(M,N) - konveksne funkcije pridružene paru sredina M i N

Ilić, Matija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matija Ilić

(M,N) - KONVEKSNE FUNKCIJE PRIDRUžENE PARU SREDINA M I N

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Pojam konveksnosti funkcija, kao i pojam sredina su u matematičkom svijetu vrlo dobro znani i često korišteni. Dok su se sredinama bavili još i starogrčki matematičari poput Euklida i Pitagorejci s pojmom konveksnih funkcija matematički svijet se susreće tek u 19. stoljeću. (M, N) - konveksne funkcije se prvi put spominju tek u 20. stoljeću pa se stoga smatraju modernim matematičkim dostignućima. Ovaj rad ćemo podijeliti na 4 cjeline. Glavni rezultati će biti izneseni u 3. i 4. poglavlju, dok će nam 1. i 2. poglavlje poslužiti za iznošenje nekih ključnih definicija i teorema vezanih uz konveksne funkcije i sredine.

Kako bi uopće mogli početi s radom trebamo najprije definirati pojam konveksne funkcije, samim time je i 1. poglavlje posvećeno konveksnim funkcijama. Konveksne funkcije definiramo na način da

za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je **konveksna** na intervalu I, ako za sve $x, y \in I$, i svaki $\lambda \in [0, 1]$, vrijedi

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Ova definicija će nam često koristiti pri dokazivanju raznih teorema i bit će nam ključna za naš rad. Odmah nakon definicije konveksnih funkcija usljedit će definicija konveksnih funkcija u Jensenovom smislu, odnosno J-konveksne funkcije. J.L.W.V. Jensen je bio danski matematičar koji se među prvima bavio problematikom konveksnih funkcija. Tako je u svojim znanstvenim člancima iz 1905. i 1906. godine prvi dao tumačenje konveksne funkcije kao funkcije za koju vrijedi nejednakost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Do kraja prvog poglavlja dokazat ćemo poopćenje Jensenove nejednakosti, Hermite - Hadamardovu nejednakost, kao i neka bitna svojstva konveksnih funkcija, dok ćemo se u glavnom dijelu ovog rada ipak najčešće pozivati na J-konveksne funkcije dane prethodnom nejednakosti.

Nakon što obradimo konveksne funkcije prisjetit ćemo se aritmetičke i geometrijske sredine, vrlo poznate AG-nejednakosti, harmonijskih i kvadratinh sredina te ilustrirati dokaz nejednakosti među njima. Prije nego što povežemo konveksne funkcije i sredine, definirat ćemo pojam sredine, težinske sredine i težinske sredine reda t. Za kraj ovog poglavlja dokazat ćemo tzv. teorem o monotonosti, to jest nejednakost koja vrijedi za bilo koje dvije sredine, odnosno općenitija vrijedi za bilo koje dvije težinske sredine reda t.

Treće poglavlje započinjemo definicijom (M, N) - konveksne funkcije koja će biti temelj daljnjeg rada a glasi

Neka je $f : I \to \mathbb{R}^+$ neprekidna, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}^+$ i neka su M i N dvije funkcije sredina. Kažemo da je funkcija f (M, N)-konveksna ako za sve $x, y \in I$ vrijedi:

$$f(M(x, y)) \leq N(f(x), f(y)).$$

Odmah potom primjenit ćemo tu definicija za dokaz kriterija konveksnosti kada sredine M i N zamijenimo sredinama A, G i H. To će ujedno biti i teorem na kojem ćemo zasnivati skoro cijeli ostatak rada, zajedno s definicijom (M, N) - konveksne funkcije. Treće poglavlje završavamo teoremima o (M, N) - konveksnim funkcijama kada su M, N težinske sredine reda t i kvazi-aritmetičke sredine.

U posljednjem poglavlju ovog rada fokusiramo se na (A, G) i (G, G) - konveksne funkcije poznate pod nazivima log - konveksne i multiplikativno konveksne funkcije. Nakon što damo njihove definicije proučavat ćemo neke specifične log - konveksne funkcije poput Eulerove gama funkcije, te beta funkciju. Također primjenit ćemo Hermite-Hadamardovu nejednakost u raznim slučajevima log - konveksnih funkcija, kao i na logaritamsku sredinu. Za sami kraj rada dat ćemo i dokazat nekoliko teorema vezanih uz multiplikativno konveksne funkcije. Uživajte u čitanju.

Poglavlje 1

Konveksne funkcije

1.1 Konveksne funkcije i Jensenova nejednakost

Definicija 1.1.1. *Neka je I interval u $\mathbb{R}$. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***konveksna*** *na intervalu I, ako za sve $x, y \in I$, i svaki $\lambda \in [0, 1]$, vrijedi:*

$$f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{1.1}$$

Funkcija f je ***strogo konveksna*** *ako za $x \neq y$ vrijedi stroga nejednakost.*

Funkcija f je ***konkavna*** *na intervalu I, ako je funkcija $-f$* ***konveksna*** *na tom istom intervalu, tj. ako za sve $x, y \in I$, i svaki $\lambda \in [0, 1]$, vrijedi:*

$$f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

a ***strogo konkavna*** *ako za $x \neq y$ vrijedi stroga nejednakost.*

Definicija 1.1.2. *Za $x, y \in \mathbb{R}$ skup:*

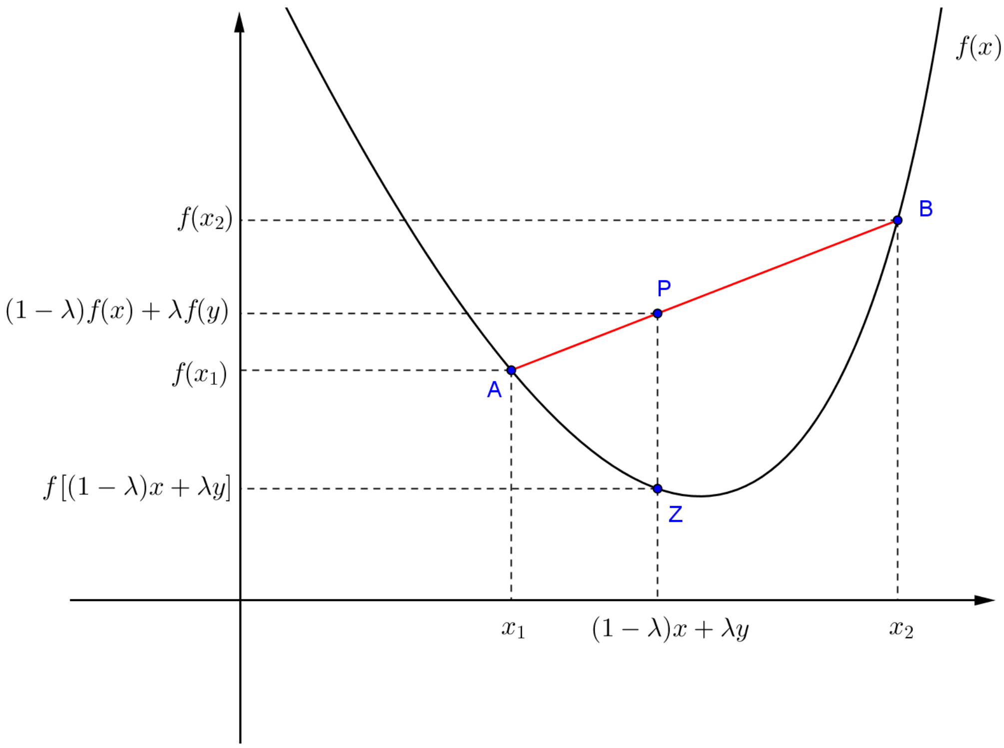
$$[x, y] := \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$$

nazivamo ***segment*** *(spojnica) s krajevima x i y.*

Definicija 1.1.3. *Kažemo da je skup $K \subseteq \mathbb{R}^2$* ***konveksan*** *ako za svaki $x, y \in K$ vrijedi:*

$$[x, y] \subseteq K.$$

Konveksnost funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ geometrijski gledano znači da ukoliko uzmemo bilo koje dvije točke $x, y \in I$ te pronađemo njima odgovarajuće funkcijske vrijednosti $f(x)$ i $f(y)$ tada će se sve točke, osim rubnih točaka, sekante s krajnjim točkama u $A(x, f(x))$ i $B(y, f(y))$ nalaziti iznad grafa funkcije f, a rubne točke sekante će se nalaziti na grafu funkcije f. Prikažimo valjanost definicije na grafu proizvoljne funkcije čija se sekanta nalazi iznad grafa te funkcije.



U tu svrhu uzmimo bilo koju točku z iz segmenta $[x, y] \in I$. Tada točku z možemo zapisati kao:

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y,$$

za neki $\lambda \in [0, 1]$. Vrijednost te točke na sekanti $\overline{AB}$ je:

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

S druge strane vrijednost funkcije u toj točki je:

$$f(z) = f\left[(1-\lambda)x + \lambda y\right].$$

Iz grafa funkcije vidimo da je vrijednost točke z na sekanti veća od vrijednosti točke z na grafu funkcije f. Budući da je točka z proizvoljno birana iz intervala $[x, y] \in I$ zaključujemo da je funkcijska vrijednost bilo koje točke iz intervala $[x, y]$ manja od vrijednosti te točke na sekanti, odnosno da su te vrijednosti jednake ako za točku z izaberemo jednu od rubnih točaka intervala $[x, y]$. Matematički zapisano vrijedi nejednakost:

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

što nam je upravo i definicija konveksne funkcije.

Konveksnim funkcijama se uvelike bavio danski matematičar J. L. W. V. Jensen (1859. - 1925.) kojeg se ujedno smatra i jednim od začetnika područja matematike koje se bavi konveksnim funkcijama. U člancima objavljenim 1905. i 1906. godine Jensen daje svoju definiciju konveksnih funkcija pomoću nejednakosti.

Definicija 1.1.4. *Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo **konveksnom u Jensenovom smislu** ili **J-konveksnom** na intervalu I ako za svaki $x, y \in I$ vrijedi:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{1.2}$$

*Funkcija f je **strogo J-konveksna** ako za svaki $x, y \in I, x \neq y$ vrijedi:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

*Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo **konkavnom u Jensenovom smislu** ili **J-konkavnom** na intervalu I ako $\forall x, y \in I$ vrijedi:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{1.3}$$

*Funkcija f je **strogo J-konkavna** ako $\forall x, y \in I, x \neq y$ vrijedi:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Da bi pokazali kako je svaka konveksna funkcija ujedno i J-konveksna koristiti ćemo formulu (1.1):

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Sada uzmimo $\lambda = \frac{1}{2}$. Uvrštavanjem u (1.1) dobivamo:

$$f\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2}y\right] \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

$$\Leftrightarrow f\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right] \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Ovime smo pokazali kako je svaka konveksna funkcija ujedno i J-konveksna. Dokaz da je svaka konkavna funkcija ujedno i J-konkavna je analogan prethodnom dokazu.
Nejednakost (1.1) možemo proširiti na konveksnu kombinaciju konačno mnogo točaka iz intervala I. Da bi to napravili prvo ćemo dokazati sljedeći teorem:

Teorem 1.1.5. [2] *Interval I je zatvoren s obzirom na konveksne kombinacije, odnosno:*

$$n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, ..., x_n \in I, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1], \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I. \tag{1.4}$$

Dokaz. Ovaj teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po n. Promotrimo slučaj $n = 1$. Ovaj slučaj je trivijalan jer imamo:

$$x_1 \in I, \lambda_1 \in [0,1], \sum_{k=1}^{1} \lambda_k = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \lambda_k x_k = x_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \lambda_k x_k \in I.$$

Nakon što smo pokazali da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ uočimo da u slučaju $n = 2$ tvrdnja vrijedi upravo iz definicije segmenta, odnosno imamo:

$$x_1, x_2 \in I, \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], \sum_{k=1}^{2} \lambda_k = 1 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - \lambda_2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (1 - \lambda_2) x_1 + \lambda_2 x_2,$$

prema prethodno spomenutoj definiciji vrijedi:

$$(1 - \lambda_2) x_1 + \lambda_2 x_2 \in [x_1, x_2] \Rightarrow \sum_{k=1}^{2} \lambda_k x_k \in I.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve konveksne kombinacije gdje je $n \in \mathbb{N}$, odnosno da vrijedi (1.4). Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. U tu svrhu uzmimo da su $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in I$ i $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ takvi da je $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. Razlikovat ćemo 3 slučaja u ovisnosti o λ_{n+1}.

(i) $\lambda_{n+1} = 0$

U ovom slučaju imamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I,$$

pa tvrdnja vrijedi po pretpostavci indukcije.

(ii) $\lambda_{n+1} \in \langle 0, 1 \rangle$

Sada imamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Budući da je

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \lambda_{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} = 1,$$

po pretpostvci vrijedi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \right) \in I.$$

Nadalje znamo i da je $x_{n+1} \in I$ pa je po bazi indukcije za slučaj $n = 2$:

$$(1 - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in I,$$

a to smo upravo i trebali pokazati.

(iii) $\lambda_{n+1} = 1$

Ako je $\lambda_{n+1} = 1$, tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, pa dobivamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \lambda_{n+1} x_{n+1} = x_{n+1}.$$

Budući da je po pretpostavci

$$x_{n+1} \in I,$$

vrijedi nam

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \in I \ \ za \ \ \lambda_{n+1} = 1.$$

Po principu matematičke indukcije pokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Lema 1.1.6. [8] ***Diskretan slučaj Jensenove nejednakosti****:*
Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ *je* ***konveksna*** *ako i samo ako za sve* $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ *i za sve* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0, 1]$ *takve da je* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ *vrijedi:*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{1.5}$$

U nejednakosti (1.5) *vrijedi* ***stroga nejednakost*** *ako je* f *strogo konveksna funkcija, ako su sve točke* $x_1, x_2, ..., x_n$ *međusobno različite te ako su svi skalari* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \langle 0, 1]$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ovaj dio dokaza je poprilično trivijalan jer ukoliko uzmemo da je $n = 2$ tada imamo:

$$x_1, x_2 \in I, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \sum_{k=1}^{2} \lambda_k = 1 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - \lambda_2.$$

Sredimo li malo izraz (1.5) za $n = 2$ dobijemo:

$$f\left(\sum_{k=1}^{2} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2} \lambda_k f(x_k)$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

$$f[(1 - \lambda_2) x_1 + \lambda_2 x_2] \leq (1 - \lambda_2) f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Nejednakost koju smo dobili je upravo izraz (1.1) pa je prema definiciji 1.1.1 f konveksna funkcija.

