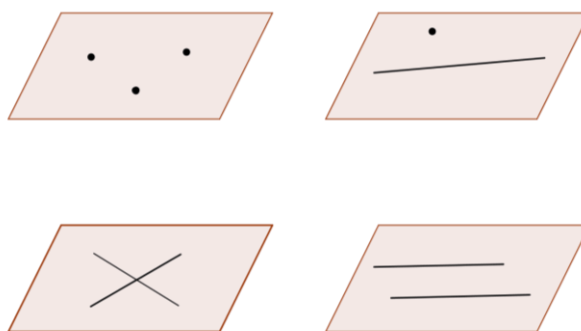
Tablica 3.4.4.4. Geometrija prostora

**Ravnina ne može biti određena s dva mimosmjerna pravca.**

- A slažem se
- B ne slažem se
- C ovisi
- D nisam siguran

**Objašnjenje:**

*Ravnina je određena trima točkama koje ne pripadaju jednom pravcu, pravcem i točkom koja ne pripada tom pravcu, dvama pravcima koji se sijeku ili dvama pravcima koje se ne podudaraju.*



*Dva mimosmjerna pravca ne pripadaju istoj ravnini. Dakle, tvrdnja nije istinita. Točan odgovor je A.*

## **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija potiče učenje?** Strategija *Četiri kuta* pruža učenicima priliku da njihove ideje postanu javne. Susretanjem u kutu s učenicima koji imaju slične ideje, učenici mogu dublje razjasniti svoja razmišljanja prije povratka na mjesto i upuštanja u razrednu diskusiju. Članovi u pojedinom kutu mogu se također grupirati u grupu te braniti svoje ideje pred ostatkom razreda. U procesu objašnjavanja svojeg mišljenja i dobivanja povratnih informacija od učitelja i ostatka razreda, učenici mogu primijetiti praznine ili nedosljednosti u vlastitim razlozima te promijeniti svoje ideje u novije prihvatljivije informacije.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Učitelji vizualno mogu vidjeti koje su odgovore pojedini učenici odabrali, kao i najčešći odabrani odgovor. Cirkulirajući kutovima dok učenici razmjenjuju svoja mišljenja, učitelj dobiva uvid u njihove ideje, ideje za koje u to vrijeme učenici vjeruju da su korektne. Te dobivene informacije koriste se za prilagodbu poučavanja tako da pomaže učenicima postepeno se micati prema korektnim matematičkim idejama i mišljenjima.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Učitelj treba birati vrednovanje koje sadrži pitanja višestrukog odgovora koji uključuju i objašnjenje. Isto tako, kutovi u učionici označavaju se slovima koja odgovaraju pojedinom odgovoru. Učitelj dijeli učenicima pitanje na koje odgovaraju i objašnjavaju ga. Nakon toga, odlaze u kut učionice koji odgovara njihovom odabranom odgovoru. Bitno je da učitelj osigura dovoljno vremena svakom učeniku za razmjenu i diskusiju o svojim mišljenjima s drugim učenicima koji su odabrali taj isti odgovor. Nakon toga, učenici se mogu vratiti na svoja mjesta, rasporediti se u manje grupe te voditi raspravu u razredu. Druga alternativa je da učenici u istom kutu čine grupu ili nekoliko grupa te svoja razmišljanja prezentiraju ostalim grupama. Nakon što učenici čuju određene argumente drugih grupa, mogu se micati u druge kutove. Izazov je dobiti sve učenike u jednom kut (idealno, u onom koji prezentira ispravan odgovor).

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se visokom s niskom vremenskom zahtjevanosću. Kognitivni zahtjev na učenike smatra se visokim.

**Moguće prilagodbe.** Učitelj može koristiti različite dijelove učionice ili stolove za više od četiri ponuđena odgovora ili može koristiti samo tri kuta za pitanja koja uključuju manje od četiri ponuđena odgovora.

**Napomena.** Za ovu strategiju bitno je stvoriti razredno okruženje u kojem se učenici osjećaju slobodnima izražavati i braniti svoja mišljenja i ideje bez utjecaja tuđih odgovora.

### 3.4.5. Strategija *Opravdaj istinite-neistinite tvrdnje*

#### a) Opis i primjeri primjene strategije

**Opis strategije.** Strategija *Opravdaj istinite-neistinite tvrdnje* daje niz tvrdnji koje učenici proučavaju. Učenici koriste svoje znanje o matematičkim konceptima i procedurama za analiziranje valjanosti tvrdnji. Učenici također opisuju svoja zaključivanja zašto je neka izjava istinita ili neistinita.

#### Primjeri primjene strategije.

**Primjer 3.4.5.1. Linearna jednadžba.** Dani primjer primjeren je učenicima šestih razreda osnovne škole. Učenicima je dan nastavni listić s pet matematičkih tvrdnji vezanih uz linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Učenici odlučuju je li tvrdnja istinita ili neistinita te obrazlažu svoja zaključivanja. Učenički odgovori naznačeni su zelenom bojom.

Tablica 3.4.5.1. Linearna jednadžba.

| Prouči prirodne brojeve $x$ i $y$ za koje je $x = 7 + y$ . |          |            |   |
|--|----------|------------|---|
| TVRDNJA  | ISTINITA | NEISTINITA | Obrazloženje  |
| $x$ je uvijek veći od $y$ .                                | +        |            | <i>Budući da su <math>x</math> i <math>y</math> prirodni brojevi, <math>x</math> je uvijek za 7 veći od <math>y</math>, tj. <math>x</math> je veći od <math>y</math>.</i> |

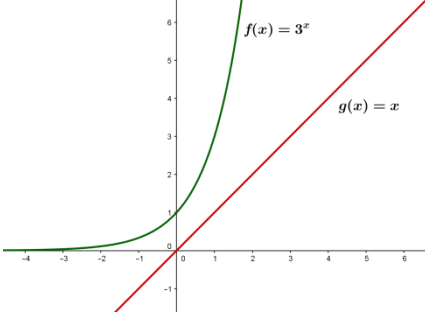
| Prouči prirodne brojeve $x$ i $y$ za koje je $x = 7 + y$ . |          |            |  |
|--|----------|------------|--|
| TVRDNJA  | ISTINITA | NEISTINITA | Obrazloženje   |
| $x = 7$  |          | +          | <i>Ako je <math>x = 7</math> onda je <math>7 = 7 + y</math> iz čega slijedi da je <math>y = 0</math>. Budući da je <math>y</math> prirodan broj, <math>x</math> ne može biti jednak 7.</i> |
| $x$ i $y$ mogu biti jednaki.                               |          | +          | <i>Broj <math>x</math> je uvijek veći za 7 od broja <math>y</math>. Dakle, <math>x</math> i <math>y</math> ne mogu biti jednaki.</i>   |
| $x$ ne može biti manji od 12.                              |          | +          | <i>Budući da je <math>y \in \mathbb{N}</math>, najmanji može biti 1. U tom slučaju, <math>x = 8</math>. Dakle, <math>x</math> može biti manji od 12.</i>                                   |
| Ako je $y$ neparan, onda je $x$ paran broj.                | +        |            | <i>Broj 7 je neparan. Zbroj dvaju neparnih brojeva je paran broj. Dakle, ako je <math>y</math> neparan, onda je <math>x</math> paran.</i>  |

**Primjer 3.4.5.2. Potencije i logaritmi.** Dani primjer primjeren je učenicima drugih razreda srednje škole. Učenici dobivaju matematičke tvrdnje te odlučuju jesu li one istinite ili neistinite i objašnjavaju svoja razmišljanja. Mogući učenički odgovori dani su zelenom bojom.

Tablica 3.4.5.2. Potencije i logaritmi.

| Prouči jednakost $3^x = y$ .                          |          |            |  |
|---|----------|------------|--|
| TVRDNJA   | ISTINITA | NEISTINITA | Obrazloženje   |
| Jednakost je ekvivalentna jednakosti $\log_3 x = y$ . |          | +          | <i>Dana jednakost ekvivalentna je jednakosti <math>\log_3 y = x</math>. Logaritam broja po bazi 3 je eksponent kojim treba potencirati bazu 3.</i> |



| Prouči jednakost $3^x = y$ .                               |          |            |   |
|--|----------|------------|---|
| TVRDNJA  | ISTINITA | NEISTINITA | Obrazloženje  |
| Ako je $x \in \mathbb{Z}$ , onda je i $y \in \mathbb{Z}$ . |          | +          | <i>Protuprimjer:</i><br>ako je $x = -2$ , onda je $y = \frac{1}{9}$ što nije cijeli broj.   |
| $x$ je uvijek veći od $y$ .                                |          | +          | <i>Protuprimjer:</i><br>ako je $x = -3$ onda je $y = \frac{1}{27}$ .<br>Dakle, $x < y$ .  |
| $x$ i $y$ ne mogu biti jednaki.                            | +        |            |  <p><i>Grafovi funkcija <math>f(x) = 3^x</math> i <math>g(x) = x</math> se ne sijeku, tj. nemaju zajedničkih točaka pa <math>x</math> i <math>y</math> ne mogu biti jednaki.</i></p> |

## b) Analiza strategije

**Kako ova strategija potiče učenje?** Strategija *Opravdaj istinite-neistinite tvrdnje* potiče individualni rad ili rad u manjim grupama učenika te pomaže učenicima aktivirati svoja razmišljanja o pojedinom matematičkom konceptu ili procesu. Štoviše, ova strategija traži važne matematičke vještine pretpostavljanja, dokazivanja i demonstriranja istinitosti tvrdnje u svim slučajevima. Podržavanje ili pobijanje tvrdnji potiče učenike na korištenje induktivnog i deduktivnog zaključivanja.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Ova strategija koristi se za ispitivanje učenikovih postojećih ideja, uključujući njihovu sposobnost branjenja ili opovrgavanja

matematičkih tvrdnji. Može se koristiti u paru ili individualno, u manjim grupama ili u razrednoj diskusiji na početku, tijekom ili na kraju nastavne cjeline. Bitno je na učitelj pažljivo sluša dok učenici međusobno diskutiraju, argumentiraju i razmjenjuju ideje te da pritom uočava učenikove prednosti i nedostatke u deduktivnom i induktivnom zaključivanju koje će možda trebati dodatno ojačati poučavanjem. Na primjer, svi učenici bi trebali razumjeti da jedan protuprimjer pokazuje da je tvrdnja neistinita, a stariji učenici trebali bi razumjeti da nalaženje više primjera na kojima tvrdnja vrijedi ne pokazuje da je tvrdnja istinita za sve slučajeve. Isto tako, pažljivo slušanje učenika može pokazivati područja u kojima su učenici još nesigurni, što inducira potrebu za dodatnim poučavanjem.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Učitelj dijeli učenicima ili grupi nastavne listiće s matematičkim tvrdnjama. Ova strategija može također biti provedena usmeno, objavljivanjem tvrdnji na grafoskopu koje tada učenici diskutiraju u grupama. Učenici diskutiraju i opravdavaju svaku tvrdnju, jednu po jednu, pokušavajući doći do argumenata koji pokazuju je li tvrdnja istinita ili neistinita te opravdavaju svoje razmišljanje.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se srednjom, sa srednjom vremenskom zahtjevanosću. Kognitivni zahtjev na učenike smatra se srednjim do visokim.

**Moguće prilagodbe.** Učitelj može postaviti tvrdnje na grafoskop te ih naglas čitati. Za mlađe učenike ne preporuča se koristiti više od tri tvrdnje.

**Napomena.** Učitelj bi trebao izbjegavati očite izjave. Korištene izjave učenike trebaju poticati na razmišljanje.

### 3.4.6. Strategija *Slika govori tisuću riječi*

#### a) Opis i primjeri primjene strategije

**Opis strategije.** U ovoj strategiji učenike se fotografira za vrijeme matematičkog istraživanja. Nakon toga, učenicima se daju te fotografije te se od njih traži opisivanje aktivnosti na njima. Učenici ispod fotografije zapisuju što su radili i što su naučili kao rezultat te aktivnosti.

#### **Primjeri primjene strategije.**

**Primjer 3.4.6.1. Oplošje kugle.** Dani primjer primjeren je učenicima osmih razreda osnovne škole. Učenicima su dane fotografije na kojima se nalaze oni tijekom aktivnosti pomoću koje su otkrivali oplošje kugle. Učenici komentiraju fotografije te opisuju što su radili i što su naučili. Mogući učenički odgovori naznačeni su zelenom bojom.

