Izračunljivost na skupovima Z, Q, R i C

Posavčević, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Posavčević

IZRAČUNLJIVOST NA SKUPOVIMA $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ I $\mathbb{C}$

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vedran Čačić

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Teti Mici za sve „prolaske" kroz Kamenita vrata

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Prebrojiva izračunljivost **2**
1.1 Izračunljivost na $\mathbb{N}$ 2
1.2 Proširenje definicije 6
1.3 Izračunljivost na $\mathbb{Z}$ 10
1.4 Izračunljivost na $\mathbb{Q}$ 18

2 Neprebrojiva izračunljivost **21**
2.1 Motivacija 21
2.2 Prikaz realnoga broja 23
2.3 Izračunljivost rješenja kvadratne jednadžbe 26
2.4 Izračunljivost na $\mathbb{C}$ 35

Bibliografija **37**

Uvod

Pojam „izračunljivost” vrlo je intuitivan. Razumno je pretpostaviti da je, opisno govoreći, izračunljivost nekoga problema blisko povezana s postojanjem algoritma koji rješava taj problem. Malo bi se preciznije moglo reći da je izračunavanje proces koji ima određeni skup pravila pomoću kojih se iz zadanih objekata dobiva rezultat. U programerskom je kontekstu uobičajeno te zadane objekte nazivati ulaznim podatcima, a rezultat izlaznim podatkom, dok pod pojmom „skup pravila” podrazumijevamo neki algoritam ili program.

Teorija izračunljivosti temelji se na preciznoj definiciji pojma izračunljive funkcije, što se obično promatra samo na skupu $\mathbb{N}$. Takav pristup ostavlja prostor za kreativnost u proširenju teorije i na ostale skupove brojeva ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$) te njihove podskupove i/ili Kartezijeve produkte.

Dva su osnovna cilja ovoga rada: dati precizne definicije izračunljivih funkcija na spomenutim skupovima te promotriti neke matematičke grane (teorija brojeva, realna analiza) koje se tim skupovima bave na konstruktivan način i ispitati vrijede li neki njihovi teoremi ako se egzistencija zamijeni izračunljivošću.

Poglavlje 1

Prebrojiva izračunljivost

1.1 Izračunljivost na $\mathbb{N}$

Dva su glavna pristupa ovoj problematici: RAM-stroj (engl. *random access machine*) i parcijalno rekurzivna funkcija. Prvi pristup više je programerske prirode i detaljnije je predstavljen u skripti [3], dok je drugi onaj na koji će u ovom radu biti stavljen naglasak. Pokazuje se da su oni međusobno ekvivalentni, tj. da definiraju istu klasu funkcija, koje se onda jednim imenom zovu *izračunljive funkcije*. Da bismo mogli nešto reći o izračunljivosti na $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, nužno je precizno definirati pojam (parcijalno) rekurzivne, tj. izračunljive funkcije na $\mathbb{N}$ jer se na tom pojmu gradi cijela daljnja teorija.

Za početak uvodimo neke pojmove i oznake koje ćemo često susretati, a služe za kraći zapis i bolju čitljivost.

- Za $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ neka je $\vec{x}$ oznaka za uređenu k-torku $(x_1, \dots, x_k)$ elemenata odgovarajućega skupa.
- Za funkciju f neka je D_f oznaka za njezinu domenu.
- Funkciju nazivamo *totalnom* ako je $D_f = \mathbb{N}^k$. Ako želimo naglasiti da joj domena nije nužno čitav $\mathbb{N}^k$, nazivamo je *parcijalnom* i strelicu od domene prema kodomeni pišemo $\rightharpoonup$. Ovo ćemo analogno koristiti i za domene $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ te njihove Kartezijeve produkte.
- Ako funkcija f nije definirana za neki $\vec{x}$, onda pišemo $f(\vec{x}) \uparrow$, inače $f(\vec{x}) \downarrow$.

- Kažemo da su funkcije f i g *parcijalno jednake*, u oznaci $f \simeq g$, ako za svaki $\vec{x}$ vrijedi jedno od sljedećega:

  a) $f(\vec{x})\downarrow$, $g(\vec{x})\downarrow$, $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$

  b) $f(\vec{x})\uparrow$, $g(\vec{x})\uparrow$

  Ponekad ćemo koristiti i oznaku $f(\vec{x}) \simeq g(\vec{x})$.

Prvi je korak nizom definicija navesti sve što je potrebno za preciznu definiciju izračunljive funkcije na $\mathbb{N}$.

Definicija 1.1.1. Sljedeće funkcije jednim imenom zovemo *inicijalne funkcije*:

- *nul-funkcija*: $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Z(n) := 0$
- *funkcija sljedbenika* (engl. *successor*): $Succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Succ(n) := n + 1$
- *projekcije*: $P^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $P^n_k(\vec{x}) := x_k$, gdje je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $k \in \{1, \dots n\}$

Definicija 1.1.2. Neka su $g : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ te $h_1, \dots, h_n : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ funkcije. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$, definiranu formulom

$$f(\vec{x}) :\simeq g\Big(h_1(\vec{x}), \dots, h_n(\vec{x})\Big),$$

kažemo da je definirana iz g i $h_1, \dots, h_n$ pomoću *kompozicije funkcija.*

Definicija 1.1.3. Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije. Za funkciju $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, definiranu sa

$$\begin{aligned} f(0, \vec{x}) &:= g(\vec{x}) \\ f(y + 1, \vec{x}) &:= h\Big(f(y, \vec{x}), y, \vec{x}\Big), \end{aligned}$$

kažemo da je definirana iz g i h pomoću *primitivne rekurzije.* Ako je pak $k = 0$, onda definicija funkcije f izgleda ovako:

$$\begin{aligned} f(0) &:= \alpha \in \mathbb{N} \\ f(y + 1) &:= h(f(y), y). \end{aligned}$$

Primjer 1.1.4. Funkciju prethodnika (engl. *predecessor*), u oznaci $Pr : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, možemo definirati pomoću primitivne rekurzije na sljedeći način:

$$\begin{aligned} Pr(0) &:= 0 \\ Pr(x+1) &:= x. \end{aligned}$$

Budući da oduzimanje prirodnih brojeva nije totalna funkcija, promatramo njezinu modifikaciju (uočiti točkicu iznad minusa):

$$x \dot{-} y := \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tu funkciju možemo definirati pomoću primitivne rekurzije ovako:

$$\begin{aligned} x \dot{-} 0 &:= x \\ x \dot{-} (y+1) &:= Pr(x \dot{-} y), \end{aligned}$$

stoga je ona izračunljiva. △

Isprva se smatralo da su kompozicija funkcija i primitivna rekurzija dovoljne da bi se definirala izračunljiva funkcija. Međutim, pokazalo se da postoje funkcije koje su izračunljive, ali nisu primitivno rekurzivne. Ackermannova funkcija $Ack : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definirana sa

$$\begin{aligned} Ack(0, y) &:= y + 1 \\ Ack(x+1, 0) &:= Ack(x, 1) \\ Ack(x+1, y+1) &:= Ack\big(x, Ack(x+1, y)\big), \end{aligned}$$

jedan je od poznatijih primjera. Uvođenjem sljedećega pojma dobilo se upravo ono što je nedostajalo.

Definicija 1.1.5. Neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$ funkcija. Za funkciju $g : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$, definiranu formulom

$$g(\vec{x}) \simeq \mu y(f(\vec{x}, y) \simeq 0) := \begin{cases} \text{najmanji z, ako postoji, takav da je } f(\vec{x}, y) \downarrow \\ \text{za sve } y < z \text{ te je } f(\vec{x}, z) = 0, \end{cases}$$

kažemo da je definirana iz f pomoću *μ-operatora.*

Definicija 1.1.6. Najmanja klasa funkcija koja sadrži sve inicijalne funkcije te je zatvorena na kompoziciju, primitivnu rekurziju i μ-operator naziva se *klasa parcijalno rekurzivnih funkcija*. Totalne funkcije iz te klase nazivaju se *rekurzivne funkcije*.

Budući da se klasa parcijalno rekurzivnih funkcija poklapa s klasom RAM-izračunljivih funkcija, možemo reći da sada znamo što je izračunljiva funkcija tipa $\mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$.

Napomena 1.1.7. Za relaciju $R \subseteq \mathbb{N}^k$ sa χ_R označavamo njezinu karakterističnu funkciju, tj. funkciju koja je definirana ovako:

$$\chi_R(\vec{x}) := \begin{cases} 1, & \vec{x} \in R \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Smatramo da je R izračunljiva ako je χ_R izračunljiva. Primijetimo da je χ_R uvijek totalna. $\triangle$

Istaknimo propoziciju o funkciji zadanoj po slučajevima. Često ćemo je koristiti, bilo izravno, bilo navodeći neke njezine analogone ili generalizacije.

Propozicija 1.1.8. Neka su $R_1, \ldots, R_n \subseteq \mathbb{N}^k$ izračunljive relacije takve da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da vrijedi $\vec{x} \in R_i$. Nadalje, neka su $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije. Tada je funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, definirana formulom

$$f(\vec{x}) := \begin{cases} f_1(\vec{x}), & \vec{x} \in R_1 \\ \quad\vdots & \\ f_n(\vec{x}), & \vec{x} \in R_n, \end{cases}$$

također izračunljiva.

Općenito, ako je $f : D \rightharpoonup K$ izračunljiva i $S \subseteq D$ izračunljiv, onda je $f\big|_S$ također izračunljiva. Naime, za $\vec{x} \in D$ vrijedi

$$f\big|_S(\vec{x}) \simeq \begin{cases} f(\vec{x}), & \vec{x} \in S \\ \uparrow, & \text{inače} \end{cases}$$

pa iz odgovarajućega oblika propozicije 1.1.8 slijedi izračunljivost od $f\big|_S$.

Za akademske potrebe detaljnije o izračunljivosti na $\mathbb{N}$ može se naći u [3]. Daljnji razvoj teorije ovoga rada oslanja se na upravo definirani pojam, dakle potrebno je za ostale domene i kodomene vidjeti što znači da je neka funkcija izračunljiva.

1.2 Proširenje definicije

U realnoj analizi započelo se Peanovim aksiomima, preko kojih je uveden skup $\mathbb{N}$. Vidjeli smo da se svaki cijeli broj može prikazati pomoću prirodnih brojeva, zatim da se svaki racionalni broj može prikazati pomoću cijelih i prirodnih itd. Otprilike sličan pristup napravit ćemo i ovdje, tj. iskoristit ćemo definiciju izračunljive funkcije na $\mathbb{N}$ kako bismo taj pojam definirali na $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ te njihovim Kartezijevim produktima.

Definicija 1.2.1. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}^l$ kažemo da je *izračunljiva* ako je za svaki $i \in \{1, \ldots, l\}$ njezina komponentna funkcija $f_i : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ izračunljiva.

Uočimo da se u gornjoj definiciji koristi princip „svođenja na komponente" po kojem je, primjerice, definirana neprekidnost vektorskih funkcija više realnih varijabli, uz poznatu neprekidnost komponentnih realnih funkcija. Gornja definicija vrlo je važna kao temelj za neke kasnije definicije.