($\Rightarrow$) U ovom smjeru dokaza neka je funkcija f konveksna. Dokaz ćemo napraviti principom matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N}$. Ovaj dokaz se svodi na korištenje definicije 1.1.1 i na korištenje dokaza teorema 1.1.5 Za početak uzmimo da je $n = 2$ pa iz definicije 1.1.1 imamo:

$$f[(1 - \lambda_2) x_1 + \lambda_2 x_2] \leq (1 - \lambda_2) f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^{2} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2} \lambda_k f(x_k),$$

a to smo upravo htjeli i pokazati.
Sada pretpostavimo da vrijedi (1.5) za neki $n \in \mathbb{N}$ te dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Neka su $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in I$ i $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ takvi da je $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. Opet kao i u dokazu teorema 1.1.5 dokazujemo za 3 različita slučaja pa ćemo se i pozivati na dokaz tog teorema:

(i) $\lambda_{n+1} = 0$

Znamo iz dokaza teorema 1.1.5 da je:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right).$$

Također znamo da je:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Sada po pretpostavci indukcije imamo:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k),$$

a to je upravo ono što smo htjeli pokazati.

(ii) $\lambda_{n+1} \in \langle 0, 1\rangle$

Ponovno iz dokaza teorema 1.1.5 znamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left((1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right).$$

Iz definicije 1.1.1 primijenimo formulu (1.1) i pretpostavku indukcije te dobijemo:

$$\begin{aligned} f\left((1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\right)+\lambda_{n+1}x_{n+1}\right) &\leq (1-\lambda_{n+1})\, f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\right)+\lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right) \\ &\leq (1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f\left(x_k\right)\right)+\lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(x_k\right)+\lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f\left(x_k\right), \end{aligned}$$

iz čega nam slijedi

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f\left(x_k\right).$$

(iii) $\lambda_{n+1}=1$

Ako je $\lambda_{n+1}=1$, tada je $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$, pa znamo:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right)=f\left(\lambda_{n+1}x_{n+1}\right)=f\left(x_{n+1}\right),$$

također znamo i:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f\left(x_k\right)=\lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right)=f\left(x_{n+1}\right).$$

Budući da smo pokazali:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f\left(x_k\right),$$

sigurno vrijedi i

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f\left(x_k\right).$$

čime smo pokazali našu tvrdnju za $\lambda_{n+1}=1$. Po principu matematičke indukcije zaključujemo da nejednakost (1.5) vrijedi za svaki $n\in\mathbb{N}$. □

Smatra se da je specijalan slučaj diskretnog slučaja Jensenove nejednakosti prva nejednakost koja se pojavila u matematičkoj literaturi vezana za konveksne funkcije te je i danas jedan od najčešće korištenih oblika u rješavanju zadataka vezanih uz nejednakosti, a taj oblik se dobije kada je za svaki $k = 1, ..., n,\ \lambda_k = \frac{1}{n}$, odnosno tada je:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}.$$

1.2 Svojstva konveksnih funkcija i Hermite-Hadamardova nejednakost

U ovome dijelu rada ćemo navesti neka od bitnih svojstava konveksnih funkcija. Sva svojstva neće biti dokazana već će za neka od njih biti navedena literatura gdje se mogu pronaći njihovi dokazi. Također ćemo iskazati i dokazati jedan od bitnijih nam teorema za ovaj rad pod nazivom Hermite-Hadamardova nejednakost [3], [5], [8] i [10].

Teorem 1.2.1. [8] *Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna. Funkcija f je konveksna ako i samo ako je J-konveksna.*

Dokaz.
($\Rightarrow$) Ovaj dio teorema smo već ranije dokazali, tj. neka je f konveksna tada za $\lambda = \frac{1}{2}$ imamo da je funkcija i J-konveksna.

($\Leftarrow$) U ovom dijelu dokaza krećemo od činjenice da je funkcija f J-konveksna. Dokazat ćemo našu tvrdnju tako da pretpostavimo suprotno, odnosno da f nije konveksna. Ukoliko f nije konveksna tada postoji podinterval $[a, b] \in I$ takav da se graf od $f|_{[a,b]}$ ne nalazi cijeli ispod dužine s krajnjim točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Promotrimo sada za $x \in [a, b]$ sljedeću funkciju:

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a).$$

Ta funkcija poprima pozitivne vrijednosti za neke $x \in [a, b]$. Također primjetimo da je φ neprekidna te uvrštavanjem možemo vidjeti i da vrijedi $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Ukoliko umjesto x uzmemo neki $\frac{x+y}{2} \in [a, b]$ dobijemo

$$\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right) = f\left(\frac{x + y}{2}\right) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \left(\frac{x + y}{2} - a\right) - f(a).$$

Iskoristimo sada činjenicu da je f J-konveksna odnosno da vrijedi:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Dobivamo izraz:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\left(\frac{x+y}{2}-a\right) - f(a) \\
&\leq \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\left(\frac{x+y-a-a}{2}\right) - \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{2}f(a) \\
&\leq \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) \\
&- \frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(y-a) - \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{2}f(a) \\
&\leq \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) - f(a)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[f(y) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(y-a) - f(a)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(y).
\end{aligned}$$

Kako je funkcija φ neprekidna funkcija, prema Bolzano-Weierstrasseovom teoremu postiže svoj maksimum m na segmentu $[a,b]$. Uočimo da je $m > 0$ jer φ poprima i pozitivne vrijednosti. Nadalje neka je:

$$c = \min\{x \in [a,b] \,|\varphi(x) = m\}.$$

Po definiciji od c za svaki $h > 0$ za koje je $c \pm h \in (a,b)$ imamo:

$$\varphi(c-h) < \varphi(c) \quad i \quad \varphi(c+h) \leq \varphi(c).$$

Zbrajanjem tih dviju jednakosti dobivamo

$$\varphi(c) > \frac{\varphi(c-h)+\varphi(c+h)}{2}.$$

Ukoliko uzmemo za $x = c - h$ i $y = c + h$ dobijemo kontradikciju s činjenicom da je φ J-konveksna. Time smo dokazali da je f konveksna funkcija. $\square$

Propozicije koje ćemo sada izreći i dokazati nam govore o nekim svojstvima konveksnih funkcija [10], [12].

Propozicija 1.2.2. *Neka su funkcije f i g konveksne na intervalu I. Tada je:*

1. $x \mapsto h(x) = max(f(x), g(x))$ *konveksna na I*;
2. $x \mapsto h(x) = f(x) + g(x)$ *konveksna na I*;
3. $x \mapsto h(x) = f(x) \cdot g(x)$ *konveksna na I pod uvjetom da su f i g pozitivne i rastuće funkcije na I.*

Dokaz. Neka su $x, y \in I$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

1. Neka je $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \max\{f[(1-\lambda)x + \lambda y], g[(1-\lambda)x + \lambda y]\}$. Budući da su funkcije f i g konveksne na I znamo da nam po definiciji 1.1.1 vrijedi:

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

$$g[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y),$$

odnosno da je:

$$\begin{aligned} &\max\{f[(1-\lambda)x + \lambda y], g[(1-\lambda)x + \lambda y]\} \\ &\qquad \leq \max\{(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)\}. \end{aligned}$$

Sada ćemo iskoristiti relaciju koja vrijedi za sve realne brojeve x, y, u, v, a ona glasi:

$$\max\{x + y, u + v\} \leq \max\{x, u\} + \max\{y, v\}$$

Dobijemo:

$$\begin{aligned} \max\{f[(1-\lambda)x + \lambda y], g[(1-\lambda)x + \lambda y]\} &\\ &\leq \max\{(1-\lambda)f(x), (1-\lambda)g(x)\} + \max\{\lambda f(y), \lambda g(y)\} \\ &\leq (1-\lambda)\max\{f(x), g(x)\} + \lambda \max\{f(y), g(y)\} \\ &\leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y). \end{aligned}$$

Odnosno dobili smo

$$h[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y),$$

pa je prema definiciji 1.1.1 tvrdnja dokazana.

2. Neka je $h(x) = f(x) + g(x)$, tada je:

$$h(x) = h[(1-\lambda)x + \lambda y] = f[(1-\lambda)x + \lambda y] + g[(1-\lambda)x + \lambda y].$$

Budući da su funkcije f i g konveksne na I znamo da nam po definiciji 1.1.1 vrijedi:

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

$$g[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

Zbrojimo li te dvije nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} f[(1-\lambda)x + \lambda y] + g[(1-\lambda)x + \lambda y] &\leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) + (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y) \\ &\leq (1-\lambda)(f(x) + g(x)) + \lambda(f(y) + g(y)) \\ &\leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y). \end{aligned}$$

Odnosno dobili smo

$$h[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y),$$

pa je prema definiciji 1.1.1 tvrdnja dokazana.

3. Uz uvjet da su funkcije f i g pozitivne i rastuće, bez smanjenja općenitosti uzmimo $x \leq y$, nam vrijedi:

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow [f(x) - f(y)] \leq 0$$

$$g(x) \leq g(y) \Rightarrow [g(y) - g(x)] \geq 0.$$

Pomnožimo li prvu nejednakost s $[g(y) - g(x)]$ dobivamo:

$$[f(x) - f(y)] \cdot [g(y) - g(x)] \leq 0,$$

odnosno

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y).$$

Promotrimo sada funkciju $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Tada je:

$$h(x) = h[(1-\lambda)x + \lambda y] = f[(1-\lambda)x + \lambda y] \cdot g[(1-\lambda)x + \lambda y].$$

Znamo iz slučaja 2. da su:

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

$$g[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

Pomnožimo li te dvije nejednakosti dobivamo:

$$
\begin{aligned}
& f[(1-\lambda)x+\lambda y]\cdot g[(1-\lambda)x+\lambda y] \\
& \quad \leq (1-\lambda)^2 f(x)g(x)+\lambda(1-\lambda)f(x)g(y)+\lambda(1-\lambda)f(y)g(x)+\lambda^2 f(y)g(y) \\
& \quad \leq (1-\lambda)^2 f(x)g(x)+\lambda(1-\lambda)\left[f(x)g(y)+f(y)g(x)\right]+\lambda^2 f(y)g(y) \\
& \quad \leq (1-\lambda)^2 f(x)g(x)+\lambda(1-\lambda)\left[f(x)g(x)+f(y)g(y)\right]+\lambda^2 f(y)g(y) \\
& \quad \leq f(x)g(x)-\lambda f(x)g(x)+\lambda f(y)g(y) \\
& \quad \leq (1-\lambda)f(x)g(x)+\lambda f(y)g(y) \\
& \quad \leq (1-\lambda)h(x)+\lambda h(y).
\end{aligned}
$$

Odnosno dobili smo

$$h\left[(1-\lambda)\,x+\lambda y\right] \leq (1-\lambda)h\,(x)+\lambda h\,(y)\,,$$

pa je prema definiciji 1.1.1 tvrdnja dokazana.

□

Propozicija 1.2.3. *Ako je funkcija f konveksna na I i g rastuća na $f(I)$, tada je $g \circ f$ konveksna na I.*

Dokaz. Znamo da je:

$$(g\circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[f[(1-\lambda)x+\lambda y]\right].$$

Funkcija f konveksna na I znači da vrijedi:

$$f[(1-\lambda)x+\lambda y] \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

Budući da je g rastuća na $f(I)$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
g\left[f[(1-\lambda)x+\lambda y]\right] &\leq g\left[(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\right] \\
&\leq (1-\lambda)(g\circ f)(x)+\lambda(g\circ f)(y),
\end{aligned}
$$

odnosno dobili smo

$$(g \circ f)(x) \leq (1 - \lambda)(g \circ f)(x) + \lambda(g \circ f)(y),$$

čime smo dokazali našu tvrdnju. $\square$

Sljedeći teorem koji ćemo iskazati i dokazati bit će nam potreban u 4. dijelu ovog rada.

Teorem 1.2.4. ***Hermite-Hadamardova nejednakost***
Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna i neprekidna funkcija, tada je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Dokaz. Prvo dokazujemo nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt.$$

Iz definicije 1.1.1 za f nam vrijedi nejednakost:

$$f[(1 - \lambda) x + \lambda y] \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

Sada napravimo sljedeću supstituciju:

$$x = ta + (1 - t) b$$

$$y = (1 - t) a + tb$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda = \frac{1}{2}.$$

Tada je

$$(1 - \lambda) x + \lambda y = \frac{1}{2} (ta + (1 - t) b) + \frac{1}{2} ((1 - t) a + tb) = \frac{1}{2} (a + b).$$

Budući da je

$$f[(1 - \lambda) x + \lambda y] = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

vrijedi nam sljedeća nejednakost

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y) \\ &\leq \frac{1}{2} f(ta + (1 - t) b) + \frac{1}{2} f((1 - t) a + tb). \end{aligned}$$

Integrirajmo cijelu nejednakost po t od 0 do 1:

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt. \tag{1.6}$$

Rješavamo integrale iz nejednakosti:

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Idući integral ćemo rješiti uz supstituciju

$$z = ta+(1-t)b \quad \Rightarrow \quad t = \frac{b-z}{b-a} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{-dz}{b-a},$$

te dobivamo

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt = \int_b^a f(z)\frac{-dz}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)\,dz.$$

Na analogni način za preostali integral dobivamo

$$\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)\,dz.$$

Uvrstimo li dobivene integrale u nejednakost 1.6 dobit ćemo

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)\,dz + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)\,dz$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)\,dz,$$

čime smo dokazali prvu nejednakost. U nastavku ćemo dokazati preostalu nejednakost, odnosno

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Za $x \in [a,b]$, postoji $\lambda \in [0,1]$, takav da je $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Po definiciji 1.1.1 imamo

$$f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b),$$

ali također vrijedi i

$$f\left((1-\lambda)\,a+\lambda b\right)\leq(1-\lambda)\,f\,(a)+\lambda f\,(b)\,.$$

Zbrojimo li te dvije nejednakosti i integriramo po λ od 0 do 1 dobit ćemo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\lambda a+(1-\lambda)b)d\lambda\,&+\int_0^1 f\left((1-\lambda)\,a+\lambda b\right)d\lambda\\&\leq\int_0^1\left[\lambda f\,(a)+(1-\lambda)\,f\,(b)\right]d\lambda\,+\int_0^1\left[(1-\lambda)\,f\,(a)+\lambda f\,(b)\right]d\lambda.\end{aligned}$$

Iz dokaza prve nejednakosti nam slijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(\lambda)\,d\lambda+\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(\lambda)\,d\lambda\,&\leq f\,(a)\int_0^1(\lambda)\,d\lambda\,+f\,(b)\int_0^1(1-\lambda)\,d\lambda\\&+f\,(a)\int_0^1(1-\lambda)\,d\lambda\,+f\,(b)\int_0^1(\lambda)\,d\lambda,\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f\,(\lambda)\,d\lambda\,\leq\frac{1}{2}f\,(a)+f\,(b)-\frac{1}{2}f\,(b)+f\,(a)-\frac{1}{2}f\,(a)+\frac{1}{2}f\,(b)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(\lambda)\,d\lambda\,\leq\frac{f\,(a)+f\,(b)}{2},$$

čime smo dokazali drugu nejednakost, a samim time i početnu tvrdnju. □

Za kraj ovog dijela rada samo ćemo navesti neke zanimljive i korisne nam korolare i teoreme, njihovi dokazi mogu se naći u [12].