Slika 3.4.6.1. Oplošje kugle



Mogući učenički komentar:

*Učiteljica je parovima dijelila prepolovljene naranče. Marko i ja radili smo zajedno u paru. Ja sam napravio otiske na papiru i ocrtao ih olovkom, a Marko je zatim ogulio naranču. Te otiske popunjavali smo djelićima narančine kore. Marko je rekao da ćemo popuniti oko 6 otisaka, ali ja sam bio uvjeren da ćemo uspjeti popuniti samo tri. Na*

*kraju, popunili smo četiri otiska. Ja nisam znao što to znači, no Marko mi je objasnio da kore ustvari čine oplošje kugle i da to što smo popunili četiri otiska govori da je oplošje četiri puta veće od površine kruga. No, nismo bili sigurni kolike su površine tih krugova. Tada sam se sjetio da je naranča bila prepolovljena napola pa možemo zaključiti da je polumjer kruga jednak polumjeru kugle. Dakle, došli smo do zaključka da je oplošje kugle jednako  $4r^2\pi$  gdje je  $r$  radijus kugle. Marko i ja prvi smo došli do tog zaključka te smo dobili naranče za nagradu.*

**Primjer 3.4.6.2. Volumen stošca.** Dani primjer primjeren je učenicima drugih razreda srednje škole. Učenicima je dana fotografija na kojoj se oni nalaze i koja je fotografirana tijekom aktivnosti kojom su otkrili formulu za volumen stošca. Primjer učeničkog komentara dan je zelenom bojom.

Slika 3.4.6.2. Volumen stošca



Učenički mogući komentar:

*Nastavnica nam je podijelila posudu u obliku valjka i posudu u obliku stošca. Ivana i ja radile smo zajedno. Tijekom te aktivnosti trebale smo otkriti koliki je volumen stošca u odnosu na volumen valjka baze jednake površine i jednake visine. Mjerenjem smo utvrdile da posude imaju jednake visine i baze jednakih površina. Ivana se sjetila da smo*

*tu formulu učili u osnovnoj školi, no nismo je se mogle sjetiti. Zadatak nam je bio da stožac napunimo kukuruzom te prebacujemo taj kukuruz u valjak. Ja sam bila uvjerena da će nam za punjenje valjka trebati dva napunjena stošca. Ivana je rekla da ona misli da bi nam moglo trebati i četiri punjenja stošca. No, ni jedna od nas nije bila u pravu. Uspjele smo valjak napuniti s tri stošca. Ja sam tada zaključila da je volumen stošca tri puta manji od volumena valjaka. Od tada, kada računam volumen stošca sjetim se te aktivnosti te znam da je traženi volumen jednak trećini volumena valjka baze iste površine i iste visine. Više nikad mi se nije desilo da zaboravim onu  $\frac{1}{3}$  u formuli za volumen stošca.*

## **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija potiče učenje?** Učenici vole vidjeti sebe na fotografijama te imaju veći angažman i intrinzičnu želju za objašnjavanjem što se dogodilo na slici kada su dio nje. Traženjem od učenika komentiranje fotografije na kojoj se nalaze, potiče ih se na istraživanje, pomaže im se u aktiviranju svojih mišljenja o matematici te ih se potiče na povezivanje bitnih koncepata i procedura s iskustvom koje je prikazano na fotografiji i koje utječe na njihovo učenje. Ova strategija također može poticati učenike koji nemaju volje na detaljnijim pristupom matematičkom učenju jer su oni prikazani na fotografiji.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Periodično fotografiranje učenika za vrijeme matematičkog istraživanja i ostalih aktivnosti pruža učiteljima i razredu dokumentirani put kako se učeničke ideje i vještine razvijaju tijekom matematičke istrage. Fotografije mogu biti korištene za započinjanje razrede diskusije i istraživanje novih ideja. Fotografije potiču na razmišljanje učenika o trenutku u kojem je fotografija nastala. Učitelj može tražiti komentiranje fotografije i opisivanje radnji koje su radili, zašto su to radili i što su naučili u tom trenutku. Time učitelji mogu bolje razumjeti što učenici dobivaju od aktivnosti te dobivaju informacije koje koriste za modifikaciju tih aktivnosti. Ako učenici ne mogu opisati što su naučili, onda to može biti znak da cilj aktivnosti nije bio jasan. Isto tako, komentari uz fotografiju učitelju pokazuju kako se razvija učeničko konceptualno razumijevanje tijekom istraživanja te što bi se moglo učiniti drugačije kako bi se pomoglo učenicima u boljem razumijevaju. Fotografije mogu biti korištene i za

poticanje razredne diskusije koja pruža mogućnosti ispitivanja dubljih učeničkih ideja, procesa razmišljanja i strategija rješavanja problema. Na kraju, fotografije mogu biti stavljene na zid kao podsjetnik na ono što su radili.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Digitalne kamere mogu brzo i lako fotografirati učenike. Ova strategija može se koristiti tijekom bilo kojeg učeničkog matematičkog istraživanja. Efektivnije je ako se fotografira kada su učenici uzbuđeni oko istraživanja ili imaju „aha“ moment tijekom aktivnosti. Dobro je da učitelj potiče učenike da ga zovu kada misle da su nešto važno napravili ili otkrili. Nakon fotografiranja, učitelj ispisuje slike na papir ostavljajući pritom dovoljno mjesta ispod slike za učeničko opisivanje aktivnosti. Učitelj bi trebao poticati učenike na što detaljnije opisivanje što su radili, mislili i učili kada je fotografija nastala. Kako dodatak, učitelj može dati i povratne informacije na fotografiju i opise. Povratne informacije mogu biti dane samo pojedinim učenicima ili grupi učenika prikazanih na fotografiji. Grupna povratna informacija pruža učenicima mogućnost za diskusiju.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije ovisi o dostupnosti fotoaparata i pisača. Vremenska zahtjevanost je srednja, dok se kognitivni zahtjev na učenike smatra niskim.

**Moguće prilagodbe.** Mlađi učenici mogu diktirati svoja zapažanja učitelju. Ako su dostupna računala, učenici mogu komentirati fotografije na njemu te ih dijeliti na zajedničkim internim internetskim stranicama.

**Napomena.** Učitelju će možda biti teško fotografirati svakog učenika tijekom svake aktivnosti. U tom slučaju, bitno je da je svaki učenik na kraju nastavne cjeline imao barem jednom priliku vidjeti se na fotografiji i komentirati ju. Važno je napomenuti da učitelj treba slijediti školsku politiku za fotografiranje učenika i korištenje tih fotografija.

### 3.4.7. Strategija *Popis terminologije*

#### a) Opis i primjeri strategije

**Opis strategije.** Ova strategija je kratka i slična upitnicima koji pokazuju učeničko poznavanje matematičke terminologije. Učenici biraju odgovor baziran na njihovoj razini poznavanja matematičkog termina. Ako učenici tvrde da su upoznati s tim terminom, od njih se traži pružanje opisa koji pokazuju razmjer njihovog konceptualnog razumijevanja.

#### Primjeri primjene strategije.

**Primjer 3.4.7.1. Razlomci.** Primjer je primjeren učenicima petih razreda osnovne škole. Učenicima su ponuđeni matematički pojmovi vezani uz razlomke. Učenici trebaju označiti jedan od ponuđenih odgovora koji se odnose na razinu poznavanja danog matematičkog termina. Ukoliko učenici razumiju pojam, daju svoje objašnjenje. Mogući učenički odgovor naznačen je zelenom bojom

Tablica 3.4.7.1. Razlomci.


| NAZIVNIK   | BROJNIK   | PRAVI RAZLOMAK   |
|--|---|--|
| <input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.<br><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.<br><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.<br><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br><i>Na primjer, u razlomku <math>\frac{2}{3}</math>, 3 je nazivnik. Dakle, nazivnik je broj ispod razlomačke crte. On određuje naziv dijelova na koje je podijeljena cjelina.</i> | <input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.<br><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.<br><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.<br><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br><i>Na primjer, u razlomku <math>\frac{2}{3}</math>, 2 je brojnik. Dakle, brojnik je broj iznad razlomačke crte. Brojnik označava broj jednakih dijelova neke cjeline.</i> | <input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.<br><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.<br><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.<br><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br><i>Pravi razlomak je razlomak kojem je brojnik manji od nazivnika. Na primjer, <math>\frac{3}{5}</math> je pravi razlomak.</i> |

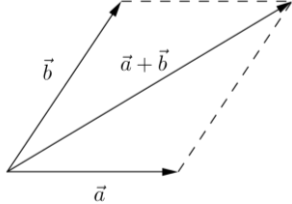
|   |  |  |
|---|--|--|
| <p style="text-align: center;"><b>NEPRAVI RAZLOMAK</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/><i>Nepрави je razlomak u kojem je brojnik veći od nazivnika. Na primjer, nepрави razlomak je <math>\frac{8}{3}</math>.</i></p>   | <p style="text-align: center;"><b>LAŽNI RAZLOMAK</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/><i>Ako je brojnik razlomka višekratnik nazivnika, onda je taj razlomak prirodan broj i takve razlomke nazivamo lažni razlomci. Na primjer, razlomak <math>\frac{8}{2}</math> je lažni razlomak jer je 2 višekratnik broja 8.</i></p>  | <p style="text-align: center;"><b>EKVIVALENTNI RAZLOMCI</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/><i>Razlomci koji imaju različít zapis, ali jednaku vrijednost su ekvivalentni razlomci. Primjer, razlomci <math>\frac{1}{2}</math> i <math>\frac{2}{4}</math> su ekvivalentni.</i></p> |
| <p style="text-align: center;"><b>PROŠIRIVANJE RAZLOMKA</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/><i>Razlomak proširujemo tako da mu brojnik i nazivnik pomnožimo istim prirodnim brojem različítim od 1. Prošireni razlomak i početni razlomak su ekvivalentni. Primjer: <math>\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}</math></i></p> | <p style="text-align: center;"><b>SKRAĆIVANJE RAZLOMKA</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/><i>Razlomak skraćujemo tako da brojnik i nazivnik podijelimo istim prirodnim brojem različítim od 1. Skraćeni razlomak i početni razlomak su ekvivalentni. Razlomak možemo skraćivati samo zajedničkim djeljiteljem brojnika i nazivnika. Primjer: <math>\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}</math></i></p> |  |



**Primjer 3.4.7.2. Vektori.** Dani primjer primjeren je učenicima trećih razreda srednje škole. Primjer se odnosi na poznavanje pojmova vezanih uz pojam vektora. Učenici označavaju jesu li ikad čuli za pojedini pojam, znaju li koje je njegovo značenje te mogu li ga opisati. Učenici označavaju jedan ponuđeni odgovor koji se odnosi na njihovu razinu poznavanja danog matematičkog pojma. Ukoliko znaju što pojam znači, daju kratko objašnjenje. Mogući učenički odgovor označen je zelenom bojom.

Tablica 3.4.7.2. Vektori.

| <b>JEDINIČNI VEKTOR</b>   | <b>SUPROTNI VEKTORI</b>  | <b>NULVEKTOR</b>   |
|---|--|--|
| <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:</p> <p><i>Za vektor <math>\vec{a}</math> kažemo da je jedinični ako je njegova duljina jednaka 1.<br/>Oznaka: <math> \vec{a}  = 1</math>.</i></p> | <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:</p> <p><i>Za dva vektora kažemo da su suprotni ako imaju isti smjer i duljinu, a suprotnu orijentaciju. Suprotni vektor od vektora <math>\vec{a}</math> označavamo s <math>-\vec{a}</math>.</i></p>  | <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:</p> <p><i>Nulvektor je vektor kojemu se podudaraju početna i završna točka. Oznaka: <math>\vec{0}</math>. Njegova duljina je 0 i to je jedini vektor duljine nula.<br/>Jedino za nulvektor nema smisla govoriti o smjeru i orijentaciji.</i></p> |

|   |   |  |
|---|---|--|
| <p style="text-align: center;"><b>KOLINEARNI VEKTORI</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/> <i>Za vektore kažemo da su kolinearni ako pripadaju paralelnim pravcima. Za njih kažemo da imaju isti smjer. Dogovorno, smatramo da je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom.</i></p>   | <p style="text-align: center;"><b>LINEARNA ZAVISNOST VEKTORA</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/> <i>Dva su vektora linearno zavisna ako su kolinearna.</i></p>   | <p style="text-align: center;"><b>PRAVILO PARALELOGRAMA</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/> <i>Zbroj dvaju vektora <math>\vec{OA}</math> i <math>\vec{OB}</math> je vektor <math>\vec{OC}</math> takav da je <math>\vec{OC}</math> dijagonala paralelograma <math>OABC</math>. To pravilo zbrajanja vektora nazivamo pravilo paralelograma.</i></p>  |
| <p style="text-align: center;"><b>SKALARNI UMNOŽAK</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/> <i>Skalarni umnožak vektora <math>\vec{a}</math> i <math>\vec{b}</math> je realan broj <math>\vec{a} \cdot \vec{b}</math> koji je definiran sa <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \vec{b}  \cos \varphi</math>, gdje je <math>\varphi</math> kut između vektora <math>\vec{a}</math> i <math>\vec{b}</math>.</i></p> | <p style="text-align: center;"><b>HOMOGENOST SKLARNOG MNOŽENJA</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/> <i>Homogenost je jedno od svojstva skalarnog produkta. Za sve vektore <math>\vec{a}</math> i <math>\vec{b}</math> i svaki skalar <math>\alpha \in \mathbb{R}</math> vrijedi:<br/> <math>(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \cdot \vec{b})</math>.</i></p> | <p style="text-align: center;"><b>POZITIVNOST SKALARNOG MNOŽENJA</b></p> <p><input type="checkbox"/> Nikad nisam čuo/la za taj termin.</p> <p><input type="checkbox"/> Čuo/la sam za taj termin, no nisam siguran/na što znači.</p> <p><input type="checkbox"/> Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Znam što taj termin znači i mogu ga opisati:<br/> <i>Pozitivnost je jedno od svojstva skalarnog produkta. Za svaki vektor <math>\vec{a}</math> vrijedi:<br/> <math>\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0</math>, dok je <math>\vec{a} \cdot \vec{a} = 0</math> samo za <math>\vec{a} = \vec{0}</math>.</i></p>  |

## **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija potiče učenje?** Ova strategija pruža mogućnost učenicima odrediti koliko dobro su upoznati s matematičkom terminologijom korištenom u nastavnoj cjelini. Učenici će možda prepoznati matematički termin, ali će shvatiti da malo ili nimalo razumiju njegovo značenje. Obrnuto, neki učenici će možda shvatiti da, ne samo da prepoznaju termin iz prijašnjih iskustava, već da ga i razumiju toliko dobro da ga mogu objasniti drugim učenicima.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Ova strategija koristi se na kraju nastavne cjeline u svrhu utvrđivanja koliko su učenici upoznati s matematičkom terminologijom o kojoj su učili. Rezultati se mogu koristiti za razmatranje načina na koje učitelj može poboljšati uvođenje terminologije.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Dobro je ne odabrati više od 12 ključnih matematičkih termina s kojima su se učenici susresti i koristiti tijekom poučavanja. Bitno je osigurati učenicima dovoljno vremena za opisivanje pojma ako su upoznati s njim. Učitelj nakon toga prikuplja učeničke odgovore te daje učenicima povratne informacije čime učenicima pruža mogućnost osvrta na svoje konceptualno razumijevanje prije i poslije poučavanja.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se srednjom, dok je vremenska zahtjevnost također srednja. Kognitivni zahtjev na učenike smatra se srednjim.

