SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Hrvoje Planinić

MARTINGALNE TEHNIKE I VREMENA MIJEŠANJA MARKOVLJEVIH LANACA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zoran Vondraček

Zagreb, srpanj 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Fundamentalni rezultati klasične teorije vjerojatnosti su zakoni velikih brojeva i centralni granični teoremi. Ključna pretpostavka tih rezultata je da imamo niz nezavisnih slučajnih varijabli. Dakle, niz pokusa takvih da ni u jednom trenutku ishod sljedećeg pokusa ne ovisi o prethodnim ishodima. Ipak, htjeli bismo modelirati procese u kojima postoji neki oblik zavisnosti. Jedno od takvih svojstava je tzv. Markovljevo svojstvo.

Markovljevi lanci su stohastički procesi sa svojstvom da u svakom trenutku sljedeći korak lanca ovisi samo o trenutnoj poziciji lanca. Kažemo da lanac, uvjetno na sadašnjost, zaboravlja svoju prošlost. To svojstvo lanca naziva se Markovljevo svojstvo. Jedna od najvažnijih posljedica tog svojstva je da, uz neke uvjete, distribucija Markovljevog lanca konvergira prema tzv. stacionarnoj distribuciji kada vrijeme ide u beskonačnost. Postavlja se pitanje brzine te konvergencije. U tu svrhu kažemo da je *vrijeme miješanja* Markovljevog lanca minimalan broj koraka koji je potreban da distribucija lanca bude "približno" stacionarna. Cilj je odrediti vrijeme miješanja zadanog Markovljevog lanca, te shvatiti kako se ono mijenja sa povećanjem pripadnog prostora stanja.

Jedna od primjena ove teorije je u tzv. MCMC (Monte Carlo Markov Chains) metodama. Pretpostavimo da želimo simulirati neku vjerojatnosnu distribuciju π. Ideja MCMC metode je konstruirati dovoljno dobar Markovljev lanac kojemu je distribucija π stacionarna distribucija, te simulirati jednu trajektoru lanca. Budući da je distribucija lanca nakon dovoljno velikog broja koraka približno stacionarna, vrijednost lanca u tom trenutku predstavlja simulaciju zadane distribucije π. Vrijeme miješanja tog lanca govori nam koliki broj koraka je dovoljan da bi aproksimacija bila dovoljno dobra.

Postoje razne tehnike za određivanje vremena miješanja Markovljevih lanaca. Sparivanje, jako stacionarna vremena i spektralne tehnike neke su od osnovnih. Pobliže ćemo se upoznati samo sa jako stacionarnim vremenima. Ipak, cilj ovog rada je primjeniti napredne martingalne tehnike pri rješavanju problema vezanih uz brzinu konvergencije prema stacionarnosti. Glavni alat bit će nam tzv. *proces evoluirajućih skupova.* Za dani Markovljev lanac, proces evoluirajućih skupova je Markovljev lanac

čija su stanja podskupovi prostora stanja originalnog lanca, a kretanje tog procesa je usko vezano uz kretanje početnog lanca. Precizno ćemo definirati taj proces, pokazati njegova svojstva i iskoristiti ih kako bismo riješili probleme vezane uz miješanje Markovljevih lanaca.
Na kraju ovog uvoda, dajemo kratak pregled rada po poglavljima.
U prvom dijelu Poglavlja 1 definiramo Markovljev lanac na konačnom prostoru stanja, pojam stacionarne distribucije, te svojstva ireducibilnosti i aperiodičnosti. Navodimo fundamentalne rezultate koji govore da ireducibilan Markovljev lanac na konačnom prostoru stanja ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju, te da uz dodatnu pretpostavku aperiodičnosti, distribucija lanca konvergira prema stacionarnoj distribuciji kada vrijeme teži u beskonačnost. U drugom dijelu upoznajemo se sa osnovnim pojmovima vezanim uz vremena miješanja Markovljevih lanaca. Definiramo pojam *udaljenosti potpune varijacije* kao mjeru udaljenosti među vjerojatnosnim distribucijama, te preko nje precizno definiramo vrijeme miješanja Markovljevog lanca.
Na početku Poglavlja 2 definiramo martingale i pokazujemo njihova osnovna svojstva. U ostatku poglavlja bavimo se procesom evoluirajućih skupova. Često ćemo taj proces radi jednostavnosti zvati samo evoluirajući skupovi. Za ireducibilan i aperiodičan Markovljev lanac na konačnom prostoru stanja definiramo pripadni proces evoluirajućih skupova, te pokazujemo na koji način su ta dva procesa povezana. Primjenu martingalnih tehnika omogućuje proces vezan uz stacionarnu distribuciju lanca i pripadni proces evoluirajućih skupova za koji pokazujemo da je martingal. Također pokazujemo vezu evoluirajućih skupova i vremena miješanja originalnog lanca, te definiramo Doobovu transformaciju evoluirajućih skupova, koja će nam biti od velike koristi.
U Poglavlju 3 upoznajemo se tehnikom ograničavanja vremena miješanja Markovljevog lanca koja koristi jako stacionarna vremena. Pokazujemo da vrijeme apsorpcije Doobove transformacije evoluirajućih skupova predstavlja jedno takvo vrijeme za originalni lanac.
U Poglavlju 4 koristeći evoluirajuće skupove dajemo ogradu na vrijeme miješanja Markovljevog lanca u terminima radijusa toka (engl. conductance) podskupova pripadnog prostora stanja. Ključna je generalizacija standarnog omjera uskog grla sa *funkcijom radijusa toka.* Ta funkcija, za razliku od omjera uskog grla, mjeri radijus toka skupova stanja različitih veličina. Pokazujemo da je za brzo miješanje lanca dovoljno da određeni vagani prosjek te funkcije nije prevelik.
U zadnjem poglavlju bavimo se standardnim primjerom Markovljevog lanca, a to je jednostavna slučajna šetnja na grafu. Koristeći martingalne tehnike i evoluirajuće skupove, dajemo ogradu na povratne vjerojatnosti slučajne šetnje u terminima maksimalnog stupnja pripadnog grafa.

Poglavlje 1

Vremena miješanja Markovljevih lanaca

U ovom poglavlju definiramo pojam Markovljevog lanca na konačnom prostoru stanja, te navodimo glavne rezultate iz teorije Markovljevih lanaca koji će nam biti potrebni. Iako uvijek pretpostavljamo da je prostor stanja konačan, većina rezultata vrijedi i u slučaju prebrojivog prostora stanja. Ključan je pojam stacionarne distribucije Markovljevog lanca, te Teorem 1.1.3 o graničnom ponašanju Markovljevog lanca. U drugom dijelu definiramo *udaljenost potpune varijacije* i *vrijeme miješanja*, osnovne alate pomoću kojih mjerimo brzinu konvergencije Markovljevih lanaca prema stacionarnoj distribuciji. Naše izlaganje većinom prati Poglavlja 1. i 4. u [3], gdje se mogu naći izostavljeni dokazi. Za detaljnije o Markovljevim lancima vidi [5].

1.1 Markovljevi lanci

Neka je Ω konačan skup i $P = (P(x,y) : x, y \in \Omega)$ po retcima stohastička matrica, tj. $P \geq 0$ i

$$\sum_{y\in\Omega} P(x,y) = 1, \text{ za sve } x \in \Omega.$$

Slučajni proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ definiran na vjerojatnosom prostoru $(S, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ s vrijednostima u Ω nazivamo **Markovljev lanac sa prostorom stanja Ω i prijelaznom matricom P** ako vrijedi

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0\} = \mathbf{P}\{X_{n+1} = y | X_n = x\} = P(x,y),$$

za sve $n \geq 0$ i sve $x_0, \dots, x_{n-1}, x, y \in \Omega$ za koje su gornje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane ili ekvivalentno, ako za sve $n \geq 0$ i sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} = y | X_0, \dots, X_n\} = \mathbf{P}\{X_{n+1} = y | X_n\} = P(X_n, y).$$

Riječima, ako se u trenutku n Markovljev lanac nalazi u stanju x, tada on prelazi u stanje y sa vjerojatnošću $P(x, y)$ bez obzira u kojim je stanjima $x_0, \dots, x_{n-1}$ bio ranije. Nekad umjesto termina Markovljev lanac kažemo da proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ima Markovljevo svojstvo.
Neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac sa konačnim prostorom stanja Ω i prijelaznom matricom P. Napomenimo da ćemo vjerojatnosne distribucije na Ω predstavljati vektor-retcima, a za proizvoljnu vjerojatnosnu distribuciju μ na Ω i za svaki skup $A \subset \Omega$ pišemo

$$\mu(A) := \sum_{x \in A} \mu(x).$$

Nadalje, neka je μ_n distribucija slučajne varijable X_n za sve $n \geq 0$, tj.

$$\mu_n(x) := \mathbf{P}\{X_n = x\}, \text{ za sve } x \in \Omega.$$

Tada za sve $n \geq 0$ i sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$\mu_{n+1}(y) = \sum_{x \in \Omega} \mathbf{P}\{X_n = x\}\mathbf{P}\{X_{n+1} = y | X_n = x\} = \sum_{x \in \Omega} \mu_n(x) P(x, y).$$

Gornju jednakost zgodnije pišemo u vektorskom obliku, tj. vrijedi

$$\mu_{n+1} = \mu_n P, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Odavde se lagano dobije da vrijedi

$$\mu_n = \mu_0 P^n, \text{ za sve } n \geq 0, \tag{1.1}$$

gdje je $P^0 := I$ i $P^n := P^{n-1}P$ za sve $n \geq 1$. Budući da ćemo često promatrati lance s istom prijelaznom matricom, ali različitim početnim distribucijama, pišemo $\mathbf{P}_\mu$ i $\mathbf{E}_\mu$ za vjerojatnost i očekivanje u slučaju kad je početna distribucija lanca μ, tj. $\mu_0 = \mu$. Najčešće će početna distribucija lanca biti koncentrirana u jednom stanju $x \in \Omega$. Tada radi jednostavnosti koristimo oznake $\mathbf{P}_x$ i $\mathbf{E}_x$. Sada iz (1.1) slijedi da za sve $x, y \in \Omega$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x\{X_n = y\} = P^n(x, y).$$

Dakle, vjerojatnost da lanac koji kreće iz stanja x u trenutku n bude u y je upravo $P^n(x, y)$. Te vjerojatnosti nazivamo **n-koračne prijelazne vjerojatnosti**.
Za stanja $x, y \in \Omega$ kažemo da je y **dostižno** iz x ako lanac koji kreće iz x može s pozitivnom vjerojatnošću stići u y, tj. ako postoji $n = n(x, y) \geq 0$ takav da je $P^n(x, y) > 0$. Budući da za sve $x, y \in \Omega$ i sve $n \geq 1$ vrijedi

$$P^n(x, y) = \sum_{x_1 \in \Omega} \cdots \sum_{x_{n-1} \in \Omega} P(x, x_1) P(x_1, x_2) \cdots P(x_{n-1}, y),$$

slijedi da je y dostižno iz x ako i samo ako postoji $n = n(x, y)$ i stanja $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \Omega$ takva da je $P(x, x_1)P(x_1, x_2) \cdots P(x_{n-1}, y) > 0$. Kažemo da je prijelazna matrica P **ireducibilna** ako su svaka dva stanja $x, y \in \Omega$ međusobno dostižna.
Vjerojatnosnu distribuciju π na Ω nazivamo **stacionarnom** za prijelaznu matricu P ako vrijedi

$$\pi = \pi P,$$

tj.

$$\pi(y) = \sum_{x \in \Omega} \pi(x)P(x, y), \text{ za sve } y \in \Omega.$$

Iz (1.1) i prethodne definicije slijedi da za lanac čija je početna distribucija stacionarna (tj. $\mu_0 = \pi$) vrijedi $\mu_n = \pi P^n = \pi$ za sve $n \geq 0$, tj. distribucija lanca se ne mijenja kroz vrijeme. Pokazuje se da je stacionarna distribucija usko vezana uz granično ponašanje Markovljevog lanca. Osnovno pitanje u vezi stacionarne distribucije je pitanje egzistencije i jedinstvenosti.

Teorem 1.1.1. *Neka je zadana ireducibilna prijelazna matrica P na konačnom prostoru stanja Ω. Tada postoji jedinstvena stacionarna distribucija π za P. Nadalje, vrijedi*

$$\pi(x) > 0, \text{ za sve } x \in \Omega.$$

Za sve $x \in \Omega$ sa $\mathcal{T}(x)$ označimo sve moguće trenutke u vremenu u kojima se lanac može vratiti u početno stanje x, tj.

$$\mathcal{T}(x) := \{n \geq 1 : P^n(x, x) > 0\}.$$

Sada za svako stanje $x \in \Omega$ definiramo **period** od x kao najveći zajednički djelitelj skupa $\mathcal{T}(x)$. Može se pokazati da u slučaju ireducibilne prijelazne matrice P, sva stanja imaju isti period. Zato je moguće, barem u slučaju ireducibilnog lanca (tj. matrice P), definirati period lanca kao period bilo kojeg stanja. Kažemo da je lanac **aperiodičan** ako mu je period jednak 1, dok u suprotnom kažemo da je **periodičan**. Korisna će nam biti sljedeća propozicija.

Propozicija 1.1.2. *Neka je zadana ireducibilna i aperiodična prijelazna matrica P na konačnom prostoru stanja Ω. Tada postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$P^r(x, y) > 0, \text{ za sve } x, y \in \Omega.$$

Pretpostavimo da je zadan ireducibilan lanac sa periodom $d \geq 2$. Može se pokazati da tada postoje postoji particija $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$ prostora stanja Ω sa svojstvom da ako lanac kreće iz nekog stanja iz C_k, u sljedećem koraku prelazi u neko stanje iz $C_{k+1(\text{mod } d)}$, zatim u neko iz $C_{k+2(\text{mod } d)}$ i tako redom. Preciznije, za $x \in C_k$, za sve

$l \geq 1$, l-koračna distribucija $P^l(x, \cdot)$ je koncentrirana na skupu $C_{k+l (\text{mod } d)}$. Odavde je jasno da distribucija $P^n(x, \cdot)$ ne može konvergirati kada $n \to \infty$. Ipak, možemo definirati novu prijelaznu matricu $Q := \frac{P+I}{2}$. Trivijalno je za provjeriti da je Q stohastička, a budući da je $Q(x, x) \geq 1/2$ za sve $x \in \Omega$, jasno je da je Q aperiodična. Intuitivno, modificirali smo početni lanac tako da u svakom koraku prvo bacamo simetričan novčić i ako padne glava, ostajemo u stanju u kojem smo trenutno, a inače radimo prelazak u skladu sa početnom matricom P. Prijelaznu matricu Q nazivamo **lijena verzija** od P. Općenito, prijelaznu matricu P za koju vrijedi $P(x, x) \geq 1/2$ nazivamo **lijena** prijelazna matrica.
Pokazuje se da su svojstva ireducibilnosti i aperiodičnosti u slučaju Markovljevih lanaca na konačnom prostoru stanja dovoljna da bi taj lanac konvergirao prema svojoj stacionarnoj distribuciji.

Teorem 1.1.3. *Neka je μ proizvoljna vjerojatnosna distribucija na konačnom skupu stanja Ω. Pretpostavimo da je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac sa ireducibilnom i aperiodičnom prijelaznom matricom P, prostorom stanja Ω i početnom distribucijom $\mu_0 = \mu$. Neka je π jedinstvena stacionarna distribucija toga lanca. Tada je*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{X_n = y\} = \pi(y), \text{ za sve } y \in \Omega.$$

Specijalno,

$$\lim_{n \to \infty} P^n(x, y) = \pi(y), \text{ za sve } x, y \in \Omega.$$

Riječima, nakon "dovoljno" velikog broja koraka, vjerojatnost da će se lanac nalaziti u stanju y je približno $\pi(y)$ bez obzira iz kojeg stanja je lanac krenuo. Nas zanima koliko veliki broj koraka je "dovoljan".
Slučajnu varijablu T koja poprima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ zovemo **vrijeme zaustavljanja** za proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ako za sve $n \geq 0$ događaj $\{T = n\}$ ovisi o $X_0, X_1, \dots, X_n$, tj.

$$\{T = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n), \text{ za sve } n \geq 0.$$

Intuitivno, T je vrijeme zaustavljanja ako možemo reći da li se slučajno vrijeme T dogodilo u trenutku n ili ne samo na temelju poznavanja ponašanja lanca do trenutka n. Za proizvoljan $B \subset \Omega$ slučajna varijabla T_B definirana sa

$$T_B := \min\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

je vrijeme zaustavljanja. Zaista, za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

Varijablu T_B zovemo **prvo vrijeme pogađanja** skupa B. Neka je dano vrijeme zaustavljanja T za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, na događaju $\{T < \infty\}$ definiramo slučajnu varijablu X_T sa

$$X_T := \sum_{n=0}^{\infty} X_n \mathbf{1}_{\{T=n\}}.$$

Često nam je važno znati da li je vjerojatnost da se vrijeme zaustavljanja T ne dogodi jednaka 0, tj. da li je $\mathbf{P}\{T < \infty\} = 1$. Sljedeća lema daje kriterij za provjeru u slučaju kada je T prvo vrijeme pogađanja nekog skupa.

Lema 1.1.4. *Neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P i konačnim prostorom stanja Ω. Pretpostavimo da za $B \subset \Omega$ vrijedi*

$$\mathbf{P}_x\{T_B < \infty\} > 0, \text{ za sve } x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Tada je

$$\mathbf{P}\{T_B < \infty\} = 1.$$

Dokaz. Budući da je $\{T_B < \infty\} =\uparrow \cup_{n \in \mathbb{N}} \{T_B \leq n\}$, iz neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na rastući niz događaja i (1.2) slijedi da za sve $x \in \Omega$ vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_x\{T_B \leq n\} = \mathbf{P}_x\{T_B < \infty\} > 0.$$

Budući da je Ω konačan, iz prethodne nejednakosti slijedi da postoje $\alpha > 0$ i $n_0 \geq 1$ takvi da je

$$\mathbf{P}_x\{T_B \leq n_0\} \geq \alpha, \text{ za sve } x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Neka je sada $x \in \Omega$ proizvoljan. Dokazat ćemo da Markovljevo svojstvo povlači da za sve $k \geq 0$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x\{T_B > kn_0\} \leq (1 - \alpha)^k. \tag{1.4}$$

Budući da je $T_B \in \mathbb{Z}_+$, u tom slučaju je

$$\mathbf{E}_x T_B = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_x\{T_B > n\} \leq n_0 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_x\{T_B > kn_0\} \leq n_0 \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k = \frac{n_0}{\alpha}.$$

Dakle, $\mathbf{E}_x T < \infty$, pa je specijalno $\mathbf{P}_x\{T_B < \infty\} = 1$. Sada tvrdnja teorema slijedi zbog proizvoljnosti od x.
Preostalo nam je dokazati da za sve $k \geq 0$ vrijedi (1.4). Dokaz provodimo indukcijom po k. Slučaj kada je $k = 0$ je trivijalan, a tvrdnja za $k = 1$ slijedi iz (1.3). Nadalje,

pretpostavimo da (1.4) vrijedi za sve $k \le n$. Budući da je $\{T_B > n_0(n+1)\} \subset \{T_B > n_0 n\}$, slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x\{T_B > n_0(n+1)\} &= \mathbf{P}_x\{T_B > n_0(n+1), T_B > n_0 n\}\\ &= \mathbf{P}_x\{T_B > n_0 n\}\mathbf{P}_x\{T_B > n_0(n+1) | T_B > n_0 n\}\\ &\le (1-\alpha)^n \mathbf{P}_x\{T_B > n_0(n+1) | T_B > n_0 n\}, \qquad (1.5)\end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost vrijedi zbog pretpostavke indukcije. Budući da je $\{T_B > n_0 n\} = \{T_B \le n_0 n\}^c \in \sigma(X_0, \dots, X_{n_0 n})$, zbog Markovljevog svojstva vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x\{T_B > n_0(n+1) | T_B > n_0 n\} &= \sum_{y \in \Omega \setminus B} \mathbf{P}_x\{X_{n_0 n} = y | T_B > n_0 n\}\\ &\quad \times \mathbf{P}_x\{T_B > n_0(n+1) | T_B > n_0 n, X_{n_0 n} = y\}\\ &= \sum_{y \in \Omega \setminus B} \mathbf{P}_x\{X_{n_0 n} = y | T_B > n_0 n\}\mathbf{P}_y\{T_B > n_0\}\\ &\le (1-\alpha) \sum_{y \in \Omega \setminus B} \mathbf{P}_x\{X_{n_0 n} = y | T_B > n_0 n\} \quad \text{zbog (1.3)}\\ &= 1-\alpha.\end{aligned}$$

Sada iz prethodne nejednakosti i (1.5) slijedi korak indukcije. □

Nadalje, za ireducibilnu prijelaznu matricu P na konačnom prostoru stanja Ω sa stacionarnom distribucijom π definiramo matricu $\overleftarrow{P} = (\overleftarrow{P}(x,y) : x, y \in \Omega)$ sa

$$\overleftarrow{P}(x,y) := \frac{\pi(y)P(y,x)}{\pi(x)}, \text{ za sve } x, y \in \Omega.$$

Budući da je π stacionarna distribucija za P, za sve $x \in \Omega$ je

$$\sum_{y \in \Omega} \overleftarrow{P}(x,y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in \Omega} \pi(y)P(y,x) = 1.$$

Nadalje, za sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$\sum_{x \in \Omega} \pi(x)\overleftarrow{P}(x,y) = \pi(y) \sum_{x \in \Omega} P(y,x) = \pi(y).$$

Dakle, pokazali smo da je $\overleftarrow{P}$ dobro definirana prijelazna matrica na Ω, te da je stacionarna distribucija za P stacionarna i za $\overleftarrow{P}$. Lanac sa tom prijelaznom matricom nazivamo **reverzibilni lanac** pridružen prijelaznoj matrici P. U slučaju da je $P(x,y) = \overleftarrow{P}(x,y)$, za sve $x, y \in \Omega$, prijelaznu matricu P nazivamo **reverzibilnom**.