Korolar 1.2.5. *Neka je $f:I\to\mathbb{R}$ konveksna funkcija, i neka je $a\in I$. Tada funkcija $g:I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ definirana jednadžbom*

$$g\,(x)=\frac{f\,(x)-f\,(a)}{x-a}\quad\text{za svaki }x\in I\setminus\{a\}\,,$$

je rastuća.

Korolar 1.2.6. *Neka je $f:I\to\mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada, na unutrašnjosti od I, f je neprekidna i funkcije f'_-, f'_+ su rastuće.*

Teorem 1.2.7. *Neka je $f:I\to\mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. f je konveksna ako i samo ako f' je rastuća funkcija.*

Korolar 1.2.8. *Neka je $f:I\to\mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna funkcija. f je konveksna ako i samo ako $f''\,(x)\geq 0$ za svaki $x\in I$.*

Poglavlje 2

Sredine

2.1 Osnovno o sredinama

U ovome poglavlju proučavat ćemo različite pojmove i to isključivo na skupu pozitivnih realnih brojeva, odnosno na $\mathbb{R}^+$. Kao uvod u ovo poglavlje mogu nam poslužiti dvije najčešće korištene sredine i veza između njih. To su **aritmetička** i **geometrijska sredina**. Pretpostavlja se da su se aritmetičkom i geometrijskom sredinom prvi bavili Pitagorejci, dok se sa sigurnošću zna da je nejednakost između tih sredina dokazao Euklid.

Aritmetička sredina dvaju brojeva $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ je definirana kao $A(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{2}$, dok je **geometrijska sredina** tih brojeva definirana kao $G(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Sada ćemo i izreći i dokazati teorem poznat pod nazivom AG-nejednakost.

Teorem 2.1.1. ***(AG-nejednakost)***
Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ tada vrijedi:

$$A(x_1, x_2) \geq G(x_1, x_2), \textit{odnosno}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.

Dokaz. Ovaj teorem je jednostavno za dokazati, te ga je kako smo i napomenuli još davno dokazao Euklid. Budući da su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, tada je

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$$

$$x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

U gornjim nejednakostima znak jednakosti vrijedi samo ako je

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 = 0,$$

to jest kada je $x_1 = x_2$ $\square$

Uz aritmetičku i geometrijsku sredinu još su dvije sredine često korištene, a to su **harmonijska** i **kvadratna sredina** [4] i [11].
Harmonijska sredina dvaju brojeva $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ je definirana kao

$$H(x_1, x_2) = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}},$$

dok je **kvadratna sredina** tih brojeva definirana kao

$$K(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{2}}.$$

Sljedeći teorem koji ćemo izreći i dokazati je teorem o odnosu prethodno navedenih sredina.

Teorem 2.1.2. [6] *Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ tada vrijedi:*

$$H(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2) \leq A(x_1, x_2) \leq K(x_1, x_2)\,, \textit{odnosno}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{2}}.$$

Jednakost vrijedi samo kada je $x_1 = x_2$.

Ovaj teorem ćemo dokazati koristeći geometrijski dokaz, odnosno konkretno koristeći Pitagorin poučak i Euklidov poučak.

Dokaz.
Prvo ćemo promatrati slučaj kada su x_1 i x_2 različiti pozitivni brojevi. Na proizvoljnom pravcu p konstruiramo dužinu $\overline{OG}$ duljine x_1 i dužinu $\overline{GB}$ duljine x_2, $x_1 \neq x_2$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo $x_1 > x_2$. Sada koristeći Euklidov poučak konstruiramo dužinu

$\overline{GM}$ na način da konstruiramo kružnicu k sa središtem u polovištu A dužine $\overline{OB}$ i polumjera $|OA|$. Točku M dobijemo kao presjek kružnice k i okomice na pravac p kroz točku G. Primijetimo da je:

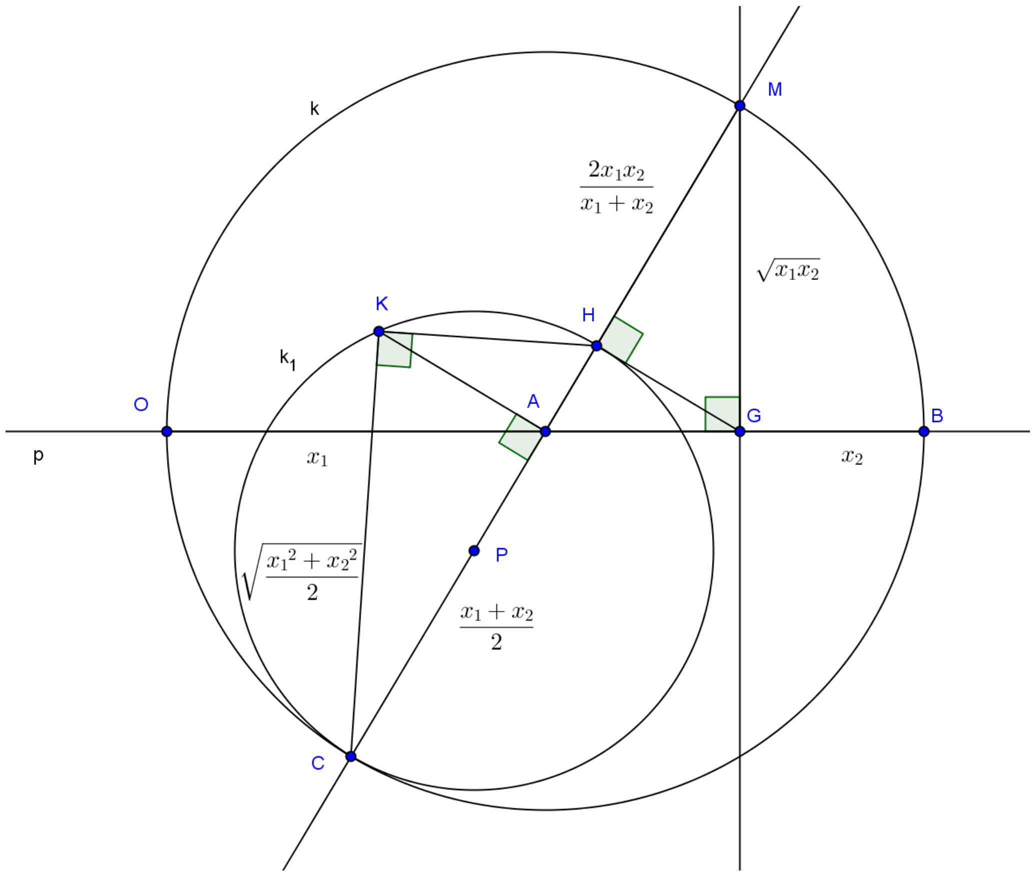
$$|OA| = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

jer je A polovište $\overline{OB}$, a $|OB| = x_1 + x_2$. Također zbog toga što se točka M nalazi na kružnici $k\,(A, |OA|)$ imamo:

$$|AM| = |OA| = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Prema Euklidovom poučku dobivamo:

$$|GM| = \sqrt{x_1 x_2}.$$



Nadalje konstruirajmo točku H tako da je H nožište visine trokuta AGM spuštene iz vrha G. Budući da su trokuti AGM i GMH slični prema poučku o kutevima trokuta (svi kutevi su im sukladni, odnosno $\angle AGM \cong \angle MHG$ i $\angle GMA \cong \angle GMH$) vrijedi sljedeći omjer:

$$\frac{|HM|}{|GM|} = \frac{|GM|}{|AM|}, \quad tj. \quad |HM| = \frac{|GM|^2}{|AM|}$$

$$|HM| = \frac{\left(\sqrt{x_1x_2}\right)^2}{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{x_1x_2}{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2},$$

odnosno $|HM|$ možemo zapisati i kao:

$$|HM| = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Posljednja konstrukcija koju provodimo je konstrukcija trokuta HKC i to na način da je točka $C \in k \cap AM, C \neq M$. P je polovište dužine $|HC|$. Konstruiramo kružnicu k_1 $(P, |PH|)$ i točku K tako da je $K \in k_1$ i A je ortogonalna projekcija točke K na pravac AM. Trokut HKC je pravokutan trokut s pravim kutem u vrhu K jer je $\angle HKC$ obodni kut nad promjerom kružnice k_1. Budući da su trokuti HKC i AKC slični prema poučku o kutevima trokuta (svi kutevi su im sukladni, odnosno $\angle HKC \cong \angle CAK$ i $\angle KCH \cong \angle KCA$) vrijedi sljedeći omjer:

$$\frac{|KC|}{|CA|} = \frac{|CH|}{|KC|}$$

$$|KC|^2 = |CA| \cdot |CH| = |CA| \cdot (|CA| + |AH|)$$

$$|KC|^2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right)$$

$$|KC|^2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cdot \left(x_1 + x_2 - \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right) = \frac{(x_1+x_2)^2}{2} - x_1x_2$$

$$|KC|^2 = \frac{{x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2}{2} = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{2}$$

$$|KC| = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{2}}.$$

Sada promotrimo trokut HGM iz čega nam slijedi $|HM| < |GM|$. Iz trokuta AGM imamo $|GM| < |AM|$, a iz trokuta AKC dobivamo $|AC| < |KC|$. Obzirom da je $|AC| = |AM|$ dobivamo nejednakost:

$$|HM| < |GM| < |AM| < |KC|,$$

odnosno

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} < \sqrt{x_1x_2} < \frac{x_1+x_2}{2} < \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{2}}.$$

U slučaju da je $x_1 = x_2$ imali bi:

$$|HM| = |GM| = |AM| = |KC|,$$

odnosno

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{2}}.$$

Time je tvrdnja teorema dokazana za sve pozitivne realne brojeve. □

2.2 Težinske sredine i definicija sredina

Proširimo sada prethodno spominjane sredine na tzv. težinske sredine.

Definicija 2.2.1. *Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ i $p, q \in [0, 1]$ takvi da vrijedi $p+q = 1$. Tada sljedeće težinske sredine definiramo kao:*

(A) ***Težinska aritmetička sredina****:*

$$A(x, y; p, q) = px + qy.$$

(G) ***Težinska geometrijska sredina****:*

$$G(x, y; p, q) = x^p \cdot y^q.$$

(H) ***Težinska harmonijska sredina****:*

$$H(x, y; p, q) = \frac{1}{\frac{p}{x} + \frac{q}{x}}.$$

Brojeve p i q nazivamo ***težine****.*

Teorem 2.2.2. [4] *Neka su $x, y \in \mathbb{R}^+$ i $p, q \in [0, 1]$ takvi da je $p + q$=1. Tada vrijedi:*

$$A(x, y; p, q) \geq G(x, y; p, q),$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

Dokaz. Ukoliko je $p = 0 \Rightarrow q = 1$ ili $q = 0 \Rightarrow p = 1$ tvrdnja je očita. Za $p, q \neq 0$ promotrimo funkciju $f(t) = pt^q + qt^{-p}$ za $t > 0$. Deriviranjem te funkcije dobijemo:

$$f'(t) = p \cdot q \cdot t^{q-1} - p \cdot q \cdot t^{-p-1}.$$

Sada nađimo intervale monotonosti funkcije f. Da bi našli te intervale tražimo najprije ekstreme funkcije f, odnosno njezine stacionarne točke.

$$f'(t) = 0$$

$$p \cdot q \cdot t^{q-1} - p \cdot q \cdot t^{-p-1} = 0$$
$$p \cdot q \cdot t^{q-1} = p \cdot q \cdot t^{-p-1}$$

podijelimo li cijelu jednadžbu s $p \cdot q$ dobivamo:

$$t^{q-1} = t^{-p-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{t^q}{t} = \frac{1}{t \cdot t^p} \quad \Rightarrow \quad t \cdot t^{q+p} = t$$
$$t^{q+p} = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

Stacionarna točka funkcije f je 1 i funkcija pada na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, a raste na intervalu $\langle 1, \infty\rangle$. Iz toga slijedi da za svaki $t \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(t) \geq f(1).$$

Zbog toga što je:

$$f(1) = p \cdot 1^q + q \cdot 1^{-p} = q + p = 1,$$

zaključujemo $f(t) \geq 1$ za svaki $t \in \mathbb{R}^+$. Napravimo li supstituciju $t = \frac{x}{y}$ dobit ćemo:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = p \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^q + q \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-p} \geq 1$$

$$p \cdot \frac{x^q}{y^q} + q \cdot \frac{y^p}{x^p} \geq 1 \quad / \cdot x^p y^q$$
$$p \cdot x^q \cdot x^p + q \cdot y^q \cdot y^p \geq x^p y^q$$
$$px + qy \geq x^p y^q,$$

što je trebalo i dokazati. □

Kao posljedicu prethodnog teorema navodimo teorem koji ćemo kasnije koristiti kod gama funkcije.

Teorem 2.2.3. *Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}^+$ neprekidne nenegativne funkcije za koje su integrali $\int_a^b f(t)\,dt, \int_a^b g(t)\,dt$, za $t \in I$, pozitivni brojevi. Neka su p, q pozitivni brojevi za koje vrijedi $p + q = 1$. Tada je*

$$\int_a^b f(t)^p g(t)^q \, dt \leq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^p \cdot \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^q.$$

Dokaz. U prethodnom teoremu dokazali smo tvrdnju

$$x^p y^q \leq px + qy.$$

Napravimo sada supstituciju

$$x = \frac{f(t)}{\int_a^b f(t)\,dt}, \qquad y = \frac{g(t)}{\int_a^b g(t)\,dt},$$

te dobijemo

$$\left(\frac{f(t)}{\int_a^b f(t)\,dt}\right)^p \left(\frac{g(t)}{\int_a^b g(t)\,dt}\right)^q \leq p\frac{f(t)}{\int_a^b f(t)\,dt} + q\frac{g(t)}{\int_a^b g(t)\,dt}.$$

Integriramo li obje strane po t od a do b dobivamo

$$\int_a^b \left(\frac{f(t)}{\int_a^b f(t)\,dt}\right)^p \left(\frac{g(t)}{\int_a^b g(t)\,dt}\right)^q dt \leq \int_a^b \left(p\frac{f(t)}{\int_a^b f(t)\,dt}\right) dt + \int_a^b \left(q\frac{g(t)}{\int_a^b g(t)\,dt}\right) dt.$$

Iz činjenice da su $\int_a^b f(t)\,dt, \int_a^b g(t)\,dt$, za $t \in I$, pozitivni brojevi slijedi

$$\begin{aligned}\frac{\int_a^b f(t)^p g(t)^q \, dt}{\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^p \cdot \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^q} &\leq \frac{p}{\int_a^b f(t)\,dt} \cdot \int_a^b f(t)\,dt + \frac{q}{\int_a^b g(t)\,dt} \cdot \int_a^b g(t)\,dt \\ &\leq p + q = 1\end{aligned}$$

Pomnožimo li cijelu nejednadžbu s nazivnikom razlomka s desne strane nejednadžbe, a to smijemo jer je nazivnik pozitivan broj, dobit ćemo

$$\int_a^b f(t)^p g(t)^q \, dt \leq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^p \cdot \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^q,$$

a to smo upravo i trebali dokazati. □

Sada kada smo se podsjetili osnovnih sredina definirat ćemo tzv. *funkciju sredina*, odnosno definirati sredinu. U daljnjem tekstu radi lakšeg razlikovanja uglavnom ćemo umjesto x_1, x_2 koristiti notaciju x, y.