**Moguće prilagodbe.** S mlađim učenicima bolje je koristiti manje matematičkih termina te im dati mogućnost usmenog objašnjavanja svojih ideja i razmišljanja.

**Napomena.** Učitelj treba biti svjestan da neki učenici mogu upamtiti činjenice bez konceptualnog znanja. Ova strategija koristi se kao mjerilo poznavanja terminologije, tj. ne bi se trebala ocjenjivati.



### 3.4.8. Strategija Ispitivanje suprotnih pogleda

#### a) Opis i primjeri primjene strategije

**Opis strategije.** Strategija *Ispitivanje suprotnih pogleda* predstavlja dva ili više likova s konfliktnim matematičkim idejama. Od učenika se traži da odaberu osobu s kojom se najviše slažu i objasne zašto.



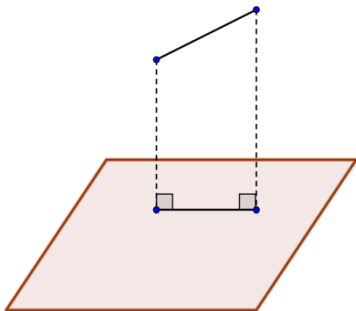
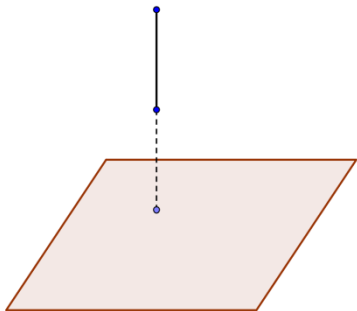
**Primjer 3.4.8.1.** *Uspoređivanje racionalnih brojeva.* Dani primjer primjeren je učenicima šestih razreda osnovne škole. Učenicima su dani nastavni listići na kojima se nalaze dva lika iz njima omiljenog crtanog filma kojima su pridružene dvije matematičke tvrdnje. Učenici trebaju odlučiti koja tvrdnja je istinita te obrazložiti svoja razmišljanja. Mogući učenički odgovor označen je zelenom bojom.

Tablica 3.4.8.1. Uspoređivanje racionalnih brojeva

| ELSA   | OLIF  |
|--|---|
|  <p>Od dvaju racionalnih brojeva, veći je onaj koji ima veću apsolutnu vrijednost.</p>  |  <p>Ja mislim da to ovisi uspoređujemo li pozitivne racionalne brojeve ili negativne.</p> |
| <p>Slažeš li se s Elsom ili s Olifom? Obrazloži zašto.</p>   |   |
| <p><i>Slažem se s Olifom. Ako promatramo pozitivne racionalne brojeve, onda je veći onaj koji ima veću apsolutnu vrijednost. Ako uspoređujemo negativne racionalne brojeve veći je onaj koji ima manju apsolutnu vrijednost. Ako uspoređujemo pozitivan i negativan racionalan broj, pozitivan racionalan broj je uvijek veći od negativnog, bez obzira na njihove apsolutne vrijednosti. Svaki pozitivan racionalan broj veći je od nule, a svaki negativan racionalan broj manji je od nule bez obzira na njihove apsolutne vrijednosti.</i></p> |   |



**Primjer 3.4.8.2. Ortogonalna projekcija.** Dani primjer primjeren je učenicima osmih razreda osnovne škole. Učenici se odlučuju za tvrdnju koja je pridružena jednom liku, a za koju smatraju da je istinita. Učenici objašnjavaju svoj odgovor. Mogući učenički odgovor označen je zelenom bojom.

Tablica 3.4.8.2. Ortogonalna projekcija.

| STRUMPF  | ŠTRUMPFETA   |
|--|--|
| <p><b>Ortogonalna projekcija dužine je ili dužina ili točka.</b></p>   | <p><b>Ne. Ortogonalna projekcija dužine je uvijek dužina.</b></p>                    |
|    |  |
| <p>Slažeš li se sa Štrumpfom ili Štrumpfetom? Obrazloži zašto.</p>   |  |
| <p><i>Slažem se sa Štrumpfom. Ortogonalna projekcija dužine na ravninu je ili dužina ili točka, ovisno o međusobnom položaju dužine i ravnine. Ortogonalna projekcija dužine na ravninu je točka samo ako je pravac koji sadrži dužinu okomit na tu ravninu.</i></p> |  |
|   |  |



**Primjer 3.4.8.3. Funkcije.** Dani primjer primjeren je učenicima četvrtih razreda srednje škole. Dani primjer je vezan uz parnost i neparnost funkcija. Učenici na nastavnom listiću odabiru tvrdnju s kojom se najviše slažu te objašnjavaju svoja zaključivanja. Mogući učenički mogući odgovor naznačen je zelenom bojom.

Tablica 3.4.8.3. Funkcije.

| Leonard   | Sheldon   |
|---|---|
|  <p style="text-align: center;"><b>Svaka funkcija je ili parna ili neparna.</b></p>   |  <p style="text-align: center;"><b>Postoje funkcije koje nisu niti parne niti neparne.</b></p> |
| <p>Slažeš li se s Leonardom ili Sheldonom? Obrazloži zašto.</p> <p style="color: green;"><i>Slažem se sa Sheldonom.</i></p> <p style="color: green;"><i>Funkcija je parna ako vrijedi <math>f(-x) = f(x)</math> za svaki <math>x</math> iz domene. Funkcija je neparna ako vrijedi <math>f(-x) = -f(x)</math> za svaki <math>x</math> iz domene. Postoje funkcije koje nisu niti parne niti neparne, kao na primjer funkcija <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 7</math> jer vrijedi: <math>f(-x) = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) - 7 = x^2 - 2x - 7</math> što nije jednako ni <math>f(x)</math> ni <math>-f(x)</math>, dakle dana funkcija nije niti parna niti neparna.</i></p> |   |

**Primjer 3.4.8.4. Kompozicija funkcija.** Dani primjer primjeren je učenicima četvrtih razreda srednje škole. Primjer je vezan uz nekomutativnost kompozicije dviju funkcija. Učenici odabiru lik s čijom izjavom se slažu te obrazlažu svoja zaključivanja. Mogući učenički odgovor dan je zelenom bojom.

Tablica 3.4.8.4. Kompozicija funkcija.

| Lily   | Marshall   |
|--|--|
| <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p><b>Kompozicija funkcija nikad nije komutativna.</b></p> </div>  | <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p><b>Kompozicija funkcija može biti komutativna.</b></p> </div> |
|    |   |
| <p>Slážeš li se s Lily ili s Marshallom? Obrazloži zašto.</p>  |  |
| <p><i>Slážem se s Marshallom.</i></p> <p><i>Kompozicija dviju funkcija može biti komutativna, no komutativnost kompozicije dviju funkcija ne vrijedi za sve funkcije.</i></p> <p><i>Primjer: kompozicija funkcija <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3</math> i <math>g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 3</math> nije komutativna.</i></p> <p><i>Provjera: <math>(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot (x + 3) - 3 = 2x + 6 - 3 = 2x + 3</math></i></p> <p><i><math>(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x - 3 + 3 = 2x</math>. Dakle, <math>(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)</math>.</i></p> <p><i>Primjer: kompozicija funkcija <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 3</math> i <math>g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x + 2</math> je komutativna.</i></p> <p><i>Provjera: <math>(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4 \cdot (-x + 2) - 3 = -4x + 8 - 3 = -4x + 5</math></i></p> <p><i><math>(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(4x - 3) + 2 = -4x + 5</math>. Dakle, <math>(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)</math>.</i></p> |  |

## **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija potiče učenje?** Ova strategija pruža mogućnost uspoređivanja dvaju ili više različitih načina razmišljanja o matematičkom problemu ili konceptu. Može biti korištena za poticanje manje grupne diskusije nakon što su učenici imali priliku razmišljati o svojim idejama te odlučiti čiji pogled najviše odgovara njihovom. Učenici se također potiču na pažljivo slušanje drugih i razmatranje njihovih razmišljanja. Kao rezultat, učenici će možda modificirati ili promijeniti svoja razmišljanja bazirajući se na tuđim uvjerljivim argumentima.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Ova strategija može biti korištena na početku poučavanja, za otkrivanje što učenici već znaju o nastavnoj temi koja će se raditi. Učitelj može ovu strategiju koristiti za ispitivanje, ne samo učeničkog konceptualnog znanja, nego i za ispitivanje učeničkih sposobnosti traženja uvjerljivih argumenata koji podržavaju njihove matematičke ideje.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Bitno je da učitelj odabere „suprotne poglede“ koji će pokazivati na uobičajene miskonceptije ili proceduralne pogreške. Učitelj u ovoj strategiji može koristiti likove iz crtića ili druge likove zanimljive učenicima. Nakon što učenici odaberu osobu čiji pogled je najbliži njihovom, učitelj može tražiti objašnjenje.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se visokom, dok je vremenska zahtjevnost srednja. Kognitivni zahtjev na učenike smatra se srednjim do visokim.

**Moguće prilagodbe.** S mlađim učenicima najbolje je ne koristiti više od dva različita pogleda. Učitelj ovu strategiju može koristiti i s drugim strategijama u svrhu poticanja razredne diskusije.

**Napomena.** Neki učenici ne biraju odgovore koji sadrže „uvijek“ ili „nikad“ . Dobro je da učitelj ima to na umu te da ponekad koristi te riječi u istinitim izjavama.



### 3.4.9. Strategija *Nizanje kartica*

#### a) Opis i primjeri primjene strategije

**Opis strategije.** U strategiji *Nizanje kartica* učenici dobivaju set izjava, procedura ili slika o matematičkom konceptu ili procesu te ih slažu u logičnom redoslijedu. Učenici objašnjavaju svoja razmišljanja te opisuju zašto su kartice posložili određenim poretkom.

#### **Primjeri primjene strategije.**

**Primjer 3.4.9.1. Vjerojatnost.** Dani primjer primjeren je učenicima sedmih razreda osnovne škole. Učenicima su dane kartice na kojima se nalaze zadatci vezani uz vjerojatnost. Učenici trebaju poredati događaje redom koji žele. Učenički mogući komentari napisani su zelenom bojom.