Uvodimo oznaku za podskup skupa $\mathbb{N}^2$ pomoću kojega se mogu jednoznačno prikazati (engl. *represent*) svi cijeli brojevi:

$$Repr_{\mathbb{Z}} := \Big\{(x, y) \in \{0, 1\} \times \mathbb{N} : \; y = 0 \Rightarrow x = 0\Big\}.$$

Lako se vidi da je to izračuljiv skup. Za $z = (-1)^x y \in \mathbb{Z}$, gdje je $(x, y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$, jasno je da $(-1)^x$ predstavlja predznak, a y apsolutnu vrijednost broja. Ograničenje $x \in \{0, 1\}$ važno je zbog jednoznačnosti. Bez toga ograničenja mogli bismo npr. broj -2 prikazati kao $(-1)^1 \cdot 2$, ali i kao $(-1)^3 \cdot 2$. Iz istoga razloga posebno razmatramo i slučaj kada je $z = 0 \in \mathbb{Z}$, zbog čega u tom slučaju fiksiramo $x = 0$. Nadalje,

$$Repr_{\mathbb{Q}} := \Big\{(x, y, z) \in Repr_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N} : \; Gcd(y, z + 1) = 1\Big\}$$

podskup je skupa $\mathbb{N}^3$ pomoću kojega se mogu jednoznačno prikazati svi racionalni brojevi, pri čemu je $Gcd : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (engl. *greatest common divisor*) funkcija koja označava najveću zajedničku mjeru dvaju prirodnih brojeva. Istaknimo samo da je za $q = (-1)^x \dfrac{y}{z+1} \in \mathbb{Q}$, gdje je $(x, y, z) \in Repr_{\mathbb{Q}}$, radi jednoznačnosti potrebno zahtijevati da je razlomak $\dfrac{y}{z+1}$ do kraja skraćen.

Kako bismo mogli dokazati izračunljivost funkcije Gcd, krenimo od sljedeće dvije funkcije:

- $Div_{\mathbb{N}^2} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, gdje je $Div_{\mathbb{N}^2}(x, y)$ rezultat cjelobrojnoga dijeljenja x sa y
- $Mod_{\mathbb{N}^2} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, gdje je $Mod_{\mathbb{N}^2}(x, y)$ ostatak pri dijeljenju x sa y

Dodefiniramo li (radi totalnosti) $Div_{\mathbb{N}^2}(x, 0) := x$, $\forall x \in \mathbb{N}$, vidimo da tu funkciju možemo karakterizirati ovako:

$$Div_{\mathbb{N}^2}(x, y) = \begin{cases} x, & y = 0 \\ (\mu z \leq x)\Big((z+1) \cdot y > x\Big), & y \neq 0. \end{cases}$$

Sada iz propozicije 1.1.8 odmah slijedi izračunljivost funkcije $Div_{\mathbb{N}^2}$. Također, budući da je $Mod_{\mathbb{N}^2}(x, y) = x \dot{-} y \cdot Div_{\mathbb{N}^2}(x, y)$, odmah slijedi i izračunljivost te funkcije. Uočimo da je ovdje automatski ispunjeno $Mod_{\mathbb{N}^2}(x, 0) = x$, $\forall x \in \mathbb{N}$. Iz elementarne matematike poznato je da vrijedi

$$Gcd(x, y) = \begin{cases} Div_{\mathbb{N}^2}\Big(x \cdot y, Lcm(x, y)\Big), & x \neq 0 \land y \neq 0 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

gdje je $Lcm(x, y)$ (engl. *lowest common multiple*) najmanji prirodni broj djeljiv i sa x i sa y. Preciznije, $Lcm : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definirana formulom

$$Lcm(x, y) = (\mu z \leq x \cdot y)\Big(Mod_{\mathbb{N}^2}(z, x) + Mod_{\mathbb{N}^2}(z, y) = 0\Big),$$

izračunljiva je funkcija jer je definirana pomoću μ-operatora, uređaja na $\mathbb{N}$, zbrajanja, množenja te funkcije $Mod_{\mathbb{N}^2}$, tj. onih funkcija čija je izračunljivost već dokazana. Iz toga slijedi izračunljivost funkcije Gcd, a tada i skupa $Repr_{\mathbb{Q}}$.

Sada imamo prikladan alat za definiranje izračunljive funkcije s domenom $\mathbb{N}^k$ i kodomenom $\mathbb{Z}$ ili $\mathbb{Q}$.

Definicija 1.2.2. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{Z}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{N}^k \rightharpoonup Repr_{\mathbb{Z}}$ takva da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(\vec{x}) \simeq (-1)^{g_1(\vec{x})} g_2(\vec{x}).$$

Definicija 1.2.3. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{Q}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{N}^k \rightharpoonup Repr_{\mathbb{Q}}$ takva da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(\vec{x}) \simeq (-1)^{g_1(\vec{x})} \frac{g_2(\vec{x})}{g_3(\vec{x}) + 1}.$$

Vidimo da je izračunljivost funkcija s domenom $\mathbb{N}^k$ i kodomenom $\mathbb{Z}$ ili $\mathbb{Q}$ prirodno slijedila iz prikaza proizvoljnoga elementa kodomene pomoću prirodnih brojeva. Prvi netrivijalan slučaj pojavljuje se kada je domena skup $\mathbb{R}$. Razlog je tome što ne možemo egzaktno prikazati proizvoljan realan broj pomoću konačno mnogo prirodnih brojeva. Međutim, iz realne analize znamo da se realni brojevi mogu po volji blisko aproksimirati racionalnim brojevima pa dobivamo sljedeću definiciju.

Definicija 1.2.4. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{R}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{N}^{k+1} \rightharpoonup \mathbb{Q}$ takva da je $D_g = D_f \times \mathbb{N}$ te za svaki $\vec{x} \in D_f$ i za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|g(\vec{x}, l) - f(\vec{x})| < 2^{-l}.$$

Napomena 1.2.5. U prethodnoj definiciji možda nije jasno kako D_g ovisi o D_f. Smatramo da vrijedi ovo:

$$f(\vec{x}) \downarrow \iff (\forall l \in \mathbb{N})\, g(\vec{x}, l) \downarrow . \qquad \triangle$$

Sada analogno definiciji 1.2.1 možemo reći što je izračunljiva funkcija kojoj je domena (podskup od) $\mathbb{N}^k$, a kodomena $\mathbb{Z}^l, \mathbb{Q}^l$, ili $\mathbb{R}^l$. Primjerice, $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{Z}^l$ je izračunljiva ako je za svaki $i \in \{1, \dots, l\}$ njezina komponentna funkcija $f_i : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{Z}$ izračunljiva.

Do sada smo govorili samo o realnim kodomenama. Motivacija za pojam izračunljive funkcije s kodomenom $\mathbb{C}$ leži u tome da se topološke strukture prostora $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ podudaraju. Naime, u kompleksnoj se analizi funkcija $f : \mathbb{C} \rightharpoonup \mathbb{C}$ često piše u obliku $f = u + i \cdot v$, tj. $f(z) = \big(u(z), v(z)\big)$, gdje su $u, v : D_f \to \mathbb{R}$ realne funkcije jedne kompleksne, odnosno dvije realne varijable. Tada je f neprekidna ako i samo ako su obje funkcije u i v neprekidne. Ovdje nam neprekidnost služi samo kao obrazac za proširenje definicije, no kasnije ćemo vidjeti da je veza izračunljivosti i neprekidnosti puno dublja.

Definicija 1.2.6. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{C}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{R}^2$ takva da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(\vec{x}) = g_1(\vec{x}) + i \cdot g_2(\vec{x}).$$

Promotrimo sada funkcije u „obratnom smjeru”, tj. one kojima je domena neki pravi nadskup od $\mathbb{N}$, a kodomena skup $\mathbb{N}$. Prirodno je početi od skupa $\mathbb{Z}$.

Definicija 1.2.7. Za funkciju $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{N}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : Repr_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $z = (-1)^x y \in \mathbb{Z}$, gdje je $(x, y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$, vrijedi

$$f(z) \simeq g(x, y).$$

Primjer 1.2.8. Promotrimo funkciju $Abs_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definiranu formulom

$$Abs_{\mathbb{Z}}(z) := \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ -z, & z < 0. \end{cases}$$

Dokažimo da je ona izračunljiva. Prema definiciji 1.2.7, treba naći izračunljivu funkciju $g : Repr_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{N}$ takvu da za svaki $z = (-1)^x y \in \mathbb{Z}$, gdje je $(x, y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$, vrijedi $Abs_{\mathbb{Z}}(z) \simeq g(x, y)$. Uočimo da $g \equiv P^2_2\big|_{Repr_{\mathbb{Z}}}$ ispunjava te uvjete. Funkcija g restrikcija je inicijalne funkcije na izračunljiv skup, stoga je izračunljiva, što se i tražilo. $\triangle$

Vidjeli smo da se izračunljivost na $\mathbb{Z}$ svodi na ranije definiranu izračunljivost na $\mathbb{N}^2$ jer je svaki cijeli broj prikaziv pomoću dva prirodna broja. Postavlja se pitanje kako postupiti u općenitijoj situaciji, koju ističemo u sljedećoj napomeni.

Napomena 1.2.9. Neka je $K \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zanima nas izračunljivost funkcije $f : \prod_{i=1}^{n} S_i \rightharpoonup K$, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$, a S_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ skup čiji se proizvoljan element može jednoznačno prikazati pomoću konačno mnogo prirodnih brojeva. U tu svrhu uvodimo sljedeće oznake:

- $Dim(S_i) :=$ broj prirodnih brojeva pomoću kojih se može jednoznačno prikazati proizvoljan element iz S_i
- $R_i :=$ podskup skupa $\mathbb{N}^{Dim(S_i)}$ pomoću kojega je taj prikaz ostvariv

Svakako je prvo nužno reći što je izračunljiva funkcija s domenom S_i. Smatramo da je $g : S_i \rightharpoonup K$ izračunljiva ako postoji izračunljiva funkcija $g' : R_i \to K$ takva da za svaki $\vec{x}^{(i)} \in S_i$ prikazan pomoću $\vec{r}^{(i)} \in R_i$ vrijedi

$$g(\vec{x}) \simeq g'\left(\vec{r}^{(i)}\right).$$

Tada možemo reći da je $f : \prod_{i=1}^{n} S_i \rightharpoonup K$ izračunljiva ako postoji izračunljiva funkcija $f' : \prod_{i=1}^{n} R_i \to K$ takva da za svaki $\left(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\right) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ vrijedi

$$f\left(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\right) \simeq f'\left(\vec{r}^{(1)}, \ldots, \vec{r}^{(n)}\right),$$

gdje je $\vec{x}^{(i)} \in S_i$ prikazan pomoću $\vec{r}^{(i)} \in R_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\triangle$

Prema napomeni 1.2.9 i analogno definiciji 1.2.7, slijedi da se izračunljivost funkcije $f : \mathbb{Q} \rightharpoonup \mathbb{N}$ također može svesti na pitanje izračunljivosti na $\mathbb{N}^k$.

Definicija 1.2.10. Za funkciju $f : \mathbb{Q} \rightharpoonup \mathbb{N}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : Repr_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $q = (-1)^x \dfrac{y}{z+1} \in \mathbb{Q}$, gdje je $(x, y, z) \in Repr_{\mathbb{Q}}$, vrijedi

$$f(q) \simeq g(x, y, z).$$

Sada imamo dovoljno dobru podlogu za definiranje (parcijalno) izračunljivih funkcija čije su domene Kartezijevi produkti skupova $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$, a kodomene Kartezijevi produkti skupova $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Pogledajmo to na jednom primjeru.

Primjer 1.2.11. Za funkciju $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \rightharpoonup \mathbb{R}$ kažemo da je izračunljiva ako postoji izračunljiva funkcija $g : Repr_{\mathbb{Z}} \times Repr_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ takva da za svaki $(z, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ vrijedi

$$f(z, q) \simeq g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

gdje je $z = (-1)^{x_1} x_2$, $(x_1, x_2) \in Repr_{\mathbb{Z}}$ te $q = (-1)^{x_3} \dfrac{x_4}{x_5 + 1}$, $(x_3, x_4, x_5) \in Repr_{\mathbb{Q}}$. $\triangle$

Uočimo jedan važan detalj. Dosad smo u domeni ili kodomeni imali isključivo $\mathbb{N}^k$, gdje je $k \geq 1$. Prirodno je postaviti pitanje kako definirati izračunljivost za funkcije koje ni u domeni ni u kodomeni nemaju taj skup. Kao odgovor se nameće kompozicija funkcija. Primjerice, $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Q}$ je izračunljiva ako postoje izračunljive funkcije $g : \mathbb{N}^3 \rightharpoonup \mathbb{Q}$ i $h : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{N}^3$ takve da je $f \simeq g \circ h$. Kasnije ćemo detaljno prikazati i druge pristupe ovome problemu.