Definicija 2.2.4. *Funkciju* $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *nazivamo* ***sredina*** *ako posjeduje ova svojstva:*

1. $M(x, y) = M(y, x)$ *za sve* $x, y \in \mathbb{R}^+$,
2. $M(x, x) = x$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}^+$,
3. *ako je* $x < y$ *tada je* $x < M(x, y) < y$,
4. $M(ax, ay) = aM(x, y)$, *za svaki* $a > 0$.

2.3 Težinske sredine reda t

Težinske sredine, koje smo spomenuli prije definicije sredine, odnosno njihove generalizacije, su specijalni slučajevi *težinskih sredina reda t*, a njihova definicija glasi.

Definicija 2.3.1. *Neka je* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *niz pozitivnih realnih brojeva i neka su* $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ *pozitivne težine. Tada za svaki realni broj t,* ***težinska sredina*** $M^{[t]}(x)$ ***reda t*** *je definirana:*

$$M^{[t]}(x; p) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^{\frac{1}{t}} \qquad (t \neq 0)$$

$$M^{[t]}(x; p) = \left(\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{p_i} \right)^{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \qquad (t = 0).$$

Kao što smo napomenuli kada bi u prethodnoj definiciji težinskih sredina reda t promatrali sredine kod kojih vrijedi $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1$ dobili bi tzv. netežinske sredine, odnosno za određene t-ove bi dobili generalizacije sredina spomenutih na početku poglavlja (aritmetička, geometrijska, harmonijska i kvadratna).

Teorem 2.3.2. [7], [11] *Neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ niz pozitivnih realnih brojeva i neka su $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ pozitivne težine.*

(i) Ako je $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_0$ tada je:

$$M^{[t]}(x; p) = x_0.$$

(ii) Inače je $M^{[t]}(x; p)$ strogo rastuća funkcija u varijabli t, odnosno za $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$ vrijedi:

$$M^{[t_1]}(x; p) \leq M^{[t_2]}(x; p).$$

Dokaz.
(i) Ova stavka teorema je trivijalana, odnosno ako je $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_0$, tada za $t \neq 0$ imamo:

$$\begin{aligned} M^{[t]}(x; p) &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i {x_i}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{t}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i {x_0}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \left(\frac{p_1 {x_0}^t + p_2 {x_0}^t + ... + p_n {x_0}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \left(\frac{{x_0}^t \cdot \sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{t}} = \left({x_0}^t\right)^{\frac{1}{t}} = x_0. \end{aligned}$$

Ukoliko uzmemo da je $t = 0$ imamo:

$$\begin{aligned} M^{[t]}(x; p) &= \left(\prod_{i=1}^n {x_i}^{p_i}\right)^{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} = \left(\prod_{i=1}^n {x_0}^{p_i}\right)^{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} \\ &= \left({x_0}^{p_1} \cdot {x_0}^{p_2} \cdot ... \cdot {x_0}^{p_n}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} \\ &= \left({x_0}^{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} = x_0, \end{aligned}$$

čime smo dokazali tvrdnju (i).

(ii) Promotrimo sljedeće funkcije definirane sa:

$$f(t) = \left(\frac{p_1 {x_1}^t + p_2 {x_2}^t + ... + p_n {x_n}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$F(t) = t^2 \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Sredimo li funkciju $F(t)$ dobijemo:

$$F(t) = t^2 \frac{f'(t)}{f(t)} = t^2 \left[\frac{d}{dt} (\ln f) \right]$$

$$= t^2 \left[\frac{d}{dt} \left(\ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}{\sum_{i=1}^n p_i} \right)^{\frac{1}{t}} \right) \right] = t^2 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}{\sum_{i=1}^n p_i} \right) \right]$$

$$= t^2 \cdot \left[-\frac{1}{t^2} \cdot \ln \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}{\sum_{i=1}^n p_i} + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} \cdot \sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t \ln x_i \right]$$

$$= t \left[-\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}{\sum_{i=1}^n p_i} + \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t} \right]$$

$$= -\ln \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}{\sum_{i=1}^n p_i} + t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}.$$

Budući da je $f'(t) = \dfrac{F(t) \cdot f(t)}{t^2}$, a znamo da je $t^2 > 0$ i $f(t) > 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, $f'(t)$ i $F(t)$ imaju isti predznak. Prema tome dovoljno je za dokazati da je $F(t) > 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Promotrimo čemu je jednak F':

$$F'(t) = \left(-\ln \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}{\sum_{i=1}^n p_i} + t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t} \right)'$$

$$= -\frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} + \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t}$$

$$+ t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t \ln^2 x_i \cdot \sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t - \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t \ln x_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i{}^t\right)^2}$$

$$= -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t} + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t}$$

$$+\, t \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t - (\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i)^2}{(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t)^2}$$

$$= \frac{t}{(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t)^2} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i \right)^2 \right] \tag{2.1}$$

Prisjetimo se Cauchy-Schwarz-Buniakowskijevog teorema koji glasi:

Teorem 2.3.3. ***(CSB-nejednakost)***
Za bilo koja dva konačna niza realnih brojeva $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, te za niz pozitivnih realnih brojeva $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ vrijedi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {a_i}^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {b_i}^2 \right),$$

pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda kada su nizovi a i b proporcionalni.

Ako za nizove a i b uzmemo:

$$a_i = ({x_i}^t)^{\frac{1}{2}}$$

$$b_i = ({x_i}^t)^{\frac{1}{2}} \ln x_i$$

dobivamo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, ({x_i}^t)^{\frac{1}{2}} \, ({x_i}^t)^{\frac{1}{2}} \ln x_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i \right).$$

Iz čega nam slijedi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i \right)^2 \ge 0.$$

S obzirom da je u (2.1) x niz različitih pozitivnih brojeva i da su p pozitivne težine možemo zaključiti da vrijedi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i\right)^2 > 0.$$

Na osnovu toga zaključujemo da $F'(t)$ ima isti predznak kao i t. Što znači da je funkcija F strogo rastuća za $t > 0$ i strogo padajuća za $t < 0$, te ima minimum za $t = 0$. U sljedećem dijelu dokaza izračunati ćemo $f'(0)$. Prvo zamijetimo da je

$$f(t)=\left(\frac{p_1{x_1}^t+p_2{x_2}^t+...+p_n{x_n}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^{\frac{1}{t}}=\exp\left[\frac{1}{t}\ln\left(\frac{p_1{x_1}^t+p_2{x_2}^t+...+p_n{x_n}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)\right].$$

Deriviranjem dobivamo

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\left[\left(\frac{1}{t}\right)'\cdot\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)+\frac{\frac{1}{t}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)}\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)'\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{t^2}\cdot\ln\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}+\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{t\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t\ln x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right]$$

$$=\left[\frac{-\ln\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\cdot\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t+t\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t\ln x_i}{t^2\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}\right]$$

Ukoliko sada pustimo $t\to 0$ dobivamo: $\dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{0}{0}$, što znači da možemo primijeniti L'Hopitalovo pravilo za limese pa dobivamo:

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{-\frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t\ln x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\cdot\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t-\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)\cdot\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t\ln x_i}{2t\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t+t^2\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t\ln x_i}\right.$$

$$\left.+\frac{\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t\ln x_i+t\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t\ln^2 x_i}{2t\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t+t^2\sum_{i=1}^n p_i{x_i}^t\ln x_i}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i - \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)\cdot \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i}{2t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t + t^2 \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i}\right.$$

$$\left. + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i + t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i}{2t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t + t^2 \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{-\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)\cdot \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i + t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i}{t\left(2\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t + t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i\right)}\right]$$

Sada opet primijenjujemo L'Hopitalovo pravilo i dobivamo:

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{-\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\cdot \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i}{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} - \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)\cdot \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i}{W}\right.$$

$$\left. + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i + t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^3 x_i}{W}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t} - \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)\cdot \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i}{W}\right.$$

$$\left. + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i + t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^3 x_i}{W}\right]$$

Gdje je

$$W = 2\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t + t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i + t\left(2\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln x_i + t\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^t \ln^2 x_i\right).$$

Pustimo $t \to 0$ i dobivamo:

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i} + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln^2 x_i}{2\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

$$= \frac{-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln^2 x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}{2\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

$$= \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln^2 x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i}{2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2.}$$

Pomnožimo cijelu jednadžbu s $f(0)$ i uvrstimo umjesto $f(0)$ izraz iz definicije 2.3.1 te dobijemo:

$$f'(0) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \cdot \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln^2 x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i}{2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2}$$

Zaključujemo $f'(0) > 0$ ako je produkt s desne strane jednadžbe veći od 0. Obzirom da smo cijelo vrijeme radili s pozitivnim realnim brojevima i težinama znamo da je desna strana jednadžbe veća od nule ako je:

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln^2 x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i > 0,$$

odnosno

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln^2 x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i\right)^2 > 0.$$

Prema CSB-nejednakosti vrijedi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln^2 x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i\right)^2 \geq 0,$$

dok znak jednakosti vrijedi samo kada su nizovi $\sqrt{p_i}$ i $\sqrt{p_i} \cdot \ln x_i$ proporcionalni, odnosno kada je $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_0$. Prema pretpostavci teorema u slučaju (*ii*) ne vrijedi $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_0$. Vratimo se natrag promatranju funkcije F. Dobili smo da F ima minimum u 0 i znamo da je

$$F(0) = 0^2 \cdot \frac{f'(0)}{f(0)}.$$

Sada smo izračunali da je $f'(0)$ realni pozitivni broj, te je uz to $f(0) \neq 0$, pa je $F(0) = 0$. Iz ispitivanja monotonosti funkcije F slijedi da je $F(t) > F(0) = 0$ za svaki t. Iz relacije

$$F(t) = t^2 \cdot \frac{f'(t)}{f(t)},$$

te znajući da su

$$F(t), t^2, f(t) > 0,$$

slijedi da je $f'(t)$ pozitivna za $t \neq 0$, a u prethodnom tekstu imamo da je f' pozitivna i za $t = 0$, čime smo dobili da je $f'(t) > 0$ za svaki t. Dakle f je strogo rastuća što je trebalo i dokazati. □

U ovome radu od posebnog interesa će nam biti težinske sredine kod kojih vrijedi $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ pa ćemo shodno tome dati specijalan slučaj definicije 2.3.1.

Definicija 2.3.4. *Neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ niz pozitivnih realnih brojeva i neka su $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ pozitivne težine takve da vrijedi $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Tada za svaki realni broj t,* ***težinska sredina*** *$M^{[t]}(x)$* ***reda t*** *je definirana:*

$$M^{[t]}(x;p) = \left(p_1 {x_1}^t + p_2 {x_2}^t + ... + p_n {x_n}^t\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (t \neq 0)$$

$$M^{[t]}(x;p) = {x_1}^{p_1} \cdot {x_2}^{p_2} \cdot ... \cdot {x_n}^{p_n} \qquad (t = 0)$$

Ako u prethodnoj definiciji za t uzmemo $t = -1, 0, 1$ dobivamo redom harmonijsku, geometrijsku i aritmetičku težinsku sredinu. Budući da smo do sada definirali i dokazali sve potrebne teoreme prelazimo na glavni dio ovog rada, odnosno na konveksne funkcije pridružene paru sredina.

Poglavlje 3

(M,N) - konveksnost

3.1 Definicija i primjena na A,G i H sredine

Nakon što smo ponovili neke osnovne sredine i dali definiciju sredina povežimo sredine s konveksnim funkcijama. U tu svrhu ćemo definirati konveksne funkcije na paru sredina M, N, odnosno (M, N)-konveksne funkcije.

Definicija 3.1.1. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}^+$ neprekidna, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}^+$ i neka su M i N dvije funkcije sredina. Kažemo da je funkcija f (M, N)-konveksna ako za sve $x, y \in I$ vrijedi:*

$$f(M(x, y)) \leq N(f(x), f(y)).$$

Kažemo da je funkcija f (M, N)-konkavna ako za sve $x, y \in I$ vrijedi:

$$f(M(x, y)) \geq N(f(x), f(y)).$$

Prethodna definicija se po potrebi pretvara u definiciju (M, N)-konveksnih funkcija gdje su pritom M i N težinske sredine. U idućem teoremu proučit ćemo kriterije konveksnosti (konkavnosti) kada zamijenimo M i N sredine s poznatim nam aritmetičkim, harmonijskim i geometrijskim težinskim sredinama. To nam daje 9 različitih mogućnosti. No prije samog teorema proširimo definiciju J-konveksne funkcije sa težinama p i q.

Definicija 3.1.2. *Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo **J-konveksnom** na intervalu I ako $\forall x, y \in I$ i pozitivne težine p, q takve da je $p + q = 1$ vrijedi:*

$$f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y). \tag{3.1}$$

*Funkcija f je **strogo J-konvkesna** ako $\forall x, y \in I, x \neq y$ i pozitivne težine p, q takve da je $p + q = 1$ vrijedi:*

$$f(px + qy) < pf(x) + qf(y).$$

*Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo **J-konkavnom** na intervalu I ako $\forall x, y \in I$ i pozitivne težine p, q takve da je $p + q = 1$ vrijedi:*

$$f(px + qy) \geq pf(x) + qf(y). \tag{3.2}$$

*Funkcija f je **strogo J-konkavna** ako $\forall x, y \in I, x \neq y$ i pozitivne težine p, q takve da je $p + q = 1$ vrijedi:*

$$f(px + qy) > pf(x) + qf(y).$$

Svojstva J-konveksnih funkcija su nasljedna i kada se ona definira u ovisnosti o težinama, odnosno svaka konveksna funkcija u ovisnosti o težinama je ujedno i J-konveksna, te također ako je funkcija u ovisnosti o težinama neprekidna onda je ona konveksna ako i samo ako je J-konveksna.

Teorem 3.1.3. [1] *Neka je I otvoren podinterval od $\mathbb{R}^+$ i neka je funkcija f neprekidna. U slučajevima (4) - (9), neka je $I = \langle 0, b \rangle$, $0 < b < \infty$. Tada je:*

1. *f je AA-konveksna (konkavna) ako i samo ako je f konveksna (konkavna).*
2. *f je AG-konveksna (konkavna) ako i samo ako je $\ln f$ konveksna (konkavna).*
3. *f je AH-konveksna (konkavna) ako i samo ako je $\dfrac{1}{f}$ konkavna (konveksna).*
4. *f je GA-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je $f(be^{-t})$ konveksna (konkavna) na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$.*
5. *f je GG-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je $\ln f(be^{-t})$ konveksna (konkavna) na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$.*
6. *f je GH-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je $\dfrac{1}{f(be^{-t})}$ konkavna (konveksna) na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$.*
7. *f je HA-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ konveksna (konkavna) na intervalu $\left\langle \frac{1}{b}, \infty \right\rangle$.*
8. *f je HG-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je $\ln f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ konveksna (konkavna) na intervalu $\left\langle \frac{1}{b}, \infty \right\rangle$.*

9. *f je HH-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je* $\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ *konkavna (konveksna) na intervalu* $\left\langle \frac{1}{b}, \infty \right\rangle$.