Tablica 3.4.9.1. Vjerojatnost.

|  |  |  |
|--|--|--|
| <b>1.</b><br>Bacamo jednom simetrični novčić na čijoj jednoj strani je pismo, a na drugoj glava. Kolika je vjerojatnost da se na novčiću pojavi pismo? | <b>2.</b><br>U kutiji se nalazi 35 bijelih i 45 crvenih kuglica jednake veličine. Iz kutije se izvlači nasumično jedna kuglica. Kolika je vjerojatnost da će biti izvučena bijela kuglica? | <b>3.</b><br>Bacaju se dvije igraće kocke koje razlikujemo. Kolika je vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su se pojavili na kockama 8?   |
| <b>4.</b><br>Na slučajan način bira se jedan dvoznamenkasti broj. Kolika je vjerojatnost da su znamenke izabranog broja međusobno jednake?             | <b>5.</b><br>Neka je slučajni pokus bacanje igraće kocke i neka je $A =$ „Pala je šestica“. Kolika je vjerojatnost događaja $A$ ?  | <b>6.</b><br>Neka je slučajan pokus bacanje triju numeriranih simetričnih novčića koji na jednoj strani imaju pismo, a na drugoj glavu. Kolika je vjerojatnost događaja $A =$ „Pojavilo se točno jedno pismo“? |

Mogući učenički komentar:

1. *Pokus bacanja simetričnog novčića ima dva moguća jednostavna događaja: „pojavio se pismo“ i „pojavi se glava“, koji su jednako vjerojatni. Dakle, vjerojatnost da padne pismo je  $\frac{1}{2} = 0.5$ .*

2. *Elementarni događaj za ovaj pokus je „izvučena je jedna kuglica“. U kutiji je ukupno 80 kuglica, a toliko je tada i načina da se iz kutije izvuče jedna kuglica. Budući da se kuglica izvlači nasumično i da su vjerojatnosti da se izvuče pojedina kuglica jednake, vjerojatnost svakog od 80 elementarnih događaja jednaka je  $\frac{1}{80}$ . Broj povoljnih događaja za događaj „izvučena je bijela kuglica“ je 35 jer se u kutiji nalazi 35 bijelih kuglica. Zato je vjerojatnost da je izvučena bijela kuglica jednaka  $\frac{35}{80} = 0.4375$ .*

3. *Ovaj slučajni događaj ima 36 različitih elementarnih događaja. Vjerojatnost od svakog elementarnog događaja jednaka je  $\frac{1}{36}$  jer su oni međusobno jednakovjerojatni. Događaj „zbroj brojeva na kockama je 8“ ima 5 povoljnih ishoda. To su: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2). Dakle, vjerojatnost događaja „zbroj brojeva na kockama je 8“ jednaka je  $\frac{5}{36} = 0.138$ .*

4. *Dvoznamenkastih brojeva ukupno ima 90, po 10 u svakoj desetici. Dakle, elementarnih događaja ima 90 i vjerojatnost svakog je  $\frac{1}{90}$  jer su elementarni događaji međusobno jednakovjerojatni događaji. Promatramo događaj „izabrane znamenke su jednake“. Dvoznamenkasti brojevi kojima su znamenke jednake su: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 i 99, tj. ima ih ukupno 9. Dakle, vjerojatnost događaja „izabrane znamenke su jednake“ jednaka je  $\frac{9}{90} = \frac{1}{10} = 0.1$ .*

5. *Slučajan pokus bacanja kocke ima 6 elementarnih događaja koji čine skup {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Svaki elementarni događaj ima jednaku vjerojatnost da se pojavi kao ishod bacanja kocke. Budući da ima 6 elementarnih događaja, vjerojatnost svakog od njih je  $\frac{1}{6}$ . Dakle, vjerojatnost da je pala šestica je  $\frac{1}{6} = 0.16$ .*

6. Ovaj slučajni događaj ima 8 različitih elementarnih ishoda budući da su novčići numerirani. Svaki elementarni događaj ima jednaku vjerojatnost da se pojavi pa je vjerojatnost svakog elementarnog događaja jednaka  $\frac{1}{8}$ . Pismo se može pojaviti na prvom novčiću, na drugom novčiću ili na trećem novčiću, tj. tri su povoljna ishoda. Dakle, vjerojatnost da je palo točno jedno pismo jednaka je  $\frac{3}{8} = 0.375$ .

Kartice možemo poredati od najmanje vjerojatnog događaja do najvjerojatnijeg. Dakle, traženi redoslijed kartica je: 4, 3, 5, 6, 2, 1.

**Primjer 3.4.9.2. Kompleksni brojevi.** Dani primjer primjeren je učenicima drugih razreda srednje škole. Učenicima su dane kartice na kojima se nalaze zadatci vezani uz operacije s kompleksnim brojevima. Učenici ih trebaju riješiti te poredati kartice u nekom poretku koji sami biraju. Učenički mogući odgovor naznačen je zelenom bojom.

Tablica 3.4.9.2. Kompleksni brojevi.

|                                     |  |  |
|-------------------------------------|--|--|
| <b>1.</b><br>$(-2 + 3i) + (1 - 4i)$ | <b>2.</b><br>$\left(-\frac{1}{2} + i\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}i\right)$ | <b>3.</b><br>$(1 - 2i)^2$  |
| <b>4.</b><br>$(2 + 4i) - (1 - 2i)$  | <b>5.</b><br>$\frac{4 + 3i}{1 + 2i}$   | <b>6.</b><br>$\left(\frac{5}{7} + 4i\right) \cdot \left(\frac{5}{7} - 4i\right)$ |

Mogući učenički odgovor:

$$1. (-2 + 3i) + (1 - 4i) = -2 + 3i + 1 - 4i = -1 - i$$

$$2. \left(-\frac{1}{2} + i\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}i\right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}i\right) + i - \frac{1}{3}i^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i + i + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{7}{6}i$$

$$3. (1 - 2i)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2i + (2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$$

$$4. (2 + 4i) - (1 - 2i) = 2 + 4i - 1 + 2i = 1 + 6i$$

$$5. \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{4+3i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(4+3i) \cdot (1-2i)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{4-8i+3i-6i^2}{1+4} = \frac{4-5i+6}{1+4} = \frac{10-5i}{5} = 2 - i$$

$$6. \left(\frac{5}{7} + 4i\right) \cdot \left(\frac{5}{7} - 4i\right) = \left(\frac{5}{7}\right)^2 - (4i)^2 = \frac{25}{49} - 16i^2 = \frac{25}{49} + 16 = \frac{25+784}{49} = \frac{809}{49}$$

*Kartice bismo mogli poredati od rješenja najmanjeg modula, do rješenja najvećeg modula.*

$$1. |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$2. \left|-\frac{1}{6} + \frac{7}{6}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{49}{36}} = \sqrt{\frac{50}{36}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

$$3. |-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$4. |1 + 6i| = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$5. |2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$6. \left|\frac{809}{49}\right| = \sqrt{\left(\frac{809}{49}\right)^2} = \frac{809}{49}$$

*Tada je poredak kartica: 1, 2, 5, 3, 4, 6.*

## **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija potiče učenje?** Učenici trebaju proučavati kartice te diskutirati o svojim idejama o njihovom mogućem slijedu. Također, bitno je razjasniti svoje matematičke ideje te identificirati područja nesigurnosti. U procesu nizanja kartica, učenici trebaju braniti svoje ideje te pružati logičan argument zašto je taj redoslijed ispravan.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Ako se koristi na početku nastavne jedinice, ova strategija učiteljima pruža priliku identificirati prijašnja učenička znanja o konceptu ili procesu. Ova strategija pomaže učitelju odrediti područja na koja se treba fokusirati tijekom poučavanja, u skladu s time što učenici već znaju. Ako se ova strategija koristi nakon poučavanja, pomaže učiteljima sagledati koliko dobro učenici primjenjuju svoje matematičke ideje.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Učitelj se na početku odlučuje za grupu izjava, slika ili algoritama za rješavanje problema. Zatim ih stavlja na kartice te ih dijeli manjim grupama učenika. Učenici trebaju odlučiti o logičnom slijedu u kojem će složiti kartice te opravdavaju svoje razloge za taj slijed. Za vrijeme koje učenici slažu te kartice, učitelj može šetati razredom te postavljati određena pitanja da bi otkrio učenička matematička razmišljanja. Isto tako, može pozivati učenike na prezentiranje svojih rješenja ostatku razreda, izazivajući pritom povratne informacije od ostalih učenika. Primjeri koji se mogu nalaziti na karticama mogu uključivati različite načine prikaza brojeva koje učenici trebaju poredati od najmanjeg do najvećeg, korake u konstrukciji šestarom, korake u stvaranju grafova iz danih podataka ili korake u rješavanju zadataka riječima.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se srednjom kao i njena vremenska zahtjevnost. Kognitivni zahtjev na učenike smatra se srednjim do visokim.

**Moguće prilagodbe.** Nakon što učenici poredaju svoje kartice, mogu iz zalijepiti na papire koje učitelj tada skuplja za analiziranje. Nakon što učitelj pregleda papire, može ih vratiti učenicima u svrhu modificiranja ili mijenjanja svojeg slijeda baziranog na tome što su naučili nakon slaganja kartica. Isto tako, učitelj može ubaciti i prazne kartice te tražiti od učenika da sami konstruiraju karticu koja nedostaje.

**Napomena.** Učitelj prije početka ove strategije bira format, broj kartica i temu koja se slaže s dobi učenika. S mlađim učenicima dobro je koristiti što konkretnije primjere i kartice sa slikama.

### 3.4.10. Strategija 3-2-1

#### a) Opis i primjeri primjene strategije

**Opis strategije.** Strategija 3-2-1 pruža učenicima strukturiran način za osvrt na svoje učenje. Učenici pisano odgovaraju na tri reflektivna upita dajući pritom šest odgovora (tri na prvi upit, dva na drugi i jedan na treći) koji opisuju što su naučili u nastavnoj cjelini ili jedinici.

#### Primjeri primjene strategije.

**Primjer 3.4.10.1. Zbrajanje cijelih brojeva.** Dani primjer primjeren je učenicima šestih razreda osnovne škole. Učenicima je dan nastavni listić na kojem trebaju daju šest odgovora koji opisuju što su naučili, s čim još imaju problema te koje strategije koriste da bi došli do točnog odgovora ukoliko ne znaju neku činjenicu. Učenički odgovor dan je zelenom bojom.

Tablica 3.4.10.1. Zbrajanje cijelih brojeva.

| <b>Zbrajanje cijelih brojeva</b>   |  |
|--|--|
| <b><u>3 nove činjenice koje sam naučio/la</u></b>  |  |
| 1. <i>Cijeli brojevi jednakih predznaka zbrajaju se tako da se zbroje njihove apsolutne vrijednosti te se zbroju ostavi isti predznak.</i>                                       |  |
| 2. <i>Zbroj dvaju suprotnih brojeva jednak je nuli.</i>  |  |
| 3. <i>Za svaki cijeli broj <math>a</math> vrijedi <math>a + 0 = a</math>.</i>  |  |
| <b><u>2 činjenice s kojima se još mučim</u></b>  |  |
| 1. <i>Brojeve različitih predznaka zbrajamo tako da oduzmemo njihove apsolutne vrijednosti (manju od veće) i razlici stavimo predznak broja većeg po apsolutnoj vrijednosti.</i> |  |
| 2. <i>Zbroj pozitivnog i negativnog cijelog broja može biti ili pozitivan ili negativan cijeli broj ili nula.</i>  |  |
| <b><u>1 strategija koja mi pomaže riješiti problem</u></b>   |  |
| 1. <i>Topli i hladni žetoni.</i>   |  |

**Primjer 3.4.10.2. Realne funkcije realne varijable.** Dani primjer primjeren je učenicima četvrtih razreda srednje škole. Primjer je vezan uz realne funkcije realne varijable. Učenici dobiju nastavni listić na kojem trebaju napisati tri činjenice koje su naučili, dvije s kojima se još muče te jednu strategiju koja im pomaže riješiti problem. Mogući učenički odgovor označen je zelenom bojom.

Tablica 3.4.10.2. Realne funkcije realne varijable.

| <b>Realne funkcije realne varijable</b>   |
|---|
| <b><u>3 nove činjenice koje sam naučio/la</u></b>   |
| 1. <i>Svaka funkcija zadana je svojom domenom, kodomenom i pravilom pridruživanja.</i>                                    |
| 2. <i>Funkcija je injekcija ako različitim realnim brojevima pridružuje različite vrijednosti funkcije.</i>               |
| 3. <i>Graf funkcije i graf njoj inverzne funkcije simetrični su jedan drugome s obzirom na pravac <math>y = x</math>.</i> |
| <b><u>2 činjenice s kojima se još mučim</u></b>   |
| 1. <i>Kada je funkcija surjeksija.</i>  |
| 2. <i>Kada je funkcija bijeksija.</i>   |
| <b><u>1 strategija koja mi pomaže riješiti problem</u></b>  |
| 1. <i>vertikalni i horizontalni testovi.</i>  |

## b) Analiza strategije

**Kako ova strategija potiče učenje?** Strategija 3-2-1 je tehnika koja prikazuje učeničku refleksiju. Pruža učenicima mogućnost dijeljenja svojih uspjeha u učenju novih koncepata s drugim učenicima, kao i prepoznavanje što je za njih bilo zahtjevno.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Strategija 3-2-1 pruža informacije učiteljima o tome što su učenici vidjeli kao ključne spoznaje u nastavnoj cjelini ili jedinici. Sve informacije mogu biti analizirane u svrhu uviđanja u kojoj mjeri su postignuti ciljevi

učenja. Ova strategija također pruža informacije učiteljima o tome s čime se učenici još muče. Te informacije učitelj može koristiti za prilagodbu poučavanja.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Ova strategija može biti korištena kada učenici uče složenije matematičke koncepte ili kada uče nešto novo. Bitno je učenicima dati dovoljno vremena za zapisivanje svojih refleksija. Isto tako, učenici mogu raditi u paru te dijeliti svoje refleksije s drugim učenicima.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se viskom, dok je vremenska zahtjevnost niska. Kognitivni zahtjev na učenike smatra se srednjim.