1.3 Izračunljivost na $\mathbb{Z}$

Iz dosadašnjih razmatranja vidimo da postoje barem dva načina kako definirati pojam izračunljive funkcije $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$. Jedan je način pomoću kompozicije, a drugi je analogan definiciji 1.2.7 i praktičan je za dokazivanje. Prvo navodimo obje definicije i dokazujemo teorem o njihovoj ekvivalentnosti.

Definicija 1.3.1. Za funkciju $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ kažemo da je *kompozicijski izračunljiva* ako postoji $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te izračunljive funkcije $g_1 : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{Z}$ i $g_2 : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{N}^k$ takve da vrijedi $f \simeq g_1 \circ g_2$.

Definicija 1.3.2. Za funkciju $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ kažemo da je *reprezentacijski izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : Repr_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ takva da za svaki $z = (-1)^x y \in \mathbb{Z}$, gdje je $(x, y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$, vrijedi

$$f(z) \simeq g(x, y).$$

Teorem 1.3.3. Funkcija $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ kompozicijski je izračunljiva ako i samo ako je reprezentacijski izračunljiva.

Dokaz. Pretpostavimo da je f kompozicijski izračunljiva. Neka je $z = (-1)^x y \in \mathbb{Z}$ proizvoljan, gdje je $(x, y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$. Treba naći izračunljivu funkciju $g : Repr_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ takvu da je $f(z) \simeq g(x, y)$. Budući da je $g_1 : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{Z}$ izračunljiva, iz definicije 1.2.2 slijedi da postoji izračunljiva funkcija $h : \mathbb{N}^k \rightharpoonup Repr_{\mathbb{Z}}$ takva da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $g_1(\vec{x}) \simeq (-1)^{h_1(\vec{x})} h_2(\vec{x})$. Nadalje, budući da je $g_2 : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{N}^k$ izračunljiva, postoji izračunljiva funkcija $l : Repr_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{N}^k$ takva da za svaki $w = (-1)^u v \in \mathbb{Z}$, gdje je $(u, v) \in Repr_{\mathbb{Z}}$, vrijedi $g_2(w) \simeq l(u, v)$. Tada vrijedi:

$$f((-1)^x y) = f(z) \simeq g_1(g_2(z)) \simeq g_1(l(x, y)) \simeq (-1)^{h_1(l(x,y))} h_2(l(x, y)).$$

Definiramo funkciju $g' : Repr_{\mathbb{Z}} \to Repr_{\mathbb{Z}}$ tako da za njezine komponentne funkcije vrijedi $g'_i(x, y) \simeq h_i(l(x, y))$, $i \in \{1, 2\}$. Ona je izračunljiva kao kompozicija izračunljivih funkcija na $\mathbb{N}^k$. Konačno, definiramo li funkciju $g : Repr_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ tako da bude $g(x, y) \simeq (-1)^{g'_1(x,y)} g'_2(x, y)$, slijedi da je g izračunljiva i $f(z) \simeq g(x, y)$.

Obratno, pretpostavimo da je f reprezentacijski izračunljiva. Treba naći $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te izračunljive funkcije $g_1 : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{Z}$ i $g_2 : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{N}^k$ takve da vrijedi $f \simeq g_1 \circ g_2$. Definiramo $k := 2$ i $g_1 := g$, gdje je g funkcija iz definicije 1.3.2. Dakle, vrijedi da je $g_1 : \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{Z}$ i g_1 je izračunljiva. Funkciju g_2 definiramo za $z \in \mathbb{Z}$ na sljedeći način:

$$g_2(z) := \begin{cases} (0, z), & z \geq 0 \\ (1, -z), & z < 0. \end{cases}$$

Tada je $f \simeq g_1 \circ g_2$. Preostalo je dokazati da je g_2 izračunljiva, tj. da su njezine komponentne funkcije izračunljive. Radi preglednije notacije označimo ih sa u i v, dakle $u, v : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{N}$. Uočimo da za svaki $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ vrijedi $u((-1)^x y) \simeq P^2_1(x, y)$ i $v((-1)^x y) \simeq P^2_2(x, y)$. Iz definicije 1.2.7 slijedi da su u i v izračunljive, a tada i g_2, što je trebalo dokazati. ■

Posljedica je ovoga teorema da sada bez opasnosti od dvosmislenosti možemo jednostavno reći da je neka funkcija $f : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ izračunljiva, umjesto da navodimo u kojem je točno smislu izračunljiva. Zbog te ekvivalentnosti bilo koja od tih dviju definicija može se koristiti po potrebi.

Napomena 1.3.4. Razlika između definicija 1.2.7 i 1.3.2 samo je u kodomenama funkcija f i g. Prema tome i napomeni 1.2.9, očito je kako bismo definirali izračunljivost funkcije kojoj je domena neki podskup od $\mathbb{Z}^k$, za neki $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, a kodomena $\mathbb{Z}$. To je važno jer je, primjerice, funkcija zbrajanja cijelih brojeva upravo tipa $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$. △

Propozicija 1.3.5. Ako su $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ izračunljive, onda je $f_1 \circ f_2 : \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ također izračunljiva.

Dokaz. Prema teoremu 1.3.3, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su f_1 i f_2 reprezentacijski izračunljive. Dakle, za svaki $i \in \{1,2\}$ postoji izračunljiva funkcija $g_i : Repr_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ takva da za svaki $z = (-1)^x y \in \mathbb{Z}$, gdje je $(x,y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$, vrijedi $f_i(z) \simeq g_i(x,y)$. Budući da je g_2 izračunljiva, iz definicije 1.2.2 slijedi da postoji izračunljiva funkcija $h : Repr_{\mathbb{Z}} \to Repr_{\mathbb{Z}}$ takva da za svaki $(x,y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$ vrijedi $g_2(x,y) \simeq (-1)^{h_1(x,y)} h_2(x,y)$. Stavimo sada $g := g_1 \circ h$. To je izračunljiva funkcija kao kompozicija izračunljivih funkcija na $\mathbb{N}^k$. Za $z = (-1)^x y \in \mathbb{Z}$, gdje je $(x,y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$, računamo:

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)(z) &\simeq f_1(g_2(x,y)) \simeq f_1\Big((-1)^{h_1(x,y)} h_2(x,y)\Big) \\ &\simeq g_1\Big(h_1(x,y), h_2(x,y)\Big) = g(x,y).\end{aligned}$$

Time je dokaz ove propozicije dovršen. ■

U sljedećim propozicijama dokazat ćemo izračunljivost funkcije suprotnoga broja, te zbrajanja i množenja cijelih brojeva. Kako bismo izbjegli dvoznačnost u korištenju standardnih oznaka za te funkcije, koristit ćemo ih za analogne funkcije na prirodnim brojevima, a posebne oznake ako se radi o cijelim brojevima. Inače, kad god ne bude postojala mogućnost zabune, koristit ćemo standardne oznake, bez obzira na to o kojoj se domeni radi.

Propozicija 1.3.6. $Opp_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definirana formulom

$$Opp_{\mathbb{Z}}(z) := -z,$$

izračunljiva je funkcija.

Dokaz. Definiramo funkciju $h : Repr_{\mathbb{Z}} \to Repr_{\mathbb{Z}}$ na sljedeći način:

$$h(x,y) \simeq \begin{cases} (0,0), & y = 0 \\ (1,y), & y \neq 0 \wedge x = 0 \\ (0,y), & y \neq 0 \wedge x = 1 \\ \uparrow, & \text{inače.} \end{cases}$$

Komponentne funkcije h_1 i h_2 definirane po slučajevima iz izračunljivih funkcija pa su i one izračunljive, stoga je i h izračunljiva. Definiramo funkciju $g : Repr_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ tako da je $g(x,y) \simeq (-1)^{h_1(x,y)} h_2(x,y)$. Uočimo da je tada g izračunljiva i vrijedi

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} (-1)^0 \cdot 0 = 0, & y = 0 \\ (-1)^1 \cdot y = -y, & y \neq 0 \wedge x = 0 \\ (-1)^0 \cdot y = y, & y \neq 0 \wedge x = 1 \\ \uparrow, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je sada $z = (-1)^x y \in \mathbb{Z}$ proizvoljan, gdje je $(x,y) \in Repr_{\mathbb{Z}}$. Tada vrijedi $Opp_{\mathbb{Z}}(z) \simeq g(x,y)$, stoga je $Opp_{\mathbb{Z}}$ izračunljiva. ■

Propozicija 1.3.7. $Add_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, definirana formulom

$$Add_{\mathbb{Z}}(z_1, z_2) := z_1 + z_2,$$

izračunljiva je funkcija.

Dokaz. Prema opisanom u napomeni 1.3.4, dovoljno je dokazati da postoji izračunljiva funkcija $f : Repr_{\mathbb{Z}}^2 \to \mathbb{Z}$ takva da za svaki $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in Repr_{\mathbb{Z}}^2$ vrijedi

$$Add_{\mathbb{Z}}\Big((-1)^{x_1} x_2, (-1)^{x_3} x_4\Big) \simeq f(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Iz definicije 1.2.2 slijedi da treba naći izračunljivu funkciju $g : Repr_{\mathbb{Z}}^2 \to Repr_{\mathbb{Z}}$ takvu da za svaki $\vec{x} \in Repr_{\mathbb{Z}}^2$ vrijedi

$$f(\vec{x}) \simeq (-1)^{g_1(\vec{x})} g_2(\vec{x}).$$

Vrijednost funkcije f, prikazana kao $(-1)^{y_1} y_2$, mora odgovarati zbroju dva cijela broja, tj. treba vrijediti

$$(-1)^{x_1} x_2 + (-1)^{x_3} x_4 = (-1)^{y_1} y_2. \tag{$*$}$$

Dakle, potrebno je y_1 i y_2 izraziti pomoću x_i, za $i \in \{1,2,3,4\}$. Razlikujemo četiri slučaja, ovisno o vrijednostima eksponenata x_1 i x_3.

- $x_1 = x_3 = 0$
  Tada relacija $(*)$ postaje $x_2 + x_4 = (-1)^{y_1} y_2$, iz čega slijedi $y_1 = 0$ i $y_2 = x_2 + x_4$.

- $x_1 = 0, x_3 = 1$
  Tada lijeva strana relacije $(*)$ postaje $x_2 - x_4$. Budući da moramo voditi računa o tome da bude $y_1 \in \{0, 1\}$ i $y_2 \in \mathbb{N}$, postoje dva slučaja.

$$(y_1, y_2) = \begin{cases} (0, x_2 \dot{-} x_4), & x_2 \geq x_4 \\ (1, x_4 \dot{-} x_2), & x_2 < x_4 \end{cases}$$

- $x_1 = 1, x_3 = 0$
  Analogno prethodnom slučaju dobijemo

$$(y_1, y_2) = \begin{cases} (0, x_4 \dot{-} x_2), & x_4 \geq x_2 \\ (1, x_2 \dot{-} x_4), & x_2 < x_4. \end{cases}$$

- $x_1 = x_3 = 1$
  Tada relacija $(*)$ postaje $-x_2 - x_4 = (-1)^{y_1} y_2$, iz čega slijedi $y_1 = 1$ i $y_2 = x_2 + x_4$.

Za traženu funkciju g definiramo njezine komponentne funkcije na sljedeći način:

$$g_i(x_1, x_2, x_3, x_4) := y_i, \forall i \in \{1, 2\}.$$

Budući da su y_1 i y_2 dobiveni pomoću izračunljivih funkcija na $\mathbb{N}$ definicijom po slučajevima, slijedi da su funkcije g_1 i g_2 izračunljive. Iz toga slijedi da je funkcija g izračunljiva, što je i trebalo dokazati. ∎

Iz dosad dokazanoga odmah dobivamo izračunljivost funkcije oduzimanja cijelih brojeva, tj. funkcije $Sub_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, definirane formulom

$$Sub_{\mathbb{Z}}(z_1, z_2) := Add_{\mathbb{Z}}(z_1, Opp_{\mathbb{Z}}(z_2)).$$

Propozicija 1.3.8. $Mult_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, definirana formulom

$$Mult_{\mathbb{Z}}(z_1, z_2) := z_1 \cdot z_2,$$

izračunljiva je funkcija.