Ovaj dio završavamo teoremom o reprezentaciji Markovljevog lanca pomoću niza nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih elemenata. Ta reprezentacija je korisna za simuliranje Markovljevih lanaca.

Teorem 1.1.5. *Neka $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih elemenata u nekom prostoru Λ (npr. $\Lambda = [0,1]$), $f : \Omega \times \Lambda \to \Omega$ funkcija, te neka je X_0 slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u skupu Ω i nezavisna od niza $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$. Za $n \geq 1$ definiramo*

$$X_n := f(X_{n-1}, Z_n). \tag{1.6}$$

Tada je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac.
Nadalje, pretpostavimo da je zadana prijelazna matrica P na Ω i vjerojatnosna distribucija μ na Ω. Tada postoje funkcija f, niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih elemenata $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ i slučajna varijabla X_0 takvi da je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ definiran sa (1.6) Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P i početnom distribucijom μ.

Često u opisivanju nekog Markovljevog lanca kažemo "na temelju ishoda bacanja simetričnog novčića lanac radi...". Time implicitno radimo konstrukciju iz prethodnog teorema. Zapravo, intuitivno o Markovljevim lancima razmišljamo upravo na taj način. U svakom trenutku, samo na temelju trenutačnog stanja i nekog izvora slučajnosti nezavisnog sa prethodnim koracima, lanac prelazi u neko od mogućih stanja. Niz izvora slučajnosti $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ iz prethodnog teorema nazivamo **generirajući niz** za Markovljev lanac $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.

1.2 Uvod u miješanje

Znamo da ireducibilan i aperiodičan Markovljev lanac na konačnom skupu stanja konvergira prema svojoj stacionarnoj distribuciji u smislu Teorema 1.1.3. Budući da želimo mjeriti brzinu te konvergencije potrebna nam je neka metrika nad distribucijama na pripadnom prostoru stanja.

Definicija 1.2.1. *Neka su μ i ν vjerojatnosne distribucije skupu Ω. Definiramo **udaljenost potpune varijacije** među njima sa*

$$||\mu - \nu||_{TV} := \max_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \nu(A)|. \tag{1.7}$$

Riječima, udaljenost potpune varijacije između μ i ν je najveća razlika između vjerojatnosti koje μ i ν mogu pridružiti istim događajima. Dakle, ta udaljenost je na neki način prirodna za vjerojatnosne distribucije. Ipak, definicija (1.7) nije najsretnija za računanje. Može se pokazati da vrijede sljedeće dvije karakterizacije koje rješavaju taj problem.

Lema 1.2.2. *Neka su μ i ν vjerojatnosne distribucije skupu Ω. Vrijedi*

$$||\mu - \nu||_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega}|\mu(x) - \nu(x)|,$$

$$||\mu - \nu||_{TV} = \sum_{\substack{x\in\Omega \\ \mu(x)\geq\nu(x)}}[\mu(x) - \nu(x)].$$

Napomenimo da se udaljenost potpune varijacije prirodno veže uz sparivanje distribucija. Preciznije, **sparivanje** distribucija μ i ν je svaki slučajni vektor (X, Y) definiran na nekom vjerojatnosnom prostoru takav da je marginalna distribucija od X jednaka μ, a marginalna distribucija od Y jednaka ν. U slučaju kad je $\mu = \nu$, možemo definirati slučajnu varijablu X sa distribucijom μ, te zatim definirati $Y := X$. Tada je (X, Y) sparivanje od μ i ν takvo da je $\mathbf{P}\{X \neq Y\} = 0$. Takvo sparivanje smo mogli napraviti samo u slučaju kada je $\mu = \nu$. Primjetimo da je tada $||\mu - \nu||_{TV} = 0$. Općenito, kada μ i ν nisu jednake, ne možemo konstruirati takvo sparivanje. Pokazuje se da udaljenost potpune varijacije između μ i ν govori koliko X i Y mogu biti jednake, tj. vrijedi

$$||\mu - \nu||_{TV} = \inf\{\mathbf{P}\{X \neq Y\} : (X, Y) \text{ je sparivanje od } \mu \text{ i } \nu\}.$$

Zapravo, može se pokazati da uvijek postoji sparivanje (X, Y) u kojem se gornji infimum postiže.
Nadalje, neka je zadana ireducibilna i aperiodična prijelazna matrica P na konačnom prostoru stanja Ω, te neka je π njena stacionarna distribucija. Zanima nas da li distribucija $P^n(x, \cdot)$ konvergira prema π u smislu da udaljenost potpune varijacije među njima teži u 0. Iz Teorema 1.1.3 slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty}|P^n(x, y) - \pi(y)| = 0, \text{ za sve } x, y \in \Omega.$$

Budući da je Ω konačan, za proizvoljan $x \in \Omega$ vrijedi

$$||P^n(x, \cdot) - \pi||_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{y\in\Omega}|P^n(x, y) - \pi(y)| \to 0, \text{ za } n \to \infty.$$

Opet zbog konačnosti od Ω, iz prethodnog zaključujemo da je

$$\max_{x\in\Omega}||P^n(x, \cdot) - \pi||_{TV} \to 0, \text{ za } n \to \infty.$$

Sada napokon možemo dati smisao terminu "udaljenost lanca od stacionarnosti". Za sve $n \geq 0$ definiramo

$$d(n) := \max_{x\in\Omega}||P^n(x, \cdot) - \pi||_{TV}.$$

Primjetimo da promatramo samo ponašanje lanca sa prijelaznom matricom P koji kreće iz fiksnog stanja. Prirodno se nameće pitanje da li možda lanac koji kreće iz neke distribucije μ može u nekom trenutku n biti "udaljeniji" od stacionarnosti nego lanci koji kreću iz fiksnog stanja, tj. da je

$$||\mu P^n - \pi||_{TV} \geq d(n).$$

Ipak, pokazuje se da takav slučaj nije moguć, tj. za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$d(n) = \sup_{\mu} ||\mu P^n - \pi||_{TV},$$

gdje uzimamo supremum po svim vjerojatnosnim distribucijama μ na Ω. Intuitivno je to jasno, budući da je svaka distribucija konveksna kombinacija "ekstremnih" distribucija koncentriranih samo u jednom stanju.

Budući da želimo mjeriti vrijeme u kojem je udaljenost od stacionarnosti jako mala, definiramo ϵ-**vrijeme miješanja** prijelazne matrice P (ili pripadnog lanca) sa

$$t_{mix}(\epsilon) := \min\{n \geq 0 : d(n) \leq \epsilon\}, \text{ za sve } \epsilon > 0.$$

Uobičajeno je **vrijeme miješanja** za P definirati sa

$$t_{mix} := t_{mix}(1/4).$$

Želimo za dane Markovljeve lance odrediti pripadno vrijeme miješanja t_{mix}, te vidjeti koja su to svojstva Markovljevih lanaca koja povlače brže ili sporije miješanje. Specijalno, cilj nam je vidjeti kako se t_{mix} mijenja kada se povećava prostor stanja Ω.

Napomenimo na kraju da, iako smo definirali vrijeme miješanja pomoću udaljenosti totalne varijacije, postoje i druge mjere odstupanja od stacionarnosti od kojih ćemo neke koristiti u ovom radu.

Poglavlje 2

Evoluirajući skupovi

U ovom ćemo poglavlju, za dani Markovljev lanac, konstruirati novi Markovljev lanac kojemu je prostor stanja skup podskupova prostora stanja originalnog lanca. Taj novi lanac, tzv. *proces evoluirajućih skupova*, usko je vezan uz početni lanac, te će se pokazati kao koristan alat u rješavanju raznih problema vezanih uz vrijeme miješanja originalnog lanca. Prije nego što formalno definiramo proces evoluirajućih skupova i pokažemo njegova svojstva, dajemo kratak uvod u martingale. Za detaljnije o martingalima vidi [6].

2.1 Martingali

Neka je u cijelom ovom dijelu zadan vjerojatnosni prostor $(S, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Niz $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ neopadajućih σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ nazivamo **filtracija**. Za slučajan proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ kažemo da je adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ (ili $\mathbb{F}$-adaptiran), ako je za sve $n \geq 0$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva.

Definicija 2.1.1. *Neka je zadana filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, te neka je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ $\mathbb{F}$-adaptirani niz integrabilnih slučajnih varijabli.*

(i) X se zove ***martingal*** *ako vrijedi*

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \ g.s., \ \text{za sve } n \geq 0. \tag{2.1}$$

(ii) X se zove ***supermartingal*** *ako vrijedi*

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n \ g.s., \ \text{za sve } n \geq 0.$$

(iii) X se zove ***submartingal*** *ako vrijedi*

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n \ g.s., \ \text{za sve } n \geq 0.$$

Neka je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ slučajan proces. Filtraciju $(\sigma(X_0, \ldots, X_n) : n \geq 0)$ zovemo **prirodna filtracija** procesa X. To je najmanja filtraciju s obzirom na koju je X adaptiran. Lagano se pokaže da, ako je X martingal uz neku filtraciju, onda je X martingal i s obzirom na svoju prirodnu filtraciju. Zaista, budući da je za sve $n \geq 0$ $\sigma(X_0, \ldots, X_n) \subset \mathcal{F}_n$, vrijedi

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|X_0, \ldots, X_n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|X_0, \ldots, X_n) = \mathbf{E}(X_n|X_0, \ldots, X_n) = X_n \; g.s.$$

Uzimanjem očekivanja iz relacije (2.1), slijedi da svaki martingal $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ ima konstantno očekivanje, tj.

$$\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Ipak, nisu svi procesi sa konstantnim očekivanjem martingali. Trivijalan primjer takvog procesa je niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa konačnim očekivanjem koje nisu konstante. Zaista, za takav proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ zbog nezavisnosti vrijedi

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|X_0, \ldots, X_n) = \mathbf{E}X_{n+1} \neq X_n, \text{ za sve } n \geq 0.$$

U slučaju da je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ supermartingal, odmah zaključujemo da je

$$\mathbf{E}X_{n+1} \leq \mathbf{E}X_n, \text{ za sve } n \geq 0,$$

tj.

$$\mathbf{E}X_n \leq \mathbf{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Jasno je da vrijede analogne nejednakosti u slučaju kad je X submartingal.
Slučajnu varijablu T koja poprima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ zovemo **vrijeme zaustavljanja** s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ ako je

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ za sve } n \geq 0.$$

U prethodnom poglavlju definirali smo vremena zaustavljanja samo u slučaju kada je pripadna filtracija bila prirodna filtracija nekog procesa. Neka je dano vrijeme zaustavljanja T i slučajni proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Proces $X^T = (X_n^T, n \geq 0)$ definiran sa

$$X_n^T = X_{T \wedge n}, \text{ za sve } n \geq 0,$$

zovemo **proces zaustavljen u vremenu** T. Pretpostavimo sada da su $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal i T vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Proces X^T je do (slučajnog) vremena T jednak martingalu X, a nakon toga je konstantno jednak X_T. Budući da su konstante trivijalno martingali, očekujemo da će i proces X^T također biti martingal. Zaista, za proizvoljno $n \geq 1$, budući da je $\{k \leq T\} = \{T \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_{n-1}$ za sve $k \leq n$ i X martingal, slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbf{E}(X_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{k\leq T\}}(X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= X_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{\{k\leq T\}}(X_k - X_{k-1}) + \mathbf{1}_{\{n\leq T\}}\mathbf{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= X_{T\wedge(n-1)}.
\end{aligned}$$

Specijalno, znamo da je tada

$$\mathbf{E}X_{T\wedge n} = \mathbf{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0. \tag{2.2}$$

Analogno se pokaže da, u slučaju kada je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ supermartingal (submartingal), vrijedi da je i zaustavljen proces X^T također supermartingal (submartingal). Specijalno, u slučaju supermartingala vrijedi

$$\mathbf{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbf{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0,$$

a u slučaju submartingala vrijedi

$$\mathbf{E}X_{T\wedge n} \geq \mathbf{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Pretpostavimo da je $\mathbf{P}\{T < \infty\} = 1$. Tada gotovo sigurno vrijedi

$$X_{T\wedge n} \to X_T, \text{ kada } n \to \infty.$$

Zanima nas pod kojim uvjetima možemo u (2.2) zamijeniti limes i integral, tj. zaključiti da vrijedi

$$\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_0.$$

Rezultati koji daju uvjete pod kojim gornja jednakost vrijedi zovu se teoremi o opcionalnom zaustavljanju.

Teorem 2.1.2. *(Doobov teorem o opcionalnom zaustavljanju) Neka je T vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$, takvo da je $\mathbf{P}\{T < \infty\} = 1$.*

(a) Neka je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ supermartingal (submartingal) s obzirom na $\mathbb{F}$. Pretpostavimo da vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

(i) Postoji $N > 0$ takvo da je $T \leq N$ g.s.

(ii) Postoji $K > 0$ takav da je $|X_{T\wedge n}| \leq K$, za sve $n \geq 0$.

Tada je X_T *integrabilna slučajna varijabla i u slučaju supermartingala vrijedi* $\mathbf{E}X_T \leq \mathbf{E}X_0$*, dok u slučaju submartingala vrijedi* $\mathbf{E}X_T \geq \mathbf{E}X_0$*.*

(b) Ako je X *martingal i vrijedi (i) ili (ii), tada je* X_T *integrabilna i vrijedi* $\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_0$*.*

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je X supermartingal. Tada je zaustavljen proces X^T također supermartingal i vrijedi $\mathbf{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbf{E}X_0$, za sve $n \geq 0$. U slučaju *(i)*, imamo da je $\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_{T\wedge N} \leq \mathbf{E}X_0$. U slučaju *(ii)* je $|X_{T\wedge n}| \leq K$, za sve $n \geq 0$, pa upotrebom teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\mathbf{E}X_T = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbf{E}X_0.$$

Analognu tvrdnju dobijemo i za submartingal X, tako da već dokazano primjenimo na supermartingal $-X$.
(b) Primjenimo *(a)* na supermartingale X i $-X$. □

Martingalni pristup rješavanju problema uglavnom se se sastoji od pronalaska dobrog martingala i primjeni teorema o dominiranoj ili monotonoj konvergenciji (tj. teorema o opcionalnom zaustavljanju). Sljedeći primjer to lijepo ilustrira.

Primjer 2.1.3. Neka je $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbf{P}\{Y_1 = +1\} = \mathbf{P}\{Y_1 = -1\} = 1/2$. Definiramo proces $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ sa $X_0 := k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$ i

$$X_n = X_{n-1} + Y_n, \text{ za sve } n \geq 1.$$

Proces X nazivamo **jednostavna simetrična slučajna šetnja na** $\mathbb{Z}$. Za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbf{E}(X_n|X_0,\dots,X_{n-1}) = \mathbf{E}(X_{n-1} + Y_n|X_0,\dots,X_{n-1}) = X_{n-1} + \mathbf{E}Y_n = X_{n-1} \; g.s.,$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je Y_n nezavisna sa $(X_0,\dots,X_{n-1})$, koja slijedi iz definicije od X i nezavisnosti niza $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$. Dakle, X je martingal.
Neka je sada $N \geq 1$ fiksan i početno stanje slučajne šetnje k takvo da je $0 \leq k \leq N$, te neka je τ prvo vrijeme kada šetnja dođe u 0 ili N. Jasno je da je τ vrijeme zaustavljanja. Prvo ćemo pokazati da je $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$.
Definiramo proces $M = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ sa

$$M_n = X_n^2 - n, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbf{E}(X_n^2|X_0,\dots,X_{n-1}) = X_{n-1}^2 + 2X_{n-1}\mathbf{E}(Y_n) + \mathbf{E}Y_n^2 = X_{n-1}^2 + 1 = M_{n-1} + n,$$

tj.

$$\mathbf{E}(M_n|X_0,\dots,X_{n-1}) = M_{n-1}.$$

Dakle, M je martingal, pa iz činjenice da je i zaustavljen proces M^τ također martingal, slijedi da je za sve $n \geq 0$

$$k^2 = \mathbf{E}M_0 = \mathbf{E}M_{\tau\wedge n} = \mathbf{E}X^2_{\tau\wedge n} - \mathbf{E}(\tau \wedge n).$$

Budući da $0 \leq (\tau \wedge n) \uparrow \tau$ kada $n \to \infty$, po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\tau \wedge n) = \mathbf{E}(\tau).$$

Iz prethodne dvije jednakosti i činjenice da je $X^2_{\tau\wedge n} \leq N^2$ za sve $n \geq 0$ slijedi da je

$$\mathbf{E}(\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X^2_{\tau\wedge n} - k^2 \leq N^2 < \infty. \tag{2.3}$$

Specijalno, vrijedi $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$.
Sada primjenom teorem o opcionalnom zaustavljanju na martingal X slijedi

$$k = \mathbf{E}X_0 = \mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=N\}} = N\mathbf{P}\{X_\tau = N\},$$

tj.

$$\mathbf{P}\{X_\tau = N\} = k/N,$$

pa odmah imamo da je

$$\mathbf{P}\{X_\tau = 0\} = 1 - k/N.$$

Vratimo se sada na (2.3). Budući da smo dokazali da je $\tau < \infty$ g.s., slijedi da je $\lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} = X_\tau$ g.s. Sada upotrebom teorema o dominiranoj konvergenciji ($X^2_{\tau\wedge n} \leq N^2$ za sve $n \geq 0$) iz (2.3) dobivamo

$$\mathbf{E}(\tau) = \mathbf{E}X^2_\tau - k^2 = \mathbf{E}X^2_\tau \mathbf{1}_{\{X_\tau=N\}} - k^2 = N^2\mathbf{P}\{X_\tau = N\} - k^2 = Nk - k^2,$$

tj.

$$\mathbf{E}(\tau) = k(N - k).$$

Pretpostavimo sada da je slučajna šetnja uvjetovana na to da će doći u N prije nego u 0. Zanima nas koliko je u tom slučaju očekivano vrijeme do apsorpcije $\mathbf{E}(\tau|X_\tau = N)$. Definiramo proces $S = (S_n)_{n=0}^\infty$ sa

$$S_n = X_n^3 - 3nX_n, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Tvrdimo da je proces S martingal s obzirom na prirodnu filtraciju od X. Neka je $n \geq 0$ proizvoljan. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (X_n + Y_{n+1})^3 - 3(n+1)(X_n + Y_{n+1}) \\ &= X_n^3 + 3X_n^2 Y_{n+1} + 3X_n Y_{n+1}^2 + Y_{n+1}^3 - 3(n+1)X_n - 3(n+1)Y_{n+1} \end{aligned}$$

Ako djelujemo s uvjetnim očekivanjem $\mathbf{E}(\cdot|X_0, \ldots, X_n)$ na gornju jednakost, zbog izmjerivosti od X_n i nezavisnosti Y_{n+1} sa $(X_0, \ldots, X_n)$, slijedi da su na desnoj strani drugi, četvrti i zadnji član jednaki nuli, dok je treći član jednak $3X_n\mathbf{E}(Y_{n+1}^2) = 3X_n\mathbf{E}(1) = 3X_n$. Dakle, vrijedi da je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_{n+1}|X_0, \ldots, X_n) &= X_n^3 + 3X_n - 3(n+1)X_n \\ &= X_n^3 - 3nX_n \\ &= S_n, \end{aligned}$$

tj. S je martingal.
Budući da je i zaustavljen proces S^τ također martingal, slijedi da za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$k^3 = \mathbf{E}X_{\tau\wedge n}^3 - 3\mathbf{E}((\tau \wedge n)X_{\tau\wedge n}). \tag{2.4}$$

Pustimo sada $n \to \infty$ i pogledajmo što se događa sa gornjom jednakosti. Budući da je $\tau < \infty$ g.s. i $X_{\tau\wedge n}^3 \leq N^3$ za sve $n \geq 0$, teorem o dominiranoj konvergenciji daje