**Moguće prilagodbe.** Ova strategija može biti korištena kada učenici uče nove algoritme, procedure ili vještine. Na primjer, može biti korištena s učenicima koji uče množenje. Učenik zapisuje tri činjenice koje uvijek zna, dvije činjenice o kojima još treba razmisliti i jednu strategiju koju može koristiti kada ne zna činjenicu. Ukoliko učitelj želi više informacija, može koristiti strategiju 5-3-1.

**Napomena.** Ova strategija može se koristiti s ostalim strategijama koje potiču refleksiju. Nije dobro koristiti ju prečesto, da se učenici ne umore od te tehnike.

### **3.4.11. Strategija *Pogled unatrag***

#### **a) Opis i primjeri primjene strategije**

**Opis strategije.** Strategija *Pogled unatrag* izvještava o tome što su učenici naučili tijekom danog poučavanja u određenom periodu. Učenici pišu o konceptima i procedurama koje znaju sada, a koje nisu znali prije te opisuju načine kako su to naučili.

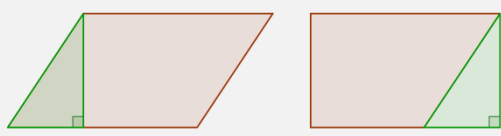
#### **Primjeri primjene strategije.**

**Primjer 3.4.11.1. *Površina paralelograma.*** Dani primjer primjeren je učenicima šestih razreda osnovne škole. Učenici dobivaju nastavni listić na kojem popunjavaju što su



naučili o površini paralelograma i kako su to naučili. Primjer ueničkog odgovora dan je zelenom bojom.

Tablica 3.4.11.1. Površina paralelograma.

| Što sam naučio/la  | Kako sam to naučio/la  |
|--|--|
| <p><i>Ovaj tjedan naučio sam da se površina paralelograma računa tako da se pomnoži duljina jedne njegove stranice i duljina visine na tu stranicu. Naučio sam da možemo promatrati bilo koju stranicu i visinu na tu stranicu jer je njihov umnožak isti.</i></p> | <p><i>U grupama smo radili aktivnost kojom smo otkrili koja je formula za površinu paralelograma. Dobili smo paralelogram čiju površinu smo trebali izračunati. Razrezali smo taj paralelogram po jednoj visini te smo taj izrezani trokut prislonili s druge strane, čine smo dobili pravokutnik čiju površinu smo znali izračunati. Površina traženog paralelograma jednaka je površini dobivenog pravokutnika.</i></p>  |

**Primjer 3.4.11.2.** *Vièteove formule.* Primjer je primjeren je učenicima drugih razreda srednje škole. Učenici trebaju na dane nastavne listiće napisati što su naučili o Vièteovim formulama i kako su to naučili.

Tablica 3.4.11.2. Vièteove formule.

| Što sam naučio/la  | Kako sam to naučio/la  |
|--|--|
| <p><i>Naučio sam da ako su <math>x_1</math> i <math>x_2</math> rješenja kvadratne jednadžbe <math>ax^2 + bx + c = 0</math>, onda vrijedi da je:</i></p> $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ | <p><i>To sam naučio rješavanjem normirane kvadratne jednadžbe <math>x^2 + bx + c = 0</math> i promatranjem zbroja i umnoška njezinih rješenja <math>x_1</math> i <math>x_2</math>. Dobio sam da za normiranu kvadratnu jednadžbu vrijedi: <math>x_1 + x_2 = -b</math>, <math>x_1 \cdot x_2 = c</math>. Nakon toga, promatrao sam opću kvadratnu jednadžbu i zbroj i umnožak njezinih rješenja. Sjetio sam se da tu</i></p> |

*jednadžbu mogu normirati tako da cijelu jednadžbu podijelim s a. Nakon toga sam dobio normiranu jednadžbu  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ . Prema prvom slučaju, zaključio sam da za zbroj i umnožak rješenja opće kvadratne jednadžbe vrijedi:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .*

## **b) Analiza strategije**

**Kako ova strategija potiče učenje?** Ova strategija pruža učenicima mogućnost pogleda unatrag i sumiranja znanja. Učenici, objašnjavanjem načina na koji su nešto naučili, razmišljaju o svojem učenju i načinima na koje integriraju nova matematička znanja.

**Kako ova strategija unapređuje nastavu?** Učitelji mogu koristiti informacije dobivene ovom strategijom za potvrđivanje upotrebe drugih strategija u drugim nastavnim jedinicama. Ova strategija također upozorava učitelje na strategije i aktivnosti koje se čine najučinkovitije za pojedine učenike. Te informacije mogu biti korištene za drugačije poučavanje pojedinih učenika, bazirano na njihovim opisima što im je pomoglo kod učenja.

**Planiranje i upravljanje strategijom.** Ovu strategiju najbolje je koristiti ne više od tri tjedna nakon određene nastavne cjeline.

**Opća svojstva provedbe.** Lakoća korištenja ove strategije smatra se visokom, dok je njena vremenska zahtjevnost srednja. Kognitivni zahtjev na učenike smatra se srednjim.

**Moguće prilagodbe.** S mlađim učenicima preporuča se koristiti kraće vrijeme nakon obrade za pogled unatrag. Na primjer, učitelj može koristiti kraj tjedna za provođenje ove strategije kada učenici komentiraju aktivnosti u tom tjednu.

**Napomena.** Ova strategija otkriva što se najviše ističe u učenikovom učenju, ali ne i nužno koliko su učenici naučili.



## 4. RUBRIKE I NJIHOVA KONSTRUKCIJA

Prema *The New Merriam-Webster Dictionary* rubrika je zaglavlje, naslov i kategorija. U obrazovanju, rubrike su mnogo više. Rubrika je jednodimenzionalna ili višedimenzionalna tablica kriterija postavljenih na nekoliko razina. Koristi se s ciljem donošenja procjena o učenikovom rezultatu ili postignućima. Rubrike mogu ocjenjivati vještine mišljenja, učenikovo razumijevanje i učenikove mogućnosti za primjenu znanja u matematičkim zadacima. One također daju učiteljima, učenicima i roditeljima vjerodostojnu sliku što učenici znaju i što su sposobni napraviti te koliko su sposobni demonstrirati svoje znanje. Učenicima daju povratne informacije koje su neophodne za postavljanje ciljeva i podizanje razine znanja.

Rubrike su organizirane tako da prikazuju kriterije kojima se mjeri kvaliteta ostvarenog, postavljene na nekoliko razina. Razine variraju, od 1 do 4, od 0 do 3 ili od 1 do 6, ovisno o učiteljevom izboru. Skala od 1 do 4 najčešće se koristi jer je dovoljno uska pa ne opterećuje učenike, a daje širok raspon deskriptora kvalitete. Skala od 0 do 3 koristi se kada učitelj želi koristiti 0 za prikazivanje nepostojanja napretka. Šire skale, kao od 1 do 6, koriste se kada postoji prilika za širu razinu izvedbe.

Razine sadrže opise za svaki nivo napretka. Ti kriteriji izvedbe jasno navode razinu očekivane izvedbe za svaku numeričku vrijednost u rubrici. Navedeni kriteriji mogu pomoći učitelju u vrednovanju učeničkog rada, dok učenicima pomažu u samovrednovanju i unapređenju razine izvedbe.

## 4.1.Vrste rubrike

Postoje dva tipa rubrika: analitička i holistička. Analitička rubrika podrazumijeva više kriterija i analizu razina ostvarenosti svakog od njih, tj. analitičke rubrike su višedimenzionalne. Holistička rubrika opisuje za svaku razinu cjelokupnu očekivanu učeničku izvedbu bez analitičke razrade, tj. one su jednodimenzionalne. Analitičke rubrike bolje je koristiti kao dio formativnog vrednovanja jer su dizajnirane kao alat za unapređenje učeničkih uspjeha i izvedbi. Holističke rubrike sumativnog su karaktera te se najčešće koriste za vrednovanje učeničkog rada na kraju procesa učenja.

Tablica 4.1.1. Primjer trirazinske analitičke rubrike<sup>7</sup>.

| <b>TRORAZINSKA ANALITIČKA RUBRIKA</b> |  |
|---------------------------------------|--|
| <b>3</b>                              | <b>IZNAD I ISPRED</b><br>Učenik pokazuje jasno razumijevanje. Primjenjuje primjerene metode. Dokumentira svoje ideje bez upozorenja na to. Pokazuje kreativnost. Nadilazi okvire zadanog problema. |
| <b>2</b>                              | <b>IDE U DOBROM SMJERU</b><br>Pokazuje razumijevanje ili dobro napreduje u svom razvoju. Koristi uspješne pristupe. Zadatak rješava s prisutnim samo malim pogreškama.                             |
| <b>1</b>                              | <b>NIJE JOŠ NITI BLIZU</b><br>Pokazuje nerazumijevanje i nejasnoće. Čini značajne pogreške te koristi neuspješne pristupe.   |

Za jasniju i precizniju procjenu matematičkih procesa pri rješavanju problemskih zadataka koriste se holističke rubrike. U široj primjeni je takozvana trodimenzionalna četverorazinska holistička rubrika. Njezine dimenzije su: *matematičko znanje, strateško znanje i obrazloženje*.

<sup>7</sup> Primjer trirazinske analitičke rubrike izrađen je na temelju predavanja prof.dr.sc. Aleksandre Čižmešija iz kolegija Vrednovanje u matematičkom obrazovanju.

Dimenzija *matematičko znanje* odgovara na pitanje *Zna li učenik riješiti zadatak?*. Podrazumijeva znanje matematičkih koncepata, principa i postupaka koje vode korektnom rješavanju problemskog zadatka.

Dimenzija *strateško znanje* odgovara na pitanje *Kako učenik planira riješiti zadatak?*. Podrazumijeva prepoznavanje i primjenu strategija rješavanja problemskog zadatka.

Dimenzija *obrazloženje* odgovara na pitanje *Može li učenik/ca objasniti svoj postupak rješavanja?*. Podrazumijeva pisano obrazloženje plana i koraka procesa rješavanja problemskog zadatka pri čemu je potrebno argumentirano obrazložiti svaki korak. Iako su važni, duljina odgovora, pravopis i gramatika nisu kritični elementi ove dimenzije.

Tablica 4.1.2. Dimenzija matematičko znanje<sup>8</sup>

| RAZINA POSTIGNUĆA | MATEMATIČKO ZNANJE   |
|-------------------|--|
| 4                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca pokazuje jasno razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata i postupaka te informacija potrebnih za rješavanje problema</li> <li>– upotrijebio/la je prikladni i precizni matematički jezik i oznake, uključujući i isticanje odgovora ako je potrebno</li> <li>– u cijelosti je izvršio/la algoritamske i računske postupke</li> </ul> |
| 3                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca prikazuje gotovo potpuno razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka potrebnih za rješavanje problema</li> <li>– upotrijebio/la je uglavnom korektni matematički jezik</li> <li>– u cijelosti je izvršio/la algoritamske i računske postupke, uglavnom korektno</li> </ul>                                       |
| 2                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je pokazao/la barem neko, ali djelomično razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka</li> <li>– upotrijebio/la je barem neki korektni matematički jezik</li> <li>– možda je učinio/la velike algoritamske i/ili računske pogreške</li> </ul>   |
| 1                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je pokazao/la vrlo ograničeno ili nikakvo razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje</li> <li>– možda je upotrijebio/la matematički jezik</li> <li>– pokazao/la je barem pokušaj rješavanja zadatka</li> </ul>   |

<sup>8</sup> Primjer tablice Dimenzija matematičko znanje izrađen je na temelju predavanja prof.dr.sc. Aleksandre Čizmešija iz kolegija Vrednovanje u matematičkom obrazovanju.

Tablica 4.1.3. Dimenzija strateško znanje<sup>9</sup>

| RAZINA POSTIGNUĆA | STRATEŠKO ZNANJE  |
|-------------------|---|
| 4                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je prepoznao/la sve važne elemente zadatka i pokazao/la je potpuno razumijevanje</li> <li>– potpuno je dokumentirao/la prikladnu strategiju</li> </ul>                                       |
| 3                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je prepoznao/la većinu važnih elemenata i pokazao/la općenito razumijevanje njihovih međusobnih veza i odnosa</li> <li>– gotovo potpuno je dokumentirao/la prikladnu strategiju</li> </ul>   |
| 2                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je prepoznao/la neke važne elemente zadatka, ali je pokazao/la vrlo ograničeno razumijevanje njihovih međusobnih odnosa</li> <li>– dao/la barem neku naznaku prikladne strategije</li> </ul> |
| 1                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je preveliku pažnju posvetio/la elementima koji ne vode rješenju zadatka</li> <li>– prikazao/la je ili naznačio/la neprimjerenu ili pogrešnu strategiju</li> </ul>                           |

Tablica 4.1.4. Dimenzija obrazloženje<sup>10</sup>

| RAZINA POSTIGNUĆA | OBRAZLOŽENJE  |
|-------------------|---|
| 4                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je dao/la cjelovito i detaljno obrazloženje procesa rješavanja zadatka</li> <li>– jasno i precizno je matematički objasnio/la što i zašto je napravio/la</li> </ul>            |
| 3                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je dao/la gotovo cjelovito pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka</li> <li>– jasno i matematički precizno je objasnio/la što i zašto je napravila</li> </ul>           |
| 2                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je dao/la neko pisano objašnjenje procesa rješavanja zadatka</li> <li>– dao/la je objašnjenje koje je nejasno ili ne odgovara potpuno prikazanom procesu rješavanja</li> </ul> |
| 1                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>– učenik/ca je dao/la minimalno obrazloženje procesa rješavanja zadatka</li> <li>– dao/la je objašnjenje koje ne odgovara prikazanom procesu rješavanja</li> </ul>                         |

<sup>9</sup> Primjer tablice Dimenzija strateško znanje izrađen je na temelju predavanja prof.dr.sc. Aleksandre Čižmešija iz kolegija Vrednovanje u matematičkom obrazovanju.