Dokaz. Prema opisanom u napomeni 1.3.4, dovoljno je dokazati da postoji izračunljiva funkcija $f : Repr^2_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ takva da za svaki $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in Repr^2_{\mathbb{Z}}$ vrijedi

$$Mult_{\mathbb{Z}}\Big((-1)^{x_1}x_2, (-1)^{x_3}x_4\Big) \simeq f(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Prema definiciji 1.2.2, dovoljno je naći izračunljivu funkciju $g : Repr^2_{\mathbb{Z}} \to Repr_{\mathbb{Z}}$ takvu da za svaki $\vec{x} \in Repr^2_{\mathbb{Z}}$ vrijedi

$$f(\vec{x}) \simeq (-1)^{g_1(\vec{x})}g_2(\vec{x}).$$

Vrijednost funkcije f, prikazana kao $(-1)^{y_1}y_2$, mora odgovarati umnošku dva cijela broja, tj. treba vrijediti

$$(-1)^{x_1}x_2 \cdot (-1)^{x_3}x_4 = (-1)^{y_1}y_2.$$

Očito je $y_2 = x_2 \cdot x_4$, no kod y_1 moramo uzeti u obzir da on mora biti ili 0 ili 1. Prema tome, dobivamo

$$y_1 = \begin{cases} 0, & x_1 = x_3 = 1 \\ x_1 + x_3, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada kao i u prethodnom dokazu slijedi da je g izračunljiva, što je i trebalo dokazati. ■

Ponekad je korisno prirodan broj promatrati kao cijeli. Sljedeća propozicija govori upravo o izračunljivosti funkcije ulaganja (engl. *embedding*) skupa $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{Z}$.

Propozicija 1.3.9. $Emb : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definirana formulom

$$Emb(x) := x,$$

izračunljiva je funkcija.

Dokaz. Prema definiciji 1.2.2, treba naći izračunljivu funkciju $g : \mathbb{N} \to Repr_{\mathbb{Z}}$ takvu da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x \simeq (-1)^{g_1(x)}g_2(x).$$

Očito je $g_1 \equiv Z$ (nul-funkcija) te $g_2 \equiv P^1_1$. To su inicijalne funkcije, stoga je g izračunljiva. ■

Funkcija predznaka prirodnoga broja, u oznaci $Sg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (engl. *sign*), bila je ključna za izračunljivost uređaja na $\mathbb{N}$. Kako bismo mogli raspravljati o izračunljivosti uređaja na $\mathbb{Z}$, uvodimo funkciju $Arg_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, koja će na $\mathbb{Z}$ igrati istu ulogu kao Sg na $\mathbb{N}$. Tu funkciju za $z \in \mathbb{Z}$ definiramo ovako:

$$Arg_{\mathbb{Z}}(z) := \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ 1, & z < 0. \end{cases}$$

Motivacija za oznaku $Arg_{\mathbb{Z}}$ dolazi od toga da djelovanje ove funkcije na $\mathbb{Z}$ podsjeća na djelovanje funkcije argumenta kompleksnoga broja (polarni prikaz).

Promotrimo jedan detalj kako bi uloga upravo definirane funkcije postala jasnija. Za proizvoljne $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$z_1 < z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 < 0 \Leftrightarrow Arg_{\mathbb{Z}}(z_1 - z_2) = 1.$$

Dakle, budući da je $\chi_< = Arg_{\mathbb{Z}} \circ Sub_{\mathbb{Z}}$, izračunljivost relacije $<$ na $\mathbb{Z}$ ekvivalentna je izračunljivosti funkcije $Arg_{\mathbb{Z}}$.

Propozicija 1.3.10. $Arg_{\mathbb{Z}}$ je izračunljiva funkcija.

Dokaz. Analogno primjeru 1.2.8, stoga ispuštamo detalje. Razlika je samo u funkciji g, koja je ovdje jednaka $P^2_1\big|_{Repr_{\mathbb{Z}}}$. ∎

Ako su R i S izračunljive k-mjesne relacije na $\mathbb{Z}$, tada su i relacije $\neg R$ i $R \wedge S$ izračunljive. Naime, za $\vec{x} \in \mathbb{Z}^k$ očito vrijedi ovo:

$$\chi_{\neg R}(\vec{x}) = 1 \dot{-} \chi_R(\vec{x})$$
$$\chi_{R\wedge S}(\vec{x}) = \chi_R(\vec{x}) \cdot \chi_S(\vec{x})$$

Iz toga i prethodne propozicije slijedi izračunljivost ostalih uređajnih relacija na $\mathbb{Z}$, što ističemo u sljedećoj propoziciji. Budući da je $\{\neg, \wedge\}$ baza za skup $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ logičkih veznika, dobivamo i izračunljivost relacija $R \vee S$, $R \to S$ te $R \leftrightarrow S$.

Propozicija 1.3.11. Sljedeće su relacije izračunljive: $\geq$, $>$, $\leq$, $=$ i $\neq$.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{Z}$ proizvoljni. Tada redom vrijede sljedeće ekvivalencije pa izračunljivost navedenih relacija izravno slijedi iz njih.

- $x \geq y \Leftrightarrow \neg(x < y)$
- $x > y \Leftrightarrow y < x$
- $x \leq y \Leftrightarrow \neg(x > y)$
- $x = y \Leftrightarrow (x \leq y \wedge y \leq x)$
- $x \neq y \Leftrightarrow \neg(x = y)$ ∎

Jedan je od ciljeva ovoga rada ispitati vrijede li neki teoremi iz realne analize ako se egzistencija zamijeni izračunljivošću. Zanimljivo je pogledati izračunljivi analogon teorema o dijeljenju s ostatkom. Za početak je važno dati dobru karakterizaciju funkcija $Div_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} : \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ i $Mod_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} : \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ te dokazati njihovu izračunljivost. Funkciju $Div_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ karakteriziramo ovako:

$$Div_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}(x,y) = \begin{cases} Div_{\mathbb{N}^2}(|x|,y), & x \geq 0 \\ -Div_{\mathbb{N}^2}(|x|,y), & x < 0 \wedge Mod_{\mathbb{N}^2}(|x|,y) = 0 \\ -Div_{\mathbb{N}^2}(|x|,y) - 1, & x < 0 \wedge Mod_{\mathbb{N}^2}(|x|,y) \neq 0. \end{cases}$$

Budući da smo prethodno dokazali izračunljivost svih funkcija i relacija koje se ovdje spominju, primjenom analogona propozicije 1.1.8 slijedi da je funkcija $Div_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ također izračunljiva. Uočimo da za funkciju $Mod_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ vrijedi

$$Mod_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}(x,y) = x - y \cdot Div_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}(x,y),$$

odakle slijedi i njezina izračunljivost.

Izračunljivi analogon teorema o dijeljenju s ostatkom moguće je formulirati na više načina, no ovdje navodimo onaj koji je u skladu s prethodno spomenutim funkcijama.

Teorem 1.3.12. Postoji izračunljiva funkcija $Qtr : \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}^2$ (engl. *quotient, remainder*) takva da za svaki $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ i $(q,r) = Qtr(x,y)$ vrijedi

$$x = q \cdot y + r \qquad \text{i} \qquad y > 0 \Rightarrow 0 \leq r < y.$$

Dokaz. Iz prethodno provedene konstrukcije zaključujemo da uz $Qtr_1 \equiv Div_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ i $Qtr_2 \equiv Mod_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ vrijedi $x = q \cdot y + r$. Pokazali smo da su to izračunljive funkcije, stoga je i Qtr izračunljiva. Pretpostavimo da je $y > 0$. Odmah vidimo da je $r \geq 0$, stoga preostaje dokazati da je $r < y$. Uočimo da je r zapravo najmanji nenegativni član skupa $\{x - y \cdot z : z \in \mathbb{Z}\}$. Dakle, ako je $r = x - y \cdot z_0$, za $z_0 \in \mathbb{Z}$, onda je

$$0 > x - y \cdot (z_0 + 1) = \underbrace{x - y \cdot z_0}_{r} - y,$$

što je ekvivalentno s $r < y$. ∎

1.4 Izračunljivost na $\mathbb{Q}$

Osnovni koncepti izračunljivosti funkcije $f : \mathbb{Q} \rightharpoonup \mathbb{Q}$ vrlo su slični onima iz prethodnoga potpoglavlja. Također postoje dvije moguće definicije, za koje se može pokazati da su ekvivalentne, no ovdje ćemo ipak izostaviti taj dokaz. Za početak ćemo samo navesti te dvije definicije.

Definicija 1.4.1. Za funkciju $f : \mathbb{Q} \rightharpoonup \mathbb{Q}$ kažemo da je *kompozicijski izračunljiva* ako postoji $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te izračunljive funkcije $g_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $g_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^k$ takve da vrijedi $f \simeq g_1 \circ g_2$.

Definicija 1.4.2. Za funkciju $f : \mathbb{Q} \rightharpoonup \mathbb{Q}$ kažemo da je *reprezentacijski izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : Repr_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ takva da za svaki $q = (-1)^x \dfrac{y}{z+1} \in \mathbb{Q}$, gdje je $(x, y, z) \in Repr_{\mathbb{Q}}$, vrijedi

$$f(q) \simeq g(x, y).$$

Napomena 1.4.3. Neke tehnike dokazivanja izračunljivosti na $\mathbb{Q}$ predstavit ćemo u dokazu izračunljivosti funkcije zbrajanja racionalnih brojeva. Dokazi za ostale elementarne funkcije (suprotan broj, oduzimanje, množenje, uređaj i sl.) provodili bi se na sličan način ili postupkom nalik onome za odgovarajuće funkcije na $\mathbb{Z}$, stoga je to izostavljeno. △

Budući da racionalne brojeve poistovjećujemo s razlomcima koji su do kraja skraćeni, korisno je imati funkciju koja prima dva prirodna broja te ih dijeli njihovom najvećom zajedničkom mjerom. To je funkcija $Rdc : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ (engl. *reduce*), definirana formulom

$$Rdc(x, y) := \Big(Div_{\mathbb{N}^2}(x, Gcd(x, y)),\ Div_{\mathbb{N}^2}(y, Gcd(x, y))\Big).$$

Odmah vidimo da se radi o izračunljivoj funkciji.

Propozicija 1.4.4. $Add_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ je izračunljiva funkcija.