Dokaz. Dokazivat ćemo samo konveksnost, konkavnost se dokazuje analogno.

1. Imamo: $A(x, y; p, q) = px+qy$. Sada u definiciju (M, N)-konveksnih funkcija umjesto M, N uvrštavamo $A(x, y; p, q)$ i dobivamo:

$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(A(x, y; p, q)) \leq A(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y).$$

Zbog funkcijske nejednakosti koju smo dobili prema definiciji 3.1.2 funkcija f je konveksna, čime smo dokazali našu tvrdnju.

2. Provjeravamo (M, N)-konveksnost za $M = A(x, y; p, q) = px+qy$ i $N = G(x, y; p, q) = x^p y^q$:

$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(A(x, y); p, q) \leq G(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(px + qy) \leq (f(x))^p \cdot (f(y))^q$$
$$\ln[f(px + qy)] \leq \ln[(f(x))^p \cdot (f(y))^q]$$
$$\ln[f(px + qy)] \leq \ln(f(x))^p + \ln(f(y))^q$$
$$\ln[f(px + qy)] \leq p\ln f(x) + q\ln f(y)$$

Prema (3.1) za $f(x) = \ln f(x)$ tvrdnja je dokazana.

3. Provjeravamo (M, N)-konveksnost za $M = A(x, y; p, q) = px+qy$ i $N = H(x, y; p, q) = \frac{1}{\frac{p}{x}+\frac{q}{y}}$:

$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(A(x, y; p, q)) \leq H(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(px + qy) \leq \frac{1}{\frac{p}{f(x)} + \frac{q}{f(y)}}$$
$$\frac{1}{f(px + qy)} \geq \frac{p}{f(x)} + \frac{q}{f(y)}$$
$$\frac{1}{f(px + qy)} \geq p\frac{1}{f(x)} + q\frac{1}{f(y)}$$

Prema (3.2) za $f(x) = \frac{1}{f(x)}$ tvrdnja je dokazana.

4. Provjeravamo (M, N)-konveksnost za $M = G(x, y; p, q) = x^p y^q$ i $N = A(x, y; p, q) = px + qy$:

$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(G(x, y)) \leq A(f(x), f(y))$$

$$f(x^p y^q) \leq pf(x) + qf(y) \qquad (*)$$

Promotrimo sada sljedeće stvari. Znamo da je po težinskoj AG-nejednakosti $px + qy \geq x^p y^q$. Napravimo supstituciju $x = be^{-t_1}, y = be^{-t_2}, b, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$. Sada smo dobili sljedeću nejednakost:

$$pbe^{-t_1} + qbe^{-t_2} \geq (be^{-t_1})^p \cdot (be^{-t_2})^q.$$

Budući da je $f(t) = be^{-t}$ padajuća funkcija na $\mathbb{R}^+$ tada vrijedi:

$$f(pbe^{-t_1} + qbe^{-t_2}) \leq f\left[(be^{-t_1})^p \cdot (be^{-t_2})^q\right].$$

Uvrstimo supstituciju u (*) i dobijemo:

$$f(x^p y^q) \leq pf(x) + qf(y)$$
$$f\left[(be^{-t_1})^p \cdot (be^{-t_2})^q\right] \leq pf(be^{-t_1}) + qf(be^{-t_2})$$
$$f(pbe^{-t_1} + qbe^{-t_2}) \leq pf(be^{-t_1}) + qf(be^{-t_2})$$

Prema (3.1) za $f(x) = f(be^{-t})$ tvrdnja je dokazana.

5. Provjeravamo (M, N)-konveksnost za $M = G(x, y; p, q) = x^p y^q$ i $N = G(x, y) = x^p y^q$:

$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(G(x, y)) \leq G(f(x), f(y))$$
$$f(x^p y^q) \leq (f(x))^p \cdot (f(y))^q$$

Prema dokazu slučaja (4) za $x = be^{-t_1}, y = be^{-t_2}, b, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ dobijemo:

$$f(pbe^{-t_1} + qbe^{-t_2}) \leq [f(be^{-t_1})]^p \cdot [f(be^{-t_2})]^q$$

Prema dokazu slučaja (2) dobijemo:

$$\ln f(pbe^{-t_1} + qbe^{-t_2}) \leq p \ln f(be^{-t_1}) + q \ln f(be^{-t_2})$$

Prema (3.1) za $f(x) = \ln f(be^{-t})$ tvrdnja je dokazana.

6. Provjeravamo (M, N)-konveksnost za $M = G(x, y; p, q) = x^p y^q$ i $N = H(x, y; p, q) = \frac{1}{\frac{p}{x}+\frac{q}{y}}$:
$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(G(x, y; p, q)) \leq H(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(x^p y^q) \leq \frac{1}{\frac{p}{f(x)} + \frac{q}{f(y)}}$$
Prema dokazu slučaja (4) za $x = be^{-t_1}, y = be^{-t_2}, b, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ dobijemo:
$$f\left(pbe^{-t_1} + qbe^{-t_2}\right) \leq \frac{1}{\frac{p}{f\left(be^{-t_1}\right)} + \frac{q}{f\left(be^{-t_2}\right)}}$$
Prema dokazu slučaja (3) dobijemo:
$$\frac{1}{f(pbe^{-t_1} + qbe^{-t_2})} \geq \frac{p}{f(be^{-t_1})} + \frac{q}{f(be^{-t_2})}$$
$$\frac{1}{f(pbe^{-t_1} + qbe^{-t_2})} \geq p\frac{1}{f(be^{-t_1})} + q\frac{1}{f(be^{-t_2})}$$
Prema (3.2) za $f(x) = \frac{1}{f(be^{-t})}$ tvrdnja je dokazana.

7. Provjeravamo (M, N)-konveksnost za $M = H(x, y; p, q) = \frac{1}{\frac{p}{x}+\frac{q}{y}}$ i $N = A(x, y; p, q) = px + qy$:
$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(H(x, y; p, q)) \leq A(f(x), f(y); p, q)$$
$$f\left(\frac{1}{\frac{p}{x} + \frac{q}{y}}\right) \leq pf(x) + qf(y)$$
U idućem koraku ćemo napraviti supstituciju funkcije $f(x)$ sa funkcijom $f\left(\frac{1}{x}\right)$ i dobivamo:
$$f\left(\frac{1}{\frac{p}{\frac{1}{x}} + \frac{q}{\frac{1}{y}}}\right) \leq pf\left(\frac{1}{x}\right) + qf\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$f\left(\frac{1}{px + qy}\right) \leq pf\left(\frac{1}{x}\right) + qf\left(\frac{1}{y}\right)$$
Neka je sada $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, i neka su $x, y \in \left(\frac{1}{b}, \infty\right)$, takvi da je $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in (0, b)$. Tada je funkcija f HA-konveksna na $(0, b)$ ako i samo ako:
$$g(px + qy) \leq pg(x) + qg(y)$$
Prema (3.1) za $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ tvrdnja je dokazana.

8. Provjeravamo (M, N)-konveksnost za $M = H(x, y; p, q) = \frac{1}{\frac{p}{x}+\frac{q}{y}}$ i $N = G(x, y; p, q) = x^p y^q$:
$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(H(x, y; p, q)) \leq G(f(x), f(y); p, q)$$
$$f\left(\frac{1}{\frac{p}{x}+\frac{q}{y}}\right) \leq (f(x))^p \cdot (f(y))^q$$
U idućem koraku ćemo napraviti supstituciju funkcije $f(x)$ sa funkcijom $f\left(\frac{1}{x}\right)$ i dobivamo:
$$f\left(\frac{1}{px+qy}\right) \leq \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^p \cdot \left[f\left(\frac{1}{y}\right)\right]^q$$
Prema dokazu slučaja (2) dobijemo:
$$\ln f\left(\frac{1}{px+qy}\right) \leq p \ln f\left(\frac{1}{x}\right) + q \ln f\left(\frac{1}{y}\right)$$
Neka je sada $g(x) = \ln f\left(\frac{1}{x}\right)$, i neka su $x, y \in \left(\frac{1}{b}, \infty\right)$, takvi da je $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in (0, b)$. Tada je funkcija f HG-konveksna na $(0, b)$ ako i samo ako:
$$g(px+qy) \leq pg(x) + qg(y)$$
Prema (3.1) za $f(x) = \ln f\left(\frac{1}{x}\right)$ tvrdnja je dokazana.

9. Provjeravamo MN-konveksnost za $M = H(x, y; p, q) = \frac{1}{\frac{p}{x}+\frac{q}{y}}$ i $N = H(x, y; p, q) = \frac{1}{\frac{p}{x}+\frac{q}{y}}$:
$$f(M(x, y; p, q)) \leq N(f(x), f(y); p, q)$$
$$f(H(x, y; p, q)) \leq H(f(x), f(y); p, q)$$
$$f\left(\frac{1}{\frac{p}{x}+\frac{q}{y}}\right) \leq \frac{1}{\frac{p}{f(x)}+\frac{q}{f(y)}}$$
U idućem koraku ćemo napraviti supstituciju funkcije $f(x)$ sa funkcijom $f\left(\frac{1}{x}\right)$ i dobivamo:
$$f\left(\frac{1}{px+qy}\right) \leq \frac{1}{\frac{p}{f\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{q}{f\left(\frac{1}{y}\right)}}$$
Prema dokazu slučaja (3) dobijemo:
$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{px+qy}\right)} \geq \frac{p}{f\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{q}{f\left(\frac{1}{y}\right)}$$

Neka je sada $g(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$, i neka su $x, y \in \left(\frac{1}{b}, \infty\right)$, takvi da je $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in (0, b)$. Tada je funkcija f HH-konveksna na $(0, b)$ ako i samo ako:

$$g(px + qy) \leq pg(x) + qg(y)$$

Prema (3.2) za $f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ tvrdnja je dokazana.

□

Sada ćemo samo navesti neka od svojstava koja vrijede za prethodno dokazane (M, N)-konveksne funkcije, gdje su M, N kombinacije sredina A, G i H. Korolar koji ćemo izreći je direktna posljedica svojstava konveksnih funkcija izrečenih u prvom poglavlju ovog rada.

Korolar 3.1.4. [1] *Neka je I otvoren podinterval od $\mathbb{R}^+$ i neka je funkcija f diferencijabilna. U slučajevima (4) - (9), neka je $I = \langle 0, b\rangle$, $0 < b < \infty$. Tada je:*

1. *f je AA-konveksna (konkavna) ako i samo ako je* $f'(x)$ *rastuća (padajuća).*
2. *f je AG-konveksna (konkavna) ako i samo ako je* $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *rastuća (padajuća).*
3. *f je AH-konveksna (konkavna) ako i samo ako je* $\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ *rastuća (padajuća).*
4. *f je GA-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je* $xf'(x)$ *rastuća (padajuća).*
5. *f je GG-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je* $\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ *rastuća (padajuća).*
6. *f je GH-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je* $\dfrac{xf'(x)}{[f(x)]^2}$ *rastuća (padajuća).*
7. *f je HA-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je* $x^2 f'(x)$ *rastuća (padajuća).*
8. *f je HG-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je* $\dfrac{x^2 f'(x)}{f(x)}$ *rastuća (padajuća).*
9. *f je HH-konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je* $\dfrac{x^2 f'(x)}{[f(x)]^2}$ *rastuća (padajuća).*

Dokazat ćemo samo dvije stavke ovog teorema koje ćemo koristiti u poglavlju 4.

Dokaz.
(2) Prema teoremu 3.1.3 funkcija f je (A,G)-konveksna ako i samo ako je funkcija $\ln f$ konveksna, tj. ako i samo ako je njezina derivacija rastuća funkcija. Deriviramo li funkciju $\ln f$ dobivamo $\dfrac{f'}{f}$ čime je dokazana tvrdnja 2. ovog korolara.

(5) Prema teoremu 3.1.3 funkcija f (G, G)-konveksna ako i samo ako je funkcija $\ln f(be^{-t})$ konveksna, tj. ako i samo ako je njezina derivacija rastuća funkcija. Deriviranjem dobivamo funkciju

$$h(t) = -be^{-t}\frac{f'(be^{-t})}{f(be^{-t})},$$

koju možemo zapisati kao kompoziciju funkcija $\varphi(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)}$ i $\psi(x) = be^{-x}$, tj. $h = -\varphi \circ \psi$. Očito je funkcija ψ padajuća.

Da bi dokazali našu tvrdnju moramo dokazati dva smjera jednakosti $h = -\varphi \circ \psi$, odnosno moramo dokazati da φ rastuća $\Rightarrow$ h rastuća, te da h rastuća $\Rightarrow$ φ rastuća.

Ako je φ rastuća, uz činjenicu da je ψ padajuća zaključujemo da je $\varphi \circ \psi$ padajuća, a iz toga slijedi da je $-\varphi \circ \psi$ rastuća, tj. h je rastuća, odnosno $\ln f(be^{-t})$ je konveksna. Time je dokazan jedan smjer.

Ako je $\ln f(be^{-t})$ konveksna, tada je h rastuća, tj. $-h = \varphi \circ \psi$ je padajuća. Uz to ψ je padajuća bijekcija pa je ψ^{-1} padajuća, te je φ rastuća, čime je dokazan i drugi smjer tvrdnje 5. □

Također budući da smo ranije dokazali da je $H(x, y; p, q) \leq G(x, y; p, q) \leq A(x, y; p, q)$ vrijede nam i sljedeće posljedice [1].

Napomena 3.1.5.

1. *Funkcija f je AH-konveksna $\Rightarrow$ f je AG-konveksna $\Rightarrow$ f je AA-konveksna.*
2. *Funkcija f je GH-konveksna $\Rightarrow$ f je GG-konveksna $\Rightarrow$ f je GA-konveksna.*
3. *Funkcija f je HH-konveksna $\Rightarrow$ f je HG-konveksna $\Rightarrow$ f je HA-konveksna.*

   Za konkavnost vrijede obrnute implikacije, odnosno:

4. *Funkcija f je AA-konkavna $\Rightarrow$ f je AG-konkavna $\Rightarrow$ f je AH-konkavna.*

5. *Funkcija f je GA-konkavna $\Rightarrow$ f je GG-konkavna $\Rightarrow$ f je GH-konkavna.*

6. *Funkcija f je HA-konkavna $\Rightarrow$ f je HG-konkavna $\Rightarrow$ f je HH-konkavna.*

   Također ukoliko je funkcija f rastuća (padajuća) i N proizvoljna sredina tada vrijedi:

7. *Funkcija f je AN-konveksna (konkavna) $\Rightarrow$ f je GN-konveksna (konkavna) $\Rightarrow$ f je HN-konveksna (konkavna).*

3.2 Konveksne funkcije na paru sredina reda t

Sredine reda t, odnosno potencijalne sredine $M^{[t]}$ mogu se dalje poopćiti do tzv. kvazi-aritmetičkih sredina.

