Algebarski pristup iterativnim metodama tangente i sekante

Sačić, Marko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Sačić

ALGEBARSKI PRISTUP ITERATIVNIM METODAMA TANGENTE I SEKANTE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, veljača 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojem mentoru prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na vodstvu, velikoj pomoći i savjetima te strpljenju pri izradi ovog diplomskog rada.
Hvala mojoj obitelji i prijateljima na ljubavi, bezuvjetnoj podršci i vjeri u moj uspjeh.

Sadržaj

Uvod

Motivacija za temu ovog rada izložena je u prvom poglavlju na primjeru usporedbe niza (T_n) dobivenog Newton-Raphsonovom metodom i niza (S_n) dobivenog metodom sekante s konvergentama iracionalnog broja Φ koji je limes niza (x_n) dobivenog formulom $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}; x_1 = 1$.

U drugom poglavlju algebarski pristup ostvaruje se uvođenjem binarne operacije $\oplus$ na skupu $\overline{\mathbb{R}}$ kao $x \oplus y = \frac{xy+1}{x+y-1}$ te pokazujemo da je tada $x_n = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus \dots}_{\text{n puta}} = 1^{\oplus n}$.

Također dokazujemo komutativnost i asocijativnost ovako definirane operacije $\oplus$. Nakon toga pokušavamo generalizirati operaciju $\oplus$ tako da ne ovisi o funkciji $m(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ni o funkciji $f(x) = x^2 - x - 1$ te je s tom namjerom definiramo kao $x \oplus y = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}$.

U trećem poglavlju promatramo operaciju $\oplus$ s geometrijskog gledišta, pomoću Pascalovog teorema. Uz pomoć tog teorema pokazujemo da je operacija $\oplus$ definirana kao u drugom poglavlju komutativna i asocijativna za funkcije oblika $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ to jest za funkcije čiji je graf konika čiji nagib, to jest nagib njezine tangente, neograničeno raste kada x teži u ∞. Također se pokazuje da ta svojstva vrijede ne samo za funkciju $m(x) = 1 + \frac{1}{x}$ već za bilo koju opću Möbiusovu transformaciju dakle $m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

U četvrtom poglavlju ćemo varijacijom izbora funkcije f pokazati da operacija $\oplus$ može djelovati kao obično zbrajanje ili množenje brojeva iz $\overline{\mathbb{R}}$. Ustanovit ćemo vezu s funkcijom arkus tangens i s brojem π, relativističkim zbrajanjem brzina i zbrajanjem otpora serijski ili paralelno spojenih otpornika.

Pretpostavka asocijativnosti operacije $\oplus$ dovodi do nekih zanimljivih posljedica izloženih u petom poglavlju. Uz pomoć Schwarzove derivacije pokazuje se karakterizacija funkcije $m(x) = x \oplus k$, uz neke jednostavne pretpostavke, kao Möbiusove transformacije.

U šestom ćemo poglavlju navesti još nekoliko primjera i napomena glede operacije $\oplus$. Razmotrit ćemo tvori li skup svih funkcija $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ grupu s operacijom $\oplus$, a uočit ćemo sličnost između našeg „sekantnog zbrajanja“ i operacije zbrajanja točaka na eliptičkim krivuljama koje daju takvim krivuljama strukturu grupe.

Poglavlje 1

Usporedba iterativnih metoda na primjeru Zlatnog reza

U ovom poglavlju izložit ćemo i usporediti način za iterativno izračunavanje iracionalnog broja $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ poznatog kao Zlatni rez. Usporedba dobivenih nizova poslužit će nam kao motivacija za algebarsku interpretaciju preko koje će se objediniti pristup različitim primjerima iz više područja matematike pa i fizike.
Promotrimo iteracije funkcije

$$m(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

Počevši od $x = 1$, dobivamo niz verižnih razlomaka:

$$1, 1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}}, ...$$

Dakle, pojednostavljeno, imamo niz:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, ...$$

što su omjeri uzastopnih Fibonaccijevih brojeva. Indukcijski dolazimo do sljedećeg:

Propozicija 1.0.1. *Neka je* $F_1 = F_2 = 1$ *i za* $n \geq 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. *Neka je* $x_1 = 1$ *te za* $n \geq 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$.
Tada vrijedi:

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Dokaz. Ovo ćemo dokazati matematičkom indukcijom.
1. Baza indukcije: provjeravamo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$.

$$x_2 = \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

Dakle, baza vrijedi.
2. Korak indukcije: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n to jest

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Vrijedi li tvrdnja za broj $n + 1$?