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_{\tau\wedge n}^3 = \mathbf{E}X_\tau^3 = \mathbf{E}X_\tau^3 \mathbf{1}_{\{X_\tau = N\}} = N^3\mathbf{P}\{X_\tau = N\} = N^2 k. \tag{2.5}$$

Za drugi član na desnoj strani u (2.4) vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}((\tau \wedge n)X_{\tau\wedge n}) &= \mathbf{E}(\tau X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\leq n\}}) + \mathbf{E}(nX_n \mathbf{1}_{\{\tau>n\}}) \\ &= N\mathbf{E}(\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq n, X_\tau = N\}}) + \mathbf{E}(nX_n\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Budući da $0 \leq \tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq n, X_\tau=N\}} \uparrow \tau\mathbf{1}_{\{X_\tau=N\}}$ kada $n \to \infty$, upotrebom teorema o monotonoj kovergenciji slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} N\mathbf{E}(\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq n, X_\tau=N\}}) = N\mathbf{E}(\tau\mathbf{1}_{\{X_\tau=N\}}). \tag{2.7}$$

Nadalje, iz činjenica da je $\lim_{n\to\infty} \tau\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} = \tau\mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}} = 0$ g.s. (uz konvenciju $\infty \cdot 0 = 0$) i da je $X_n \leq N$ na događaju $\{\tau > n\}$, slijedi

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(nX_n\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}) \leq N \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\tau\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}) = 0,$$

gdje je ulazak limesa pod integral u zadnjem koraku opravdan teoremom o dominiranoj konvergenciji, budući da je τ integrabilna i $\tau\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \leq \tau$ za sve $n \geq 0$. Dakle, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(nX_n\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}) = 0.$$

Koristeći gornju jednakost i (2.7) u (2.6), dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}((\tau \wedge n)X_{\tau\wedge n}) = N\mathbf{E}(\tau\mathbf{1}_{\{X_\tau=N\}}).$$

Sada puštanjem $n \to \infty$ u (2.4), korištenjem gornje jednakosti i (2.5) slijedi da je

$$k^3 = N^2k - 3N\mathbf{E}(\tau\mathbf{1}_{\{X_\tau=N\}})$$

Dijeljenjem prethodne jednakosti sa $\mathbf{P}\{X_\tau = N\} = k/N$ konačno dobivamo

$$Nk^2 = N^3 - 3N\mathbf{E}(\tau|X_\tau = N),$$

tj.

$$\mathbf{E}(\tau|X_\tau = N) = \frac{N^2 - k^2}{3}.$$

2.2 Definicija i osnovna svojstva evoluirajućih skupova

Do kraja ovog poglavlja pretpostavljamo da nam je dana ireducibilna i aperiodična prijelazna matrica P na konačnom prostoru stanja Ω.
Za sve $x, y \in \Omega$, definiramo **tok** od x do y sa

$$Q(x, y) = \pi(x)P(x, y).$$

Nadalje, za svaka dva podskupa $A, B \subset \Omega$ definiramo tok iz A u B sa

$$Q(A, B) = \sum_{\substack{x\in A\\ y\in B}} Q(x, y).$$

Riječima, $Q(A, B)$ je vjerojatnost da u jednom koraku lanac prijeđe iz A u B kada kreće iz stacionarne distribucije. U slučaju da su A ili B jednočlani skupovi pišemo $Q(x, B) := Q(\{x\}, B)$, odnosno $Q(A, y) := Q(A, \{y\})$. Primjetimo da je zbog stacionarnosti od π, za svaki $y \in \Omega$

$$Q(\Omega, y) = \sum_{x\in\Omega} \pi(x)P(x, y) = \pi(y). \tag{2.8}$$

Također je jasno da je

$$Q(y, \Omega) = \pi(y). \tag{2.9}$$

Još ćemo koristiti da je za svaka dva podskupa $A, B \subset \Omega$,

$$Q(A, B) + Q(A^c, B) = Q(\Omega, B) \tag{2.10}$$

i

$$Q(A, B) + Q(A, B^c) = Q(A, \Omega). \tag{2.11}$$

Neka je $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli uniformno distribuiranih na $[0, 1]$.

Definicija 2.2.1. ***Proces evoluirajućih skupova*** *za prijelaznu matricu P s početnim stanjem $A \subset \Omega$ je Markovljev lanac $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ na podskupovima od Ω takav da je $S_0 := A$, te za sve $n \geq 0$ vrijedi*

$$S_{n+1} := \left\{ y \in \Omega : \frac{Q(S_n, y)}{\pi(y)} \geq U_n \right\}. \tag{2.12}$$

Intuitivno (ali dosta neprecizno), u svakom koraku biramo slučajan broj u iz intervala $[0, 1]$ i prelazimo u veći skup ako je taj broj malen, odnosno u manji ako je taj broj velik. Jasno je da proces definiran sa (2.12) uistinu ima Markovljevo svojstvo. Zaista, za sve $n \geq 0$ skup S_{n+1} ovisi samo o prethodnom stanju S_n, te o nezavisnom izvoru slučajnosti U_n. Formalno, S_0 je konstanta pa je dakle nezavisna sa nizom $(U_n)_{n=0}^{\infty}$, te postoji funkcija $f : \mathcal{P}(\Omega) \times [0, 1] \to \mathcal{P}(\Omega)$ takva da za sve $n \geq 0$ vrijedi $S_{n+1} = f(S_n, U_n)$. Sada Markovljevo svojstvo procesa evoluirajućih skupova slijedi iz Teorema 1.1.5, s time da je generirajući niz $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ indeksiran od 0, a ne od 1 kao u teoremu. Prostor stanja tog procesa je skup svih podskupova od Ω koji je zbog konačnosti od Ω također konačan. Ipak, taj proces ne nasljeđuje svojstvo ireducibilnosti jer su $\emptyset$ i Ω očito apsorbirajuća stanja. Iz (2.12) lako dobijemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.2.2. *Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova. Tada za sve $y \in \Omega$ i $n \geq 0$ vrijedi*

$$\mathbf{P}\{y \in S_{n+1} | S_n\} = \frac{Q(S_n, y)}{\pi(y)}. \tag{2.13}$$

Dokaz. Neka su $n \geq 0$ i $y \in \Omega$ proizvoljni. Budući da su S_n i U_n nezavisne, slijedi da su i slučajne varijable $\frac{Q(S_n, y)}{\pi(y)}$ i U_n također nezavisne. Ako u Lemi 2.2.3 stavimo

$\mathcal{G} := \sigma(S_n)$ i $h(x,y) := \mathbf{1}_{\{y \geq x\}}$, slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{y \in S_{n+1} | S_n\right\} &= \mathbf{P}\left\{\frac{Q(S_n, y)}{\pi(y)} \geq U_n | S_n\right\} \\ &= \mathbf{E}\left[h\left(U_n, \frac{Q(S_n, y)}{\pi(y)}\right) | S_n\right] \\ &= g\left(\frac{Q(S_n, y)}{\pi(y)}\right),\end{aligned}$$

gdje je $g(y) := \mathbf{E}\left[h(U_n, y)\right] = \mathbf{P}(U_n \leq y)$. Budući da je U_n uniformna slučajna varijabla na $[0,1]$ slijedi da je $g(y) = y$ za sve $y \in [0,1]$, a to daje tvrdnju propozicije.
□

Radi potpunosti navodimo lemu iz dokaza prethodne propozicije, dokaz leme se može naći u [6, Zadatak 1.26].

Lema 2.2.3. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(S, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *i* σ*-podalgebra* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$*. Nadalje, neka je* Y $\mathcal{G}$*-izmjeriva slučajna varijabla, te* X *slučajna varijabla nezavisna od* $\mathcal{G}$*. Ako je* $h : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ *Borelova funkcija, tada je*

$$\mathbf{E}\left[h(X,Y)|\mathcal{G}\right] = g(Y) \text{ g.s.}$$

gdje je $g(y) := \mathbf{E}[h(X,y)]$*.*

Za proizvoljan podskup $A \subset \Omega$ sa $\mathbf{P}_A$ označavat ćemo vjerojatnost $\mathbf{P}(\,\cdot\,|S_0 = A)$, te analogno za očekivanje $\mathbf{E}_A$.

Primjer 2.2.4. Neka je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac na prostoru stanja $\Omega = \{0, \ldots, N\}$ sa prijelaznom matricom P definiranom sa

$$P(k, k \pm 1) = 1/4 \text{ i } P(k,k) = 1/2, \text{ za sve } k \in \{1, \ldots, N-1\},$$

te

$$P(0,0) = P(N,N) = 3/4 \text{ i } P(0,1) = P(N, N-1) = 1/4.$$

X je zapravo lijena verzija simetrične slučajne šetnje na $\{0, \ldots, N\}$ sa petljama u krajnjim točkama. Jasno je da je X ireducibilan i aperiodičan Markovljev lanac. Nadalje, lako se provjeri da je $\pi = (\frac{1}{N+1}, \ldots, \frac{1}{N+1})$ stacionarna distribucija za X. Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ pripadni proces evoluirajućih skupova i $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ generirajući niz nezavisnih uniformnih slučajnih varijabli. Stavimo $S_0 := \{k\}$ za neki $k \in \{1, \ldots, N-1\}$.

Pogledajmo kako se ponašaju evoluirajući skupovi.
Budući da je π uniformna, za svaki $S \subset \Omega$ i sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$\frac{Q(S,y)}{\pi(y)} = \frac{\sum_{x\in S}\pi(x)P(x,y)}{\pi(y)} = \frac{1/(N+1)\sum_{x\in S}P(x,y)}{1/(N+1)} = \sum_{x\in S}P(x,y).$$

Iz prethodnog lako izračunamo da je

$$Q(\{k\}, k\pm 1)/\pi(k\pm 1) = 1/4$$

i

$$Q(\{k\}, k)/\pi(k) = 1/2,$$

dok je za ostale $y \in \Omega$

$$Q(\{k\}, y)/\pi(y) = 0.$$

Sada iz definicije (2.12) slijedi da je

$$S_1 = \begin{cases} \emptyset, & \text{kada je } U_0 > 1/2 \\ \{k\}, & \text{kada je } 1/4 < U_0 \leq 1/2 \\ \{k-1, k, k+1\}, & \text{kada je } U_0 \leq 1/4. \end{cases}$$

Dakle, iz $\{k\}$, proces evoluirajućih skupova može preći u $\emptyset, \{k\}$ ili $\{k-1, k, k+1\}$ s vjerojatnostima $1/2, 1/4$ i $1/4$, respektivno. Analogno se pokaže da, u slučaju kada $k\pm 1$ nisu rubne točke, iz $\{k-1, k, k+1\}$ proces može preći jedino u $\{k\}, \{k-1, k, k+1\}$ ili $\{k-2, k-1, k, k+1, k+2\}$ s vjerojatnostima $1/4, 1/2$ i $1/4$, respektivno. Dakle, u svakom trenutku, ako proces evoluirajućih skupova prelazi u drugi skup, može jedino dodati susjedne točke ili izbaciti rubne točke.

Sljedeća propozicija daje direktnu vezu između prijelaznih vjerojatnosti početnog Markovljevog lanca i prijelaznih vjerojatnosti pripadnog procesa evoluirajućih skupova.

Propozicija 2.2.5. *Ako je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova za prijelaznu matricu P, tada je za svaki $n \geq 0$ i sve $x, y \in \Omega$*

$$P^n(x,y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\mathbf{P}_{\{x\}}\{y \in S_n\}. \tag{2.14}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n. Slučaj $n = 0$ je trivijalan. Naime, obje strane u (2.14) su u tom slučaju jednake $\mathbf{1}_{\{x=y\}}$. Pretpostavimo sada da (2.14) vrijedi za sve $k \leq n$, tada je

$$\begin{aligned}
P^{n+1}(x,y) &= \sum_{z\in\Omega} P^n(x,z)P(z,y) \\
&= \sum_{z\in\Omega} \frac{\pi(z)}{\pi(x)}\mathbf{P}_{\{x\}}\{z \in S_n\}P(z,y) \\
&= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{z\in\Omega} \mathbf{E}_{\{x\}}(\mathbf{1}_{\{z\in S_n\}}\pi(z)P(z,y)) \\
&= \frac{1}{\pi(x)}\mathbf{E}_{\{x\}}(\sum_{z\in S_n} Q(z,y)) \\
&= \frac{1}{\pi(x)}\mathbf{E}_{\{x\}}(Q(S_n,y)). \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Prva jednakost slijedi zbog Markovljevog svojstva, druga zbog pretpostavke indukcije, četvrta zamjenom očekivanja i sumacije, a zadnja direktno iz definicije od Q. Budući da proces evoluirajućih skupova ima Markovljevo svojstvo vrijedi da je

$$\mathbf{P}_{\{x\}}\left\{y \in S_{n+1}|S_n\right\} = \mathbf{P}\left\{y \in S_{n+1}|S_n\right\}.$$

Iz relacije (2.13) i zadnje jednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi(x)}\mathbf{E}_{\{x\}}(Q(S_n,y)) &= \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\mathbf{E}_{\{x\}}(\mathbf{P}\left\{y \in S_{n+1}|S_n\right\}) \\
&= \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\mathbf{E}_{\{x\}}(\mathbf{P}_{\{x\}}\left\{y \in S_{n+1}|S_n\right\}).
\end{aligned}$$

Sada iz (2.15), prethodne jednakosti i činjenice da je očekivanje uvjetne vjerojatnosti jednako bezuvjetnoj vjerojatnosti imamo

$$P^{n+1}(x,y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\mathbf{P}_{\{x\}}\left\{y \in S_{n+1}\right\}.$$

□

Ovaj dio završavamo sa dva izrazito korisna svojstva evoluirajućih skupova.

Propozicija 2.2.6. *Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova za P. Tada je niz komplemenata $(S_n^c)_{n=0}^{\infty}$ također proces evoluirajućih skupova za istu prijelaznu matricu P.*

Dokaz. Zbog (2.10) i $Q(\Omega, y) = \pi(y)$ slijedi da je

$$Q(S_n, y) = \pi(y) - Q(S_n^c, y),$$

pa iz (2.12) imamo da je

$$\begin{aligned} S_{n+1}^c &= \{y \in \Omega : Q(S_n, y) \geq U_n \pi(y)\}^c \\ &= \{y \in \Omega : \pi(y) - Q(S_n^c, y) < U_n \pi(y)\} \\ &= \{y \in \Omega : Q(S_n^c, y) > (1 - U_n)\pi(y)\} \\ &= \{y \in \Omega : Q(S_n^c, y) \geq (1 - U_n)\pi(y)\} \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost vrijedi gotovo sigurno jer je U_n neprekidna slučajna varijabla. Sada tvrdnja slijedi iz činjenice da je niz $(1 - U_n)_{n=0}^{\infty}$ također niz nezavisnih slučajnih varijabli uniformno distribuiranih na $[0, 1]$. □

Propozicija 2.2.7. *Niz $(\pi(S_n))_{n=0}^{\infty}$ je martingal s obzirom na prirodnu filtraciju od $(S_n)_{n=0}^{\infty}$. Specijalno, vrijedi da je za svaki $n \geq 0$*

$$\mathbf{E}(\pi(S_n)) = \mathbf{E}(\pi(S_0)).$$

Dokaz. Neka je $n \geq 0$ proizvoljan. Zbog Markovljevog svojstva imamo da je

$$\mathbf{E}(\pi(S_{n+1})|S_n, \ldots, S_0) = \mathbf{E}(\pi(S_{n+1})|S_n) = \mathbf{E}(\sum_{z \in \Omega} \mathbf{1}_{\{z \in S_{n+1}\}} \pi(z)|S_n).$$

Zbog linearnosti uvjetnog očekivanja je

$$\mathbf{E}(\sum_{z \in \Omega} \mathbf{1}_{\{z \in S_{n+1}\}} \pi(z)|S_n) = \sum_{z \in \Omega} \mathbf{P}\left\{z \in S_{n+1}|S_n\right\} \pi(z),$$

pa zbog (2.13) imamo

$$\sum_{z \in \Omega} \mathbf{P}\left\{z \in S_{n+1}|S_n\right\} \pi(z) = \sum_{z \in \Omega} Q(S_n, z) = Q(S_n, \Omega) = \pi(S_n).$$

□

2.3 Evoluirajući skupovi i vremena miješanja

U ovom dijelu dokazat ćemo osnovnu vezu između vremena miješanja originalnog lanca i evoluirajućih skupova. Pokazat će se da na neki način brza apsorpcija evoluirajućih skupova u Ω ili $\emptyset$ povlači brže miješanje originalnog Markovljevog lanca.

Definicija 2.3.1. *Za svaki skup $S \subset \Omega$ definiramo*

$$S^\sharp := \begin{cases} S, & \text{ako je } \pi(S) \leq 1/2 \\ S^c, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.16}$$

Primjetimo da je $S^\sharp = \emptyset$ kada je $S = \Omega$ ili $S = \emptyset$.

Lema 2.3.2. *Za svaka dva podskupa S, $\Lambda \subset \Omega$ vrijedi*

$$|\pi(S \cap \Lambda) - \pi(S)\pi(\Lambda)| \leq \sqrt{\pi(S^\sharp)\pi(\Lambda^\sharp)}.$$

Dokaz. Neka su S, $\Lambda \subset \Omega$ proizvoljni skupovi. Tada vrijedi

$$\pi(S \cap \Lambda) + \pi(S^c \cap \Lambda) = \pi(\Lambda) = \pi(S)\pi(\Lambda) + \pi(S^c)\pi(\Lambda),$$

pa je stoga

$$|\pi(S \cap \Lambda) - \pi(S)\pi(\Lambda)| = |\pi(S^c \cap \Lambda) - \pi(S^c)\pi(\Lambda)|.$$

Analogno se pokaže da gornja jednakost vrijedi i ako umjesto Λ pišemo Λ^c. Koristeći notaciju iz (2.16) imamo

$$\begin{aligned} |\pi(S \cap \Lambda) - \pi(S)\pi(\Lambda)| &= |\pi(S^\sharp \cap \Lambda^\sharp) - \pi(S^\sharp)\pi(\Lambda^\sharp)| \\ &\leq |\pi(S^\sharp) \wedge \pi(\Lambda^\sharp)| \\ &\leq \sqrt{\pi(S^\sharp)\pi(\Lambda^\sharp)}. \end{aligned}$$

□

Potrebna će nam biti još jedna mjera udaljenosti nad vjerojatnosnim distribucijama na Ω.

Definicija 2.3.3. *Za svaku mjeru μ na Ω neka je*

$$\chi^2(\mu, \pi) := \sum_{y \in \Omega} \pi(y) \left(\frac{\mu(y)}{\pi(y)} - 1 \right)^2. \tag{2.17}$$

Primjetimo da je χ^2-udaljenost dobro definirana jer je π stacionarna distribucija ireducibilnog lanca pa je stoga strogo pozitivna. Koristimo termin udaljenost jer je u pozadini udaljenost u težinskoj $L^2(\pi)$-normi na $\mathbb{R}^\Omega$. Preciznije, vrijedi da je $\chi(\mu, \pi) = ||\frac{\mu(\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1||_{L^2(\pi)}$. Slijedi jednostavna tehnička lema.

Lema 2.3.4. *Za svaku mjeru μ na Ω vrijedi*

$$\chi^2(\mu, \pi) = \left(\sum_{y \in \Omega} \frac{\mu(y)^2}{\pi(y)} \right) - 1. \tag{2.18}$$

Dokaz. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
\chi^2(\mu,\pi) = \sum_{y\in\Omega} \pi(y)\left(\frac{\mu(y)}{\pi(y)} - 1\right)^2 &= \sum_{y\in\Omega} \pi(y)\left(\frac{\mu(y)^2}{\pi(y)^2} - 2\frac{\mu(y)}{\pi(y)} + 1\right) \\
&= \sum_{y\in\Omega}\left(\frac{\mu(y)^2}{\pi(y)} - 2\mu(y) + \pi(y)\right) \\
&= \left(\sum_{y\in\Omega}\frac{\mu(y)^2}{\pi(y)}\right) - 2 + 1 \\
&= \left(\sum_{y\in\Omega}\frac{\mu(y)^2}{\pi(y)}\right) - 1.
\end{aligned}
$$

□

Veza χ^2- udaljenosti i udaljenosti totalne varijacije dana je sljedećom lemom.

Lema 2.3.5. *Za svaku vjerojatnosnu distribuciju μ na Ω vrijedi*

$$||\mu - \pi||_{TV} \leq \frac{1}{2}\chi(\mu,\pi). \tag{2.19}$$

Dokaz. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
2||\mu - \pi||_{TV} &= \sum_{y\in\Omega} |\mu(y) - \pi(y)| \\
&= \sum_{y\in\Omega} \pi(y)\left|\frac{\mu(y)}{\pi(y)} - 1\right| \\
&\leq \sqrt{\sum_{y\in\Omega}\pi(y)}\sqrt{\sum_{y\in\Omega}\pi(y)\left(\frac{\mu(y)}{\pi(y)} - 1\right)^2} \\
&= \chi(\mu,\pi)
\end{aligned}
$$

gdje smo u trećem retku koristili Cauchy-Schwarzovu nejednakost u $\mathbb{R}^{|\Omega|}$. □

Sad smo spremni dokazati preciznu vezu između vremena miješanja i evoluirajućih skupova u terminima χ^2-udaljenosti.