Dokaz. Kao i u dokazu analogne funkcije na $\mathbb{Z}^2$, vidimo da treba naći izračunljivu funkciju $f : Repr_{\mathbb{Q}}^2 \to \mathbb{Q}$ takvu da vrijedi

$$Add_{\mathbb{Q}}(q_1, q_2) \simeq f(\vec{x}),$$

gdje je $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in Repr_{\mathbb{Q}}^2$ takav da je q_1 prikazan pomoću (x_1, x_2, x_3), a q_2 pomoću (x_4, x_5, x_6). Iz definicije 1.2.3 slijedi da treba naći izračunljivu funkciju $g : Repr_{\mathbb{Q}}^2 \to Repr_{\mathbb{Q}}$ takvu da za svaki $\vec{x} \in Repr_{\mathbb{Q}}^2$ vrijedi

$$f(\vec{x}) \simeq (-1)^{g_1(\vec{x})} \frac{g_2(\vec{x})}{g_3(\vec{x}) + 1}.$$

Sada smo u uvjetima definicije 1.2.1, stoga za svaku komponentnu funkciju g_1, g_2, g_3 treba pokazati da je izračunljiva. Uočimo da funkcija g treba „simulirati” zbrajanje dva racionalna broja, tj. ako je $g(\vec{x}) = (y_1, y_2, y_3)$, onda treba vrijediti

$$(-1)^{x_1} \frac{x_2}{x_3 + 1} + (-1)^{x_4} \frac{x_5}{x_6 + 1} = (-1)^{y_1} \frac{y_2}{y_3 + 1}. \tag{1.1}$$

Prisjetimo se pravila za zbrajanje razlomaka iz elementarne matematike: brojnik je zbroj dva „dijagonalna” umnoška, nazivnik je umnožak dva nazivnika, zatim dobiveni razlomak do kraja skratimo. Radi lakše čitljivosti označimo:

$$\begin{aligned} A &:= Add_{\mathbb{Z}}\Big((-1)^{x_1} x_2 (x_6 + 1),\ (-1)^{x_4} x_5 (x_3 + 1)\Big) \\ M &:= (x_3 + 1) \cdot (x_6 + 1) \end{aligned}$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} y_1 &= Arg_{\mathbb{Z}}(A) \\ y_2 &= Rdc_1(Abs_{\mathbb{Z}}(A), M) \\ y_3 &= Rdc_2(Abs_{\mathbb{Z}}(A), M) \end{aligned}$$

Primjenom gotovo svih dosadašnjih rezultata slijedi da je za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$ funkcija $\vec{x} \mapsto y_i$ izračunljiva. To su upravo komponentne funkcije od g, iz čega slijedi da je g izračunljiva, što je i trebalo dokazati. ■

Na kraju ovoga poglavlja istaknimo još dvije korisne funkcije. Radi se o funkcijama koje zadani razlomak preslikavaju u apsolutnu vrijednost brojnika, odnosno u vrijednost nazivnika. Dakle, za $q = (-1)^x \dfrac{y}{z+1} \in \mathbb{Q}$, gdje je $(x, y, z) \in Repr_{\mathbb{Q}}$, funkcija $Num : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ (engl. *numerator*) definirana je formulom

$$Num(q) := y,$$

dok je $Den : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ (engl. *denominator*) definirana formulom

$$Den(q) := z + 1.$$

Promotrimo li definiciju 1.2.10 i stavimo li $g \equiv P^3_2\big|_{Repr_{\mathbb{Q}}}$ za funkciju Num, odnosno $g \equiv (Succ \circ P^3_3)\big|_{Repr_{\mathbb{Q}}}$ za Den, vidimo da su obje navedene funkcije izračunljive.

Poglavlje 2

Neprebrojiva izračunljivost

2.1 Motivacija

Jedan je od ciljeva ovoga rada razumjeti i pokušati formalno odgovoriti na pitanje uz koje je uvjete funkcija $f : \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ izračunljiva. U prethodnom poglavlju promatrali smo domene čiji se proizvoljan element može prikazati pomoću konačno mnogo elemenata iz $\mathbb{N}$, izravno ili u nekoliko koraka. To ovdje nije slučaj, tj. možemo reći da je, u skladu s prethodnim oznakama, $Dim(\mathbb{R}) = \infty$. Stoga je potreban jedan sasvim drugačiji pristup pa, prema intuitivnom poimanju izračunljivosti, za početak razmišljajmo malo u terminima višetračnoga Turingovoga stroja T. Pretpostavimo da za zadani $x \in \mathbb{R}$ želimo pomoću T odrediti $f(x) \in \mathbb{R}$ te da T ima sljedeće dodatne karakteristike:

- na prvoj traci možemo zadati točnost (ϵ) u kojoj nešto želimo izračunati
- ulazni podatak nalazi se na drugoj traci
- rezultat se akumulira na treću traku

Uočimo da stroj ima *najmanje* 3 trake, dakle može imati više „radnih" traka. Kako bismo osigurali da stroj u nekom trenutku stane te na trećoj traci bude zapisana aproksimacija rezultata, moramo zadati neku točnost ϵ. Drugim riječima, označimo li dobivenu aproksimaciju sa y, treba vrijediti $|y - f(x)| < \epsilon$. Stroj određuje znamenke rezultata dok se ne postigne ta točnost. Važno je napomenuti da ϵ ne smije utjecati na logiku rada stroja, tj. on mora raditi po nekom unaprijed definiranom algoritmu, bez obzira na ϵ.

Primjer 2.1.1. Kao ilustraciju promotrimo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{2}$ te rad stroja za ulazni podatak $x = \pi$. Prvu znamenku prije decimalne točke stroj može odmah odrediti obavljajući cjelobrojno dijeljenje ($Div_{\mathbb{N}^2}(3, 2)$). S druge strane, da odredi k-tu znamenku poslije decimalne točke, stroj treba pročitati i_k znamenaka broja π. Za sljedeću, $(k+1)$-vu, znamenku potrebno je pročitati i_{k+1} znamenaka broja π, gdje je $i_{k+1} \geq i_k$. Uz prijenos ostatka i primjenu funkcije $x \mapsto Div_{\mathbb{N}^2}(x, 2)$ jasno je da stroj može tako izračunati $\pi/2$ na zadanu točnost. Čitanjem jedne po jedne znamenke broja π dobivamo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 3.1, 3.14, 3.141, \ldots)$, čiji je limes upravo π. Uz opisani postupak određivanja znamenaka rezultata očito se konstruira niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, čiji je limes $f(x)$, a na trećoj je traci zapisan upravo onaj element y toga niza za koji je postignuta zadana točnost. △

Ovaj teorijski koncept odražava ideju o tome da je podatak o *a priori* beskonačno mnogo decimala broja koji želimo izračunati zapravo skriven u nečemu što je konačno, a to su instrukcije algoritma prema kojem stroj radi (jasno je da tih instrukcija ima konačno mnogo). Slično piše i Iljazović u [1]. Motivirani prethodnim primjerom naslućujemo da svaka izračunljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ nužno mora biti neprekidna. Sa x_k označimo broj koji se dobije nakon što stroj pročita prvih k znamenaka ulaznoga podatka $x \geq 0$. Ako želimo rezultat izračunati na l decimala, tj. dobiti aproksimaciju y, onda prema dosadašnjem poimanju podrazumijevamo da će stroju biti dovoljno pročitati neki x_k. Tada za svaki $x' \in \left[x_k, x_k + 10^{-k}\right]$ vrijedi $f(x') \in \left[y, y + 10^{-l}\right]$. Primijetimo da ovo upravo odgovara $\epsilon - \delta$ definiciji neprekidnosti funkcije zdesna. Analogno, za $x < 0$ govorimo o neprekidnosti slijeva.

Pogledajmo primjer koji dodatno učvršćuje intuiciju o nužnosti neprekidnosti. Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Funkcija $\delta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

Ova funkcija nije neprekidna. Za $a = \pi$ nije moguće raditi nikakvu aproksimaciju broja $\delta_\pi(\pi)$ jer očito moramo pročitati sve znamenke ulaza da bismo utvrdili da je jednak broju π, što je nemoguće.

U skladu s navedenim prirodno se postavlja pitanje što bi bio *izračunljiv broj*. Intuicija sugerira da su izračunljivi brojevi oni brojevi koji mogu biti izračunati na zadanu preciznost korištenjem nekoga algoritma koji staje nakon konačno mnogo koraka i ispisuje traženi rezultat. Zanimljivo je kako Marvin Minsky u knjizi [2] neformalno definira taj pojam:

> „Broj x izračunljiv je broj ako postoji Turingov stroj koji za $n \in \mathbb{N}$, zapisan na traci, staje i na toj je traci zapisana n-ta znamenka od x."

Alternativno bismo mogli reći da taj Turingov stroj za zadani n uspješno ispiše prvih n znamenaka na traku, a stane nakon n-te. To naglašava Minskyjevu primjedbu da korištenjem Turingova stroja, koji je definiran *konačnom* tablicom funkcije prijelaza, možemo odrediti ono što je potencijalno *beskonačno* – string znamenki.

Koliko ima izračunljivih brojeva? Svakako bismo očekivali da nije svaki realan broj ujedno i izračunljiv. Naime, Turingovih strojeva ima prebrojivo mnogo — to slijedi iz činjenice da ih je moguće kodirati nizovima prirodnih brojeva (za detalje pogledati skriptu [4]). Stoga, iz Minskyjeva poimanja izračunljivoga broja intuitivno možemo zaključiti da izračunljivih brojeva ima najviše prebrojivo mnogo.

2.2 Prikaz realnoga broja

Realni brojevi uobičajeno se prikazuju kao decimalni brojevi, što znači da mogu biti i beskonačni neperiodički. Možemo reći da se radi o nekom numeričkom stringu. Primjerice, 3.14159... prikaz je broja π. Premda još nemamo formalnu definiciju izračunljive funkcije $f : \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$, očekivali bismo da neki teorijski stroj za računanje izračunava tu funkciju tako da prevodi jedan numerički string u drugi. U prethodnom potpoglavlju spomenuli smo primjer izračunavanja funkcije dijeljenja s 2 i tako naslutili način na koji bi neki stroj trebao izračunavati traženi rezultat u zadanoj točnosti. Svakako bismo očekivali da je sličan koncept primjenljiv i na ostale funkcije.

Primjer 2.2.1. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 3x$. Razumno je smatrati da je to jedna izračunljiva funkcija, što znači da bi neki višetračni stroj T (poput ranije spomenutoga) trebao izračunavati njezine vrijednosti u zadanoj točnosti. Međutim, pokazuje se da to ipak nije moguće. Promotrimo ulazni podatak $x = 0.333... =: 0.3^\omega$. Za njega bi stroj kao rezultat trebao ispisati ili $r = 1.0^\omega$ ili $r = 0.9^\omega$. Razmotrimo ta dva slučaja.

1. $r = 1.0^\omega$
   Nakon što pročita prvih $k \in \mathbb{N}$ simbola s druge trake, stroj T ispisuje 1 kao prvi simbol na treću traku. Ako bi ulazni podatak bio $x' = 0.3^{k-2}0^\omega$, budući da se prvih k simbola od x i x' podudaraju, stroj T ispisao bi također 1 kao prvi simbol. To očito nije ispravno jer bi T za ulazni podatak x' u konačnici trebao ispisati $0.9^{k-2}0^\omega$.

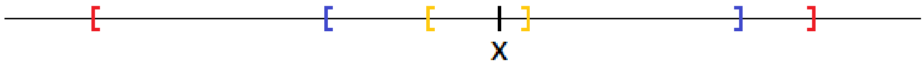
2. $r = 0.9^\omega$
   Slično gornjem slučaju. Nakon što pročita prvih $k \in \mathbb{N}$ simbola s druge trake, stroj T ispisuje 0 kao prvi simbol na treću traku. Problem se pojavljuje ako bi ulazni podatak bio $x' = 0.3^{k-2}4^\omega$ jer bi T trebao ispisati 1 kao prvi simbol izlaza. △

Prethodni primjer pokazuje da prikaz realnih brojeva preko numeričkih stringova, premda je „na papiru" intuitivno jasan i prirodan, nije dovoljno dobro rješenje u smislu izračunljivosti. S druge strane, K. Weihrauch u svojoj knjizi [5] uvodi pojam *ime realnoga broja* kao niz zatvorenih intervala koji u presjeku daju dotični broj. Iako je ta ideja intuitivno vrlo prihvatljiva, ipak ćemo je morati malo modificirati. Naime, Turingov stroj kao ulazni podatak trebao bi primiti nešto što je konačne duljine, a svakako da upravo opisani pojam to ne zadovoljava. Ovdje će od velike koristi biti indeks izračunljive funkcije — pojam koji je uveden za funkcije sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$, ali se lako proširuje i za bilo koju drugu kodomenu. Primjerice, broj $\langle i_1, i_2, i_3\rangle$ indeks je izračunljive funkcije $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{Q}$ ako je za njoj odgovarajuću funkciju $g : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathit{Repr}_\mathbb{Q}$ iz definicije 1.2.3 i za svaki $j \in \{1, 2, 3\}$ broj $\langle i_j\rangle$ indeks komponentne funkcije g_j.