Definicija 3.2.1. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna, strogo monotona funkcija, i neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n-torka brojeva iz I, a $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ n-torka nenegativnih brojeva za koje vrijedi $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 0$. Tada se kvazi-aritmetička sredina definira ovako:*

$$Q^{[\varphi]}(x;\lambda) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i)\right).$$

Očito je potencijalna sredina $M^{[t]}$ u stvari kvazi-aritmetička sredina za $\varphi(x) = x^t$, ako je $t \neq 0$, i $\varphi(x) = \ln x$, za $t = 0$.

Lema 3.2.2. [8] *Neka su φ, ψ dvije neprekidne i strogo monotone funkcije redom na intervalima I i J, te je ψ rastuća. Tada funkcija $f : I \to J$ je $\left(Q^{[\varphi]}, Q^{[\psi]}\right)$-konveksna ako i samo ako $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ je konveksna na $\varphi(I)$.*

Dokaz. Za ovu lemu ćemo dokazati da svugdje vrijedi ekvivalencija između tvrdnji koje ćemo dati, odnosno istovremeno dokazujemo oba smjera tvrdnje. Uzmimo f je $\left(Q^{[\varphi]}, Q^{[\psi]}\right)$-konveksna:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow f\left(Q^{[\varphi]}(x,y)\right) \leq Q^{[\psi]}(f(x), f(y)) \\
&\Leftrightarrow f\left(\varphi^{-1}(\lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\varphi(y))\right) \leq \psi^{-1}\left[\lambda_1\psi(f(x)) + \lambda_2\psi(f(y))\right] \quad / \circ \psi \\
&\Leftrightarrow \psi\left[f\left(\varphi^{-1}(\lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\varphi(y))\right)\right] \leq \lambda_1\psi(f(x)) + \lambda_2\psi(f(y)) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju:

$$u = \varphi(x), \quad v = \varphi(y),$$

odnosno

$$x = \varphi^{-1}(u), \quad y = \varphi^{-1}(v).$$

Uvrstimo li supstituciju u 3.3 dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \psi\left[f\left(\varphi^{-1}\left(\lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\varphi(y)\right)\right)\right] \leq \lambda_1\psi(f(x)) + \lambda_2\psi(f(y)) \\
&\Leftrightarrow \psi\left[f\left(\varphi^{-1}\left(\lambda_1\varphi\left(\varphi^{-1}(u)\right) + \lambda_2\varphi\left(\varphi^{-1}(v)\right)\right)\right)\right] \leq \lambda_1\psi\left[f\left(\varphi^{-1}(u)\right)\right] + \lambda_2\psi\left[f\left(\varphi^{-1}(v)\right)\right] \\
&\Leftrightarrow \psi\left[f\left(\varphi^{-1}(\lambda_1 u + \lambda_2 v)\right)\right] \leq \lambda_1\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(u) + \lambda_2\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(v) \\
&\Leftrightarrow \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \leq \lambda_1\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(u) + \lambda_2\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(v) \\
&\Leftrightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \ \textit{je konveksna na} \ \varphi(I),
\end{aligned}$$

čime je naša tvrdnja dokazana. □

Za kraj ovog poglavlja proučimo još neke propozicije vezane uz konveksne funkcije na paru sredina [8].

Propozicija 3.2.3. *Neka je f funkcija, $f : I \to J$, i neka su $p, q \in \mathbb{R}$ takvi da je $p < q$. Ako je f rastuća i $\left(M^{[q]}, M\right)$-konveksna tada je f i $\left(M^{[p]}, M\right)$-konveksna.*

Dokaz.
f je $\left(M^{[q]}, M\right)$-konveksna iz čega slijedi

$$f\left(M^{[q]}(x, y)\right) \leq M(f(x), f(y))$$

$$f\left[(\lambda_1 x^q + \lambda_2 y^q)^{\frac{1}{q}}\right] \leq M(f(x), f(y)).$$

Promotrimo sada sredine $M^{[p]}(x, y)$ i $M^{[q]}(x, y)$. Znamo da za njih, zbog $p < q$, po teoremu 2.3.2 vrijedi sljedeća nejednakost:

$$M^{[p]}(x, y) \leq M^{[q]}(x, y)$$

$$(\lambda_1 x^p + \lambda_2 y^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\lambda_1 x^q + \lambda_2 y^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Sada na tu nejednakost djelujemo s funkcijom f, pa budući da je f rastuća dobivamo:

$$f\left[(\lambda_1 x^p + \lambda_2 y^p)^{\frac{1}{p}}\right] \leq f\left[(\lambda_1 x^q + \lambda_2 y^q)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Iz toga nam direktno slijedi

$$f\left[(\lambda_1 x^p + \lambda_2 y^p)^{\frac{1}{p}}\right] \leq f\left[(\lambda_1 x^q + \lambda_2 y^q)^{\frac{1}{q}}\right] \leq M\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right),$$

pa samim time i

$$f\left[(\lambda_1 x^p + \lambda_2 y^p)^{\frac{1}{p}}\right] \leq M\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right)$$

$$f\left(M^{[p]}\left(x, y\right)\right) \leq M\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right),$$

a to znači da je f i $\left(M^{[p]}, M\right)$-konveksna. □

Napomena 3.2.4. *U prethodnoj propoziciji analogno vrijedi ako je f padajuća i* $\left(M^{[p]}, M\right)$*-konveksna tada je* f *i* $\left(M^{[q]}, M\right)$*-konveksna.*

Propozicija 3.2.5. *Neka je f funkcija,* $f : I \to J$*, i neka su* $p, q \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $p \leq q$*. Ako je* f $\left(A, M^{[p]}\right)$*-konveksna tada je* f *i* $\left(A, M^{[q]}\right)$*-konveksna.*

Dokaz.
f je $\left(A, M^{[p]}\right)$-konveksna iz čega nam slijedi:

$$f\left(\alpha x + \beta y\right) \leq M^{[p]}\left(f\left(x\right) f\left(y\right); \alpha, \beta\right).$$

Budući da vrijedi $p \leq q$ po teoremu 2.3.2 dobivamo

$$M^{[p]}\left(f\left(x\right) f\left(y\right); \alpha, \beta\right) \leq M^{[q]}\left(f\left(x\right) f\left(y\right); \alpha, \beta\right),$$

a samim time i

$$f\left(\alpha x + \beta y\right) \leq M^{[q]}\left(f\left(x\right) f\left(y\right); \alpha, \beta\right),$$

a to znači da je f i $\left(A, M^{[q]}\right)$-konveksna. □

Poglavlje 4

(A,G) i (G,G) konveksne funkcije

4.1 Log-konveksne i multiplikativno konveksne funckije

U ovome poglavlju bavit ćemo se raznim primjerima (A, G) i (G, G) konveksnih funkcija. Za početak ćemo ponoviti njihove definicije.

Definicija 4.1.1. (A, G)*-konveksne funkcije, obično znane kao* ***log-konveksne*** *funkcije, su one funkcije* $f : I \to \mathbb{R}^+$ *za koje*

$$x, y \in I, \lambda \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq [f(x)]^{1-\lambda} \cdot [f(y)]^{\lambda},$$

odnosno za koje je funkcija $\ln f$ *konveksna.*

Uočimo da je ova definicija proizašla direktno iz dokaza teorema 3.1.3, pa ju samom time možemo preoblikovati i u definiciju u ovisnosti o težinama. Na sličan način po uzoru na spomenuti teorem ćemo definirati i (G, G)-konveksne funkcije.

Definicija 4.1.2. (G, G)*-konveksne funkcije, obično znane kao* ***multiplikativno (geometrijski) konveksne*** *funkcije, su one funkcije* $f : I \to J$*,* I *i* J *su podintervali od* $\mathbb{R}^+$*, za koje*

$$x, y \in I, \lambda \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad f\left(x^{1-\lambda} \cdot y^{\lambda}\right) \leq [f(x)]^{1-\lambda} \cdot [f(y)]^{\lambda}.$$

Ekvivalent prethodnoj definciji bi bio da je $f(x)$ multiplikativno konveksna ako i samo ako je $\ln f(x)$ konveksna funkcija od $\ln x$.

Gama i Beta funkcija

Najčešće korišteni primjeri log-konveksnih funkcija su Eulerova *gama funkcija*, te *beta funkcija* [8] i [12]. U ovom dijelu rada ćemo ih definirati i pokazati da su log-konveksne.

Definicija 4.1.3. ***Gama*** *funkcija* $\Gamma : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ *je definirana relacijom:*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad \text{za } \ x > 0.$$

Teorem 4.1.4. *Gama funkcija ima sljedeća svojstva:*

1. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad$ za $\quad x > 0.$

2. $\Gamma(1) = 1.$

3. Γ *je* log-*konveksna.*

Dokaz.

1. Za $x > 0$ imamo:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{x+1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$$

Koristimo parcijalnu integraciju:

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = t^x & du = xt^{x-1} dt \\ dv = e^{-t} dt & v(t) = -e^{-t} \end{array} \right|$$

i dobivamo

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= [u(t) v(t)] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty v(t) u'(t) du \\ &= [-t^x e^{-t}] \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \cdot \Gamma(x). \end{aligned}$$

2. Sljedeće svojstvo je poprilično očito:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt$$

$$\Gamma(1) = -e^{-t}|_0^\infty = \left[\lim_{a \to -\infty} (-e^a) \right] - \left(-e^0 \right) = 0 + 1 = 1$$

3. Neka su $x, y > 0$ i neka su $\lambda, \mu \geq 0$ takvi da vrijedi $\lambda + \mu = 1$. Da bi Γ bila log-konveksna traba vrijediti nejednakost

$$\Gamma\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq \Gamma^{1-\lambda}(x) \cdot \Gamma^{\lambda}(y),$$

odnosno znamo li da je $\lambda + \mu = 1 \Rightarrow \mu = 1 - \lambda$ treba vrijediti

$$\Gamma(\mu x + \lambda y) \leq \Gamma^{\mu}(x) \cdot \Gamma^{\lambda}(y).$$

Raspišemo lijevu stranu nejednadžbe

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mu x + \lambda y) &= \int_0^{\infty} t^{\mu x + \lambda y - 1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} t^{\mu x + \lambda y - \mu - \lambda} e^{-t(\mu + \lambda)} dt \\
&= \int_0^{\infty} t^{\mu x - \mu} t^{\lambda y - \lambda} e^{-t\mu} e^{-t\lambda} dt \\
&= \int_0^{\infty} \left(t^{x-1} e^{-t}\right)^{\mu} \cdot \left(t^{y-1} e^{-t}\right)^{\lambda} dt
\end{aligned}$$

Koristimo teorem 2.2.3 i dobivamo:

$$\int_0^{\infty} \left(t^{x-1} e^{-t}\right)^{\mu} \cdot \left(t^{y-1} e^{-t}\right)^{\lambda} dt \leq \left(\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt\right)^{\mu} \cdot \left(\int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t} dt\right)^{\lambda} = \Gamma^{\mu}(x) \cdot \Gamma^{\lambda}(y),$$

odnosno dobili smo nejednakost

$$\Gamma(\mu x + \lambda y) \leq \Gamma^{\mu}(x) \cdot \Gamma^{\lambda}(y),$$

a upravo smo to i trebali dokazati.

□

Definicija 4.1.5. ***Beta*** *funkcija je funkcija dviju varijabli definirana formulom:*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \qquad \text{za } \; x, y > 0.$$

Teorem 4.1.6. *Beta funkcija ima sljedeća svojstva:*

1. $B(x, y) = B(y, x)$ i $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.

2. $B(x, y)$ je log-konveksna funkcija od x za svaki fiksni y.

Dokaz.

1. Prvi dio dokaza ove tvrdnje je trivijalan, uz supstituciju $s = 1 - t$ dobivamo:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds = B(y,x)$$

Dokažimo i drugi dio tvrdnje, odnosno

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$$

Krenimo od lijeve strane

$$B(x+1,y) = \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x \cdot (1-t)^{x+y-1}\,dt$$

Provedimo parcijalnu integraciju

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = \left(\dfrac{t}{1-t}\right)^x & du = x\dfrac{t^{x-1}}{(1-t)^{x+1}}dt \\[2ex] dv = (1-t)^{x+y-1}\,dt & v(t) = -\dfrac{(1-t)^{x+y}}{x+y} \end{array} \right|$$

Nakon parcijalne integracije dobivamo

$$\begin{aligned} B(x+1,y) &= \left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \cdot \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]\Bigg|_0^1 + \int_0^1 -\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\cdot x\frac{t^{x-1}}{(1-t)^{x+1}}dt \\ &= \lim_{t\to 1}\left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \cdot \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y}\right] - 0 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}\cdot\frac{(1-t)^{x+y}}{(1-t)^{x+1}}dt \\ &= \frac{-1}{x+y}\left[\lim_{t\to 1} t^x(1-t)^{x+y-1}\right] + \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}\,dt \\ &= 0 + \frac{x}{x+y}B(x,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y), \end{aligned}$$

čime smo dokazali prvu tvrdnju.

2. Neka su $a, b, y > 0$ i neka su $\lambda, \mu \geq 0$ takvi da vrijedi $\lambda + \mu = 1$. Da bi B bila log-konveksna, budući da je B funkcija dviju varijabli želimo dokazati ovu nejednakost

$$B(\mu a + \lambda b, y) \leq B^{\mu}(a, y) \cdot B^{\lambda}(a, y).$$

Znamo da je $\lambda + \mu = 1 \Rightarrow \mu = 1 - \lambda$, pa raspišemo lijevu stranu jednadžbe kao i u dokazu za Γ je log-konveksna

$$\begin{aligned} B(\mu a + \lambda b, y) &= \int_0^1 t^{\mu a + \lambda b - 1} (1-t)^{y-1}\, dt \\ &= \int_0^1 t^{\mu a + \lambda b - \mu - \lambda} (1-t)^{\mu y + \lambda y - \mu - \lambda}\, dt \\ &= \int_0^1 t^{\mu a - \mu} t^{\lambda b - \lambda} (1-t)^{\mu y - \mu} (1-t)^{\lambda y - \lambda}\, dt \\ &= \int_0^1 \left(t^{a-1} (1-t)^{y-1}\right)^{\mu} \cdot \left(t^{b-1} (1-t)^{y-1}\right)^{\lambda} dt. \end{aligned}$$

Koristimo teorem 2.2.3 i dobivamo:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(t^{a-1} (1-t)^{y-1}\right)^{\mu} \cdot \left(t^{b-1} (1-t)^{y-1}\right)^{\lambda} dt \\ &\qquad \leq \left[\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{y-1}\, dt\right]^{\mu} \cdot \left[\int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{y-1}\, dt\right]^{\lambda} \\ &\qquad \leq B^{\mu}(a, y) \cdot B^{\lambda}(a, y), \end{aligned}$$

a upravo smo to i trebali dokazati.