Teorem 2.3.6. *Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova za P. Tada za svako početno stanje $x \in \Omega$ i sve $n \geq 0$ vrijedi*

$$\chi(P^n(x,\cdot),\pi) \leq \frac{1}{\pi(x)}\mathbf{E}_{\{x\}}\sqrt{\pi(S_n^\sharp)}. \tag{2.20}$$

Dokaz. Neka su $x \in \Omega$ i $n \geq 0$ proizvoljni. Nadalje, neka su $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(\Lambda)_{n=0}^{\infty}$ dva nezavisna procesa evoluirajućih skupova za P koja kreću iz istog početnog stanja $S_0 = \Lambda_0 = \{x\}$. Prvo primjetimo da je zbog martingalnosti

$$\pi(x) = \mathbf{E}_{\{x\}}\pi(S_n) = \mathbf{E}_{\{x\}}\pi(\Lambda_n). \tag{2.21}$$

Nadalje, zbog redom (2.18), (2.14) i jednake distribuiranosti od S_n i Λ_n, imamo

$$\begin{aligned}
\chi^2(P^n(x,\cdot),\pi) &= \left(\sum_{y\in\Omega} \frac{P^n(x,y)^2}{\pi(y)}\right) - 1 \\
&= \left(\sum_{y\in\Omega} \pi(y)\frac{\mathbf{P}_{\{x\}}(y \in S_n)^2}{\pi(x)^2}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{\pi(x)^2}\left[\sum_{y\in\Omega} \pi(y)\mathbf{P}_{\{x\}}\{y \in S_n\}\mathbf{P}_{\{x\}}\{y \in \Lambda_n\} - \pi(x)^2\right].
\end{aligned}$$

Zbog nezavisnosti od S_n i Λ_n gornji izraz jednak je

$$\frac{1}{\pi(x)^2}\left[\sum_{y\in\Omega} \pi(y)\mathbf{P}_{\{x\}}\{y \in S_n \cap \Lambda_n\} - \pi(x)^2\right]. \tag{2.22}$$

Koristeći (2.21) i nezavisnost možemo pisati

$$\pi(x)^2 = \mathbf{E}_{\{x\}}\pi(S_n)\mathbf{E}_{\{x\}}\pi(\Lambda_n) = \mathbf{E}_{\{x\}}\left(\pi(S_n)\pi(\Lambda_n)\right).$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u (2.22) dobivamo

$$\chi^2(P^n(x,\cdot),\pi) = \frac{1}{\pi(x)^2}\mathbf{E}_{\{x\}}\left(\pi(S_n \cap \Lambda_n) - \pi(S_n)\pi(\Lambda_n)\right).$$

Koristeći Lemu 2.3.2 slijedi

$$\begin{aligned}
\chi^2(P^n(x,\cdot),\pi) &\leq \frac{1}{\pi(x)^2}\mathbf{E}_{\{x\}}\sqrt{\pi(S_n^\sharp)\pi(\Lambda_n^\sharp)} \\
&= \frac{1}{\pi(x)^2}\mathbf{E}_{\{x\}}\sqrt{\pi(S_n^\sharp)}\mathbf{E}_{\{x\}}\sqrt{\pi(\Lambda_n^\sharp)} \\
&= \frac{1}{\pi(x)^2}\left(\mathbf{E}_{\{x\}}\sqrt{\pi(S_n^\sharp)}\right)^2,
\end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost slijedi zbog nezavisnosti, a zadnja zbog jednake distribuiranosti od S_n i Λ_n. $\square$

2.4 Doobova transformacija evoluirajućih skupova

Neka je, kao i dosada, $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova za ireducibilnu i aperiodičnu prijelaznu matricu P na konačnom prostoru stanja Ω. Neka su $K(A,B) := \mathbf{P}_A(S_1 = B)$ prijelazne vjerojatnosti evoluirajućeg procesa. Označimo sa τ_B prvo vrijeme pogađanja skupa B za evoluirajući proces (B je skup podskupova od Ω), preciznije

$$\tau_B := \min\{n \geq 0 : \ S_n \in B\}.$$

Za jednočlane B pišemo $\tau_A := \tau_{\{A\}}$. Uz konvenciju $\min\{\emptyset\} := \infty$, τ_B je vrijeme zaustavljanja za evoluirajući proces. Specijalno, nas zanima vrijeme $\tau := \tau_{\{\emptyset,\Omega\}}$.

Propozicija 2.4.1. *Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova za ireducibilnu i aperiodičnu prijelaznu matricu P na konačnom prostoru stanja Ω. Tada je*

$$\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1.$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljan neprazan $S \subset \Omega$. Neka je

$$\partial S := \{y \in \Omega : Q(S,y) > 0\}.$$

Budući da je P ireducibilna, π je strogo pozitivna, pa direktno iz definicije toka Q slijedi da je $y \in \partial S$ ako i samo ako je $P(x,y) > 0$ za neki $x \in S$. Sada opet zbog ireducibilnosti od P, zaključujemo da je ∂S neprazan. Nadalje, ako proces evoluirajućih skupova kreće iz S, iz (2.13) je jasno da se u sljedećem skupu S_1 mogu nalaziti samo $y \in \partial S$ (g.s.), tj. $S_1 \subset \partial S$. Definiramo nadalje

$$\beta := \min_{y \in \partial S} \frac{Q(S,y)}{\pi(y)}.$$

Zbog konačnosti od Ω je $\beta > 0$, pa opet iz (2.12) imamo da je

$$\mathbf{P}_S(S_1 = \partial S) = \mathbf{P}_S(U_0 \leq \frac{Q(S,y)}{\pi(y)}, \text{ za sve } y \in \partial S) = \mathbf{P}_S(U_0 \leq \beta) = \beta > 0. \quad (2.23)$$

Budući da je P ireducibilna i aperiodična, te Ω konačan, prema Propoziciji 1.1.2 postoji $r \geq 0$ takav da je $P^r(x,y) > 0$ za sve $x, y \in \Omega$. Ako za svaki $n \geq 1$ definiramo $\partial^{n+1} S := \partial(\partial^n S)$, slijedi da je $\partial^r S = \Omega$. Zbog (2.23) i Markovljevog svojstva je onda

$$\mathbf{P}_S(S_r = \Omega) = \mathbf{P}_S(S_r = \partial^r S) \geq \mathbf{P}_S\{S_1 = \partial S, S_2 = \partial^2 S, \dots, S_r = \partial^r S\} > 0.$$

Budući da je $\tau \leq \tau_\Omega$, zaključujemo da je

$$\mathbf{P}_S(\tau < \infty) > 0.$$

Kako je S bio proizvoljan neprazan skup, gornja tvrdnja vrijedi za sve takve. Za prazan skup očito vrijedi

$$\mathbf{P}_\emptyset(\tau < \infty) = 1.$$

Sada, budući da je $\mathcal{P}(\Omega)$ konačan, iz Leme 1.1.4 slijedi da je

$$\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1.$$

□

Koristeći prethodnu propoziciju, iz Doobovog teorema o opcionalnom zaustavljanju ($(\pi(S_n))_{n=0}^\infty$ je ograničen martingal!) slijedi da je za svaki $A \subset \Omega$

$$\pi(A) = \mathbf{E}_A(S_0) = \mathbf{E}_A(S_\tau) = \mathbf{P}_A(S_\tau = \emptyset)\pi(\emptyset) + \mathbf{P}_A(S_\tau = \Omega)\pi(\Omega) = \mathbf{P}_A(S_\tau = \Omega).$$

Odnosno,

$$\pi(A) = \mathbf{P}_A(\tau_\Omega < \tau_\emptyset).$$

Iz gornje jednakosti slijedi da je funkcija π harmonijska za K (π shvatimo kao funkciju sa $\mathcal{P}(\Omega)$ u $[0,1]$). Za $A \in \{\emptyset, \Omega\}$ je to trivijalno, dok za ostale $A \subset \Omega$ zbog Markovljevog svojstva vrijedi

$$\mathbf{P}_A(\tau_\Omega < \tau_\emptyset) = \sum_{S \subset \Omega} K(A,S)\mathbf{P}_A(\tau_\Omega < \tau_\emptyset | S_1 = S) = \sum_{S \subset \Omega} K(A,S)\mathbf{P}_S(\tau_\Omega < \tau_\emptyset),$$

odnosno

$$\pi(A) = K\pi(A).$$

Sada za $A, B \subset \Omega$ takve da je $A \neq \emptyset$ definiramo prijelazne vjerojatnosti

$$\widehat{K}(A,B) := \frac{\pi(B)}{\pi(A)} K(A,B). \tag{2.24}$$

Budući da je π harmonijska, $\widehat{K}$ je dobro definirana. Zaista, za sve neprazne $A \subset \Omega$ vrijedi

$$\sum_{S \subset \Omega} \widehat{K}(A,S) = \sum_{S \subset \Omega} \frac{\pi(S)}{\pi(A)} K(A,S) = \frac{K\pi(A)}{\pi(A)} = 1.$$

$\widehat{K}$ nazivamo **Doobova transformacija** od K po funkciji π. Za $A \neq \emptyset$ zbog Markovljevog svojstva vrijedi

$$\begin{aligned}\widehat{K}(A,B) &= \frac{K(A,B)\mathbf{P}_B(\tau_\Omega < \tau_\emptyset)}{\mathbf{P}_A(\tau_\Omega < \tau_\emptyset)} \\ &= \frac{\mathbf{P}_A(S_1 = B, \tau_\Omega < \tau_\emptyset)}{\mathbf{P}_A(\tau_\Omega < \tau_\emptyset)} \\ &= \mathbf{P}_A(S_1 = B | \tau_\Omega < \tau_\emptyset).\end{aligned}$$

Dakle, Markovljev lanac sa takvim prijelaznim vjerojatnostima je početni evoluirajući proces uvjetovan da će doći u Ω prije nego u $\emptyset$.

Poglavlje 3

Jako stacionarno vrijeme

Neka je, kao i dosada, zadana ireducibilna i aperiodična prijelazna matrica P na konačnom prostoru stanja Ω sa stacionarnom distribucijom π, te neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P.
Vrijeme miješanja t_{mix} je neslučajno vrijeme takvo da je distribucija slučajne varijable $X_{t_{mix}}$ "približno" stacionarna. Pretpostavimo da postoji vrijeme zaustavljanja T za proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ sa svojstvom da je distribucija od X_T jednaka stacionarnoj distribuciji. Intuitivno je jasno da postoji veza između T i t_{mix}, tj. očekujemo da će nam poznavanje distribucije slučajnog vremena T omogućiti da ograničimo neslučajno vrijeme t_{mix}. Nakon što preciziramo tu vezu, pomoću evoluirajućih skupova ćemo konstruirati jedno takvo vrijeme T.

3.1 Jako stacionarna vremena

Promatrat ćemo širu klasu slučajnih varijabli od vremena zaustavljanja. Neka je $x \in \Omega$ proizvoljan. Po Teoremu 1.1.5 postoji niz nezavisnih slučajnih varijabli $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ koje primaju vrijednosti u nekom skupu Λ (npr. $\Lambda = [0,1]$), te funkcija $f : \Omega \times \Lambda \to \Omega$ takva da je proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ definiran sa $X_0 := x$ i

$$X_n := f(X_{n-1}, Z_n), \text{ za sve } n \geq 1,$$

Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P i početnim stanjem x. Slučajno vrijeme T je **poslučajeno vrijeme zaustavljanja** za Markovljev lanac $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ako je ono vrijeme zaustavljanja za generirajući proces $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$. Budući da je za sve $n \geq 1$ slučajna varijabla X_n funkcija slučajnog vektora $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, slijedi da je za sve $n \geq 1$ informacija koju sadrže slučajne varijable $X_0, X_1, \dots, X_n$ manja od one koju sadrže slučajne varijable $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, tj.

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) \subset \sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_n).$$

Primjetimo da je dodavanje informacije dobivene od X_0 opravdano, budući da je X_0 konstanta. Iz prethodnog razmatranja slijedi da je svako vrijeme zaustavljanja ujedno i poslučajeno vrijeme zaustavljanja. Vidjet ćemo da obrat općenito ne mora vrijediti.
Nadalje, poslučajeno vrijeme zaustavljanja T nazivamo **stacionarnim** za Markovljev lanac $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ako je distribucija slučajne varijable X_T jednaka stacionarnoj distribuciji π, tj. ako za sve $x, y \in \Omega$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x\{X_T = y\} = \pi(y).$$

Poslučajeno vrijeme zaustavljanja T je **jako stacionarno vrijeme** za Markovljev lanac $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ako za sve $n \geq 0$ i sve $x, y \in \Omega$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x\{X_T = y, T = n\} = \pi(y)\mathbf{P}_x\{T = n\}, \tag{3.1}$$

tj. ako slučajna varijabla X_T ima distribuciju π i nezavisna je sa T. Bit će nam potrebna sljedeća generalizacija gornje definicije.

Lema 3.1.1. *Neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ireducibilan Markovljev lanac na konačnom skupu stanja Ω sa stacionarnom distribucijom π i P pripadna matrica prijelaza. Ako je T jako stacionarno vrijeme za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, tada za sve $n \geq 0$ i sve $x, y \in \Omega$ vrijedi*

$$\mathbf{P}_x\{X_n = y, T \leq n\} = \pi(y)\mathbf{P}_x\{T \leq n\}.$$

Dokaz. Neka je $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli koji generira Markovljev lanac $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, te neka su $n \geq 0$ i $x, y \in \Omega$ proizvoljni. Budući da je T jako stacionarno vrijeme, za sve $k \leq n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x\{T = k, X_n = y\} &= \sum_{z\in\Omega} \mathbf{P}_x\{X_n = y | T = k, X_k = z\}\mathbf{P}_x\{T = k, X_k = z\} \\
&= \mathbf{P}_x\{T = k\} \sum_{z\in\Omega} \mathbf{P}_x\{X_n = y | T = k, X_k = z\}\pi(z). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Događaj na kojem je $T = k$ ovisi samo o slučajnom vektoru $(Z_1, \ldots, Z_k)$ jer je T vrijeme zaustavljanja za $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$. S druge strane, uvjetno na $X_k = z$, slučajna varijabla X_n ovisi o slučajnom vektoru $(Z_{k+1}, \ldots, Z_n)$. Budući da su slučajni vektori $(Z_1, \ldots, Z_k)$ i $(Z_{k+1}, \ldots, Z_n)$ nezavisni, slijedi da su, uvjetno na $X_k = z$, događaji $\{T = k\}$ i $\{X_n = y\}$ nezavisni. Iz prethodnog slijedi da za sve $z \in \Omega$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x\{X_n = y | T = k, X_k = z\} = \mathbf{P}_x\{X_n = y | X_k = z\} = P^{n-k}(z, y).$$

Sada iz gornje jednakosti i (3.2) dobivamo da za sve $k \leq n$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x\{T = k, X_n = y\} = \mathbf{P}_x\{T = k\} \sum_{z\in\Omega} P^{n-k}(z, y)\pi(z) = \mathbf{P}_x\{T = k\}\pi(y),$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je π stacionarna distribucija za P. Sada sumiranjem gornje jednakosti po svim $k \leq n$ slijedi tvrdnja leme. $\square$

Jaka stacionarna vremena prirodno se vežu uz **udaljenost separacije** $s_x(n)$ definiranu sa

$$s_x(n) := \max_{y\in\Omega}\left[1 - \frac{P^n(x,y)}{\pi(y)}\right], \text{ za sve } n \geq 0 \text{ i sve } x \in \Omega.$$

Definicija je dobra jer ireducibilnost matrice P povlači strogu pozitivnost njene stacionarne distribucije π. Budući da su $P^n(x,\cdot)$ i $\pi(\cdot)$ vjerojatnosne distribucije, slijedi da za sve $x \in \Omega$ i sve $n \geq 0$ udaljenost separacije $s_x(n)$ poprima vrijednosti u segmentu $[0,1]$. Iako koristimo termin udaljenost, u pozadini nema metrike. Sljedeću karakterizaciju nećemo koristiti, ali ona pokazuje u kojem smislu udaljenost separacije "mjeri" odstupanje od stacionarnosti.

Lema 3.1.2. *Za sve $x \in \Omega$ i sve $n \geq 0$ udaljenost separacije $s_x(n)$ je najmanji $s \geq 0$ za koji postoji vjerojatnosna distribucija μ na Ω za koju vrijedi*

$$P^n(x,y) = (1-s)\pi(y) + s\mu(y), \text{ za sve } y \in \Omega.$$

Dokaz. Neka su $x \in \Omega$ i $n \geq 0$ proizvoljni. Iz definicije od $s_x(n)$ slijedi da za sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$s_x(n) \geq 1 - \frac{P^n(x,y)}{\pi(y)},$$

tj.

$$P^n(x,y) \geq (1 - s_x(n))\pi(y).$$

Budući da je gornja nejednakost ustvari jednakost barem za jedno $y \in \Omega$, niti jedan $s < s_x(n)$ ne zadovoljava gornju nejednakost za sve $y \in \Omega$. Nadalje, iz prethodnog zaključujemo da postoji nenegativna mjera $\widehat{\mu}$ na Ω takva da vrijedi

$$P^n(x,y) = (1 - s_x(n))\pi(y) + \widehat{\mu}(y), \text{ za sve } y \in \Omega.$$

Sumiranjem gornje jednakosti po svim $y \in \Omega$ slijedi da je

$$\sum_{y\in\Omega}\widehat{\mu}(y) = s_x(n).$$

Dakle, sa $\mu := \widehat{\mu}/s_x(n)$ dobro je definirana vjerojatnosna distribucija na Ω za koju vrijedi

$$P^n(x,y) = (1 - s_x(n))\pi(y) + s_x(n)\mu(y), \text{ za sve } y \in \Omega.$$

$\square$

Veza jako stacionarnih vremena i udaljenosti separacije dana je sljedećom lemom.

Lema 3.1.3. *Ako je T jako stacionarno vrijeme za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, tada za sve $n \geq 0$ i sve $x \in \Omega$ vrijedi*

$$s_x(n) \leq \mathbf{P}_x\{T > n\}. \tag{3.3}$$

Dokaz. Neka su $n \geq 0$ i $x \in \Omega$ proizvoljni. Za sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$1 - \frac{P^n(x,y)}{\pi(y)} = 1 - \frac{\mathbf{P}_x\{X_n = y\}}{\pi(y)} \leq 1 - \frac{\mathbf{P}_x\{X_n = y, T \leq n\}}{\pi(y)}$$

Po Lemi 3.1.1 desna strana je jednaka

$$1 - \frac{\pi(y)\mathbf{P}_x\{T \leq n\}}{\pi(y)} = \mathbf{P}_x\{T > n\}.$$

□

Može se pokazati (vidi [1]) da zapravo postoji jako stacionarno vrijeme T takvo da u (3.3) za sve $n \geq 0$ i sve $x \in \Omega$ vrijedi jednakost. Taj rezultat je više teorijske naravi jer se za konstrukciju tog vremena pretpostavlja poznavanje svih prijelaznih vjerojatnosti P^n. Ipak, on pokazuje da jako stacionarna vremena savršeno odgovaraju udaljenosti separacije.
Preko udaljenosti separacije povezujemo miješanje Markovljevog lanca i jako stacionarna vremena.

Propozicija 3.1.4. *Ako je T jako stacionarno vrijeme za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, tada za sve $n \geq 0$ vrijedi*

$$d(n) = \max_{x\in\Omega} ||P^n(x,\cdot) - \pi||_{TV} \leq \max_{x\in\Omega} \mathbf{P}_x\{T > n\}.$$

Dokaz. Neka su $n \geq 0$ i $x \in \Omega$ proizvoljni. Vrijedi

$$\begin{aligned}
||P^n(x,\cdot) - \pi||_{TV} &= \sum_{\substack{y\in\Omega \\ P^n(x,y)<\pi(y)}} [\pi(y) - P^n(x,y)] \\
&= \sum_{\substack{y\in\Omega \\ P^n(x,y)<\pi(y)}} \pi(y) \left[1 - \frac{P^n(x,y)}{\pi(y)}\right] \\
&\leq \max_{y\in\Omega} \left[1 - \frac{P^n(x,y)}{\pi(y)}\right] \\
&= s_x(n).
\end{aligned}$$

Sada iz Leme 3.1.3 slijedi tvrdnja propozicije. □

Dakle, transformirali smo početni problem u problem pronalaska repa distribucije jako stacionarnog vremena.