Definicija 2.2.2. Kažemo da je $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$ *ime realnoga broja* x, u oznaci $x \sim (i_1, i_2)$, ako vrijedi:

- i_1 i i_2 indeksi su izračunljivih funkcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Q}$
- $(\forall n \in \mathbb{N}) \left|\{i_1\}(n) - \{i_2\}(n)\right| < 2^{-n}$
- $(\forall n \in \mathbb{N})\ x \in \left[\{i_1\}(n), \{i_2\}(n)\right]$

Kažemo da je realan broj *izračunljiv* ako postoji njegovo ime. Skup svih izračunljivih realnih brojeva označavamo sa $\mathbb{R}_{\text{izr}}$.



Slika 2.1: Ilustracija imena realnoga broja x

Primjer 2.2.3. Navodimo dva primjera izračunljivih brojeva.

1. Neka je $q \in \mathbb{Q}$ proizvoljan. Tada je funkcija $n \mapsto q$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, izračunljiva pa postoji njezin indeks i. Očito je (i, i) jedno ime za q.

2. $\sqrt{2}$ je izračunljiv. Definiramo funkciju $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ formulom

$$f(n) := \mu m \left(m^2 \leq 2n^2 \wedge 2n^2 < (m+1)^2 \right).$$

To je izračunljiva funkcija jer je definirana pomoću μ-operatora. U tablici je prikazano prvih nekoliko njezinih vrijednosti.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	2	4	5	7	8	9	11

Nadalje, promotrimo funkcije

$$n \mapsto \frac{f(2^{n+2})}{2^{n+2}} \qquad \text{i} \qquad n \mapsto \frac{f(2^{n+2}) + 2}{2^{n+2}}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$. To su izračunljive funkcije pa postoje njihovi indeksi i_1 i i_2, respektivno. Nije teško provjeriti da je $\sqrt{2} \sim (i_1, i_2)$. $\triangle$

Uočimo da drugo i treće svojstvo iz definicije 2.2.2 povlače svojstvo koje ujedno opravdava mogućnost prikaza broja $x \in \mathbb{R}_{izr}$ pomoću njegova imena $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$, a ono glasi ovako:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\{i_1\}(n), \{i_2\}(n) \right] = \{x\}.$$

Nadalje, premda se iz slike čini da ovi segmenti moraju biti ugniježđeni, u definiciji se ipak to ne zahtijeva. Promotrimo funkcije $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, definirane formulama

$$f_1(n) := \mathrm{Max}^{(n)} \Big(\{i_1\}(0), \{i_1\}(1), \ldots, \{i_1\}(n) \Big)$$
$$f_2(n) := \mathrm{Min}^{(n)} \Big(\{i_2\}(0), \{i_2\}(1), \ldots, \{i_2\}(n) \Big),$$

pri čemu eksponent kod $\mathrm{Max}^{(n)}$ i $\mathrm{Min}^{(n)}$ označava mjesnost. Napomenimo da se izračunljivost funkcija $\mathrm{Max}^{(n)}$ i $\mathrm{Min}^{(n)}$ može dokazati na isti način kao u [3]. Funkcije f_1 i f_2 mogu se na međusobno sličan način definirati pomoću primitivne rekurzije (analogona definicije 1.1.3). Ilustrirajmo to za f_1:

$$\begin{aligned} f_1(0) &:= \{i_1\}(0) \\ f_1(n+1) &:= \mathrm{Max}^{(2)}\Big(f_1(n), \{i_1\}(n+1)\Big). \end{aligned}$$

Dakle, f_1 i f_2 izračunljive su funkcije pa imaju indekse j_1 i j_2, respektivno. Kažemo da je (j_1, j_2) *monotono ime* za x. Naime, sva svojstva imena ostaju ispunjena, a dodatno vrijedi i spomenuto svojstvo ugniježđenosti (monotonosti):

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \{j_1\}(n) \leq \{j_1\}(n+1)\ \wedge\ \{j_2\}(n) \geq \{j_2\}(n+1).$$

Često će u dokazima biti korisno upotrebljavati monotono ime.

Lako se vidi da je $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_{izr}$ pa je $\mathbb{R}_{izr}$ gust u $\mathbb{R}$, dakle izračunljiva funkcija $\mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ definirana je svojim djelovanjem na $\mathbb{R}_{izr}$. U kontekstu ranije spomenutoga pojma dimenzije (npr. $Dim(\mathbb{Z}) = 2$, $Dim(\mathbb{Q}) = 3$), ipak se možemo „izvući” iz beskonačnosti od $Dim(\mathbb{R})$ jer je $Dim(\mathbb{R}_{\mathrm{izr}}) = 2$.

Definicija 2.2.4. Za funkciju $f : \mathbb{R}_{izr} \rightharpoonup \mathbb{R}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{N}^3 \rightharpoonup \mathbb{Q}^2$ takva da za svaki $x \in D_f$, za svaki $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$ takav da je $x \sim (i_1, i_2)$ te za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(x) \in [l, r]$, gdje je $(l, r) = g(i_1, i_2, k)$ i $|l - r| < 2^{-k}$.

Napomena 2.2.5. Prilično je jasno kako bismo postupili za domenu $\mathbb{R}^k$ u gornjoj definiciji. Naime, sve tehničke promjene uvjetovat će promijenjeni oblik funkcije g, koja za proizvoljni $k \in \mathbb{N}$ ima oblik $g : \mathbb{N}^{2k+1} \rightharpoonup \mathbb{Q}^2$. △

Definicija 2.2.6. Za funkciju $f : \mathbb{R}^k \rightharpoonup \mathbb{R}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{R}^k_{izr} \rightharpoonup \mathbb{R}$ takva da je f proširenje po neprekidnosti od g.

2.3 Izračunljivost rješenja kvadratne jednadžbe

Glavni rezultat kojem težimo po pitanju izračunljivosti na $\mathbb{R}$ dokaz je izračunljivosti rješenja kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

s realnim koeficijentima, uz $a \neq 0$. Kako bismo to mogli, potrebno je dokazati izračunljivost onih operacija koje se koriste u formuli

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1}$$

za rješenja kvadratne jednadžbe. Konstrukcijski način pristupa tom problemu dat će nam vrlo dobru sliku o izračunljivosti nekih elementarnih realnih funkcija. Radi preglednosti često ćemo za (monotono) ime $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}$ nekoga $x \in \mathbb{R}_{izr}$ koristiti oznake $a_n := i_1(n)$ i $b_n := i_2(n)$.

Propozicija 2.3.1. $Opp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je izračunljiva funkcija.

Dokaz. Zbog neprekidnosti ove funkcije dovoljno je dokazati izračunljivost njezine restrikcije na $\mathbb{R}_{izr}$. Neka je $x \in \mathbb{R}_{izr}$, $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$ njegovo ime te $k \in \mathbb{N}$. Treba naći izračunljivu funkciju iz definicije 2.2.4. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \in [a_n, b_n] \Rightarrow -x \in [-b_n, -a_n]$. Dakle, za n takav da je $|-b_n - (-a_n)| < 2^{-k}$ traženi l i r bit će upravo $-b_n$ i $-a_n$, respektivno. Iz relacije

$$|(-b_n) - (-a_n)| = |a_n - b_n| < 2^{-n}$$

slijedi $n \geq k$ pa možemo uzeti upravo $n = k$. Tada je formulom

$$g(i_1, i_2, k) := (-b_k, -a_k)$$

definirana tražena izračunljiva funkcija. ■

Propozicija 2.3.2. $Add_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je izračunljiva funkcija.

Dokaz. Zbog neprekidnosti zbrajanja dovoljno je dokazati izračunljivost restrikcije zbrajanja na $\mathbb{R}^2_{izr}$. Neka su $x, y \in \mathbb{R}_{izr}$ te $(i_1, i_2), (i_3, i_4) \in \mathbb{N}^2$ njihova imena, respektivno. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Prema napomeni 2.2.5, treba naći izračunljivu funkciju $g : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{Q}^2$ takvu da vrijedi $l \leq f(x) \leq r$, gdje je $(l, r) = g(i_1, i_2, i_3, i_4, k)$ i $|l - r| < 2^{-k}$. Stavimo

$$\begin{aligned} g_1(i_1, i_2, i_3, i_4, k) &:= \{i_1\}(k+1) + \{i_3\}(k+1) \\ g_2(i_1, i_2, i_3, i_4, k) &:= \{i_2\}(k+1) + \{i_4\}(k+1) \end{aligned}$$

Budući da su i_1 i i_2 indeksi izračunljivih funkcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Q}$ te je zbrajanje na $\mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija, g_1 i g_2 izračunljive su funkcije, a tada i g. Iz definicije 2.2.2

i svojstava zbrajanja na $\mathbb{Q}$ lako se provjeri da vrijedi $l \leq f(x) \leq r$. Preostalo je dokazati da je $|l-r| < 2^{-k}$. Zaista, vrijedi

$$\begin{aligned}
\Big|l-r\Big| &= \Big|(\{i_1\}(k+1) - \{i_2\}(k+1)) + (\{i_3\}(k+1) - \{i_4\}(k+1))\Big| \\
&\leq \Big|\{i_1\}(k+1) - \{i_2\}(k+1)\Big| + \Big|\{i_3\}(k+1) - \{i_4\}(k+1)\Big| \\
&\overset{\text{(def. 2.2.2)}}{<} 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} = 2^{-k}.
\end{aligned}$$

■

Kao i u slučaju domene $\mathbb{Z}$ sada slijedi izračunljivost funkcije oduzimanja realnih brojeva, tj. funkcije $Sub_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Propozicija 2.3.3. Kvadriranje realnih brojeva, u oznaci $Sq_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, izračunljiva je funkcija.

Dokaz. Zbog neprekidnosti kvadriranja dovoljno je dokazati izračunljivost restrikcije kvadriranja na $\mathbb{R}_{izr}$. Neka je $x \in \mathbb{R}_{izr}$, $(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ njegovo monotono ime te $k \in \mathbb{N}$. Treba naći izračunljivu funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{Q}^2$ iz definicije 2.2.4. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ razlikujemo tri slučaja.

1. $0 \leq a_n \leq b_n$
   Tada vrijedi $x \in [a_n, b_n] \Rightarrow Sq_{\mathbb{R}}(x) \in [a_n^2, b_n^2]$. Odredimo li n takav da je $|a_n^2 - b_n^2| < 2^{-k}$, za l i r iz definicije 2.2.4 možemo staviti a_n^2 i b_n^2, respektivno.
   $$|a_n^2 - b_n^2| = \underbrace{|a_n - b_n|}_{<2^{-n}} \cdot \underbrace{|a_n + b_n|}_{\leq 2b_0} < 2^{-n+1} \cdot b_0 \leq 2^{-n+1} \cdot 2^{Num(b_0)} = 2^{-n+1+Num(b_0)}$$
   Slijedi: $|a_n^2 - b_n^2| < 2^{-k} \Leftrightarrow -n+1+Num(b_0) \leq -k \Leftrightarrow n \geq k+1+Num(b_0)$.

2. $a_n < 0 < b_n$
   Iz $|a_n - b_n| < 2^{-n}$ i $x \in [a_n, b_n]$ slijedi da je svaki od $|a_n|, |b_n|$ i $|x|$ strogo manji od 2^{-n}. Tada je $x^2 < 2^{-2n}$ te $x^2 \leq \text{Max}^{(2)}(a_n^2, b_n^2)$. Stavimo li $l := 0$ i $r := \text{Max}^{(2)}(a_n^2, b_n^2)$, dobivamo $|l-r| < 2^{-2n}$. Iz posljednje relacije slijedi da za $n \geq Div_{\mathbb{N}^2}(k, 2) + 1$ vrijedi $|l-r| < 2^{-k}$.

3. $a_n \leq b_n \leq 0 \land a_n \neq 0$
   Slično prvom slučaju. Vrijedi $x \in [a_n, b_n] \Rightarrow Sq_{\mathbb{R}}(x) \in [b_n^2, a_n^2]$, stoga su odgovarajući b_n^2 i a_n^2 kandidati za l i r, respektivno.
   $$|b_n^2 - a_n^2| = \underbrace{|b_n - a_n|}_{<2^{-n}} \cdot \underbrace{|b_n + a_n|}_{\leq 2\,Opp_{\mathbb{Q}}(a_0)} < 2^{-n+1+Num(Opp_{\mathbb{Q}}(a_0))} = 2^{-n+1+Num(a_0)}$$

Slijedi: $n \geq k + 1 + Num(a_0)$.