<sup>10</sup> Primjer tablice Dimenzija obrazloženje izrađen je na temelju predavanja prof.dr.sc. Aleksandre Čižmešija iz kolegija Vrednovanje u matematičkom obrazovanju.

## 4.2. Izrada rubrika

Tri su osnovna koraka za izradu rubrike:

1. *Izrada kontrolne liste*
2. *Odabir bodovne skale*
3. *Pisanje deskriptora kvalitete.*

Kontrolna lista je „šoping lista“ koja inducira kriterije koje učitelj očekuje od učenika u njihovom izvođenju. Kontrolnu listu mogu koristiti i učenici nakon završetka projekta za provjeru koje ishode su ostvarili. Isto tako, učenicima daje jasnu sliku što još trebaju dopuniti prije predaje zadatka učitelju. Iako kontrolna lista navodi kriterije za ostvarenje ishoda učenja, ona nema isti utjecaj kao rubrika jer ne mjeri kvalitetu rada kao što to radi rubrika. Kontrolna lista treba sadržavati sljedeće:

- popis kriterija koje treba ostvariti
- kontrolni stupac koji ukazuje na ostvarenje komponenti
- kontrolni stupac koji ukazuje na neostvarenje zadanih komponenti.

Kreirajući razine za svaki kriterij u kontrolnoj listi, učitelj može izraditi rubriku, tj., kriteriji iz kontrolne liste postaju kriteriji u rubrici.

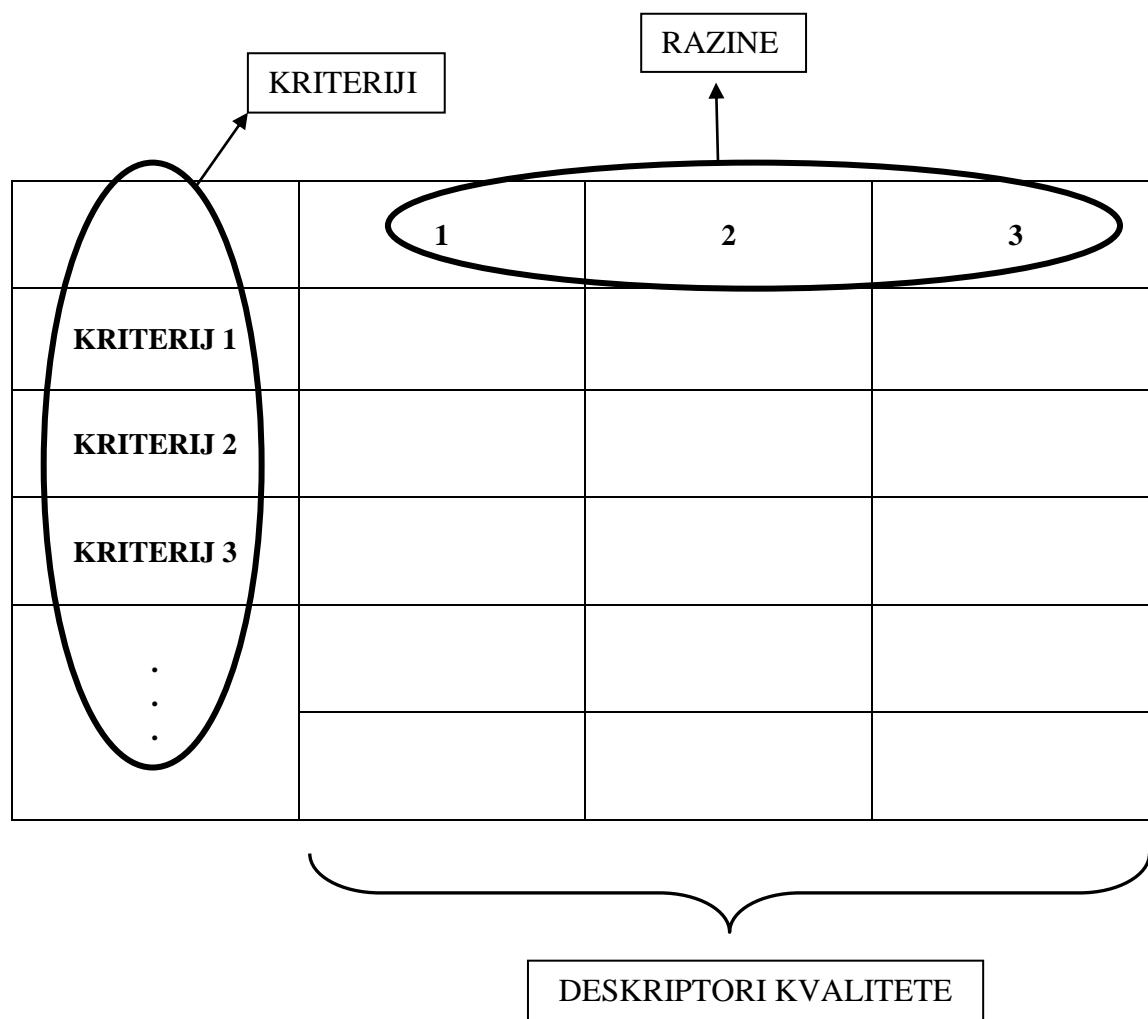
Drugi korak u izradi rubrike odnosi se na odabir bodovne skale za rubriku. Dobro je ne odabrati preveliki, ali niti premali raspon te je poželjno odabrati paran raspon tako da nema sredine kojoj su učitelji često skloni pribjeći. Isto tako, učitelji trebaju odlučiti hoće li koristiti 0 ili 1 za najnižu razinu u rubrici. Također, trebaju odlučiti hoće li razine biti poredane od najniže prema najvišoj ili od najviše prema najnižoj.

Treći korak odnosi se na pisanje deskriptora kvalitete. Važno je da su ti deskriptori jasni i precizni te da je rječnik prilagođen uzrastu učenicima koji će ih koristiti. Učitelji kreću od najviše razine te opisuju očekivanja za svaku razinu. Pritom se treba pitati:



- Koji je najbolji opis kriterija?
- Koji je dokaz kvalitete ostvarenog?

Slika 4.2.1. Rubrika



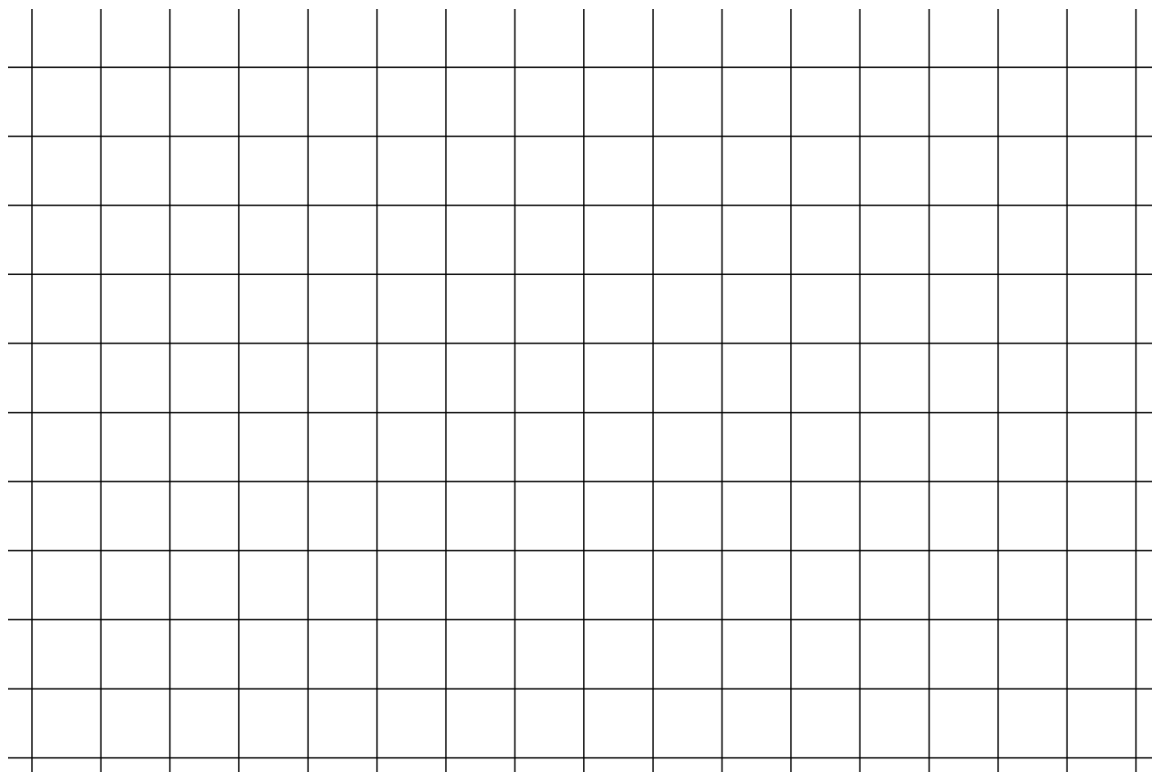
### Primjeri izrade rubrike

**Primjer.4.2.1.** Na danom primjeru primjerenom učenicima osnovne škole, pokazat ćemo izradu kontrolne liste i rubrike za vrednovanje učeničkog ostvarenja.

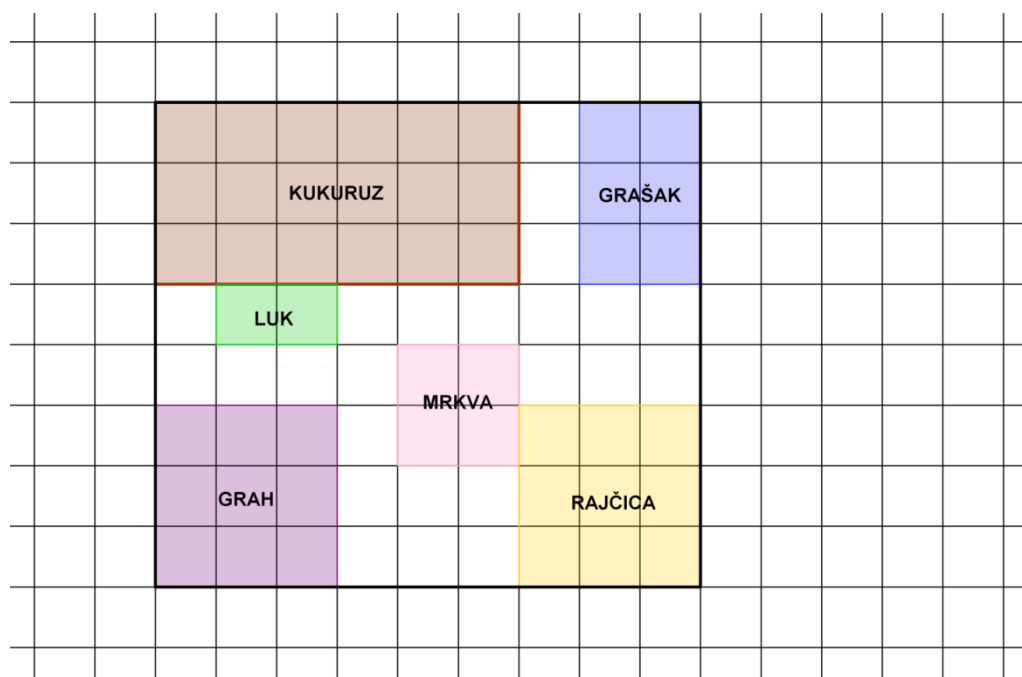
Slika 4.2.2. Primjer zadatka za osnovu školu. Sadnja vrta.

**Zadatak.** Maju su roditelji zamolili da dizajnira raspored povrća u vrtu. Dopuštaju joj vlastiti odabir povrća koje će saditi u vrtu, no roditelji bi željeli barem šest različitih vrsta povrća. Vrt treba imati  $48 \text{ m}^2$ . Maja treba odabrati vrste povrća, mjesto gdje će ga zasaditi i dimenziju prostora koji će zauzeti to povrće. Pomozi Maji u tome. Neke smjernice koje ti mogu pomoći u tome su sljedeće:

- Odredi dimenziju vrta na danom predlošku. Odluči koje povrće će Maja saditi.
- Kreiraj dijagram vrta koji pokazuje kako ćeš iskoristiti dani prostor. Odredi mjesto za svako povrće.
- Izračunaj površinu prostora koji zauzima određeno povrće.
- Izračunaj koliko metara ograde je potrebno za ograditi vrt.
- Napiši kratak esej o vrtu. Objasni kako si odabrao/la povrće te površinu na koju ćeš saditi to povrće. Isto tako, objasni kako si računao/la površinu mjesta za svako povrće te kako si izračunao/la koliko metara ograde je potrebno za ograditi vrt.