Primjer 3.1.5. Za proizvoljan $N \geq 1$, N-dimenzionalna kocka je skup $\Omega = \{0, 1\}^N$. Kažemo da su dva vrha iz Ω susjedi ako se razlikuju u točno jednoj koordinati. Dakle, svaki vrh ima točno N susjeda.
Definiramo lijenu simetričnu slučajnu šetnju na Ω na sljedeći način: u svakom trenutku, s vjerojatnošću $1/2$ ostajemo u istom vrhu, a inače biramo unifomno jedan od susjeda i prelazimo u taj vrh. U smislu Teorema 1.1.5, ovaj lanac možemo generirati tako da u svakom trenutku izaberemo uniformno element (j, B) iz skupa $\{1, \ldots, N\} \times \{0, 1\}$ i stavimo na koordinatu j trenutnog stanja broj (bit) B. Neka je $(Z_n)_{n=1}^{\infty} = (j_n, B_n)_{n=1}^{\infty}$ jedan takav generirajući niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih vektora i $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ pripadna slučajna šetnja na Ω.
Jasno je da je ovakav lanac ireducibilan i aperiodičan, a trivijalno je za provjeriti da je stacionarna distribucija lanca uniformna distribucija na Ω.
Definiramo slučajno vrijeme τ kao prvo vrijeme kada su sve koordinate barem jednom bile izabrane za promjenu, tj.

$$\tau := \min\{n \geq 0 : \{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, N\}\}.$$

Ovako definirano vrijeme τ je vrijeme zaustavljanja, ali ne za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, nego za generirajući niz $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$. Dakle, τ je primjer poslučajenog vremena zaustavljanja za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ koje nije "obično" vrijeme zaustavljanja za isti lanac.
Budući da su u trenutku τ sve koordinate barem jednom bile zamijenjene sa nezavisnim slučajnim bitom (0 ili 1 sa jednakom vjerojatnošću), distribucija od X_τ je uniformna na Ω, tj. jednaka stacionarnoj, i to nezavisno od vremena τ. Dakle, τ je jako stacionarno vrijeme za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.
Promotrit ćemo detaljnije distribuciju od τ, pa uz pomoć Propozicije (3.1.4) dobiti ogradu na vrijeme miješana lijene slučajne šetnje na N-dimenzionalnoj kocki. Neka je za svako $k \in \{1, \ldots, N\}$ vrijeme τ_k prvi trenutak kada su točno k različitih koordinata barem jednom bile zamijenjene nezavisnim slučajnim bitom. Tada je vrijeme τ_N upravo jednako vremenu τ. Nadalje, ako stavimo da je $\tau_0 := 0$, imamo da je

$$\tau = \tau_N = \sum_{k=1}^{N} (\tau_k - \tau_{k-1}).$$

Pretpostavimo da je točno $k-1$ koordinata bilo izabrano barem jednom. U sljedećem trenutku bira se uniformno jedna od koordinata. Vrijeme τ_k će se dogoditi ako je izabrana jedna od $N - k + 1$ koordinata koje prethodno nisu izabrane, dakle sa vjerojatnošću $\frac{N-k+1}{N}$. Iz toga zaključujemo da je za sve $k \in \{1, \ldots, N\}$ slučajna varijabla $(\tau_k - \tau_{k-1})$ ima geometrijsku distribuciju sa vjerojatnošću uspjeha $\frac{N-k+1}{N}$. Zato je

$$\mathbf{E}(\tau) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}(\tau_k - \tau_{k-1}) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N-k+1},$$

tj.

$$\mathbf{E}(\tau) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}. \tag{3.4}$$

Želimo dati ocjenu gornje sume. Budući da je $x \mapsto 1/x$ opadajuća funkcija na $(0, \infty)$, slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{N} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \geq \log N,$$

i

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} = 1 + \int_{1}^{N} \frac{dx}{x} = 1 + \log N.$$

Dakle vrijedi

$$\log N \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \leq \log N + 1,$$

pa iz (3.4) slijedi da je

$$N \log N \leq \mathbf{E}(\tau) \leq N \log N + N.$$

Nadalje, može se pokazati (vidi [3, Proposition 2.4.]) da je malo vjerojatno da će vrijeme τ biti puno veće od svoje očekivane vrijednosti. Preciznije, za sve $c > 0$ vrijedi

$$\mathbf{P}\{\tau > N \log N + cN + 1\} \leq e^{-c}.$$

Primjetimo da nismo uopće odredili početno stanje slučajne šetnje, ali jasno je da distribucija od τ ne ovisi o početnom stanju $x \in \Omega$. Zato, za proizvoljan $\epsilon > 0$, koristeći Propoziciju 3.1.4 i prethodnu nejednakost za $c = \log(1/\epsilon)$, dobivamo da je

$$d(N \log N + \log(1/\epsilon)N + 1) \leq \epsilon.$$

Dakle

$$t_{mix}(\epsilon) \leq N \log N + \log(1/\epsilon)N + 1,$$

tj.

$$t_{mix}(\epsilon) = O(N \log N).$$

3.2 Jako stacionaran dual

Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova za prijelaznu matricu P, te neka je K prijelazna matrica evoluirajućih skupova. U odjeljku 2.4 smo definirali Doobovu transformaciju evoluirajućih skupova i pokazali da je po distribuciji taj proces jednak procesu evoluirajućih skupova koji je uvjetovan da će biti apsorbiran u Ω. Prijelaznu matricu tog procesa označili smo sa $\widehat{K}$, a definirana je sa (2.24).
Pokazat ćemo da je vrijeme apsorpcije Doobove transformacije evoluirajućih skupova jako stacionarno vrijeme za originalni lanac $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Općenito, proces sa tim svojstvom naziva se **jako stacionaran dual** (vidi [2]).
Ideja je spariti originalni Markovljev lanac $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ i proces evoluirajućih skupova $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ tako da u svakom koraku uvjetujemo na to da je $X_n \in S_n$. U nastavku konstruiramo takvo sparivanje.
Definiramo skup stanja $\mathcal{S}$ sa

$$\mathcal{S} := \{(x, A) \in \Omega \times \mathcal{P}(\Omega) : A \neq \emptyset, x \in A\}.$$

U dokazu Propozicije 2.4.1 za sve neprazne $S \subset \Omega$ definirali smo

$$\partial S := \{y \in \Omega : Q(S, y) > 0\}.$$

Iz (2.13) direktno slijedi da je $y \in \partial S$ ako i samo ako je $\mathbf{P}_S\{y \in S_1\} > 0$. Dakle, za sve $A, B \subset \Omega$ takve da je $B \cap (\partial A)^c \neq \emptyset$ vrijedi $K(A, B) = 0$. Sada za sve $(x, A), (y, B) \in \mathcal{S}$ definiramo prijelazne vjerojatnosti P^* sa

$$P^*((x, A), (y, B)) := \begin{cases} P(x, y)\mathbf{P}_A\{S_1 = B | y \in S_1\}, & \text{ako je } y \in \partial A \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Pokazujemo da je P^* dobro definirana prijelazna matrica na $\mathcal{S}$. Za proizvoljno stanje $(x, A) \in \mathcal{S}$ i sve $y \in \partial A$ vrijedi

$$\sum_{\substack{B \subset \Omega \\ (y,B) \in \mathcal{S}}} P^*((x, A), (y, B)) = P(x, y) \sum_{\substack{B \subset \Omega \\ y \in B}} \mathbf{P}_A\{S_1 = B | y \in S_1\} = P(x, y), \tag{3.6}$$

gdje sumiramo po svim $B \subset \Omega$ takvim da je $(y, B) \in \mathcal{S}$, a to je ekvivalentno sa uvjetom $y \in B$. Budući da je P ireducibilna, π je strogo pozitivna, pa direktno iz definicije toka Q slijedi da je $y \in \partial A$ ako i samo ako postoji $x \in A$ takav da je $P(x, y) > 0$. Dakle, za sve $x \in A$ i sve $y \notin \partial A$ vrijedi $P(x, y) = 0$. Iz te činjenice i definicije (3.5) slijedi da jednakost (3.6) vrijedi i za $y \notin \partial A$, tj. za proizvoljno stanje $(x, A) \in \mathcal{S}$ i sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$\sum_{\substack{B \subset \Omega \\ (y,B) \in \mathcal{S}}} P^*((x, A), (y, B)) = P(x, y). \tag{3.7}$$

Sada sumiranjem gornje jednakosti po svim $y \in \Omega$ slijedi

$$\sum_{(y,B)\in\mathcal{S}} P^*((x,A),(y,B)) = \sum_{y\in\Omega} P(x,y) = 1.$$

Dakle, P^* je dobro definirana. Nadalje, iz (2.13) slijedi da za sve $(x,A),(y,B) \in \mathcal{S}$ takve da je $y \in \partial A$ vrijedi

$$\begin{aligned} P^*((x,A),(y,B)) &= \frac{P(x,y)\mathbf{P}_A\{S_1 = B, y \in S_1\}}{\mathbf{P}_A\{y \in S_1\}} \\ &= \frac{P(x,y)\mathbf{P}_A\{S_1 = B\}}{\mathbf{P}_A\{y \in S_1\}} \\ &= \frac{P(x,y)K(A,B)\pi(y)}{Q(A,y)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Neka je sada $((X_n,S_n))_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P^*, te neka je $\mathbf{P}^*$ vjerojatnost na vjerojatnosnom prostoru na kojem je taj lanac definiran. Direktno iz definicije skupa stanja $\mathcal{S}$ slijedi da je $X_n \in S_n$ za sve $n \geq 0$, dok iz (3.8) slijedi da je $S_{n+1} \subset \partial S_n$ ($K(S_n, S_{n+1})$ može biti strogo pozitivno samo za takve S_{n+1}) za sve $n \geq 1$. Iz (3.7) slijedi da za sve $x, y \in \Omega$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*\{X_1 = y | X_0 = x\} &= \sum_{\substack{A\subset\Omega \\ x\in A}} \mathbf{P}^*\{S_0 = A | X_0 = x\}\mathbf{P}^*\{X_1 = y | X_0 = x, S_0 = A\} \\ &= \sum_{\substack{A\subset\Omega \\ x\in A}} \mathbf{P}^*\{S_0 = A | X_0 = x\} \\ &\qquad \times \sum_{\substack{B\subset\Omega \\ y\in B}} \mathbf{P}^*\{X_1 = y, S_1 = B | X_0 = x, S_0 = A\} \\ &= \sum_{\substack{A\subset\Omega \\ x\in A}} \mathbf{P}^*\{S_0 = A | X_0 = x\} \sum_{\substack{B\subset\Omega \\ y\in B}} P^*((x,A),(y,B)) \\ &= P(x,y) \sum_{\substack{A\subset\Omega \\ x\in A}} \mathbf{P}^*\{S_0 = A | X_0 = x\} \\ &= P(x,y). \end{aligned}$$

Na isti način se pokaže da za sve $n \geq 0$ i proizvoljna stanja $y, x, x_0, \ldots, x_{n-1} \in \Omega$ vrijedi

$$\mathbf{P}^*\{X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0\} = P(x,y).$$

Dakle, uz vjerojatnost $\mathbf{P}^*$, $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P. Time smo dokazali tvrdnju *(i)* sljedećeg teorema.

Teorem 3.2.1. *Neka je* $((X_n, S_n))_{n=0}^{\infty}$ *Markovljev lanac sa prijelaznom matricom* P^* *definiranom sa (3.5) koji kreće iz stanja* $(x, \{x\})$ *za neko* $x \in \Omega$. *Pripadnu vjerojatnost označavamo sa* $\mathbf{P}_x^*$. *Tada vrijedi:*

(i) $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *je Markovljev lanac sa prijelaznom matricom* P *i početnim stanjem* x.

(ii) $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ *je Markovljev lanac s prijelaznom matricom* $\widehat{K}$ *i početnim stanjem* $\{x\}$.

(iii) Za sve $n \geq 0$ *i* $y \in \Omega$ *vrijedi*

$$\mathbf{P}_x^*\{X_n = y | S_0, S_1, \ldots, S_n\} = \frac{\pi(y)}{\pi(S_n)} \mathbf{1}_{\{y \in S_n\}}.$$

Dokaz. Za dokaz tvrdnje *(ii)* treba pokazati da za sve $n \geq 0$ i proizvoljne neprazne skupove $S, A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ i $A_0 = \{x\}$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x^*\{S_{n+1} = S | (S_0, S_1, \ldots, S_n) = (A_0, A_1, \ldots, A_n)\} = \widehat{K}(A_n, S). \tag{3.9}$$

Primjetimo da je gornja jednakost trivijalno ispunjena kada ne vrijedi $S \subset \partial A_n$. Dokaz tvrdnje *(iii)* provodimo indukcijom po n. Uz to paralelno dokazujemo i (3.9). Napomenimo još da ćemo kroz dokaz, bez da to naznačimo, koristiti činjenicu da je $X_n \in S_n$ za sve $n \geq 0$. Budući da je $X_0 = x$ i $S_0 = \{x\}$, za sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x^*\{X_0 = y | S_0\} = \mathbf{1}_{\{y = x\}} = \frac{\pi(y)}{\pi(S_0)} \mathbf{1}_{\{y \in S_0\}}.$$

Time je dokazana tvrdnja *(iii)* u slučaju $n = 0$. Jednakost u (3.9) za $n = 0$ slijedit će iz prethodne tvrdnje analogno kao što će ista jednakost u općem slučaju slijediti iz pretpostavke indukcije. Budući da se radi o istome računu, ne navodimo ga.
Pretpostavimo sada da tvrdnja *(iii)* vrijedi za neki $n \geq 1$. Neka su $S, A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ proizvoljni neprazni skupovi i $A_0 = \{x\}$. Pretpostavit ćemo da je $S \subset \partial A_n$, u suprotnom su sve tvrdnje trivijalne. Radi jednostavnosti, umjesto vektora $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, odnosno $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$, pišemo $\mathbf{S}_n$, odnosno $\mathbf{A}_n$. Po formuli potpune vjerojatnosti, za sve $y \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_x^*\{S_{n+1} = S, X_{n+1} = y | \mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\} \\
&\quad = \sum_{z \in A_n} \mathbf{P}_x^*\{S_{n+1} = S, X_{n+1} = y | \mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n, X_n = z\} \mathbf{P}_x^*\{X_n = z | \mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Budući da je proces $((X_n, S_n))_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P^*, za sve $y \in S \subset \partial A_n$ i sve $z \in A_n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x^*\{S_{n+1} = S, X_{n+1} = y | \mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n, X_n = z\} &= P^*((z, A_n), (y, S)) \\
&= \frac{P(z, y) K(A_n, S) \pi(y)}{Q(A_n, y)},
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz relacije (3.8). Zbog pretpostavke indukcije za sve $z \in A_n$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x^*\{X_n = z|\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\} = \frac{\pi(z)}{\pi(A_n)}.$$

Uvrštavanjem prethodnih izraza u (3.10) slijedi da za sve $y \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x^*\{S_{n+1} = S, X_{n+1} = y|\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\} &= \sum_{z\in A_n} \frac{P(z,y)K(A_n,S)\pi(y)}{Q(A_n,y)}\frac{\pi(z)}{\pi(A_n)} \\ &= \frac{\pi(y)}{\pi(A_n)}K(A_n,S)\frac{\sum_{z\in A_n}\pi(z)P(z,y)}{Q(A_n,y)} \\ &= \frac{\pi(y)}{\pi(A_n)}K(A_n,S). \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Sada koristeći prethodnu jednakost dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x^*\{S_{n+1} = S|\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\} &= \sum_{y\in S} \mathbf{P}_x^*\{S_{n+1} = S, X_{n+1} = y|\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\} \\ &= \sum_{y\in S}\frac{\pi(y)}{\pi(A_n)}K(A_n,S) \\ &= \frac{\pi(S)}{\pi(A_n)}K(A_n,S) \qquad (3.12) \\ &= \widehat{K}(A_n,S).\end{aligned}$$

To je upravo jednakost (3.9). Konačno, dijeljenjem (3.11) sa (3.12) slijedi da za sve $y \in S$ vrijedi

$$\mathbf{P}_x^*\{X_{n+1} = y|\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n, S_{n+1} = S\} = \frac{\pi(y)}{\pi(S)},$$

a budući da su $S, A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ bili proizvoljni, time smo dokazali korak indukcije. $\square$

Neka je $((X_n, S_n))_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P^*, te $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli koje ga generiraju. Definiramo vrijeme zaustavljanja T^* sa

$$T^* := \min\{n \geq 0 : S_n = \Omega\}. \qquad (3.13)$$

Specijalno, T^* je poslučajeno vrijeme zaustavljanja za taj lanac, tj. T^* je vrijeme zaustavljanja za $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$. Budući da $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ generira i marginalni lanac $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, slijedi da je T^* poslučajeno vrijeme zaustavljanja za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.

Korolar 3.2.2. *Neka je $((X_n, S_n))_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac sa prijelaznom matricom P^* i T^* definirano sa (3.13). Tada je T^* jako stacionarno vrijeme za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.*

Dokaz. Budući da smo u razmatranju prije korolara pokazali da je T^* poslučajeno vrijeme zaustavljanja za $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, preostaje pokazati da za sve $n \geq 0$ i sve $x, y \in \Omega$ vrijedi (3.1).

Neka su $n \geq 0$ i $x \in \Omega$ proizvoljni, te neka je $(X_0, Y_0) = (x, \{x\})$. Događaj $\{T^* = n\}$ je disjunktna unija događaja $\{\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\} := \{S_0 = A_0, \ldots, S_n = A_n\}$ pri čemu su $A_0 = \{x\}$, $A_k \neq \Omega$ za $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ i $A_n = \Omega$. Sumiranjem po svim takvim vektorima $(A_0, \ldots, A_n)$ slijedi da za sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x^*\{T^* = n, X_n = y\} &= \sum \mathbf{P}_x^*\{\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n, X_n = y\} \\
&= \sum \mathbf{P}_x^*\{\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\}\mathbf{P}_x^*\{X_n = y | \mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\} \\
&= \sum \mathbf{P}_x^*\{\mathbf{S}_n = \mathbf{A}_n\}\pi(y) \\
&= \mathbf{P}_x^*\{T^* = n\}\pi(y),
\end{aligned}$$

gdje smo u trećoj jednakosti koristili tvrdnju *(iii)* iz Teorema 3.2.1 i činjenicu da je $A_n = \Omega$. □

Poglavlje 4

Radijus toka i miješanje

U ovom poglavlju, uz pomoć evoluirajućih skupova, dajemo ogradu na vrijeme miješanja Markovljevog lanca u terminima geometrijskog svojstva njegovog prostora stanja zvanog **usko grlo**. Naime, za prostor stanja Ω pripadnog lanca kažemo da ima usko grlo ako postoje dijelovi od Ω koji su teško dostižni kada lanac kreće iz pojedinih stanja. Iz te opisne definicije, intuitivno je jasno da postojanje ili nepostojanje uskog grla u Ω kontrolira vrijeme miješanja pripadnog Markovljevog lanca, tj. brzinu konvergencije ka stacionarnoj distribuciji.

4.1 Prosječan radijus toka

Kao i dosada, pretpostavljamo da je zadana ireducibilna i aperiodična prijelazna matrica P na konačnom skupu stanja Ω. **Radijus toka** nepraznog skupa $S \subset \Omega$ dan je sa

$$\Phi(S) = \frac{Q(S, S^c)}{\pi(S)}.$$

Intuitivno, ako zamislimo da se u svakom stanju $y \in \Omega$ nalazi čestica mase $\pi(y)$, tada je $\Phi(S)$ dio mase od S koji pređe u S^c u jednom koraku. Primjetimo da je $\Phi(S) \leq \frac{Q(S,\Omega)}{\pi(S)} = \frac{\pi(S)}{\pi(S)} = 1$, za sve $S \subset \Omega$. **Omjer uskog grla** Φ_* definiramo sa

$$\Phi_* = \min\{\Phi(S) : \pi(S) \leq 1/2\}.$$

Intuitivno, omjer uskog grla mjeri sposobnost Markovljevog lanca da se slobodno kreće po prostoru stanja. Ako je taj omjer mali, lanac će zapinjati u nekim podskupovima prostora stanja, dok će se u suprotnom on slobodnije kretati. Ključan pojam ovog dijela je generalizacija tog omjera.
Definiramo **funkciju radijusa toka** kao (opadajuću) funkciju $\Phi : [\pi_{min}, \infty) \to [0, 1]$

sa

$$\Phi(r) = \begin{cases} \min\{\Phi(S) : \pi(S) \leq r\}, \text{ za } r \in [\pi_{min}, 1/2] \\ \Phi_*, \text{ inače.} \end{cases}$$

Spektralnim tehnikama može se dokazati da za reverzibilne i lijene lance vrijedi

$$\tau(\epsilon) \leq \frac{2}{\Phi_*^2} \log\left(\frac{1}{\epsilon\pi_{min}}\right), \tag{4.1}$$

pri čemu je

$$\tau(\epsilon) = \min\left\{n \geq 0 : \left|\frac{P^n(x,y) - \pi(y)}{\pi(y)}\right| \leq \epsilon, \forall x, y \in \Omega\right\}$$

ϵ-uniformno vrijeme miješanja.
Dakle, ako je radijus toka "najgoreg skupa" velik (tj. ako je $1/\Phi_*^2$ mali), imat ćemo brzo miješanje. Pokazat ćemo da se pomoću evoluirajućih skupova ta ograda može poboljšati, i to bez zahtjeva reverzibilnosti. Zapravo ćemo iskoristiti činjenicu da manji skupovi općenito imaju puno veći radijus toka, te pokazati da je za brzo miješanje dovoljno da određeni vagani prosjek funkcije Φ nije prevelik. Preciznije, dokazat ćemo sljedeći teorem.