$\square$

4.2 Primjena Hermite-Hadamardovog teorema na log-konveksne funkcije na paru sredina

Nakon gama i beta funkcija u sljedećem dijelu ovoga rada pokazat ćemo primjenu Hermite-Hadamardovog teorema na log-konveksne funkcije na paru sredina. Kao uvod u teoreme koje ćemo iskazati i dokazati prisjetimo se Hermite-Hadamardovog teorema:

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna i neprekidna funkcija, tada je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{4.1}$$

Primjetimo da ukoliko primijenimo gore navedenu nejednakost na log-konveksne funkcije $f : I \to \mathbb{R}^+$ dobit ćemo

$$\ln\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)\, dx \leq \frac{\ln f(a) + \ln f(b)}{2},$$

odkuda dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \exp\left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)\, dx\right] \leq \sqrt{f(a) f(b)}.$$

Budući da je *aritmetička sredina* definirana kao:

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2},$$

nejednakost 4.1 možemo zapisati

$$f(A(a, b)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b A(f(x), f(a+b-x))\, dx \leq A(f(a), f(b)),$$

jer je

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx.$$

U sljedećem teoremu dokazat ćemo slično proširenje Hermite-Hadamardove nejednakosti za log-konveksne funkcije i aritmetičke i geometrijske sredine. Prije samog teorema prisjetimo se da je *geometrijska sredina* definirana kao:

$$G(a, b) = \sqrt{ab}$$

Teorem 4.2.1. [5] *Neka je $f : I \to \mathbb{R}_0^+$ log-konveksna funkcija na I, i neka su $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Tada vrijedi nejednakost*

$$f(A(a,b)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx \leq G(f(a), f(b)).$$

Dokaz. Prvo dokazujemo nejednakost

$$\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx \leq G(f(a), f(b))$$

Budući da je f log-konveksna po definiciji 4.1.1 za svaki $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq [f(a)]^{1-\lambda} \cdot [f(b)]^{\lambda},$$

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq [f(x)]^{\lambda} \cdot [f(y)]^{1-\lambda}.$$

Pomnožimo li te dvije nejednakosti dobivamo

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \cdot f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq f(a) f(b).$$

Sada korjenujemo cijelu nejednakost te imamo

$$G(f(\lambda a + (1-\lambda)b), f((1-\lambda)a + \lambda b)) \leq G(f(a) f(b)).$$

Integriramo nejednakost po λ od 0 do 1 i dobivamo

$$\int_0^1 G(f(\lambda a + (1-\lambda)b), f((1-\lambda)a + \lambda b))\, d\lambda \leq \int_0^1 G(f(a) f(b))\, d\lambda$$

$$\int_0^1 G(f(\lambda a + (1-\lambda)b), f((1-\lambda)a + \lambda b))\, d\lambda \leq G(f(a) f(b)).$$

Napravimo supstituciju $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ za $\lambda \in [0,1]$ te nam slijedi

$$\int_0^1 G(f(\lambda a + (1-\lambda)b), f((1-\lambda)a + \lambda b))\, d\lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx,$$

odnosno

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx \leq G(f(a) f(b)),$$

a upravo smo to trebali i dokazati.

Još nam je preostalo dokazati

$$f(A(a,b)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx$$

Po definiciji 4.1.1 za log-konveksne funkcije vrijedi:

$$x, y \in I, \lambda \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq [f(x)]^{1-\lambda} \cdot [f(y)]^{\lambda}.$$

Sada napravimo sljedeću suptituciju:

$$x = \lambda a + (1-\lambda) b$$

$$y = (1-\lambda) a + \lambda b,$$

također uzmimo

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda = \frac{1}{2},$$

pa nam je

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$y = \frac{a+b}{2}.$$

Kad uvrstimo supstituciju u izraz za log-konveksne funkcije dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{4} + \frac{a+b}{4}\right) \leq \sqrt{f(x) f(y)}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq G(f(x), f(y))$$

$$f(A(a,b)) \leq G(f(\lambda a + (1-\lambda) b), f((1-\lambda) a + \lambda b)),$$

a po dokazu prve nejednakosti dobivamo

$$f(A(a,b)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx,$$

čime smo dokazali ovaj teorem. □

Prije nego što krenemo na nove teoreme definirat ćemo još jednu korisnu sredinu.

Definicija 4.2.2. ***Logaritamska sredina****, u oznaci $L(x,y)$, gdje su x i y strogo pozitivni brojevi je definirana kao*

$$L(x,y) = \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \qquad \text{za } x \neq y,$$

$$L(x,y) = x \qquad \text{za } x = y.$$

Generalizacija prethodne definicije na sredinu reda t, pritom su x i y strogo pozitivni brojevi, je dana sljedećom relacijom

$$L^{[t]}(x,y) = \begin{cases} \frac{t}{t+1} \cdot \frac{x^{t+1} - y^{t+1}}{x^t - y^t}, & t \neq 0, -1, \quad x \neq y \\ \frac{x-y}{\ln x - \ln y}, & t = 0, \quad x \neq y \\ \frac{\ln x - \ln y}{x-y}, & t = -1, \quad x \neq y \\ x, & x = y \end{cases}$$

Teorem 4.2.3. [5] *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}_0^+$ log-*konveksna funkcija na I, i neka su* $a, b \in I$ *takvi da vrijedi* $a < b$. *Tada vrijede sljedeće nejednakosti*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \exp\left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)\,dx\right] \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\,dx \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq L(f(a) f(b)). \end{aligned}$$

Dokaz. Prva nejednakost je već ranije dokazana, pa prelazimo na dokaz nejednakosti

$$\exp\left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)\,dx\right] \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\,dx$$

Promotrimo sredinu

$$G(f(x), f(a+b-x)).$$

Možemo ju zapisati i kao

$$G(f(x), f(a+b-x)) = \exp\left[\ln\left(G(f(x), f(a+b-x))\right)\right].$$

Integrirajući je na intervalu $[a, b]$ kao što smo napravili i u dokazu prethodnog teorema dobivamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\left[\ln\left(G(f(x), f(a+b-x))\right)\right] dx$$

$$\geq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\left(G(f(x), f(a+b-x))\right) dx\right]$$

$$\geq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{\ln f(x) + \ln f(a+b-x)}{2}\right) dx\right]$$

Budući da smo ranije pokazali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx,$$

tada je očito da vrijedi i

$$\int_a^b \ln f(x)\,dx = \int_a^b \ln f(a+b-x)\,dx.$$

Sada se vratimo u nejednakost

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\,dx \geq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{\ln f(x) + \ln f(a+b-x)}{2}\right) dx\right],$$

pa dobivamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\,dx \geq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{\ln f(x) + \ln f(x)}{2}\right) dx\right],$$

odnosno

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\,dx \geq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx\right],$$

a upravo to smo trebali i pokazati.

Da bi dokazali nejednakost

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

koristimo A-G nejednakost iz čega nam za $x \in [a, b]$ slijedi

$$G(f(x), f(a+b-x)) \leq \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2}.$$

Sada ponovo integracijom kao u dokazu prethodnog teorema dobivamo

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx,$$

pa nam je i ta nejednakost dokazana.

Za kraj nam je ostalo dokazati nejednakost

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq L(f(a) f(b)).$$

Promotrimo log-konveksnost funkcije f, odnosno za $\lambda \in [a, b]$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq [f(x)]^{1-\lambda} \cdot [f(y)]^{\lambda}$$

Integriramo tu nejednakost po λ od 0 do 1 pa dobijemo

$$\int_a^b f((1-\lambda)x + \lambda y)\, d\lambda \leq \int_a^b [f(x)]^{1-\lambda} \cdot [f(y)]^{\lambda}\, d\lambda.$$

Budući da nam je za $x = \lambda a + (1-\lambda) b$

$$\int_a^b f((1-\lambda)x + \lambda y)\, d\lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx,$$

a također nam je

$$\int_a^b [f(x)]^{1-\lambda} \cdot [f(y)]^{\lambda}\, d\lambda = L(f(a) f(b)),$$

dobili smo nejednakost

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq L(f(a) f(b)),$$

i time je ovaj teorem dokazan. $\square$

Posljednju nejednakost prethodnog teorema poopćiti ćemo na sredine reda t sljedećim teoremom.

Teorem 4.2.4. [5] *Neka je funkcija f pozitivna konveksna funkcija reda t na intervalu $[a, b]$. Tada je*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq L^{[t]}(f(a)\,f(b)),$$

ukoliko je funkcija f konkavna reda t tada vrijedi obrnuta nejednakost.

Dokaz. podijelimo ovaj dokaz na 3 slučaja.

(1) za $t = 0$

Po dokazu prethodnog teorema vrijedi nam

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq L(f(a)\,f(b)),$$

a sada po definiciji logaritamske sredine imamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)-f(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)},$$

a to je upravo po generalizaciji definicije logaritamske sredine

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq L^{[0]}(f(a)\,f(b)),$$

pa smo time dokazali tvrdnju za $t = 0$.

(2) za $t \neq 0, -1$

Pretpostavimo za početak da je $f(a) \neq f(b)$. Prema definiciji konveksnosti sredina reda t da bi funkcija f bila konveksna reda t na $[a, b]$ mora vrijediti nejednakost

$$f\left(M^{[t]}(b, a; \lambda)\right) \leq M^{[t]}(f(b), f(a); \lambda),$$

odnosno budući da je $t \neq 0$ i f konveksna mora vrijediti

$$f(\lambda b + (1-\lambda)a) \leq [\lambda f^t(b) + (1-\lambda) f^t(a)]^{\frac{1}{t}}.$$

Po prethodno dokazanim teoremima imamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a)\,d\lambda$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a)\,d\lambda.$$

Zbog gore navedene nejednakosti sada nam vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \int_0^1 \left[\lambda f^t(b) + (1-\lambda) f^t(a)\right]^{\frac{1}{t}} d\lambda \\ &\leq \int_0^1 \left[\lambda f^t(b) + f^t(a) - \lambda f^t(a)\right]^{\frac{1}{t}} d\lambda\end{aligned}$$

Napravimo li sljedeću supstituciju:

$$x = \lambda f^t(b) + f^t(a) - \lambda f^t(a) \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{dx}{f^t(b) - f^t(a)},$$

dobivamo izraz

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \int_{f^t(a)}^{f^t(b)} \frac{x^{\frac{1}{t}}}{f^t(b)-f^t(a)} dx \\ &\leq \frac{1}{f^t(b)-f^t(a)}\int_{f^t(a)}^{f^t(b)} x^{\frac{1}{t}} dx \\ &\leq \frac{1}{f^t(b)-f^t(a)} \cdot \left[\frac{x^{\frac{1}{t}+1}}{\frac{1}{t}+1}\right]\Bigg|_{f^t(a)}^{f^t(b)} \\ &\leq \frac{1}{f^t(b)-f^t(a)} \cdot \frac{t}{t+1} \cdot \left[x^{\frac{t+1}{t}}\right]\Bigg|_{f^t(a)}^{f^t(b)} \\ &\leq \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{f^t(b)-f^t(a)} \cdot \left[f^{t+1}(b) - f^{t+1}(a)\right] \\ &\leq \frac{t}{t+1} \cdot \frac{f^{t+1}(b) - f^{t+1}(a)}{f^t(b)-f^t(a)}.\end{aligned}$$

Dobili smo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{t}{t+1} \cdot \frac{f^{t+1}(b) - f^{t+1}(a)}{f^t(b)-f^t(a)},$$

odnosno po generalizaciji logaritamske sredine

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le L^{[t]}(f(a), f(b)),$$

pa nam ovaj slučaj vrijedi za $f(a) \ne f(b)$.

Pretpostavimo sada $f(a) = f(b)$, po prethodnom dokazu vrijedi nam

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\le \int_0^1 \left[\lambda f^t(b) + (1-\lambda) f^t(a)\right]^{\frac{1}{t}} d\lambda \\
&\le \int_0^1 \left[\lambda f^t(b) + f^t(a) - \lambda f^t(a)\right]^{\frac{1}{t}} d\lambda \\
&\le \int_0^1 \left[\lambda f^t(a) + f^t(a) - \lambda f^t(a)\right]^{\frac{1}{t}} d\lambda \\
&\le \int_0^1 f(a)\,d\lambda \\
&\le f(a).
\end{aligned}$$

Sada po generalizaciji logaritamske sredine zapravo imamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le L^{[t]}(f(a), f(b)),$$

pa nam ovaj slučaj vrijedi i za $f(a) = f(b)$, čime smo dokazali slučaj (2).

(3) za $t = -1$

Pretpostavimo opet da je $f(a) \ne f(b)$. Zato što je $t \ne 0$ vrijedi nam sljedeća nejednakost iz slučaja (2)

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \int_0^1 \left[\lambda f^t(b) + f^t(a) - \lambda f^t(a)\right]^{\frac{1}{t}} d\lambda$$

Uvrstimo $t = -1$ i dobijemo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \int_0^1 \left[\frac{\lambda}{f(b)} + \frac{1}{f(a)} - \frac{\lambda}{f(a)}\right]^{-1} d\lambda$$

Napravimo li sljedeću supstituciju:

$$x = \frac{\lambda}{f(b)} + \frac{1}{f(a)} - \frac{\lambda}{f(a)} \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{dx}{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}},$$

dobivamo izraz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \int_{\frac{1}{f(a)}}^{\frac{1}{f(b)}} \frac{x^{-1}}{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}} dx \\
&\leq \frac{1}{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}} \int_{\frac{1}{f(a)}}^{\frac{1}{f(b)}} x^{-1} dx \\
&\leq \frac{f(a)\,f(b)}{f(a) - f(b)} \cdot [\ln x]\Big|_{\frac{1}{f(a)}}^{\frac{1}{f(b)}} \\
&\leq \frac{f(a)\,f(b)}{f(a) - f(b)} \cdot \left[\ln\frac{1}{f(b)} - \ln\frac{1}{f(a)}\right] \\
&\leq \frac{f(a)\,f(b)}{f(a) - f(b)} \cdot [\ln f(a) - \ln f(b)] \\
&\leq f(a)\,f(b)\,\frac{\ln f(a) - \ln f(b)}{f(a) - f(b)}
\end{aligned}$$

Sada po generalizaciji logaritamske sredine zapravo imamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq L^{[-1]}(f(a), f(b)),$$

pa nam ovaj slučaj vrijedi za $f(a) \neq f(b)$.