Slika 4.2.3. Primjer učeničke podjele i tablice.



| POVRĆE                   | DIMENZIJA U VRTU (m) | POVRŠINA KOJU ZAUZIMA U VRTU (m <sup>2</sup> ) | POPUNJENJA POVRŠINA U VRTU (m <sup>2</sup> ) |
|--------------------------|----------------------|--|--|
| Kukuruz                  | 3 m × 6 m            | 18 m <sup>2</sup>                              | 18 m <sup>2</sup>                            |
| Rajčica                  | 3 m × 3 m            | 9 m <sup>2</sup>                               | 27 m <sup>2</sup>                            |
| Luk                      | 2 m × 1 m            | 2 m <sup>2</sup>                               | 29 m <sup>2</sup>                            |
| Grah                     | 3 m × 3 m            | 9 m <sup>2</sup>                               | 38 m <sup>2</sup>                            |
| Grašak                   | 3 m × 2 m            | 6 m <sup>2</sup>                               | 44 m <sup>2</sup>                            |
| Mrkva                    | 2 m × 2 m            | 4 m <sup>2</sup>                               | 48 m <sup>2</sup>                            |
| Ograda: 8 m × 9 m = 72 m |                      |  |  |

Tablica 4.2. 1. Kontrolna lista za problem

|                                    | <b>IZVRŠENO +</b> | <b>NIJE IZVRŠENO -</b> |
|------------------------------------|-------------------|------------------------|
| Površina vrta (48 m <sup>2</sup> ) |                   |                        |
| 6 vrsta povrća                     |                   |                        |
| Dijagram vrta                      |                   |                        |
| Površina pojedinog područja        |                   |                        |
| Duljina ograde                     |                   |                        |
| Objašnjenje                        |                   |                        |
| Urednost                           |                   |                        |

Nakon kontrolne liste slijedi odabir skale i zapisivanje deskriptora kvalitete za svaku razinu.

Tablica 4.2.2. Rubrika za problem sadnje vrta.

|                                    | <b>1</b>                                   | <b>2</b>   | <b>3</b>  | <b>4</b>  |
|------------------------------------|--|--|---|---|
| <b>Površina vrta</b>               | Nepotpuno ili netočno određena površina.   | Točno određena površina.                           | Točno određena površina i naznačena.  | Potpuno točno određena površina i naznačena.  |
| <b>Dijagram vrta</b>               | Nepotpun ili netočan.                      | Točno napravljen dijagram.                         | Točno napravljen i označen dijagram.  | Potpuno točno napravljen dijagram. Lak je za snalaženje.                                    |
| <b>Površina pojedinog područja</b> | Uglavnom nepotpuno ili netočno izračunato. | Jedno područje nepotpuno ili netočno izračunato.   | Točno izračunata područja.  | Točno izračunata područja. Lako je za snalaženje.   |
| <b>Duljina ograde</b>              | Netočno izračunata ili nije izračunata.    | Točno je izračunata.                               | Točno je izračunata i jasno je naznačena.   | Potpuno točno je izračunata i naznačena.  |
| <b>Objašnjenje</b>                 | Netočno ili ne postoji.                    | Djelomično objašnjenje. Mnogo mehaničkih pogreški. | Rečenice su jasne i lake za razumijevanje. Prisutne su dvije do tri mehaničke pogreške. | Rečenice su jasne i lake za razumijevanje. Prisutna je jedna ili ni jedna mehanička greška. |
| <b>Urednost</b>                    | Neuredno i nečitko.                        | Čitljivo uz napore.                                | Uredno i čitljivo.  | Jako uredno.  |

Primjer 4.2.2. Sljedeći primjer primjeren je za učenike drugih razreda srednje škole.

Slika 4.2.4. Primjer zadatka za srednju školu. Statistika.

**Zadatak.** Država traži od Košarkaškog kluba predaju novih statističke podatke o prošloj sezoni te trebaju tvoju pomoć.

Izaberi svoj omiljeni košarkaški klub te nađi rezultate svih prijašnjih utakmica u sezoni.

Napravi graf koji će sadržavati sve rezultate tvojeg tima. Na grafu neka budu uključena i imena protivničkih timova.

Nađi maksimum, minimum, medijan, mod i prosjek bodova svojeg tima i protivničkih timova.

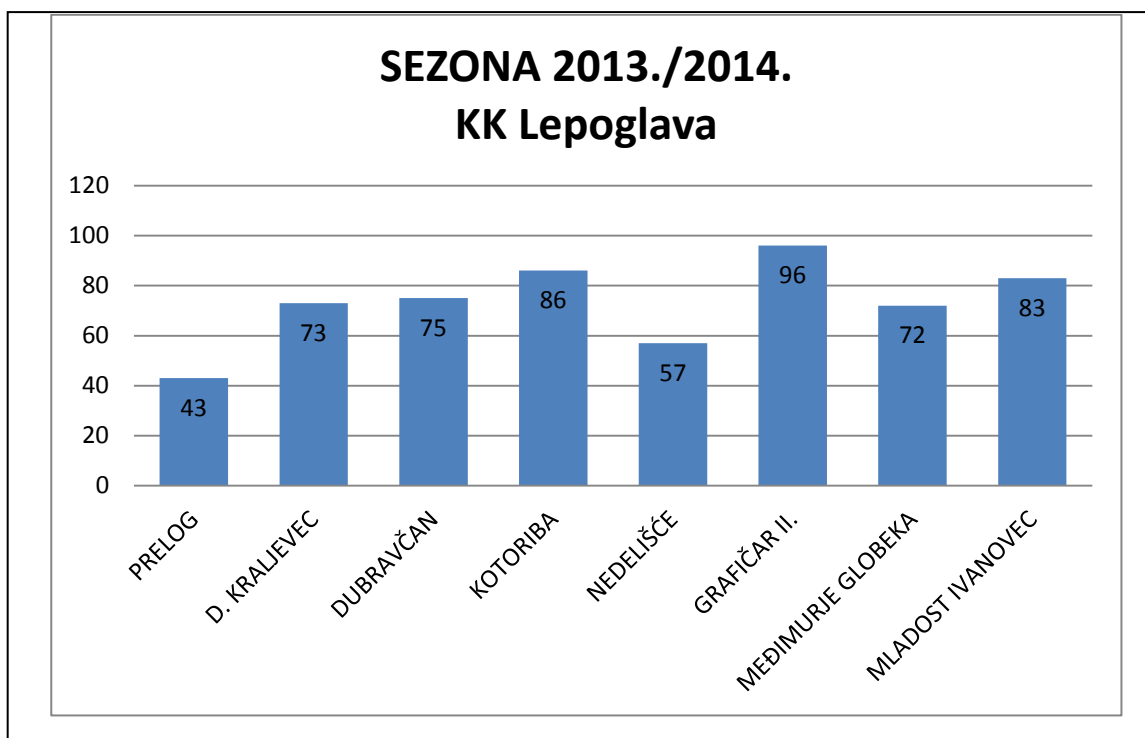
Napiši esej u kojem ćeš opisati sezonu svojeg tima. Uključi uspoređivanje maksimuma, minimuma, medijana, moda i prosjeka svojeg tima i protivničkih timova.

Slika 4.2.5. Primjer učeničkog rješenja.

| <b>KK LEPOGLAVA, 2013./2014.</b> |                          |                                 |                        |
|----------------------------------|--------------------------|---------------------------------|------------------------|
|                                  | <b>BODOVI MOJEG TIMA</b> | <b>BODOVI PROTIVNIČKOG TIMA</b> | <b>PROTIVNIČKI TIM</b> |
| <b>1</b>                         | 43                       | 54                              | PRELOG                 |
| <b>2</b>                         | 73                       | 62                              | D. KRALJEVEC           |
| <b>3</b>                         | 75                       | 81                              | DUBRAVČANI             |
| <b>4</b>                         | 86                       | 64                              | KOTORIBA               |
| <b>5</b>                         | 57                       | 72                              | NEDELIŠĆE              |
| <b>6</b>                         | 96                       | 72                              | GRAFIČAR II.           |
| <b>7</b>                         | 72                       | 94                              | MEĐIMURJE<br>GLOBETKA  |
| <b>8</b>                         | 83                       | 79                              | MLADOST<br>IVANOVEC    |

|                           | <b>MAX</b> | <b>MIN</b> | <b>MEDIJAN</b> | <b>MOD</b> | <b>PROSJEK</b> |
|---------------------------|------------|------------|----------------|------------|----------------|
| <b>Lepoglava</b>          | 96         | 43         | 74             | /          | 73.1           |
| <b>Protivnički timovi</b> | 94         | 54         | 72             | 72         | 72.3           |



Tablica 4.2.3. Kontrolna lista.

|                                  | IZVRŠENO + | NIJE IZVRŠENO - |
|----------------------------------|------------|-----------------|
| <b>GRAF POSTIGNUTIH BODOVA</b>   |            |                 |
| <b>MAX TIMA</b>                  |            |                 |
| <b>MIN TIMA</b>                  |            |                 |
| <b>MEDIJAN TIMA</b>              |            |                 |
| <b>MOD TIMA</b>                  |            |                 |
| <b>PROSJEK TIMA</b>              |            |                 |
| <b>MAX PROTIVNIČKOG TIMA</b>     |            |                 |
| <b>MIN PROTIVNIČKOG TIMA</b>     |            |                 |
| <b>MEDIJAN PROTIVNIČKOG TIMA</b> |            |                 |
| <b>MOD PROTIVNIČKOG TIMA</b>     |            |                 |
| <b>PROSJEK PROTIVNIČKOG TIMA</b> |            |                 |
| <b>OBJAŠNJENJE</b>               |            |                 |

Tablica 4.2.4. Rubrika

|                           | 0                                  | 1                                | 2   | 3  |
|---------------------------|------------------------------------|----------------------------------|---|--|
| <b>Graf</b>               | nije napravljen                    | nepotpun, nejasan                | gotovo potpun, s ponekim propustima, uredan   | potpuno, uredan                                    |
| <b>Maksimum</b>           | nije izračunat                     | max ili procedura je netočna     | max je točan, ali procedura je djelomična     | max je točan, a procedura je dobro ilustrirana     |
| <b>Odabrani tim</b>       |                                    |                                  |   |  |
| <b>Protivnički timovi</b> | nije izračunat                     | max ili procedura je netočna     | max je točan, ali procedura je djelomična     | max je točan, a procedura je dobro ilustrirana     |
| <b>Minimum</b>            | nije izračunat                     | min ili procedura je netočna     | min je točan, ali procedura je djelomična     | min je točan, a procedura je dobro ilustrirana     |
| <b>Odabrani tim</b>       |                                    |                                  |   |  |
| <b>Protivnički timovi</b> | nije izračunat                     | min ili procedura je netočna     | min je točan, ali procedura je djelomična     | min je točan, a procedura je dobro ilustrirana     |
| <b>Medijan</b>            | nije izračunat                     | medijan ili procedura je netočna | medijan je točan, ali procedura je djelomična | medijan je točan, a procedura je dobro ilustrirana |
| <b>Odabrani tim</b>       |                                    |                                  |   |  |
| <b>Protivnički timovi</b> | nije izračunat                     | medijan ili procedura je netočna | medijan je točan, ali procedura je djelomična | medijan je točan, a procedura je dobro ilustrirana |
| <b>Mod</b>                | nije izračunat                     | mod ili procedura je netočna     | mod je točan, ali procedura je djelomična     | mod je točan, a procedura je dobro ilustrirana     |
| <b>Odabrani tim</b>       |                                    |                                  |   |  |
| <b>Protivnički tim</b>    | nije izračunat                     | mod ili procedura je netočna     | mod je točan, ali procedura je djelomična     | mod je točan, a procedura je dobro ilustrirana     |
| <b>Prosjek</b>            | nije izračunat                     | prosjek ili procedura je netočna | prosjek je točan, ali procedura je djelomična | prosjek je točan, a procedura je dobro ilustrirana |
| <b>Odabrani tim</b>       |                                    |                                  |   |  |
| <b>Protivnički tim</b>    | nije izračunat                     | prosjek ili procedura je netočna | prosjek je točan, ali procedura je djelomična | prosjek je točan, a procedura je dobro ilustrirana |
| <b>Objašnjenje</b>        | nije prezentirano ili je nepotpuno | nejasno                          | točno s ponekim gramatičkim pogreškama        | jasno, potpuno i gramatički točno                  |

## LITERATURA

1. Bratanić, M. (1993). Mikropedagogija. Interakcijsko- komunikacijski aspekt odgoja. Zagreb: Školska knjiga
2. Brookhart, S. (2008). How to give effective feedback to your students. Virginia USA: ASCD
3. Brown, S. (2004./2005). Assesment for Learning.  
<http://www2.glos.ac.uk/offload/tli/lets/lathe/issue1/articles/brown.pdf>  
preuzeto 18.6.2015.
4. CARnet- E-Dnevnik (2014).  
<http://www.carnet.hr/e-dnevnik>  
preuzeto 2.9.2015.
5. Cindrić, M., Miljković, D., Strugar, V. (2010). Didaktika i kurikulum. Zagreb: IEP-D2
6. Cook, J.(2013). Diagnostic Testing in Education.  
[http://www.ehow.com/facts\\_5720649\\_diagnostic-testing-education.html](http://www.ehow.com/facts_5720649_diagnostic-testing-education.html)  
preuzeto 26.7.2015.
7. Divjak, B. (2008). Učenje putem e- učenja: primjeri implementacije i evaluacije,  
[http://www.srce.unizg.hr/fileadmin/Srce/proizvodi\\_usluge/obrazovanje/CEU/Popodneatc eu/PPT/ppt\\_20090420.pdf](http://www.srce.unizg.hr/fileadmin/Srce/proizvodi_usluge/obrazovanje/CEU/Popodneatc eu/PPT/ppt_20090420.pdf)  
preuzeto, 20.7.2015.
8. European Commission (2005). Propasal for European Recommendation of the European Parliament and of the Council on Key Competences for Lifelong Learning. Brussels: COM (2005).