Teorem 4.1.1. *Neka je P ireducibilna i aperiodična prijelazna matrica na konačnom prostoru stanja Ω i $\gamma \in (0, 1/2]$ takav da je za sve $x \in \Omega$*

$$P(x,x) \geq \gamma.$$

Neka je nadalje, $\epsilon > 0$ proizvoljan. Tada za proizvoljne $x, y \in \Omega$ i sve

$$n \geq 1 + \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma^2} \int_{4(\pi(x)\wedge\pi(y))}^{4/\epsilon} \frac{4du}{u\Phi^2(u)}$$

vrijedi

$$\left|\frac{P^n(x,y) - \pi(y)}{\pi(y)}\right| \leq \epsilon.$$

Specijalno,

$$\tau(\epsilon) \leq 1 + \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma^2} \int_{4\pi_{min}}^{4/\epsilon} \frac{4du}{u\Phi^2(u)}. \tag{4.2}$$

Napomena 4.1.2. *U slučaju lijene prijelazne matrice P ($\gamma = 1/2$), koristeći činjenicu da je Φ padajuća imamo*

$$\int_{4\pi_{min}}^{4/\epsilon} \frac{4du}{u\Phi^2(u)} \leq \frac{4}{\Phi_*^2} \int_{4\pi_{min}}^{4/\epsilon} \frac{du}{u} = \frac{4}{\Phi_*^2} \log\left(\frac{1}{\epsilon\pi_{min}}\right).$$

Dakle, ako zanemarimo konstante, ograda u (4.2) je bolja nego ona u (4.1).

Dokaz Teorema 4.1.1 će slijediti iz Propozicije 4.2.2 i Teorema 4.3.1 koje dokazujemo u sljedećim potpoglavljima.

4.2 Koeficijent rasta

U ovome dijelu ćemo uspostaviti vezu između radijusa toka skupa S sa očekivanom promjenom "obujma" pripadnog evoluirajućeg procesa kada je trenutno stanje upravo S.

Definicija 4.2.1. *Za svaki neprazan podskup $S \subset \Omega$, definiramo* ***mjeru rasta*** *skupa S sa*

$$\Psi(S) := 1 - \mathbf{E}_S \sqrt{\frac{\pi(S_1)}{\pi(S)}}.$$

Nadalje, definiramo ***koeficijent rasta*** *ψ kao funkciju na $[\pi_{min}, \infty)$ sa*

$$\psi(r) := \begin{cases} \min\{\Psi(S) : \pi(S) \leq r\}, \text{ ako je } r \in [\pi_{min}, 1/2] \\ \psi_* := \psi(1/2), \text{ inače.} \end{cases}$$

Zbog martingalnosti i Jensenove nejednakosti je

$$\mathbf{E}_S \sqrt{\pi(S_1)} \leq \sqrt{\mathbf{E}_S(\pi(S_1))} = \sqrt{\pi(S)}.$$

Iz toga slijedi da je $\Psi(S) \in [0, 1]$ za svaki neprazan $S \subset \Omega$. To povlači da je $\psi(r) \in [0, 1]$ za sve $r \geq \pi_{min}$. Budući da je minimum po većem skupu manji, ψ je padajuća na $[\pi_{min}, \infty)$. Primjetimo da je $\Psi(\Omega) = 0$ jer je Ω apsorbirajuće stanje za evoluirajuće skupove. Cilj ovog dijela je dokazati sljedeću propoziciju.

Propozicija 4.2.2. *Neka je $S \subset \Omega$ neprazan skup i $\gamma \in (0, 1/2]$ takav da je za sve $x \in \Omega$, $P(x, x) \geq \gamma$. Tada vrijedi*

$$\Psi(S) \geq \frac{\gamma^2}{2(1-\gamma)^2} \Phi(S)^2. \tag{4.3}$$

Za dokaz će nam biti potrebno nekoliko pomoćnih lema. Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova i $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ niz uniformnih slučajnih varijabli koji ga generira. Definirajmo za svaki $n \geq 0$

$$R_n := \frac{\pi(S_{n+1})}{\pi(S_n)}.$$

Prvi korak biti će pojačanje tvrdnje da je proces $(\pi(S_n))_{n=0}^{\infty}$ martingal.

Lema 4.2.3. *Za svaki neprazan skup $S \subset \Omega$ definiramo*

$$\varphi(S) := \frac{1}{2\pi(S)} \sum_{y \in \Omega} \left(Q(S, y) \wedge Q(S^c, y) \right). \tag{4.4}$$

Tada za sve neprazne skupove $S \subset \Omega$ i sve $n \geq 0$ vrijedi

$$\mathbf{E}\left(R_n \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right) = 1 + 2\varphi(S), \tag{4.5}$$

$$\mathbf{E}\left(R_n \middle| S_n = S, U_n > \frac{1}{2} \right) = 1 - 2\varphi(S). \tag{4.6}$$

Dokaz. Neka je $n \geq 0$ proizvoljan. Za svaki $y \in \Omega$ po definiciji (2.12) vrijedi

$$\mathbf{P}\left(y \in S_{n+1} \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right) = \mathbf{P}\left(\frac{Q(S, y)}{\pi(y)} \geq U_n \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right).$$

Uvjetno na $U_n \leq \frac{1}{2}$, U_n ima uniformnu distribuciju na $[0, 1/2]$. Iz tog razloga i nezavisnosti S_n i U_n slijedi da je gornja vjerojatnost jednaka

$$\frac{2Q(S, y)}{\pi(y)}, \quad \text{za} \quad \frac{Q(S, y)}{\pi(y)} \in [0, 1/2],$$

odnosno 1 inače. Zato zaključujemo da vrijedi

$$\mathbf{P}\left(y \in S_{n+1} \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right) = 1 \wedge \frac{2Q(S, y)}{\pi(y)}.$$

Zbog $\pi(y) = Q(\Omega, y) = Q(S, y) + Q(S^c, y)$ i gornje jednakosti lako se provjeri da vrijedi

$$\pi(y)\mathbf{P}\left(y \in S_{n+1} \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right) = Q(S, y) + \left(Q(S, y) \wedge Q(S^c, y) \right).$$

Koristeći gornju jednakost dobivamo da je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\pi(S_{n+1}) \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right) &= \mathbf{E}\left(\sum_{y \in \Omega} \pi(y) \mathbf{1}_{\{y \in S_{n+1}\}} \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right) \\
&= \sum_{y \in \Omega} \pi(y) \mathbf{P}\left(y \in S_{n+1} \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right) \\
&= Q(S, \Omega) + \sum_{y \in \Omega} \left(Q(S, y) \wedge Q(S^c, y) \right) \\
&= \pi(S) + 2\pi(S)\varphi(S). \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Zbog martingalnosti i formule potpune vjerojatnosti (koristimo činjenicu da su U_n i S_n nezavisne) slijedi da je

$$\begin{aligned}\pi(S) &= \mathbf{E}\left(\pi(S_{n+1})|S_n = S\right) \\ &= \mathbf{P}\left(U_n \leq \frac{1}{2}\middle|S_n = S\right)\mathbf{E}\left(\pi(S_{n+1})\middle|S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(U_n > \frac{1}{2}\middle|S_n = S\right)\mathbf{E}\left(\pi(S_{n+1})\middle|S_n = S, U_n > \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\left(\pi(S_{n+1})\middle|S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2}\right) + \mathbf{E}\left(\pi(S_{n+1})\middle|S_n = S, U_n > \frac{1}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Uvrštavanjem (4.7) u gornji izraz i premještanjem dobivamo

$$\mathbf{E}\left(\pi(S_{n+1})\middle|S_n = S, U_n > \frac{1}{2}\right) = \pi(S) - 2\pi(S)\varphi(S). \tag{4.8}$$

Djeljenjem sa $\pi(S)$ u (4.7) i (4.8) slijedi tvrdnja propozicije. □

Lema 4.2.4. *Za svaki $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ vrijedi*

$$\frac{\sqrt{1+2\alpha} + \sqrt{1-2\alpha}}{2} \leq \sqrt{1-\alpha^2} \leq 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \tag{4.9}$$

Dokaz. Kvadriranjem odmah zaključujemo da vrijedi druga nejednakost

$$\sqrt{1-\alpha^2} \leq 1 - \frac{\alpha^2}{2} \iff 1 - \alpha^2 \leq 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{4}.$$

Kvadriranjem prve nejednakosti dobivamo

$$1 + 2\alpha + 1 - 2\alpha + 2\sqrt{1-4\alpha^2} \leq 4 - 4\alpha^2 \iff \sqrt{1-4\alpha^2} \leq 1 - 2\alpha^2,$$

a to vrijedi po već dokazanoj drugoj nejednakosti (ili ponovnim kvadriranjem). □

Lema 4.2.5. *Za svaki $S \subset \Omega$ vrijedi*

$$Q(S^c, S) = Q(S, S^c).$$

Dokaz. Tvrdnja leme je posljedica relacija (2.10) i (2.11).

$$Q(S, S^c) + Q(S^c, S^c) = Q(\Omega, S^c) = \pi(S^c) = Q(S^c, \Omega) = Q(S^c, S) + Q(S^c, S^c).$$

□

Dokaz Propozicije 4.2.2 Prisjetimo se da je $R_0 = \frac{\pi(S_1)}{\pi(S_0)}$. Za proizvoljan neprazan skup $S \subset \Omega$ koristeći Jensenovu nejednakost imamo

$$\begin{aligned}1 - \Psi(S) &= \mathbf{E}\left(\sqrt{R_0}\middle|S_0 = S\right) \\ &= \frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{R_0}\middle|S_0 = S, U_0 \le \frac{1}{2}\right) + \mathbf{E}\left(\sqrt{R_0}\middle|S_0 = S, U_0 > \frac{1}{2}\right)}{2} \\ &\le \frac{\sqrt{\mathbf{E}\left(R_0\middle|S_0 = S, U_0 \le \frac{1}{2}\right)} + \sqrt{\mathbf{E}\left(R_0\middle|S_0 = S, U_0 > \frac{1}{2}\right)}}{2}.\end{aligned}$$

Koristeći Lemu 4.2.3 i relaciju (4.9) slijedi

$$1 - \Psi(S) \le \frac{\sqrt{1 + 2\varphi(S)} + \sqrt{1 - 2\varphi(S)}}{2} \le 1 - \frac{\varphi(S)^2}{2}. \tag{4.10}$$

Dakle, za svaki neprazan $S \subset \Omega$ je

$$\Psi(S) \ge \frac{\varphi(S)^2}{2}. \tag{4.11}$$

Primjetimo da smo, iskoristivši (4.9), prešutno pretpostavili da je $\varphi(S) \le 1/2$. Ali to uistinu vrijedi jer je

$$\varphi(S) = \frac{1}{2\pi(S)} \sum_{y \in \Omega} \left(Q(S, y) \wedge Q(S^c, y)\right) \le \frac{1}{2\pi(S)} \sum_{y \in \Omega} Q(S, y) = \frac{Q(S, \Omega)}{2\pi(S)} = \frac{1}{2}.$$

Uspostavimo sada vezu između $\varphi(S)$ i $\Phi(S)$. Neka je, kao u pretpostavci propozicije, $P(x, x) \ge \gamma$ za sve $x \in \Omega$. Fiksirajmo proizvoljan neprazan skup $S \subset \Omega$. Tada je za $y \in S$

$$Q(S, y) \ge \pi(y)P(y, y) \ge \gamma\pi(y). \tag{4.12}$$

Stoga je za sve $y \in S$

$$Q(S, y) \wedge Q(S^c, y) \ge \gamma\pi(y) \wedge Q(S^c, y). \tag{4.13}$$

Nejednakost (4.12) povlači da je

$$Q(S^c, y) = \pi(y) - Q(S, y) \le (1 - \gamma)\pi(y).$$

Dijelimo sa $1 - \gamma$, te potom množimo sa γ da bismo zaključili da je

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} Q(S^c, y) \le \gamma\pi(y).$$

Po pretpostavci je $\gamma \in (0, 1/2]$, pa je $1 - \gamma \geq \gamma$. Zbog toga je

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} Q(S^c, y) \leq Q(S^c, y).$$

Koristeći zadnje dvije nejednakosti u (4.13) dobivamo da je za sve $y \in S$

$$Q(S, y) \wedge Q(S^c, y) \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} Q(S^c, y).$$

Zbog simetrije u gornjoj nejednakosti vrijedi da je za sve $y \in S^c$

$$Q(S, y) \wedge Q(S^c, y) \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} Q(S, y).$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
2\pi(S)\varphi(S) &= \sum_{y \in \Omega} \left[Q(S, y) \wedge Q(S^c, y)\right] \\
&\geq \sum_{y \in S} \frac{\gamma}{1-\gamma} Q(S^c, y) + \sum_{y \in S^c} \frac{\gamma}{1-\gamma} Q(S, y) \\
&= \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[Q(S^c, S) + Q(S, S^c)\right] \\
&= \frac{2\gamma}{1-\gamma} Q(S, S^c).
\end{aligned}$$

U zadnjem smo koraku koristili Lemu 4.2.5. Dijeljenjem sa $2\pi(S)$ dobivamo

$$\varphi(S) \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} \Phi(S).$$

Iz gornje nejednakosti i (4.11) slijedi

$$\Psi(S) \geq \frac{\gamma^2}{2(1-\gamma)^2} \Phi(S)^2$$

□

Napomena 4.2.6. *U prethodnom dokazu smo pokazali da za sve neprazne skupove $S \subset \Omega$ vrijedi*

$$\varphi(S) \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} \Phi(S),$$

Specijalno, kada je P lijena prijelazna matrica ($\gamma = 1/2$) za sve neprazne skupove $S \subset \Omega$ vrijedi

$$\varphi(S) \geq \Phi(S).$$

Pokazat ćemo da u tom slučaju zapravo vrijedi

$$\varphi(S) = \Phi(S).$$

Neka je $S \subset \Omega$ proizvoljan neprazan skup. Tada zbog lijenosti slijedi da za sve $y \in S$ vrijedi

$$Q(S, y) \geq \pi(y)P(y, y) \geq \frac{\pi(y)}{2}.$$

Budući da za sve $y \in \Omega$ vrijedi $Q(S, y) + Q(S^c, y) = \pi(y)$, za sve $y \in S$ je

$$Q(S^c, y) \leq \frac{\pi(y)}{2} \leq Q(S, y).$$

Zbog simetrije za sve $y \in S^c$ vrijedi

$$Q(S, y) \leq Q(S^c, y).$$

Iz prethodno pokazanog slijedi

$$\begin{aligned}
\varphi(S) &= \frac{1}{2\pi(S)} \sum_{y \in \Omega} (Q(S, y) \wedge Q(S^c, y)) \\
&= \frac{1}{2\pi(S)} \left(\sum_{y \in S} Q(S^c, y) + \sum_{y \in S^c} Q(S, y) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi(S)} (Q(S^c, S) + Q(S, S^c)) \\
&= \Phi(S),
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz Leme 4.2.5.

Iz prethodne napomene i Leme 4.2.3 odmah slijedi sljedeći korolar.

Korolar 4.2.7. *Neka je P lijena prijelazna matrica i $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ pripadajući proces evoluirajućih skupova. Tada za sve neprazne skupove $S \subset \Omega$ i sve $n \geq 0$ vrijedi*

$$\mathbf{E}\left(\frac{\pi(S_{n+1})}{\pi(S_n)} \middle| S_n = S, U_n \leq \frac{1}{2} \right) = 1 + 2\Phi(S)$$

i

$$\mathbf{E}\left(\frac{\pi(S_{n+1})}{\pi(S_n)} \middle| S_n = S, U_n > \frac{1}{2} \right) = 1 - 2\Phi(S).$$

4.3 Miješanje i koeficijent rasta ψ

Ranije smo definirali χ^2-udaljenost sa (2.17). Cilj ovog dijela je dokazati sljedeći teorem.

Teorem 4.3.1. *Neka su $x \in \Omega$ i $\epsilon > 0$ proizvoljni. Tada je $\chi^2(P^n(x,\cdot),\pi) \leq \epsilon$ za sve*

$$n \geq \int_{4\pi(x)}^{4/\epsilon} \frac{du}{u\psi(u)}.$$

Koristit ćemo Doobovu transformaciju procesa evoluirajućih skupova definiranu u potpoglavlju 2.4. Prisjetimo se, to je Markovljev lanac na podskupovima od Ω sa prijelaznim vjerojatnostima

$$\widehat{K}(A,B) = \frac{\pi(B)}{\pi(A)} K(A,B),$$

pri čemu je K prijelazna matrica procesa evoluirajućih skupova. Generaliziramo gornju jednakost na n-koračne prijelazne vjerojatnosti.

Propozicija 4.3.2. *Neka su $\widehat{K}(\cdot,\cdot)$ prijelazne vjerojatnosti Doobove transformacije procesa evoluirajućih skupova. Tada za sve $A, B \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$, i sve $n \geq 0$ vrijedi*

$$\widehat{K}^n(A,B) = \frac{\pi(B)}{\pi(A)} K^n(A,B).$$

Nadalje, sa označimo $\widehat{\mathbf{E}}$ očekivanje kada je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces sa prijelaznim vjerojatnostima $\widehat{K}(\cdot,\cdot)$. Tada za svaku funkciju $f : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ i sve $n \geq 0$ vrijedi

$$\widehat{\mathbf{E}}_A f(S_n) = \mathbf{E}_A \left[\frac{\pi(S_n)}{\pi(A)} f(S_n) \right].$$

Dokaz. Prvu tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Po definiciji (2.24) slijedi da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Ako pretpostavimo da je tvrdnja istinita za sve $k \leq n$, tada zbog Markovljevog svojstva i pretpostavke indukcije slijedi

$$\begin{aligned}
\widehat{K}^{n+1}(A,B) &= \sum_{S \neq \emptyset} \widehat{K}^n(A,S)\widehat{K}(S,B) \\
&= \sum_{S \neq \emptyset} \frac{\pi(S)}{\pi(A)} K^n(A,S) \frac{\pi(B)}{\pi(S)} K(S,B) \\
&= \frac{\pi(B)}{\pi(A)} \sum_{S \neq \emptyset} K^n(A,S)K(S,B) \\
&= \frac{\pi(B)}{\pi(A)} K^{n+1}(A,B).
\end{aligned}$$

Nadalje, za svaku funkciju f vrijedi

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}_A f(S_n) &= \sum_{S\subset\Omega} \widehat{K}^n(A,S)f(S)\\ &= \sum_{S\subset\Omega} \frac{\pi(S)}{\pi(A)} K^n(A,S)f(S)\\ &= \mathbf{E}_A\left[\frac{\pi(S_n)}{\pi(A)}f(S_n)\right].\end{aligned}$$

□

Podsjetimo se da smo za svaki $S\in\Omega$ definirali

$$S^\sharp := \begin{cases} S, & \text{ako je } \pi(S)\le 1/2\\ S^c, & \text{inače.}\end{cases}$$

Iz definicije je jasno da je $\pi(S^\sharp)=\pi(S)\wedge\pi(S^c)$. Nadalje, definirajmo proces $(Z_n)_{n=0}^\infty$ sa

$$Z_n = \frac{\sqrt{\pi(S_n^\sharp)}}{\pi(S_n)}. \tag{4.14}$$

Budući da je Z_n funkcija od S_n, prema Propoziciji 4.3.2 za sve $x\in\Omega$ vrijedi

$$\widehat{\mathbf{E}}_{\{x\}}(Z_n) = \mathbf{E}_{\{x\}}\left[\frac{\pi(S_n)}{\pi(x)}\frac{\sqrt{\pi(S_n^\sharp)}}{\pi(S_n)}\right] = \frac{1}{\pi(x)}\mathbf{E}_{\{x\}}\sqrt{\pi(S_n^\sharp)}.$$

Sada iz Teorema 2.3.6 slijedi da je za sve $x\in\Omega$

$$\chi(P^n(x,\cdot),\pi)\le \widehat{\mathbf{E}}_{\{x\}}(Z_n). \tag{4.15}$$

Dakle, ako ograničimo desni izraz u gornjoj nejednakosti dobiti ćemo ogradu na vrijeme miješanja početnog Markovljevog lanca. Prisjetimo se da je za svaki neprazan $S\subset\Omega$

$$\Psi(S) = 1-\mathbf{E}_S\sqrt{\frac{\pi(S_1)}{\pi(S)}}.$$

Zbog Markovljevog svojstva evoluirajućih skupova jasno je da za sve $n\ge 0$ vrijedi

$$\Psi(S) = 1-\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{\pi(S_{n+1})}{\pi(S_n)}}\,\middle|\, S_n = S\right).$$

Lema 4.3.3. *Za sve neprazne $S \subset \Omega$ vrijedi*

$$\mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S^\sharp_{n+1})}{\pi(S^\sharp_n)}}\,\middle|\, S_n = S\right] \leq 1 - \Psi(S^\sharp). \tag{4.16}$$

Dokaz. Neka je $S \subset \Omega$ proizvoljan neprazan skup. Ako je $\pi(S) \leq 1/2$, tada je $S^\sharp = S$, pa budući da je $\pi(S^\sharp_{n+1}) = \pi(S_{n+1}) \wedge \pi(S^c_{n+1})$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S^\sharp_{n+1})}{\pi(S^\sharp_n)}}\,\middle|\, S_n = S\right] &= \mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S^\sharp_{n+1})}{\pi(S_n)}}\,\middle|\, S_n = S\right] \\
&\leq \mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S_{n+1})}{\pi(S_n)}}\,\middle|\, S_n = S\right] \\
&= 1 - \Psi(S) = 1 - \Psi(S^\sharp).
\end{aligned}$$

U suprotnome, to jest ako je $\pi(S) > 1/2$, vrijedi da je $S^\sharp = S^c$. Analogno kao u prethodnom slučaju, najprije zaključujemo da je

$$\mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S^\sharp_{n+1})}{\pi(S^\sharp_n)}}\,\middle|\, S_n = S\right] \leq \mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S^c_{n+1})}{\pi(S^c_n)}}\,\middle|\, S_n = S\right].$$

Prema Propoziciji 2.2.6, proces komplemenata $(S^c_n)_{n=0}^\infty$ po distribuciji je jednak originalnom procesu. Zato je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S^c_{n+1})}{\pi(S^c_n)}}\,\middle|\, S_n = S\right] &= \mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S^c_{n+1})}{\pi(S^c_n)}}\,\middle|\, S^c_n = S^c\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{\pi(S_{n+1})}{\pi(S_n)}}\,\middle|\, S_n = S^c\right] \\
&= 1 - \Psi(S^c) = 1 - \Psi(S^\sharp).
\end{aligned}$$

□

Prisjetimo se definicije koeficijenta rasta ψ

$$\psi(r) = \begin{cases} \min\{\Psi(S) : \pi(S) \leq r\}, & \text{ako je } r \in [\pi_{min}, 1/2] \\ \psi_*, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pri čemu smo stavili $\psi_* := \psi(1/2)$. Jasno je da je ψ padajuća na $[\pi_{min}, \infty)$.