Sada stavimo

$$n_0 := \text{Max}^{(3)}\Big(k + 1 + Num(b_0),\ Div_{\mathbb{N}^2}(k, 2) + 1,\ k + 1 + Num(a_0)\Big)$$

te definiramo funkciju g ovako:

$$g(j_1, j_2, k) := \begin{cases} (a_{n_0}^2, b_{n_0}^2), & 0 \leq a_{n_0} \leq b_{n_0} \\ \left(0, \text{Max}^{(3)}\left(a_{n_0}^2, b_{n_0}^2\right)\right), & a_{n_0} < 0 < b_{n_0} \\ (b_{n_0}^2, a_{n_0}^2), & a_{n_0} \leq b_{n_0} \leq 0 \ \wedge\ a_{n_0} \neq 0. \end{cases}$$

Primijetimo da se ovdje spominju neke elementarne funkcije na $\mathbb{Q}$. Po napomeni 1.4.3 slijedi da je g izračunljiva, što se i tražilo. ■

Kako bismo dokazali izračunljivost množenja realnih brojeva, uočimo da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x \cdot y = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}.$$

Dakle, preostalo je dokazati izračunljivost množenja skalarom $\dfrac{1}{4}$. Dodatno, zbog $4ac$ pod korijenom i 2 u nazivniku u formuli 2.1 treba dokazati i izračunljivost množenja skalarima 4 i $\dfrac{1}{2}$. Za svaki $\alpha \in \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 4\right\}$ označimo te funkcije sa $Mbs_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (engl. *multiply by scalar*). Budući da su svi navedeni skalari potencije od 2, dokazi su međusobno vrlo slični te dajemo samo dokaz za $\alpha = 4$.

Propozicija 2.3.4. $Mbs_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je izračunljiva funkcija.

Dokaz. Zbog tehničke i konceptualne sličnosti s dokazom propozicije 2.3.1 skraćujemo postupak. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $x \in [a_n, b_n] \Rightarrow 4x \in [4a_n, 4b_n]$. Treba odrediti n takav da je $|4a_n - 4b_n| < 2^{-k}$.

$$|4a_n - 4b_n| = 4|a_n - b_n| < 2^{2-n}$$

Dakle, $n \geq k + 2$. Tada je formulom

$$g(i_1, i_2, k) = (2a_{k+2}, 2b_{k+2})$$

definirana izračunljiva funkcija iz definicije 2.2.4. ■

Definicija 2.3.5. Za funkciju $f : \mathbb{R}^k \rightharpoonup \mathbb{C}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{R}^k \rightharpoonup \mathbb{R}^2$ takva da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ vrijedi

$$f(\vec{x}) \simeq g_1(\vec{x}) + i \cdot g_2(\vec{x}).$$

U formuli 2.1 pojavljuje se u funkcija $\sqrt{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Promotrimo funkcije $Sqrt_1, Sqrt_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (engl. *square root*), definirane formulama

$$Sqrt_1(x) := \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad Sqrt_2(x) := \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Dokazat ćemo da je $Sqrt_1$ izračunljiva. Tada će dokaz za $Sqrt_2$ slijediti iz činjenice da je $Sqrt_2 = Sqrt_1 \circ Opp_{\mathbb{R}}$. Budući da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sqrt{x} = Sqrt_1(x) + i \cdot Sqrt_2(x),$$

iz prethodne definicije dobit ćemo da je $\sqrt{\ }$ izračunljiva. Treba voditi računa o tome da korijen racionalnoga broja nije nužno racionalan broj; npr. $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, ali $\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$. To je prvi trenutak u kojem se u teoriji izračunljivosti pojavljuje potreba za određivanjem racionalne aproksimacije iracionalnoga broja. Pretpostavimo da za zadani $q \in \mathbb{Q}^+$ i $k \in \mathbb{N}$ želimo naći donju i gornju aproksimaciju od $\sqrt{q}$ koje se razlikuju za 2^{-k}. Promotrimo niz $\left\{ \frac{n}{2^k} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Budući da je to rastući niz i $q > 0$, postoji prvi $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da je $\left(\frac{m}{2^k} \right)^2 > q$. Tada su $\frac{m-1}{2^k}$ i $\frac{m}{2^k}$ tražene aproksimacije. Ovu ideju prikažimo u terminima izračunljivih funkcija u sljedećoj lemi.

Lema 2.3.6. Sljedeće su funkcije izračunljive:

a) $Fst : \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Fst(q,k) := \mu m \left(\left(\frac{m}{2^k} \right)^2 > q \right)$

b) $Appr : \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^2$, $Appr(q,k) := \left(\frac{Fst(q,k) \dot{-} 1}{2^k}, \frac{Fst(q,k)}{2^k} \right)$

Dokaz.

a) Prema napomeni 1.2.9, treba naći izračunljivu funkciju $g : Repr_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da za svaki $q = \frac{b}{c+1} \in \mathbb{Q}^+$, gdje je $(0, b, c) \in Repr_{\mathbb{Q}}$, i za svaki $k \in \mathbb{N}$

vrijedi $Fst(q,k) = g(0,b,c,k)$. Stavimo

$$g(a,b,c,k) := \begin{cases} \mu m\left(\left(\dfrac{m}{2^k}\right)^2 > \dfrac{b}{c+1}\right), & a = 0 \\ \uparrow, & \text{inače.} \end{cases}$$

Očito vrijedi $Fst(q,k) \simeq g(a,b,c,k)$, a raspisom relacije u dosegu μ-operatora dobijemo

$$m^2 \cdot (c+1) > b \cdot 2^{2k},$$

iz čega slijedi izračunljivost funkcije g.

b) Prema istoj napomeni i uz iste oznake b, c i k, treba naći izračunljivu funkciju $h : Repr_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^2$ takvu da je $Appr(q,k) \simeq h(a,b,c,k)$. Stavimo

$$h(a,b,c,k) := \begin{cases} \left(\dfrac{g(a,b,c,k) \dot{-} 1}{2^k}, \dfrac{g(a,b,c,k)}{2^k}\right), & a = 0 \\ \uparrow, & \text{inače,} \end{cases}$$

gdje je g funkcija iz a) dijela. Vrijedi $Appr(q,k) \simeq h(a,b,c,k)$ pa preostaje dokazati izračunljivost funkcije h, što znači da treba dokazati izračunljivost njezinih komponentnih funkcija. Zbog sličnosti tih dviju funkcija, dokazujemo samo izračunljivost funkcije $h_2 : Repr_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, koja je definirana formulom

$$h_2(a,b,c,k) := \begin{cases} \dfrac{g(a,b,c,k)}{2^k}, & a = 0 \\ \uparrow, & \text{inače.} \end{cases}$$

Prema definiciji 1.2.3, treba naći izračunljivu funkciju $u : Repr_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \to Repr_{\mathbb{Q}}$ takvu da za svaki $\vec{x} \in Repr_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{N}$ vrijedi $h_2(\vec{x}) \simeq (-1)^{u_1(\vec{x})} \dfrac{u_2(\vec{x})}{u_3(\vec{x})+1}$. Uočimo da funkcija u definirana formulom

$$u(a,b,c,k) := \begin{cases} \big(0,\ Rdc_1(g(a,b,c,k), 2^k),\ Rdc_2(g(a,b,c,k), 2^k) \dot{-} 1\big), & a = 0 \\ \uparrow, & \text{inače,} \end{cases}$$

ispunjava tražene uvjete. Time je dokaz ove leme dovršen. ■

Za potrebe dokaza izračunljivosti funkcije $Sqrt_1$ navedimo i jedan tehnički rezultat iz matematičke analize.

Lema 2.3.7. Ako su $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ i $\epsilon > 0$ takvi da je $|x-y| < \epsilon$, onda je $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| < \sqrt{\epsilon}$.

Dokaz. Iz pretpostavki slijedi

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}| = |x - y| < \epsilon.$$

Korjenovanjem dobijemo $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \sqrt{\epsilon}$. ∎

Propozicija 2.3.8. *$Sqrt_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je izračunljiva funkcija.*

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcije $Sqrt_1$ na $\mathbb{R}$ dovoljno je dokazati izračunljivost njezine restrikcije na $\mathbb{R}_{izr}$. Neka je $x \in \mathbb{R}_{izr}$, $(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ njegovo monotono ime te $k \in \mathbb{N}$. Treba naći izračunljivu funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{Q}^2$ iz definicije 2.2.4. Razlikujemo tri slučaja.

1. $0 < a_{2k+2} \leq b_{2k+2}$
   Stavimo $l := Appr_1(a_{2k+2}, k+2)$ i $r := Appr_2(b_{2k+2}, k+2)$. Prema lemi 2.3.7, tada vrijedi:
$$\begin{aligned}|l - r| &= |l - \sqrt{a_{2k+2}}| + \left|\sqrt{a_{2k+2}} - \sqrt{b_{2k+2}}\right| + \left|\sqrt{b_{2k+2}} - r\right| \\ &< 2^{-(k+2)} + \sqrt{2^{-(2k+2)}} + 2^{-(k+2)} \\ &= 2^{-k}.\end{aligned}$$

2. $a_{2k+2} \leq 0 < b_{2k+2}$
   Tada iz definicije funkcije $Sqrt_1$ slijedi $x \in [a_{2k+2}, b_{2k+2}] \Rightarrow \sqrt{x} \in [0, \sqrt{b_{2k+2}}\,]$. Stavimo $l := 0$ i $r := Appr_2(b_{2k+2}, k+1)$. Tada vrijedi:
$$|l - r| = \sqrt{b_{2k+2}} + \left|\sqrt{b_{2k+2}} - r\right| < 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} = 2^{-k}.$$

3. $a_{2k+2} \leq b_{2k+2} \leq 0$
   Budući da za $x \leq 0$ vrijedi $Sqrt_1(x) = 0$, stavimo $l := r := 0$.

Definiramo funkciju g ovako:

$$g(j_1, j_2, k) := \begin{cases} (Appr_1(a_{2k+2}, k+2), Appr_2(b_{2k+2}, k+2))\,, & 0 < a_{2k+2} \leq b_{2k+2} \\ (0, Appr_2(b_{2k+2}, k+1))\,, & a_{2k+2} \leq 0 < b_{2k+2} \\ (0, 0), & a_{2k+2} \leq b_{2k+2} \leq 0. \end{cases}$$

Dakle, g je tražena izračunljiva funkcija. ∎

Definicija 2.3.9. Za funkciju $f : \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{N}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) \simeq g(i_1, i_2),$$

gdje je $x \sim (i_1, i_2)$.