Pretpostavimo sada $f(a) = f(b)$, po prethodnom dokazu vrijedi nam

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \int_0^1 \left[\frac{\lambda}{f(b)} + \frac{1}{f(a)} - \frac{\lambda}{f(a)}\right]^{-1} d\lambda \\
&\leq \int_0^1 \left[\frac{\lambda}{f(a)} + \frac{1}{f(a)} - \frac{\lambda}{f(a)}\right]^{-1} d\lambda \\
&\leq \int_0^1 f(a)\,dx \\
&\leq f(a).
\end{aligned}$$

Po generalizaciji logaritamske sredine zapravo imamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq L^{[-1]}(f(a), f(b)),$$

pa nam ovaj slučaj vrijedi i za $f(a) = f(b)$, čime smo dokazali slučaj (3), a time i cijeli teorem. Konkavnost se dokazuje analogno. □

4.3 Multiplikativna konveksnost

U posljednjem dijelu ovog rada prikazat ćemo nekoliko zanimljivih teorema i propozicija vezanih uz multiplikativno konveksne funkcije.

Propozicija 4.3.1. [8], [9] *Neka je $f : [0, a\rangle \to \mathbb{R}_0^+$ neprekidna funkcija koja je multiplikativno konveksna na intervalu $\langle 0, a\rangle$. Tada je*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

također neprekidna na $[0, a\rangle$ i multiplikativno konveksna na intervalu $\langle 0, a\rangle$.

Dokaz. Ako je f multiplikativno konveksna, odnosno (G, G)-konveksna, tada je

$$f(\sqrt{xy}) \leq \sqrt{f(x)f(y)}.$$

Stavimo li u tu nejednakost $x \to k\frac{x}{n}$ i $y \to k\frac{y}{n}$ dobivamo

$$f(k\frac{\sqrt{xy}}{n}) \leq \sqrt{f(k\frac{x}{n})f(k\frac{y}{n})}$$

pri čemu je $k = 0, 1, \ldots n-1$. Sumiramo sve te nejednakosti i dobivamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{\sqrt{xy}}{n}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f(k\frac{x}{n})f(k\frac{y}{n})}.$$

Kvadrirajmo obje strane nejednakosti:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{\sqrt{xy}}{n})\right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f(k\frac{x}{n})f(k\frac{y}{n})}\right)^2.$$

Prema CSB nejednakosti desna je strana manja ili jednaka od

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{x}{n})\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{y}{n})\right).$$

Naime, napišimo CSB nejednakost u ovom obliku

$$\left(\sum \sqrt{a_k}\sqrt{b_k}\right)^2 \leq \sum a_k \sum b_k,$$

i stavimo $a_k \to f(k\frac{x}{n})$, $b_k \to f(k\frac{y}{n})$, upravo dobijemo

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f(k\frac{x}{n})f(k\frac{y}{n})}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{x}{n})\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{y}{n})\right).$$

Dakle, dobili smo

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{\sqrt{xy}}{n})\right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{x}{n})\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{y}{n})\right).$$

Obje strane nejednakosti pomnožimo sa $\frac{xy}{n^2}$ i dobijemo

$$\left(\frac{\sqrt{xy}}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{\sqrt{xy}}{n})\right)^2 \leq \left(\frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{x}{n})\right) \cdot \left(\frac{y}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(k\frac{y}{n})\right).$$

To su integralne sume, pa prelaskom na integrale dobivamo

$$\left(\int_0^{\sqrt{xy}} f(t)dt\right)^2 \leq \int_0^x f(t)dt \int_0^y f(t)dt,$$

tj.

$$F^2(\sqrt{xy}) \leq F(x)F(y)$$

što znači da je F (G,G)-konveksna. □

Sljedeću propoziciju nećemo dokazivati jer je njen dokaz direktna posljedica teorema 3.1.3, korolara 3.1.4 i svojstava konveksnih funkcija navedenih u prvom dijelu rada.

Propozicija 4.3.2. [9] *Neka je $f : I \to \mathbb{R}^+$ diferencijabilna funkcija definirana na podintervalu od $\mathbb{R}^+$. Tada su sljedeća svojstva ekvivalentna*

1. *f je multiplikativno konveksna;*
2. *funkcija $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ je rastuća;*
3. *za f vrijedi nejednakost*

$$\frac{f(x)}{f(y)} \geq \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{yf'(y)}{f(y)}} \qquad \text{za svaki } x, y \in I.$$

Teorem 4.3.3. [13] *Neka je $0 < a < b$ i neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ multiplikativno konveksna. Tada*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \begin{cases} \dfrac{bf(b) - af(a)}{\ln(bf(b)) - \ln(af(a))} \cdot \ln\dfrac{b}{a}, & af(a) \neq bf(b) \\ \\ af(a) \cdot \ln\dfrac{b}{a}, & af(a) = bf(b) \end{cases}$$

Jednakost vrijedi samo kada je f eksponencijalna ili konstantna funkcija, a ako je f multiplikativno konkavna nejednakost je obrnuta.

Dokaz. Dokazujemo samo za f je multiplikativno konveksna, a dokaz za f je multiplikativno konkavna je analogan. Ako je f multiplikativno konveksna funkcija pogledajmo izraz

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Napravimo li supstituciju:

$$\lambda = \frac{\ln x - \ln a}{\ln b - \ln a} \quad \Rightarrow \quad x = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda} \quad \Rightarrow \quad dx = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda} \cdot \ln\frac{b}{a}\,d\lambda,$$

tada nam vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f\left(b^{\lambda} \cdot \frac{a}{a^{\lambda}}\right) \cdot b^{\lambda} \cdot \frac{a}{a^{\lambda}} \cdot \ln\frac{b}{a}\,d\lambda$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f\left(b^{\lambda} \cdot a^{1-\lambda}\right) \cdot b^{\lambda} \cdot a^{1-\lambda} \cdot \ln\frac{b}{a}\,d\lambda.$$

Pretpostavimo da je $af(a) \neq bf(b)$. Po definiciji multiplikativno konveksnih funkcija nam vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_0^1 f^{1-\lambda}(a) \cdot f^{\lambda}(b) \cdot a^{1-\lambda} \cdot b^{\lambda} \cdot \ln\frac{b}{a}\,d\lambda$$

$$\le \ln\frac{b}{a} \int_0^1 [af(a)]^{1-\lambda} \cdot [bf(b)]^{\lambda}\,d\lambda$$

$$\le \ln\frac{b}{a} \int_0^1 \frac{af(a)}{[af(a)]^{\lambda}} \cdot [bf(b)]^{\lambda}\,d\lambda$$

$$\le af(a) \cdot \ln\frac{b}{a} \int_0^1 \left[\frac{bf(b)}{af(a)}\right]^{\lambda}\,d\lambda$$

$$\leq \left[af(a) \cdot \ln \frac{b}{a}\right] \cdot \left[\frac{\left[\frac{bf(b)}{af(a)}\right]^{\lambda}}{\ln \frac{bf(b)}{af(a)}} \right] \Bigg|_0^1$$

$$\leq \frac{af(a) \cdot \ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{bf(b)}{af(a)}} \cdot \left[\left(\frac{bf(b)}{af(a)} \right)^{\lambda} \right] \Bigg|_0^1$$

$$\leq \frac{af(a) \cdot \ln \frac{b}{a}}{\ln bf(b) - \ln af(a)} \cdot \left[\frac{bf(b)}{af(a)} - 1 \right]$$

$$\leq \frac{af(a)}{\ln bf(b) - \ln af(a)} \cdot \frac{bf(b) - af(a)}{af(a)} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$\leq \frac{bf(b) - af(a)}{\ln bf(b) - \ln af(a)} \cdot \ln \frac{b}{a},$$

čime smo dokazali tvrdnju za $af(a) \neq bf(b)$.

Pretpostavimo sada $af(a) = bf(b)$. Tada nam vrijedi nejednakost

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \ln \frac{b}{a} \int_0^1 \frac{af(a)}{[af(a)]^{\lambda}} \cdot [bf(b)]^{\lambda} \, d\lambda$$

$$\leq \ln \frac{b}{a} \int_0^1 \frac{af(a)}{[af(a)]^{\lambda}} \cdot [af(a)]^{\lambda} \, d\lambda$$

$$\leq \ln \frac{b}{a} \int_0^1 af(a) \, d\lambda$$

$$\leq \ln af(a),$$

čime smo dokazali tvrdnju za $af(a) = bf(b)$, a samim time i cijeli teorem. $\square$

Bibliografija

[1] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy , M. Vuorinen, *Generalized convexity and inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 335, (2007), 1294-1308.

[2] T. Angell, *Convex Sets and Convex Functions*, University of Delaware, dostupno na: http://www.math.udel.edu/˜angell/Opt/convex.pdf

[3] M. Bombardelli, S. Varošanec, *Properties of h-convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejer inequalities*, Computers and Mathematics with Applications, 58, (2009), 1869-1877.

[4] P.S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2003.

[5] S.S. Dragomir, C.E.M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, Melbourne and Adelaide, 2000., 199-210., dostupno na: http://www.rgmia.org/papers/monographs/Master.pdf

[6] S.H. Kung, *Proof without words*, College Mathematics Journal, 2010., dostupno na: http://www.maa.org/sites/default/files/Kung2010.pdf

[7] D.S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[8] C.P. Niculescu, L.-E. Persson, *Convex functions and their applications - A contemporary approach*, Springer-Verlag, New York, 2006., 1-74.

[9] C.P. Niculescu, *Convexity according to the geometric mean*, Mathematical Inequalities and Applications, 3(2), (2000), 155-167.

[10] J. Pečarić, *Konveksne funkcije - Nejednakosti*, Naučna Knjiga, Beograd, 1987., 1-13., 27-33., 54-63.

[11] J. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 1996., 9-16., 49-64.

[12] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press, Oxford, 1994., 193-217.

[13] X. Zheng, N. Zheng, *Geometrically convex functions and estimations of remainder terms for Taylor expansions of some functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 4(1), (2010), 15-25.

Sažetak

Gledano kroz povijest matematike, područje (M, N) - konveksnih funkcija je relativno mlado. Prvi radovi na temu konveksnih funkcija pojavili su se krajem 19. stoljeća, a začetnikom tog područja matematike smatramo danskog matematičara J.L.W.V. Jensena. (M, N) - konveksne funkcije počele su se proučavati tek u 20. stoljeću, a danas je općeprihvaćena sljedeća definicija.

Neka je $f : I \to \mathbb{R}^+$ neprekidna, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}^+$ i neka su M i N dvije funkcije sredina. Kažemo da je funkcija f (M, N)-konveksna ako za sve $x, y \in I$ vrijedi:

$$f(M(x, y)) \leq N(f(x), f(y)).$$

U prvom poglavlju ovog rada obradili smo pojam konveksnih funkcija te dali nekoliko načina definiranja istih. Također smo iskazali i dokazali neke bitne nam teoreme za glavni dio rada poput Hermite - Hadamardova teorema. Poglavlje smo zaključili navođenjem svojstava konveksnih funkcija koje ćemo kasnije koristiti. Nakon konveksnih funkcija u drugom poglavlju prisjetili smo se poznate nejednakosti između harmonijske, geometrijske, aritmetičke i kvadratne sredine. U nastavku smo definirali težinske sredine i težinske sredine reda t. Za kraj drugog poglavlja smo iskazali i dokazali tzv. teorem o monotonosti.

U glavnom dijelu ovog rada, 3. i 4. poglavlju, u potpunosti smo se posvetili proučavanju (M, N) - konveksnih funkcija. Nakon same definicije, proučavali smo kriterije i svojstva konveksnosti funkcija pridruženih paru sredina, gdje smo za sredine uzimali harmonijsku, geometrijsku i aritmetičku sredinu. Nakon toga smo dokazali nekoliko teorema i propozicija (M, N) - konveksnih funkcija vezanih uz kvazi-aritmetičke sredine i sredine reda t. U posljednjem poglavlju ovog rada proučavali smo (A, G) i (G, G) - konveksne funkcije. Ovdje smo definirali gama i beta funkciju, logaritamsku sredinu i dokazali razne teoreme vezane uz (A, G) i (G, G) - konveksne funkcije, često koristeći Hermite - Hadamardov teorem i infinitezimalni račun.

Summary

Viewed through history of mathematics, area of (M, N) - convex functions is relatively young. The first works on the theme of convex functions appeared in the late 19th century, and for the pioneer of this field of mathematics is considered Danish mathematician J.L.W.V. Jensen. (M, N) - convex function have begun to be studied only in the 20th century, and today it is generally accepted the following definition.

Let $f : I \to \mathbb{R}^+$ be continuous, where I is a subinterval of $\mathbb{R}^+$, and let M and N be any two mean functions. We say that f is (M, N)-convex if for all $x, y \in I$:

$$f\left(M\left(x, y\right)\right) \leq N\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right).$$

In the first section of this paper we have process the concept of convex function and gave several ways of defining them. We have also expressed and proved some important theorems for our main part of the work, such as the Hermite - Hadamard theorem. We concluded chapter by stating the properties of convex functions which we will use later. In Chapter 2 we reminded ourselves of the known inequalities between the harmonic, geometric, arithmetic and square means. Below, we defined the weighted mean and the weighted mean of order t. At the end of the second chapter we expressed and proved the so-called Theorem of monotony.

The main parts of this work are Chapters 3 and 4. In Chapter 3 we defined (M, N) - convex functions and studied the criteria and properties of convexity of functions according to the pair of means, where for means we have taken harmonic, geometric and arithmetic mean. After that we proved several theorems and propositions for (M, N) - convex functions related to the quasi-arithmetic means and the means of order t. The last chapter of this work is devoted to (A, G) and (G, A) - convex functions. We defined the gamma and beta functions, logarithmic mean and proved various theorems related to (A, G) and (G, A) - convex functions.

Životopis

Moje ime je Matija Ilić. Rođen sam 27.1.1988. godine u Zagrebu. U osnovnu školu Voltino sam krenuo 1994. godine, a poslije završetka iste sam se upisao u X. gimnaziju - prirodoslovno matematički smjer. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja i položene mature 2006. godine upisujem se na Prirodoslovno matematički fakultet u Zagrebu. Za vrijeme studiranja na preddiplomskom studiju prebacio sam se s inžinjerskog na nastavnički smjer koji sam završio 2013. godine te stekao zvanje sveučilišnog prvostupnika (baccalaureus) edukacije matematike, univ. bacc. educ. math. Školovanje sam nastavio na diplomskom studiju istog fakulteta - nastavnički smjer.

Tokom studija oženio sam se te dobio kćer Karlu. Danas sam ponosan otac četverogodišnje kćeri i budući magistar edukacije matematike.

Tokom života sam radio honorarne poslove za Hrvatsku turističku zajednicu, Markotel i druge, ali nikada nisam bio zaposlen. Posjedujem vrlo dobro znanje iz engleskog jezika u govoru, pismu i čitanju. Također odlično se služim svim MS Office programima i informacijsko-komunikacijskim tehnologijama, te posjedujem osnovno znanje iz programiranja. Tokom fakulteta bio sam demonstrator na kolegiju Nacrtne geometrije i smatram kako sam tokom studija stekao čvrste temelje iz algebre, analize i geometrije, kao i iz vjerojatnosti.