Dokaz Teorema 4.3.1. Neka je $n \geq 0$ fiksan, te $S \subset \Omega$ neprazan skup. Koristeći Markovljevo svojstvo evoluirajućih skupova, te Propoziciju 4.3.2 (u trećoj jednakosti) slijedi

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{E}}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\middle| S_n = S\right) &= \widehat{\mathbf{E}}\left(\frac{\pi(S_n)\sqrt{\pi(S^\sharp_{n+1})}}{\sqrt{\pi(S^\sharp_n)}\pi(S_{n+1})}\middle| S_n = S\right) \\
&= \frac{\pi(S)}{\sqrt{\pi(S^\sharp)}}\widehat{\mathbf{E}}_S\left(\frac{\sqrt{\pi(S^\sharp_1)}}{\pi(S_1)}\right) \\
&= \mathbf{E}_S\left(\frac{\sqrt{\pi(S^\sharp_1)}}{\sqrt{\pi(S^\sharp)}}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{\sqrt{\pi(S^\sharp_{n+1})}}{\sqrt{\pi(S^\sharp_n)}}\middle| S_n = S\right)
\end{aligned}$$

Budući da je $\pi(S^\sharp) \leq 1/2$, odmah slijedi da je $\Psi(S^\sharp) \geq \psi(\pi(S^\sharp))$. Iz činjenica da je ψ padajuća i $\pi(S^\sharp) \leq \pi(S)$, zaključujemo da je $\psi(\pi(S^\sharp)) \geq \psi(\pi(S))$. Koristeći Lemu 4.3.3 i prethodne tvrdnje slijedi da je

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{\pi(S^\sharp_{n+1})}{\pi(S^\sharp_n)}}\middle| S_n = S\right) \leq 1 - \Psi(S^\sharp) \leq 1 - \psi(\pi(S^\sharp)) \leq 1 - \psi(\pi(S)).$$

Budući da su n i S bili proizvoljni, možemo zaključiti da je za sve $n \geq 0$

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\middle| S_n\right) \leq 1 - \psi(\pi(S_n)). \tag{4.17}$$

Nadalje, primjetimo da je $Z_n^{-2} = \pi(S_n)$ kad je $\pi(S_n) \leq 1/2$. U slučaju kad je $\pi(S_n) > 1/2$ imamo

$$Z_n^{-2} = \frac{\pi(S_n)^2}{\pi(S^\sharp_n)} \geq \frac{\pi(S_n)^2}{\pi(S_n)} = \pi(S_n) > \frac{1}{2}.$$

Budući da je $\psi(r) = \psi_*$ za $r \geq 1/2$, zaključujemo da u oba slučaja vrijedi

$$\psi(\pi(S_n)) = \psi(Z_n^{-2}).$$

Ako definiramo neopadajuću funkciju $f_0(z) := \psi(z^{-2})$, (4.17) prelazi u

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\middle|S_n\right) \leq 1 - f_0(Z_n).$$

Kako je za sve $n \geq 0$, Z_n očito izmjeriva u odnosu na S_n, iz svojstava uvjetnog očekivanja slijedi da je

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\middle|Z_n\right) = \widehat{\mathbf{E}}\left[\widehat{\mathbf{E}}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\middle|S_n\right)\middle|Z_n\right] \leq 1 - f_0(Z_n). \tag{4.18}$$

Neka su sada $\epsilon > 0$ i $x \in \Omega$ proizvoljni, te stavimo $\delta := \sqrt{\epsilon}$ i $S_0 := \{x\}$. Definiramo $L_n := \widehat{\mathbf{E}}_{\{x\}}(Z_n)$ za sve $n \geq 0$. Iz (4.18) i činjenice da je $f_0 \in [0,1]$ i neopadajuća (slijedi odmah iz svojstava od ψ), dio **(ii)** iz Leme 4.3.4 daje da za sve

$$n \geq \int_{\delta}^{L_0} \frac{2dz}{zf_0(z/2)} = \int_{\delta}^{L_0} \frac{2dz}{z\psi(4/z^2)} = [u = 4/z^2] = \int_{4L_0^{-2}}^{4/\epsilon} \frac{du}{u\psi(u)}$$

vrijedi

$$\widehat{\mathbf{E}}_{\{x\}}(Z_n) = L_n \leq \delta = \sqrt{\epsilon}.$$

Koristeći (4.15) zaključujemo da je za sve takve n,

$$\chi^2(P^n(x,\cdot),\pi) \leq \epsilon.$$

Potrebno je pokazati da gornja nejednakost vrijedi za sve n takve da je

$$n \geq \int_{4\pi(x)}^{4/\epsilon} \frac{du}{u\psi(u)}.$$

Na temelju prethodno dokazanog, za to je dovoljno pokazati da vrijedi

$$\int_{4\pi(x)}^{4/\epsilon} \frac{du}{u\psi(u)} \geq \int_{4L_0^{-2}}^{4/\epsilon} \frac{du}{u\psi(u)},$$

a to slijedi iz činjenice da je integrand pozitivna funkcija i zato što je

$$L_0^{-2} = Z_0^{-2} = \frac{\pi(S_0)^2}{\pi(S_0^\sharp)} \geq \frac{\pi(S_0)^2}{\pi(S_0)} = \pi(S_0) = \pi(x).$$

□

Lema 4.3.4. *Neka su $f, f_0 : [0,\infty) \to [0,1]$ neopadajuće funkcije, $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ niz nenegativnih slučajnih varijabli i $\delta > 0$ proizvoljan. Definiramo niz $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ sa $L_n := \mathbf{E}(Z_n)$.*

(i) Ako je $L_{n+1} \leq L_n(1 - f(L_n))$ za sve $n \geq 0$, tada je $L_n \leq \delta$ za sve

$$n \geq \int_{\delta}^{L_0} \frac{dz}{zf(z)}.$$

(ii) Ako je $\mathbf{E}(Z_{n+1}|Z_n) \leq Z_n(1 - f_0(Z_n))$ za sve $n \geq 0$, tada zaključak iz (i) vrijedi uz $f(z) := f_0(z/2)/2$.

Dokaz. **(i)** Niz $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ je očito padajući. Zbog te činjenice i pozitivnosti integranda, zaključujemo da je dovoljno dokazati da za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$\int_{L_n}^{L_0} \frac{dz}{zf(z)} \geq n. \tag{4.19}$$

Za $n = 0$ tvrdnja je trivijalna. Neka je sada $n \geq 0$ proizvoljan. Korištenjem pretpostavke i nejednakosti $1 - x \leq e^{-x}$ koja vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$, zaključujemo da za sve $k \geq 0$ vrijedi

$$L_{k+1} \leq L_k[1 - f(L_k)] \leq L_k e^{-f(L_k)}.$$

Iz gornjeg izraza lako dobijemo da za sve $k \geq 0$ vrijedi

$$\frac{1}{f(L_k)} \log \frac{L_k}{L_{k+1}} \geq 1.$$

Nadalje, koristeći gornju nejednakost i pretpostavku da je f neopadajuća funkcija, dobivamo

$$\int_{L_{k+1}}^{L_k} \frac{dz}{zf(z)} \geq \frac{1}{f(L_k)} \int_{L_{k+1}}^{L_k} \frac{dz}{z} = \frac{1}{f(L_k)} \log \frac{L_k}{L_{k+1}} \geq 1.$$

Sada sumiranjem gornjih nejednakosti za $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ slijedi (4.19).
(ii) Iz svojstva uvjetnog očekivanja dobivamo da za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$L_n - L_{n+1} = \mathbf{E}(Z_n) - \mathbf{E}(Z_{n+1}) \geq \mathbf{E}[Z_n f_0(Z_n)]. \tag{4.20}$$

Neka je $n \geq 0$ proizvoljan. Stavimo $A_n := \{Z_n > L_n/2\}$. Odmah je jasno da vrijedi

$$\mathbf{E}[Z_n \mathbf{1}_{A_n^c}] \leq \frac{L_n}{2}.$$

Zbog $L_n = \mathbf{E}[Z_n \mathbf{1}_{A_n^c}] + \mathbf{E}[Z_n \mathbf{1}_{A_n}]$ slijedi da je $\mathbf{E}[Z_n \mathbf{1}_{A_n}] \geq \frac{L_n}{2}$. Upotrebom zadnje nejednakosti, rasta od f_0 i definicije od A_n slijedi

$$\mathbf{E}[Z_n f_0(Z_n)] \geq \mathbf{E}[Z_n \mathbf{1}_{A_n} f_0(Z_n)] \geq \mathbf{E}[Z_n \mathbf{1}_{A_n} f_0\left(\frac{L_n}{2}\right)] \geq f_0\left(\frac{L_n}{2}\right)\frac{L_n}{2}.$$

Za $f(z) := f_0(z/2)/2$, iz gornje nejednakosti i (4.20) slijedi

$$L_n - L_{n+1} \geq f_0\left(\frac{L_n}{2}\right)\frac{L_n}{2} = L_n f(L_n).$$

Sada tvrdnja slijedi iz **(i)**. $\square$

4.4 Dokaz Teorema 3.1.1

Zapravo jedino što nam je preostalo je ocijeniti izraze oblika $\left|\frac{P^n(x,y)-\pi(y)}{\pi(y)}\right|$ u terminima χ^2-udaljenosti, te primjeniti Propoziciju 4.2.2 i Teorem 4.3.1. Za to ćemo iskoristiti reverzibilni Markovljev lanac pridružen matrici P, koja ima stacionarnu distribuciju π. Podsjetimo se da je to Markovljev lanac na istom skupu stanja Ω sa prijelaznom matricom $\overleftarrow{P}$ koja za sve $y, z \in \Omega$ zadovoljava

$$\pi(y)\overleftarrow{P}(y,z) = \pi(z)P(z,y),$$

te ima istu stacionarnu distribuciju kao i originalni lanac. Prethodnu jednakost lako poopćimo. Naime, za proizvoljan $m \geq 1$ je

$$\begin{aligned} \pi(y)\overleftarrow{P}^m(y,z) &= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{m-1}\in\Omega} \pi(y)\overleftarrow{P}(y,i_1)\overleftarrow{P}(i_1,i_2)\cdots\overleftarrow{P}(i_{m-1},z) \\ &= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{m-1}\in\Omega} \pi(z)P(z,i_{m-1}),\cdots P(i_2,i_1)P(i_1,y) \\ &= \pi(z)P^m(z,y). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Nadalje, znamo da za sve $n, m \geq 1$ vrijedi $P^{n+m}(x,y) = \sum_{z\in\Omega} P^n(x,z)P^m(z,y)$. Koristeći prethodnu jednakost i stacionarnost od π slijedi da je

$$\begin{aligned} P^{n+m}(x,y) - \pi(y) &= \sum_{z\in\Omega} P^n(x,z)\left(P^m(z,y) - \pi(y)\right) - \sum_{z\in\Omega} \pi(z)\left(P^m(z,y) - \pi(y)\right) \\ &= \sum_{z\in\Omega}(P^n(x,z) - \pi(z))(P^m(z,y) - \pi(y)) \\ &= \pi(y)\sum_{z\in\Omega}\pi(z)\left(\frac{P^n(x,z)}{\pi(z)} - 1\right)\left(\frac{P^m(z,y)}{\pi(y)} - 1\right). \end{aligned}$$

Korištenjem relacije (4.21) i Cauchy-Schwarzove nejednakosti u $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ dobivamo

$$\begin{aligned} \left|\frac{P^{n+m}(x,y) - \pi(y)}{\pi(y)}\right| &= \left|\sum_{z\in\Omega}\pi(z)(\frac{P^n(x,z)}{\pi(z)} - 1)(\frac{\overleftarrow{P}^m(y,z)}{\pi(z)} - 1)\right| \\ &\leq \chi\left(P^n(x,\cdot),\pi\right)\chi(\overleftarrow{P}^m(y,\cdot),\pi). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Po Lemi 4.2.5 je za svaki $S \subset \Omega$

$$Q(S^c, S) = Q(S, S^c).$$

Slijedi da je za reverzibilan lanac tok od S do S^c jednak

$$\overleftarrow{Q}(S,S^c) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in S^c}\pi(x)\overleftarrow{P}(x,y) = \sum_{x\in S}\sum_{y\in S^c}\pi(y)P(y,x) = Q(S^c,S) = Q(S,S^c).$$

Budući da je π stacionarna za oba lanca, radijus toka $\Phi(\cdot)$ reverzibilnog lanca jednak je radijusu toka originalnog lanca. Također je jasno da i $\overleftarrow{P}$ zadovoljava uvjet $\overleftarrow{P}(x,x) \geq \gamma$ za sve $x \in \Omega$. Koristeći prethodne tvrdnje i Propoziciju 4.2.2 dobivamo da je za sve neprazne $S \subset \Omega$

$$\Psi(S) \wedge \overleftarrow{\Psi}(S) \geq \frac{\gamma^2}{2(1-\gamma)^2}\Phi(S)^2.$$

Odavde odmah slijedi da je za sve $r \geq \pi_{min}$

$$\psi(r) \wedge \overleftarrow{\psi}(r) \geq \frac{\gamma^2}{2(1-\gamma)^2}\Phi(r)^2.$$

Koristeći zadnju nejednakost, slijedi da za proizvoljan $\epsilon > 0$ i za sve

$$m, n \geq \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma^2}\int_{4(\pi(x)\wedge\pi(y))}^{4/\epsilon}\frac{2du}{u\Phi^2(u)}$$

vrijedi

$$n \geq \int_{4\pi(x)}^{4/\epsilon}\frac{du}{u\psi(u)} \text{ i } m \geq \int_{4\pi(y)}^{4/\epsilon}\frac{du}{u\overleftarrow{\psi}(u)}.$$

Za sve takve m, n Teorem 4.3.1 daje

$$\chi(P^n(x,\cdot),\pi) \leq \sqrt{\epsilon}, \text{ odnosno } \chi(\overleftarrow{P}^m(y,\cdot),\pi) \leq \sqrt{\epsilon},$$

pa iz (4.22) slijedi

$$\left|\frac{P^{n+m}(x,y)-\pi(y)}{\pi(y)}\right| \leq \epsilon.$$

Sada lako zaključujemo da za sve

$$n \geq 1 + \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma^2}\int_{4(\pi(x)\wedge\pi(y))}^{4/\epsilon}\frac{4du}{u\Phi^2(u)}$$

vrijedi

$$\left|\frac{P^n(x,y)-\pi(y)}{\pi(y)}\right| \leq \epsilon.$$

Poglavlje 5

Ograda na povratne vjerojatnosti na grafu

5.1 Slučajna šetnja na grafu

Jednostavan neusmjereni graf $G = (\Omega, E)$ je uređeni par (konačnog) skupa vrhova Ω i skupa bridova E, gdje je $E \subset \{\{x, y\} : x, y \in \Omega, x \neq y\}$. Ovakav graf zovemo jednostavan jer ne dopušta višestruke bridove i petlje. Budući da ćemo se baviti samo jednostavnim neusmjerenim grafovima, radi jednostavnosti zvat ćemo ih samo grafovima. U slučaju kada vrijedi $\{x, y\} \in E$, pišemo $x \sim y$ i kažemo da su vrhovi x i y **susjedi**. Kažemo da je graf **povezan** ako za svaka dva vrha $x, y \in \Omega$ postoji konačan niz vrhova $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y \in \Omega$ takav da za sve $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vrijedi $x_k \sim x_{k+1}$. Za svaki vrh $x \in \Omega$ definiramo njegov **stupanj** $d(x)$ kao broj njegovih susjeda. **Maksimalan stupanj grafa** Δ definiramo sa $\Delta := \max_{x\in\Omega} d(x)$.

Definicija 5.1.1. *Neka je zadan graf $G = (\Omega, E)$.* ***Jednostavna slučajna šetnja*** *na grafu G je Markovljev lanac na Ω sa prijelaznim vjerojatnostima*

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{d(x)}, & \text{ako je } y \sim x \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

I u ovom slučaju koristit ćemo termin slučajna šetnja umjesto jednostavna slučajna šetnja. Neka je P prijelazna matrica slučajne šetnje na grafu $G = (\Omega, E)$. Ako stavimo $d := \sum_{x\in\Omega} d(x)$, tada je zbog konačnosti od Ω sa

$$\pi(x) := \frac{d(x)}{d}\text{ , za sve } x \in \Omega,$$

dobro definirana vjerojatnosna mjera na Ω. Za sve $y \in \Omega$ tada vrijedi

$$\pi P(y) = \sum_{x \in \Omega} \pi(x) P(x,y) = \frac{1}{d} \sum_{x \sim y} \frac{d(x)}{d(x)} = \pi(y).$$

Dakle, π je stacionarna distribucija za slučajnu šetnju. Direktno iz definicije povezanog grafa slijedi da je slučajna šetnja na povezanom grafu ireducibilna. Ipak, slučajna šetnja na grafu ne mora biti aperiodična. Taj problem rješavamo tako da umjesto originalne slučajne šetnje promatramo njenu lijenu verziju. Preciznije, promatrat ćemo Markovljev lanac na Ω sa prijelaznim vjerojatnostima

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d(x)}, & \text{ako je } y \sim x \\ \frac{1}{2}, & \text{ako je } y = x \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Intuitivno, u svakom trenutku bacamo simetričan novčić, ako padne pismo ostajemo u istom vrhu, a u suprotnom biramo uniformno jedan od susjeda i prelazimo u taj vrh. Ranije definirana vjerojatnosna distribucija π stacionarna je i za lijenu slučajnu šetnju. Zaista, za sve $y \in \Omega$ vrijedi

$$\pi P(y) = \sum_{x \in \Omega} \pi(x) P(x,y) = \frac{\pi(y)}{2} + \frac{1}{2d} \sum_{x \sim y} \frac{d(x)}{d(x)} = \pi(y).$$

5.2 Povratne vjerojatnosti

Koristit ćemo se evoluirajućim skupovima kako bismo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 5.2.1. *Neka je P prijelazna matrica lijene slučajne šetnje na povezanom grafu $G = (\Omega, E)$ maksimalnog stupnja Δ. Tada za sve $x \in \Omega$ i $n \geq 1$ vrijedi*

$$|P^n(x,x) - \pi(x)| \leq \frac{2\sqrt{2}\Delta^{5/2}}{\sqrt{n}}.$$

Primjetimo da ograda u prethodnom teoremu ne ovisi o broju vrhova u grafu. Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova za matricu P. Prisjetimo se da smo sa τ označili prvo vrijeme kad proces evoluirajućih skupova pogodi skup $\{\emptyset, \Omega\}$. U Propoziciji 2.4.1 smo pokazali da je to vrijeme gotovo sigurno konačno. Prvi korak u dokazu Teorema 5.2.1 je sljedeća lema.