Za proizvoljan $x \in \mathbb{R}_{izr}$ teško je odrediti je li on jednak 0 — to slijedi iz definicije 2.2.2. Općenito, jednakost na realnim brojevima nije izračunljiva. Međutim, primijetimo da je za $x \in R_{izr} \setminus \{0\}$ relativno lako odrediti je li $x > 0$ ili $x < 0$. Ako je (j_1, j_2) monotono ime od $x \in R_{izr} \setminus \{0\}$, onda vrijedi:

$$(\exists m \in n)(\forall n \geq m) \begin{cases} \{j_1\}(n) > 0, & x > 0 \\ \{j_2\}(n) < 0, & x < 0. \end{cases}$$

Prema tome, ima smisla promatrati pomoćnu funkciju $Aux_{\mathbb{R}} : \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}$ (engl. *auxiliary*), kojoj je domena skup svih monotonih imena brojeva iz $R_{izr} \setminus \{0\}$ te je definirana formulom

$$Aux_{\mathbb{R}}(j_1, j_2) := \mu m \Big(\{j_1\}(m) > 0 \vee \{j_2\}(m) < 0\Big).$$

Budući da je definirana pomoću μ-operatora, ona je izračunljiva. To omogućuje uvođenje analogona funkcije $Arg_{\mathbb{Z}}$ — radi se o funkciji $Arg_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_{izr} \rightharpoonup \mathbb{N}$, takvoj da je $D_{Arg_{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}_{izr} \setminus \{0\}$ i koja je definirana formulom

$$Arg_{\mathbb{R}}(x) := \begin{cases} 0, & \{j_1\}\Big(Aux_{\mathbb{R}}(j_1, j_2)\Big) > 0 \\ 1, & \{j_2\}\Big(Aux_{\mathbb{R}}(j_1, j_2)\Big) < 0, \end{cases}$$

gdje je (j_1, j_2) bilo koje monotono ime od x. Za potrebe dokaza sljedeće propozicije spomenimo i pomoćnu funkciju $Aux_{\mathbb{Q}^+} : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, definiranu formulom

$$Aux_{\mathbb{Q}^+}(q) := \Big(\mu n \leq Den(q)\Big)\, (2^{-n} < q). \tag{2.2}$$

Desna strana definirana je pomoću μ-operatora, stoga je $Aux_{\mathbb{Q}^+}$ izračunljiva. Pojasnimo zašto je u formuli 2.2 dovoljno n ograničiti odozgo sa $Den(q)$. Budući da je $q > 0$, možemo ga zapisati kao $q = \dfrac{Num(q)}{Den(q)}$, gdje je $Num(q) \geq 1$. Također vrijedi

$$2^{-n} < q \Leftrightarrow Den(q) < 2^n \cdot Num(q).$$

Za $Num(q) = 1$ (najmanji brojnik) dobivamo $Den(q) < 2^n$, što je ispunjeno za $n = Den(q)$. Dakle, za sve ostale (veće) vrijednosti od $Num(q)$ sigurno je to gornja ograda za n.

Propozicija 2.3.10. *Rec* : $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ (engl. *reciprocal*), definirana formulom

$$Rec(x) = \frac{1}{x},$$

izračunljiva je funkcija.

Dokaz. Kao i ranije, dovoljno je dokazati izračunljivost funkcije $Rec' : \mathbb{R}_{izr} \rightharpoonup \mathbb{R}$ takve da je $D_{Rec'} = \mathbb{R}_{izr} \setminus \{0\}$. Da bismo to dokazali, trebamo naći izračunljivu funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{Q}^2$ iz definicije 2.2.4. U tu svrhu, neka je $(j_1, j_2, k) \in \mathbb{N}^3$ takav da je (j_1, j_2) monotono ime nekoga $x \in \mathbb{R}_{izr} \setminus \{0\}$. Objasnit ćemo postupak za računanje $g(j_1, j_2, k)$. Radi preglednosti označimo $m := Aux_{\mathbb{R}}(j_1, j_2)$. Razlikujemo dva slučaja ovisno o predznaku broja x.

1. $x > 0$
   Za svaki $n \geq m$ vrijedi $x \in [a_n, b_n] \Rightarrow \frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n}\right]$. Odredimo li $n \geq m$ takav da je $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right| < 2^{-k}$, odgovarajući $\frac{1}{b_n}$ i $\frac{1}{a_n}$ bit će upravo l i r iz definicije 2.2.4.
   $$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right| = \frac{|a_n - b_n|}{|b_n \cdot a_n|} < \frac{2^{-n}}{a_m^2} < \frac{2^{-n}}{2^{-Aux_{\mathbb{Q}^+}(a_m^2)}} = 2^{-n+Aux_{\mathbb{Q}^+}\left(a_m^2\right)}$$
   Iz toga slijedi:
   $$\begin{aligned}\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right| < 2^{-k} \wedge n \geq m &\Leftrightarrow -n + Aux_{\mathbb{Q}^+}\left(a_m^2\right) \leq -k \wedge n \geq m \\ &\Leftrightarrow n \geq k + Aux_{\mathbb{Q}^+}\left(a_m^2\right) + m.\end{aligned}$$

2. $x < 0$
   Postupak je isti je kao u prvom slučaju, osim što je $|b_n \cdot a_n| \geq b_m^2$ pa dobijemo $n \geq k + Aux_{\mathbb{Q}^+}(b_m^2) + m$.

Stavimo $n_0 := k + m + \mathrm{Max}^{(2)}\Big(Aux_{\mathbb{Q}^+}(a_m^2), Aux_{\mathbb{Q}^+}(b_m^2)\Big)$ i definiramo funkciju g ovako:

$$g(j_1, j_2, k) := \left(\frac{1}{b_{n_0}}, \frac{1}{a_{n_0}}\right).$$

Dakle, g je izračunljiva funkcija koja se tražila. ∎

Budući da je dokazana izračunljivost svih funkcija koje se spominju u formuli 2.1, konačno možemo navesti funkciju $Qes : \mathbb{R}^3 \rightharpoonup \mathbb{C}^2$ (engl. *quadratic equation's solutions*) za rješenja kvadratne jednadžbe. Naravno, za svaki $j \in \{1, 2\}$ komponentna funkcija Qes_j predstavlja j-to rješenje kvadratne jednadžbe. Radi preglednosti označimo:

$$\begin{aligned}
D &:= Sub_{\mathbb{R}}(Sq(b), Mbs_4(Mult_{\mathbb{R}}(a, c))) = b^2 - 4ac \\
M_0 &:= Mbs_{\frac{1}{2}}(Mult_{\mathbb{R}}(Opp_{\mathbb{R}}(b), Rec(a))) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-b)}{a} \\
M_1 &:= Mbs_{\frac{1}{2}}(Mult_{\mathbb{R}}(Sqrt_1(D), Rec(a))) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Sqrt_1(D)}{a} \\
M_2 &:= Mbs_{\frac{1}{2}}(Mult_{\mathbb{R}}(Sqrt_2(D), Rec(a))) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Sqrt_2(D)}{a}
\end{aligned}$$

Prema formuli 2.1, vrijednosti funkcija Qes_1 i Qes_2 možemo zapisati ovako:

$$Qes_1(a, b, c) \simeq Add_{\mathbb{R}}(M_0, M_1) + i \cdot M_2 \tag{2.3}$$

$$Qes_2(a, b, c) \simeq Sub_{\mathbb{R}}(M_0, M_1) + i \cdot Opp_{\mathbb{R}}(M_2) \tag{2.4}$$

Iz cijele dosadašnje teorije slijedi da su funkcije na desnim stranama formula 2.3 i 2.4 izračunljive. Tada iz definicije 2.3.5 slijedi da je Qes izračunljiva funkcija.

Zanimljivo je primijetiti da funkcija za broj rješenja kvadratne jednadžbe nije izračunljiva. Naime, taj broj saznajemo iz predznaka diskriminante $D = b^2 - 4ac$, a jednakost $D = 0$, koja daje jedno (dvostruko) realno rješenje, nije izračunljiva. Dakle, u teoriji izračunljivosti teže je odrediti tip i broj rješenja kvadratne jednadžbe nego sâma rješenja.

2.4 Izračunljivost na $\mathbb{C}$

Ovo potpoglavlje većinom se oslanja na koncepte izračunljivosti na $\mathbb{R}$, stoga ne ulazimo u detalje, nego navodimo osnovnu definiciju i primjer koji pokazuje njezinu primjenu.

Definicija 2.4.1. Za funkciju $f : \mathbb{C} \rightharpoonup \mathbb{C}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji izračunljiva funkcija $g : \mathbb{R}^2 \rightharpoonup \mathbb{R}^2$ takva da za svaki $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$, gdje je $(x, y \in \mathbb{R}^2)$, vrijedi

$$f(z) \simeq g_1(x, y) + i \cdot g_2(x, y).$$

Primjer 2.4.2. Promotrimo funkciju kompleksnoga konjugiranja $Conj : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiranu formulom

$$Conj(z) := \bar{z}.$$

Za proizvoljan $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ vrijedi $Conj(z) \simeq x + i \cdot (-y)$. Uzmemo li funkciju $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, čije su komponentne funkcije $g_1(x, y) := x$ i $g_2(x, y) := -y$, lako se vidi da je g izračunljiva te $Conj(z) \simeq g_1(x, y) + i \cdot g_2(x, y)$. Sada iz definicije 2.4.1 slijedi da je $Conj$ izračunljiva. $\triangle$

Bibliografija

[1] Z. Iljazović, *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova*, PMF-MO, 2010.

[2] M. Minsky, *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1967.

[3] M. Vuković, *Izračunljivost*, PMF-MO, 2009.

[4] ______, *Složenost algoritama*, PMF-MO, 2015.

[5] K. Weihrauch, *Computable Analysis – An Introduction*, Springer, 2000.

Sažetak

Rad je logički podijeljen u dva poglavlja. Prvo poglavlje „Prebrojiva izračunljivost" počinje osnovnim konceptima i pojmovima vezanima uz izračunljivost na $\mathbb{N}$. Koristeći te pojmove i koncepte, uvode se analogni pojmovi za prebrojive nadskupove od $\mathbb{N}$ i detaljno dokazuje izračunljivost određenih funkcija. Govori se o pojmu dimenzije skupa i prikazu nadskupova od $\mathbb{N}$ pomoću prirodnih brojeva. Glavni rezultat poglavlja predstavlja dokaz izračunljivoga analogona teorema o dijeljenju s ostatkom.

Drugo poglavlje „Neprebrojiva izračunljivost" detaljno pokriva temelje izračunljivosti na $\mathbb{R}$ i jedan primjer izračunljivosti na $\mathbb{C}$. Značajna razlika u odnosu na prethodno poglavlje leži u prikazu realnoga broja, što donosi velik zaokret u pristupu problemu izračunljivosti. Međutim, obilato se koriste pojmovi iz prethodnoga poglavlja i time se ova dva različito motivirana pristupa stapaju u korehentnu cjelinu. Glavni rezultat cijeloga rada dokaz je izračunljivosti rješenja kvadratne jednadžbe.

Budući da je rad napisan u formi skripte, mogao bi poslužiti u slučaju pojave (izbornih) kolegija vezanih uz ovu temu.

Summary

This thesis is logically divided into two chapters. The first chapter „Countable computability” starts with basic concepts and terms associated with computability on $\mathbb{N}$. Using these concepts and terms, there are introduced analogous terms for countable supersets of $\mathbb{N}$ and detail proven the computability of certain functions. It is spoken about the term of set dimension and the representation of supersets of $\mathbb{N}$ using the natural numbers. The main result of the chapter is the proof of computable analogue of the reminder theorem.

The second chapter „Uncountable computability” covers the foundations of computability on $\mathbb{R}$ and one example of computability on $\mathbb{C}$ in detail. The significant difference in comparison to the previous chapter lies in representation of the real number, which brings a big turnaround in the approach to the problem of computability. However, terms from discrete case are used profusely and in that way these two differently motivated approaches are merged into a coherent unit. The main result of the whole thesis is the proof of computability of quadratic equation’s solutions.

Since the thesis is written in the form of scripts, it could be used in the case of appearance of (elective) courses associated with this topic.

Životopis

Rođen sam 6. kolovoza 1992. u Novoj Gradiški od oca Stjepana i majke Suzane, rođene Curić. Najranije djetinjstvo proveo sam u selu Tisovcu. U rodnom gradu završio sam Osnovnu školu Ljudevita Gaja i Opću gimnaziju „Nova Gradiška". Dodatno sam završio i Osnovnu glazbenu školu Pučkoga otvorenoga učilišta Matija Antun Relj-ković, smjer gitara. Premda sam oduvijek pokazivao sklonost prema matematici i sudjelovao na brojnim matematičkim natjecanjima i smotrama, najveći uspjeh postigao sam 2009. osvojivši treće mjesto na Državnom natjecanju u poznavanju hrvatskoga jezika u Zadru.

U jesen 2011. upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu i uspješno ga završio u ljeto 2014. Produbivši svoj interes za računarstvo, u jesen 2014. upisao sam Diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika na istom fakultetu. Pohađanje predavanja i vježbi doc. dr. sc. Vedrana Čačića imalo je velik utjecaj na moj odabir ove teme i upravo njega za voditelja rada.