9. Finn, B., Metcalfe, J. (2010). Scaffolding feedback to maximize long- term error correction  
<http://www.columbia.edu/cu/psychology/metcalfe/PDFs/FinnMetcalfe2010.pdf>  
preuzeto 12.8.2015.
10. Hughes, G. Ipsative assessment: Comparison with past performance  
[http://www.tmedwin.net/~ucgbarg/OU\\_workshop\\_files/TWO37-GH.pdf](http://www.tmedwin.net/~ucgbarg/OU_workshop_files/TWO37-GH.pdf)  
preuzeto 2.9.2015.
11. Kadum- Bošnjak, S. (2007). Praćenje, provjeravanje i ocjenjivanje učenika u nastavi. Metodčki obzori, Vol.2, 35- 51  
[http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id\\_clanak\\_jezik=30415](http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=30415)  
preuzeto 18.8.2015.
12. Keeley, P.D. ,Tobey, C.R.(2011). Mathematics Formative Assessment: 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning, Corvin Pr. Inc.
13. Kelly, M. Pretests  
<http://712educators.about.com/od/assessments/a/pretests.htm>  
preuzeto 15.8.2015.
14. Kiriadou, C. (1995). Temeljna nastavna umijeća: metodički priručnik za uspješno poučavanje i učenje. Zagreb: Educa
15. Kuleto, V. (2013). Značaj kvaliteta povratne informacije u obrazovnom procesu.  
<http://www.valentinkuleto.com/2013/03/znacaj-kvaliteta-povratne-informacije-u-obrazovnom-procesu/>  
preuzeto 15.8.2015.
16. Kurnik, Z. (2007). Ocjenjivanje.  
<http://mis.element.hr/fajli/710/41-02.pdf>  
preuzeto 17.8.2015.

17. Kovač, A. (2005). Pozitivno razredno ozračje.  
<http://www.hrskole.com/portal.php?&IDzup=1&IDsk=1&IDrad=322&VarC=95>  
preuzeto 18.8.2015.
18. Learner-Centered Classrooms (2014).  
<http://fonetwork.uoregon.edu/learner-centered-classrooms/>  
preuzeto 2.9.2015.
19. Matijević, M. (2004). Ocjenjivanje u osnovnoj školi. Zagreb: TIPEX
20. Matijević, M. (2005). Evaluacija u odgoju i obrazovanju  
<http://hrcak.srce.hr/file/205413>  
preuzeto 20.8.2015.
21. Meyer, H. (2005). Što je dobra nastava? Zagreb: Erudita
22. Mužić, V., Vrgoč, H. (2005). Vrijednovanje u odgoju i obrazovanju. Zagreb: Hrvatsko pedagoško- književni zbor
23. McMillan, J.H. (2010). Classroom Assesment: Principles and Practice for Effective Standards – Based Instruction, 5th edition, Pearson Education
24. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta. Nacionalni okvirni kurikulum (2011).  
[https://www.google.hr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBsQFjAAahUKEwie8KqL4N\\_HAhVFWxQKHU70AFc&url=http%3A%2F%2Fpublic.mzos.hr%2Ffgs.axd%3Fid%3D18247&usg=AFQjCNGidk8doqI7V51dHc2Rh62sagxFEg&bvm=bv.102022582,d.bGQ&cad=rja](https://www.google.hr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBsQFjAAahUKEwie8KqL4N_HAhVFWxQKHU70AFc&url=http%3A%2F%2Fpublic.mzos.hr%2Ffgs.axd%3Fid%3D18247&usg=AFQjCNGidk8doqI7V51dHc2Rh62sagxFEg&bvm=bv.102022582,d.bGQ&cad=rja)  
preuzeto 20.7.2015.

25. NCVVO (2015). Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. Opis poslova.  
[http://www.ncvvo.hr/drzavnamatura/c/portal/layout?p\\_1\\_id=PUB.1001.3](http://www.ncvvo.hr/drzavnamatura/c/portal/layout?p_1_id=PUB.1001.3)  
preuzeto 25.7.2015.
26. Nimac, E. (2010). Vrednovanje postignuća učenika na kognitivnom području  
[http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Vrednovanje\\_kognitivno\\_podrucje.doc](http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Vrednovanje_kognitivno_podrucje.doc)  
preuzeto 27.7.2015.
27. Učenička postignuća (Očekivani odgojno–obrazovni ishodi),  
[http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/mnm3-Bloomova\\_taksonomija-ishodi.pdf](http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/mnm3-Bloomova_taksonomija-ishodi.pdf)  
preuzeto 15.7.2015.
28. Penca Palčić (208). Utjecaj provjeravanja i ocjenjivanja znanja na učenje. Život i škola, Vol. LIV, 137-148,  
[http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id\\_clanak\\_jezik=37938](http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=37938)  
preuzeto 18.8.2015.
29. Perišić, M. (1988). Evaluacija učeničkih postignuća. Sarajevo: Svjetlost
30. Pravilnik o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi (2010)., [www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/propisi/Pravilnici\\_06.pdf](http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/propisi/Pravilnici_06.pdf)  
preuzeto sa službene stranice Agencije za odgoj i obrazovanje, 10.8.2015.
31. Popham, W.J. (2013). Classroom assessment: What teachers need to know: Prentice Hall
32. Rethinking Classroom Assessment with Purpose in Mind (2006).  
[http://www.edu.gov.mb.ca/k12/assess/wncp/full\\_doc.pdf](http://www.edu.gov.mb.ca/k12/assess/wncp/full_doc.pdf)  
preuzeto 25.6.2015.

33. Sevian, Components of the HPL Model Describing an Effective Learning Environment  
[http://www.faculty.umb.edu/hannah\\_sevian/G660new/documents/Components\\_of\\_HPL\\_model.pdf](http://www.faculty.umb.edu/hannah_sevian/G660new/documents/Components_of_HPL_model.pdf)  
preuzeto 2.9.2015.
34. Share, N. (2010). Mastery learning.  
<http://www.slideshare.net/techcreation/mastery-learning-4798261>  
preuzeto 19.7.2015.
35. Shute, V. (2007). Fokus on Formative Feedback.  
<https://www.ets.org/Media/Research/pdf/RR-07-11.pdf>  
preuzeto 17.7.2015.
36. Soldić, D. (2014). Strategije formativnog vrednovanja u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Diplomski rad. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek
37. Tot, D. (2013). Kultura samovrednovanja škole i učitelja. Zagreb: Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
38. Varošanec, S. (2004). Metodika nastave matematike II.- dio, za internu upotrebu.  
<http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/skriptaMNM2.pdf>  
preuzeto 7.9.2015.
39. Veža, E. (2015). Plickers-alat po mojoj mjeri.  
<https://pogledkrozprozor.wordpress.com/2015/03/31/plickers-alat-po-mojoj-mjeri/>,  
preuzeto 15.8.2015.
40. Vizek- Vidović, V., Rijavec, M., Vlahović-Štetić, V., Miljković, D. (2003). Psihologija obrazovanja. Zagreb: IEP

41. Vlahović – Štetić, V., Pavlin – Bernadrić, N. Utvrđivanje i vrednovanje studentskog postignuća

<http://www.unizg.hr/studiji-i-studiranje/cjelozivotno-obrazovanje-i-usavrsavanje/podrska-nastavnicima/ucenje-i-poucavanje-u-visokom-obrazovanju-upravo/vrednovanje/>

preuzeto 30.7.2015.

42. Vrgoč, H. (2002). Praćenje i ocjenjivanje školskog uspjeha: Stručno- znanstveni skup. Zagreb: Hrvatsko pedagoško- književni zbor

## Sažetak

Glavni cilj vrednovanja kao strategija učenja je poboljšanje učeničke motivacije i učenja. Da bi se to postiglo, učitelj treba kontinuirano prikupljati informacije o učeniku, vrednovati njegov rad i davati mu poticajne povratne informacije, ali i stvarati razredno okruženje u kojem vlada uvjerenje da je uspjeh moguće postići. Prikupljanje informacija o učeniku važan je dio vrednovanja te obuhvaća širok spektar formalnih i neformalnih tehnika koje učitelji mogu koristiti. Kod prikupljanja informacija o učenicima učitelji formiraju očekivanja o tome što učenici znati. Očekivana učenička postignuća predstavljaju jasno iskazane kompetencije, tj. očekivana znanja, vještine i sposobnosti te vrijednosti i stavove koje učenici trebaju steći i moći pokazati po uspješnom završetku određene nastavne teme, programa, stupnja obrazovanja ili odgojno–obrazovnog ciklusa. Jedan od načina kako učitelj može koristiti informacije prikupljene kod vrednovanja je da daje odgovore učenicima nakon što oni pokažu svoja znanja i vještine. Taj učiteljev odgovor naziva se povratna informacija. Prikladna povratna informacija utječe na uvjerenje da je uspjeh ovisan o čimbenicima kojima se može ovladati te pomaže učenicima u podizanju njihove samosvijesti.

Učitelj, da bi pomogao učenicima postići određenu razinu obrazovanja, treba organizirati poučavanje koje će pomoći učenicima u učenju. U tome mu mogu pomoći suvremeni pristupi u vrednovanju i obrazovanju, kao na primjer majstorsko učenje i diferencirano poučavanje. No, da bi nastava zadovoljila suvremene zahtjeve potrebno je i osposobiti učenike za valjano i pouzdano samovrednovanje.

Učitelju priliku za promatranje učeničkog razvoja u matematici pružaju i strategije formativnog vrednovanja. U ovome radu opisano je jedanaest strategija koje sadrže primjere primjene na konkretne matematičke sadržaje, ali i doprinos strategije u poticanju učenika na učenje i unapređenju poučavanja. Da bi učitelj donio procjenu o učenikovom postignuću i rezultatima, u tome mu pomažu rubrike pa tako učitelj treba biti osposobljen i za njihovu izradu.

## Summary

The main goal of assessment as a teaching strategy is improvement in student's motivation and learning. In order to accomplish it, the teacher has to gather information about the student continuously, assess his work and give stimulating feedback, but also create a class atmosphere in which there is a belief that success is possible to accomplish. Gathering information about students is an important aspect of assessment which covers a wide spectrum of formal and informal techniques available to teachers. By gathering information about students, teachers form their expectations about the knowledge of students. The expected student accomplishments represent clearly manifested competence, i.e. expected knowledge, skills and abilities, but also values and attitudes that students have to acquire and be able to show upon the successful ending of a particular class subject, programs, educational degree or educational cycle. One of the ways a teacher can use information gathered through assessment is to give answers to students after they show their knowledge and skills. That answer is referred to as feedback. The appropriate feedback affects the belief that success depends on factors which can be mastered and helps with the student's confidence.

The teacher, in order to help his students to accomplish a certain degree of education, has to organize teaching which will help students to learn. Contemporary approaches in assessment and education, as are apprenticeships and differentiated teaching, can be very useful to teachers. However, in order to make classes meet the current requirements, training students for valid and reliable self-assessment is crucial.

Furthermore, strategies of formative assessment give the teacher a chance to monitor a student's progress in mathematics. Eleven strategies with examples of application in certain mathematical contents, and also the contribution of the strategy in encouraging the students to learn and improving teaching are described in this paper. In order for the teacher to make an assessment on the student's accomplishments and results, rubrics are a helpful tool, so a teacher has to be trained to make them.

## **Životopis**

Rođena sam 8.4.1991. u Varaždinu. Pohađala sam osnovnu školu „Ante Starčević“ u Lepoglavi koju sam završila 2006. godine. Zatim sam upisala opću gimnaziju u Srednjoj školi Ivanec gdje sam maturirala 2010. godine. Iste godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji sam završila 2013. godine. Iste godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij matematike smjer: nastavnički također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu čijom ću diplomom steći zvanje magistre edukacije matematike.