Lema 5.2.2. *Za sve $x \in \Omega$ i sve $n \geq 1$ vrijedi*

$$|P^n(x,x) - \pi(x)| \leq \mathbf{P}_{\{x\}}\{\tau > n\}.$$

Dokaz. Neka su $x \in \Omega$ i $n \geq 1$ proizvoljni. Budući da je proces $(\pi(S_n))_{n=0}^{\infty}$ ograničen martingal, a τ vrijeme zaustavljanja koje je konačno gotovo sigurno, korištenjem teorema o opcionalnom zaustavljanju slijedi

$$\pi(x) = \mathbf{E}_{\{x\}}\pi(S_\tau) = \mathbf{E}_{\{x\}}\pi(S_\tau)\mathbf{1}_{\{S_\tau=\Omega\}} = \mathbf{P}_{\{x\}}\{S_\tau = \Omega\} = \mathbf{P}_{\{x\}}\{x \in S_\tau\}.$$

U prethodnim jednakostima koristili smo činjenicu da je $S_\tau \in \{\emptyset, \Omega\}$. Iz Propozicije 2.2.5 znamo da vrijedi

$$P^n(x,x) = \mathbf{P}_{\{x\}}\{x \in S_n\}.$$

Budući da su $\emptyset$ i Ω apsorbirajuća stanja, vrijedi $\{x \in S_\tau, \tau \leq n\} = \{x \in S_n, \tau \leq n\}$. Koristeći prethodne tvrdnje slijedi

$$\begin{aligned} |P^n(x,x) - \pi(x)| &= |\mathbf{P}_{\{x\}}\{x \in S_n\} - \mathbf{P}_{\{x\}}\{x \in S_\tau\}| \\ &= |\mathbf{P}_{\{x\}}\{x \in S_n, \tau > n\} - \mathbf{P}_{\{x\}}\{x \in S_\tau, \tau > n\}| \\ &\leq \mathbf{P}_{\{x\}}\{\tau > n\}. \end{aligned}$$

□

Iz prethodne leme vidimo da je potrebno dati ocjenu repa razdiobe od τ. Budući da je τ prvo vrijeme kada martingal $(\pi(S_n))_{n=0}^{\infty}$ napusti interval $(0,1)$, korisna će se pokazati sljedeća propozicija.

Propozicija 5.2.3. *Neka je $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal s vrijednostima u $[0,1]$ obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$. Definirajmo za sve $h \in [0,1]$ vrijeme zaustavljanja T_h kao prvo vrijeme kada martingal $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ napusti interval $(0,h)$, tj.*

$$T_h := \min\{n \geq 0 : M_n = 0 \text{ ili } M_n \geq h\}.$$

Neka je $T := T_1$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

(i) Postoji $\sigma > 0$ takav da za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$\mathrm{Var}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq \sigma^2$$

na događaju $\{T > n\}$.

(ii) Postoji $D \geq 1$ tako da za sve $h \in [0,1]$ vrijedi

$$M_{n \wedge T_h} \leq Dh, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Ako je M_0 konstanta, tada za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbf{P}\{T \geq n\} \leq \frac{2M_0}{\sigma}\sqrt{\frac{D}{n}}.$$

Napomena 5.2.4. *Za kvadratno-integrabilnu slučajnu varijablu X i σ-podalgebru $\mathcal{G}$* ***uvjetna varijanca*** *definira se formulom*

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) := \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}\right].$$

Iz definicije odmah slijedi da je $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) \geq 0$*, a lako se dobije da vrijedi*

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X^2|\mathcal{G}) - \mathbf{E}(X|\mathcal{G})^2.$$

Dokaz. Neka je $h \in (0, 1]$ proizvoljan. Odmah je jasno da je T_h zaista vrijeme zaustavljanja za filtraciju $\mathbb{F}$. Nadalje, iz definicije vremena T_h slijedi da za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\{T_h < n\} \cap \{M_{T_h} < h\} \subset \{T < n\}.$$

Komplementiranjem gornje relacije zaključujemo da za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbf{P}\{T \geq n\} \leq \mathbf{P}\{T_h \geq n\} + \mathbf{P}\{M_{T_h} \geq h\}. \tag{5.1}$$

Primjetimo da gornja nejednakost ima smisla samo ako je M_{T_h} dobro definirano, tj. ako je vrijeme T_h konačno gotovo sigurno. Prvo ćemo to pokazati (zapravo ćemo pokazati da je $\mathbf{E}(T_h) < \infty$), te uz to dati ogradu na $\mathbf{P}\{T_h \geq n\}$. Definirajmo novi proces $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ sa

$$G_n := M_{n\wedge T_h}^2 - hM_{n\wedge T_h} - \sigma^2(n \wedge T_h) \text{ , za sve } n \geq 0.$$

Pokazat ćemo da iz prepostavke *(i)* slijedi da je taj proces submartingal u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$. Integrabilnost i adaptiranost su očiti. Neka je $n \geq 0$ proizvoljan. Iz *(i)* i činjenice da je $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal slijedi da na događaju $\{T > n\}$ vrijedi

$$\sigma^2 \leq \mathrm{Var}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - \mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n)^2 = \mathbf{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - M_n^2.$$

Na događaju $\{T_h > n\} = \{T_h \geq n + 1\}$ je $n \leq n + 1 \leq T_h$. Nadalje, očito je $\{T_h > n\} \subset \{T > n\}$, pa koristeći prethodne tvrdnje slijedi da na događaju $\{T_h > n\} = \{T_h \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(G_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}(M_{(n+1)\wedge T_h}^2 - hM_{(n+1)\wedge T_h} - \sigma^2((n+1) \wedge T_h)|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbf{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - h\mathbf{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) - \sigma^2(n+1) \\
&\geq M_n^2 + \sigma^2 - hM_n - \sigma^2(n+1) \\
&= M_{n\wedge T_h}^2 - hM_{n\wedge T_h} - \sigma^2(n \wedge T_h) \\
&= G_n
\end{aligned}$$

Na događaju $\{T_h \leq n\}$ je $G_{n+1} = G_n$, pa u tom slučaju trivijalno vrijedi $\mathbf{E}(G_{n+1}|\mathcal{F}_n) = G_n$. Dakle, proces $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ je submartingal. Iz te činjenice slijedi da za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$-hM_0 \leq G_0 \leq \mathbf{E}G_n = \mathbf{E}(M^2_{n\wedge T_h} - hM_{n\wedge T_h}) - \sigma^2\mathbf{E}(n \wedge T_h). \tag{5.2}$$

Primjetimo da za $n \leq T_h$ zbog pretpostavke *(ii)* vrijedi

$$M_n^2 - hM_n = (M_n - h)M_n \leq (D-1)hM_n,$$

pa zbog martingalnosti zaustavljenog procesa $(M_{n\wedge T_h})_{n=0}^{\infty}$ slijedi

$$\mathbf{E}(M^2_{n\wedge T_h} - hM_{n\wedge T_h}) \leq (D-1)hM_0.$$

Ako iskoristimo gornju nejednakost u (5.2) dobivamo da za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$-hM_0 \leq (D-1)hM_0 - \sigma^2\mathbf{E}(n \wedge T_h),$$

tj.

$$\mathbf{E}(n \wedge T_h) \leq \frac{DhM_0}{\sigma^2}.$$

Upotrebom teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\mathbf{E}(T_h) \leq \frac{DhM_0}{\sigma^2}.$$

Time je dokazano da je vrijeme T_h konačno gotovo sigurno. Budući da je $h \in (0,1]$ bio proizvoljan, korištenjem Markovljeve nejednakosti konačno zaključujemo da za sve $h \in (0,1]$ i sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbf{P}\{T_h \geq n\} \leq \frac{DhM_0}{n\sigma^2}. \tag{5.3}$$

Specijalno, za $h = 1$ iz gornje nejednakosti slijedi da za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbf{P}\{T \geq n\} \leq \frac{DM_0}{n\sigma^2}. \tag{5.4}$$

Preostalo nam je još ograničiti $\mathbf{P}\{M_{T_h} \geq h\}$ za sve $h \in (0,1]$. Već smo pokazali da je vrijeme T_h konačno gotovo sigurno, a budući da je $(M_{n\wedge T_h})_{n=0}^{\infty}$ ograničen martingal možemo iskoristiti teorem o opcionalnom zaustavljanju iz kojeg slijedi

$$M_0 = \mathbf{E}M_{T_h} = \mathbf{E}M_{T_h}\mathbf{1}_{\{M_{T_h} \geq h\}} \geq h\mathbf{P}\{M_{T_h} \geq h\},$$

tj.

$$\mathbf{P}\{M_{T_h} \geq h\} \leq \frac{M_0}{h}.$$

Koristeći prethodnu nejednakost i (5.3) u (5.1) zaključujemo da za sve $h \in (0,1]$ i $n \geq 1$ vrijedi

$$\mathbf{P}\{T \geq n\} \leq \frac{DhM_0}{n\sigma^2} + \frac{M_0}{h}.$$

Deriviranjem se lako pokaže da je funkcija po h na desnoj strani gornje nejednakosti konveksna, te da se globalni minimum postiže u $\widehat{h} = \sigma\sqrt{\frac{n}{D}}$. Dakle, za $\widehat{h} \in (0,1]$, odnosno za $1 \leq n \leq \frac{D}{\sigma^2}$, zaključujemo da vrijedi

$$\mathbf{P}\{T \geq n\} \leq \frac{2M_0}{\sigma}\sqrt{\frac{D}{n}}.$$

Sada se vratimo na nejednakost (5.4). Opet se lako pokaže da za $n > \frac{D}{4\sigma^2}$ vrijedi

$$\frac{DM_0}{n\sigma^2} \leq \frac{2M_0}{\sigma}\sqrt{\frac{D}{n}},$$

pa specijalno, za $n > \frac{D}{\sigma^2}$ iz (5.4) slijedi

$$\mathbf{P}\{T \geq n\} \leq \frac{DM_0}{n\sigma^2} \leq \frac{2M_0}{\sigma}\sqrt{\frac{D}{n}}.$$

□

Intuitivno je jasno da uvjetovanje smanjuje varijancu. Sljedeća lema daje precizno značenje toj tvrdnji, dokaz se može naći u [6, Zadatak 1.33].

Lema 5.2.5. *Za kvadratno-integrabilnu slučajnu varijablu X i σ-podalgebru $\mathcal{G}$ vrijedi*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})] + \mathrm{Var}(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]).$$

Specijalno, vrijedi

$$\mathrm{Var}(X) \geq \mathrm{Var}(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]).$$

Dokaz Teorema 5.2.1. Neka je $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ proces evoluirajućih skupova pridružen slučajnoj šetnji (tj. prijelaznoj matrici P) i τ, kao i dosada, prvo vrijeme kad taj proces pogodi skup $\{\emptyset, \Omega\}$. Koristeći činjenicu da je $(\pi(S_n))_{n=0}^{\infty}$ martingal prethodno smo pokazali (Lema 5.2.2) da za sve $x \in \Omega$ i sve $n \geq 1$ vrijedi

$$|P^n(x,x) - \pi(x)| \leq \mathbf{P}_{\{x\}}\{\tau > n\}. \tag{5.5}$$

Zbog Markovljevog svojstva evoluirajućih skupova za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$\mathrm{Var}(\pi(S_{n+1})|S_0, S_1, \ldots, S_n) = \mathrm{Var}(\pi(S_{n+1})|S_n). \tag{5.6}$$

Opet koristeći Markovljevo svojstvo, te Lemu 5.2.5 imamo da za proizvoljan $S \subset \Omega$ vrijedi

$$\mathrm{Var}(\pi(S_{n+1})|S_n = S) = \mathrm{Var}_S(\pi(S_1)) \geq \mathrm{Var}_S(\mathbf{E}_S[\pi(S_1)|\mathbf{1}_{\{U_0 \leq 1/2\}}]). \tag{5.7}$$

Iz Korolara 4.2.7 slijedi da za sve $S \subset \Omega$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_S[\pi(S_1)|\mathbf{1}_{\{U_0 \leq 1/2\}}] &= \mathbf{E}_S[\pi(S_1)|U_0 \leq 1/2]\mathbf{1}_{\{U_0 \leq 1/2\}} + \mathbf{E}_S[\pi(S_1)|U_0 > 1/2]\mathbf{1}_{\{U_0 > 1/2\}} \\ &= (\pi(S) + 2Q(S, S^c))\mathbf{1}_{\{U_0 \leq 1/2\}} + (\pi(S) - 2Q(S, S^c))\mathbf{1}_{\{U_0 > 1/2\}}.\end{aligned}$$

Primjetimo da Korolar 4.2.7 možemo upotrijebiti samo za neprazne $S \subset \Omega$, ali budući da je $\emptyset$ apsorbirajuće stanje evoluirajućih skupova i $Q(\emptyset, \Omega) = 0$, gornja jednakost vrijedi i za $S = \emptyset$. Nadalje, budući da su U_0 i S_0 nezavisne, U_0 je uniformno distribuirana i s obzirom na vjerojatnost $\mathbf{P}_S$. Sada zbog martingalnosti ($\mathbf{E}_S(\pi(S_1)) = \pi(S)$) lako dobijemo da za sve $S \subset \Omega$ vrijedi

$$\mathrm{Var}_S(\mathbf{E}_S[\pi(S_1)|\mathbf{1}_{\{U_0 \leq 1/2\}}]) = 4Q(S, S^c)^2.$$

Uzmimo proizvoljan $S \subset \Omega$ takav da $S \notin \{\emptyset, \Omega\}$. Budući da je graf povezan slijedi da postoje $x \in S$ i $y \in S^c$ takvi da je $P(x, y) > 0$, pa je stoga

$$Q(S, S^c) \geq \pi(x)P(x, y) = \frac{d(x)}{d}\frac{1}{2d(x)} = \frac{1}{2d} \geq \frac{1}{2|\Omega|\Delta}.$$

Iz gornje nejednakosti slijedi da za sve $S \notin \{\emptyset, \Omega\}$ vrijedi

$$\mathrm{Var}_S(\mathbf{E}_S[\pi(S_1)|\mathbf{1}_{\{U_0 \leq 1/2\}}]) \geq \frac{1}{|\Omega|^2\Delta^2}.$$

Koristeći gornju nejednakost i (5.7) u (5.6) zaključujemo da za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$\mathrm{Var}(\pi(S_{n+1})|S_0, S_1, \ldots, S_n) \geq \frac{1}{|\Omega|^2\Delta^2}$$

kada $S_n \notin \{\emptyset, \Omega\}$, tj. kada je $\tau > n$. Ako stavimo $\sigma := \frac{1}{|\Omega|\Delta}$, iz prethodne nejednakosti slijedi da martingal $(\pi(S_n))_{n=0}^{\infty}$ zadovoljava uvjet *(i)* iz Propozicije 5.2.3.

Pretpostavimo da je trenutno stanje evoluirajućih skupova $S_n = S \subset \Omega$. Tada u S_{n+1} mogu jedino biti vrhovi iz S, te njihovi susjedi iz S^c. Iz prethodnog slijedi da je

$$\begin{aligned}\pi(S_{n+1}) &\leq \pi(S) + \sum_{x \in S} \sum_{\substack{y \sim x \\ y \in S^c}} \pi(y) \\ &= \pi(S) + \frac{1}{d} \sum_{x \in S} \sum_{\substack{y \sim x \\ y \in S^c}} d(y) \\ &\leq \pi(S) + \frac{1}{d} \sum_{x \in S} d(x)\Delta \\ &= (\Delta + 1)\pi(S).\end{aligned}$$

Dakle, za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$\pi(S_{n+1}) \leq (\Delta + 1)\pi(S_n).$$

Iz prethodne nejednakosti, uz $D := \Delta + 1$, lako slijedi da $(\pi(S_n))_{n=0}^{\infty}$ zadovoljava i uvjet *(ii)* iz Propozicije 5.2.3. Budući da za sve $x \in \Omega$ vrijedi

$$\pi(x) = \frac{d(x)}{\sum_{y \in \Omega} d(y)} \leq \frac{\Delta}{\sum_{y \in \Omega} 1} = \frac{\Delta}{|\Omega|},$$

iz Propozicije 5.2.3 i relacije (5.5) slijedi da za sve $x \in \Omega$ i sve $n \geq 1$ vrijedi

$$|P^n(x,x) - \pi(x)| \leq \mathbf{P}_{\{x\}}\{\tau \geq n\} \leq \frac{2\Delta^2|\Omega|}{|\Omega|}\sqrt{\frac{\Delta + 1}{n}} \leq \frac{2\sqrt{2}\Delta^{5/2}}{\sqrt{n}}.$$

□

Bibliografija

[1] D. Aldous, P. Diaconis, *Strong uniform times and finite random walks*, Adv. in Appl. Math. **8** 69-97 (1987).

[2] P. Diaconis, J. A. Fill, *Strong stationary times via a new form of duality*, Ann. Probab. **18** 1483-1522 (1990).

[3] D. A. Levin, Y. Peres i E. L. Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[4] B. Morris, Y. Peres, *Evolving sets, mixing and heat kernel bounds*, Probab. Theory Rel. Fields **133** 245-266 (2005).

[5] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci: skripta s predavanja*, Zagreb, 2009, dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml13-predavanja.html`, (srpanj 2014.)

[6] Z. Vondraček, *Slučajni procesi: skripta s predavanja*, Zagreb, 2010, dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14-predavanja.html`, (srpanj 2014.).

Sažetak

Na početku ovog rada dajemo kratak uvod u teoriju Markovljevih lanaca na konačnom prostoru stanja. Glavni rezultat je da ireducibilan Markovljev lanac na konačnom prostoru stanja ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju, te da uz dodatni zahtjev aperiodičnosti, distribucija lanca konvergira prema stacionarnoj distribuciji. Zanima nas brzina te konvergencije. Ključni pojmovi za njeno kvantificiranje su udaljenost potpune varijacije i vrijeme miješanja Markovljevog lanca.
Središnji pojam ovog rada je proces evoluirajućih skupova koji pridružujemo svakom Markovljevom lancu. To je Markovljev lanac na podskupovima stanja originalnog lanca, sa jednostavnim prijelaznim pravilom koje povećava ili smanjuje trenutno stanje (skup). Pokazujemo osnovna svojstva tog procesa, vezu sa vremenima miješanja originalnog lanca, te definiramo Doobovu transformaciju evoluirajućih skupova. U ostatku radu koristimo evoluirajuće skupove i martingalne tehnike u rješavanju problema vezanih uz miješanje Markovljevih lanaca.
Najprije se upoznajemo sa standardnom tehnikom ograničavanja vremena miješanja Markovljevih lanaca koja koristi jako stacionarna vremena. Sparivanjem Markovljevog lanca i pripadne Doobove transformacije evoluirajućih skupova, konstruiramo jako stacionarno vrijeme za originalni lanac.
Nadalje, koristeći evoluirajuće skupove, poboljšavamo dosada poznate ograde na vremena miješanja Markovljevog lanca u terminima radijusa toka (engl. conductance) podskupova pripadnog prostora stanja. Ključan pojam tog dijela je funkcija radijusa toka, koja je direktna generalizacija omjera uskog grla.
Na kraju, definiramo jednostavnu slučajnu šetnju na grafu, te uz pomoć evoluirajućih skupova dajemo ogradu na povratne vjerojatnosti slučajne šetnje u terminima maksimalnog stupnja pripadnog grafa.

Summary

In the beginning of this paper, we give a short introduction into theory of finite Markov chains. The key result is that every irreducible and finite Markov chain has a unique stationary distribution, and in the case when the chain is aperiodic, the distribution of the chain converges to its stationary distribution. The goal is to determine the rate of that convergence. We define total variaton distance and mixing time of a Markov chain, the key tools for quantifying that convergence.
Given a Markov chain, we define the evolving set process, a Markov chain whose states are subsets of the state space of the original chain. The transition rule of that process is a simple procedure which grows or shrinks the current state. We show the basic properties of the evolving set process, the connection with mixing time of the original chain, and define the Doob transform of the evolving sets. In the rest of the paper, we present some applications of the evolving set process using martingale techniques.
At first, we introduce a standard technique for bounding mixing time of a Markov chain which uses strong stationary times. Then we construct one such time by coupling a Markov chain and the Doob transform of the evolving set process.
Next, we use the evolving set process to give sharp bounds on mixing time of Markov chains in terms of conductance. An extension of the bottleneck ratio, the conductance function of a Markov chain, is key to this part.
In the end, we define a simple random walk on a graph, and use evolving sets to bound the return probabilities of the random walk in terms of maximum degree of the underlying graph.

Životopis

Rođen sam 12.2.1990. u Splitu. U Zagrebu pohađam Osnovnu školu Ante Kovačića, nakon čijeg završetka upisujem matematičku gimnaziju Lucijana Vranjanina koju završavam 2009. godine. Iste godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2012. godine na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika. Za vrijeme studija, od svih grana matematike, najzanimljiviji su mi bili slučajni procesi, te vjerojatnost općenito. U skladu s time je nastao i ovaj rad.