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

3. Zaključak: tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.
Prema principu matematičke indukcije dokazali smo tvrdnju. □

Niz (x_n) konvergira, ali to ćemo dokazati kasnije. Pod pretpostavkom konvergencije, možemo odrediti limes, $\hat{x}$, na sljedeći način:
Budući da je (x_n) pozitivan i zadovoljava

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n},$$

limes $\hat{x}$ mora biti pozitivan i zadovoljiti

$$\hat{x} = 1 + \frac{1}{\hat{x}},$$

ili, ekvivalentno, $\hat{x}$ je jedinstveno pozitivno rješenje jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$. Dakle

$$x = \Phi \equiv \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

to jest realan broj poznat kao Zlatni rez. Za prikaz niza (x_n) u decimalnom obliku pogledajmo Tablicu 1.1:

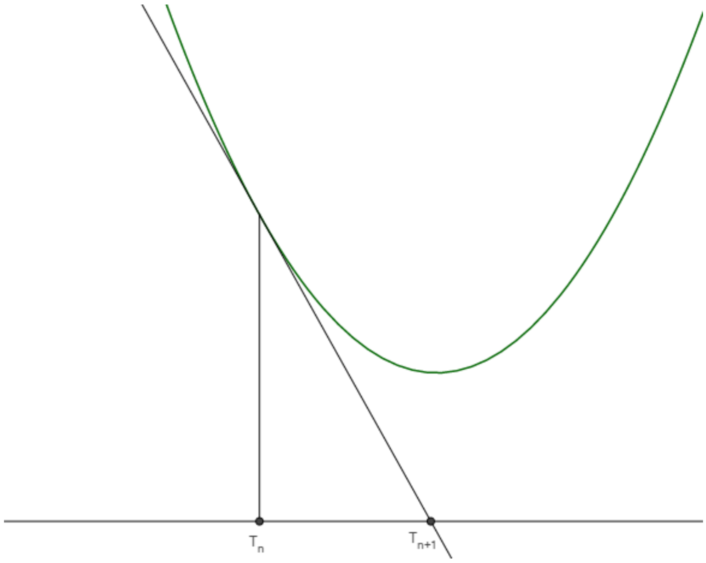
Tablica 1.1

n	x_n	n	x_n
1	1	13	1.618025751
2	2	14	1.618037135
3	1.5	15	1.618032787
4	1.666666667	16	1.618034448
5	1.6	17	1.618033813
6	1.625	18	1.618034056
7	1.615384615	19	1.618033963
8	1.619047619	20	1.618033999
9	1.617647059	21	1.618033985
10	1.618181818	22	1.61803399
11	1.617977528	23	1.618033988
12	1.618055556	24	1.618033988

dakle, trebamo 23 iteracije da se prvih 10 znamenki stabilizira.
Iako je poznato da taj niz razlomaka pruža „najbolju" racionalnu aproksimaciju Zlatnog reza, postoje brže metode za aproksimaciju Φ. U numeričkoj matematici često su korištene Newton-Raphsonova metoda tangente i metoda sekante za određivanje nultočaka funkcije u određenom zatvorenom intervalu. (vidi npr. [3]). U metodi tangente izabire se jedna početna točka intervala. Iz nje se povlači tangenta na graf funkcije i zatim se sjecište te tangente s x-osi uzima kao sljedeća aproksimacija nultočke. Postupak se iterira. Slično, kod metode sekante biraju se dvije početne točke intervala te se postavlja sekanta kroz pripadne točke grafa i zatim se sjecište te sekante s x-osi uzima kao sljedeća točka za aproksimaciju nultočke. Razmotrimo najprije Newton-Raphsonovu metodu tangente (vidi Sliku1.1). S obzirom na početni T_0 koji predstavlja našu prvotnu procjenu rješenja , računamo $T_1, T_2, ...$ pomoću formule:

$$T_{n+1} = T_n - \frac{f(T_n)}{f'(T_n)} = \frac{2T_n^2 - T_n - T_n^2 + T_n - 1}{2T_n - 1} =$$

$$= \frac{T_n^2 + 1}{2T_n - 1}$$



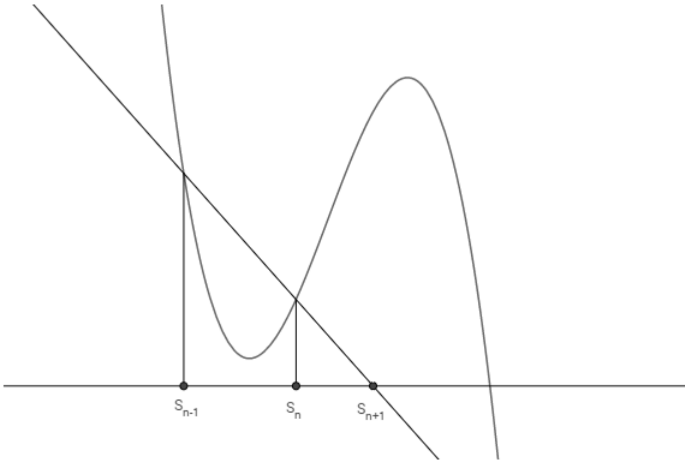
Slika 1.1

Počevši od $T_0 = 1$ dobivamo sljedeće:

Tablica 1.2

n	T_n
0	1
1	2
2	1.666666667
3	1.619047619
4	1.618034448
5	1.618033989
...	...

Dakle u ovom slučaju treba samo 5 iteracija da se prvih 10 znamenki stabilizira.



Slika 1.2

Za primjenu metode sekante (Slika1.2) počevši s dvije različite točke koje smo izabrali procjenom, S_1 i S_2, i ponovo za $f(t) = t^2 - t - 1$, računamo:

$$S_{n+1} = \frac{S_{n-1}f(S_n) - S_n f(S_{n-1})}{f(S_n) - f(S_{n-1})} = \frac{S_{n-1}(S_n^2 - S_n - 1) - S_n(S_{n-1}^2 - S_{n-1} - 1)}{S_n^2 - S_n - 1 - (S_{n-1}^2 - S_{n-1} - 1)}$$

$$= \frac{S_n^2 S_{n-1} - S_n S_{n-1} - S_{n-1} - S_n S_{n-1}^2 + S_n S_{n-1} + S_n}{S_n^2 - S_n - 1 - S_{n-1}^2 + S_{n-1} + 1} = \frac{S_n^2 S_{n-1} - S_n S_{n-1}^2 + S_n - S_{n-1}}{S_n^2 - S_{n-1}^2 - S_n + S_{n-1}}$$

$$= \frac{S_n S_{n-1}(S_n - S_{n-1}) + (S_n - S_{n-1})}{(S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) - (S_n - S_{n-1})} = \frac{(S_n - S_{n-1})(S_n S_{n-1} + 1)}{(S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1} - 1)}$$

$$= \frac{S_n S_{n-1} + 1}{S_n + S_{n-1} - 1}$$

Za $S_1 = 1$ i $S_2 = 2$, niz S_n je prikazan u Tablici 1.3:

Tablica 1.3

n	T_n
1	1
2	2
3	1.5
4	1.6
5	1.619047619
6	1.618025751
7	1.618033985
8	1.618033989
...	...

Vidimo da je potrebno 6 iteracija za stabilizaciju prvih 10 znamenki.Nama će biti interesantno zapažanje da nizovi (T_n) i (S_n) konvergiraju ka Φ, drugim riječima, i T_n i S_n su konvergente iracionalnog broja Φ u njegovom prikazu kao beskonačnog verižnog razlomka. Dakle, svi T_n-ovi i S_n-ovi su na popisu iteracija od $1 + \frac{1}{x}$ u Tablici 1.1. U Tablici 1.4 ćemo prikazati usporedbu iteracija od $1 + \frac{1}{x}$ iz Tablice 1.1 s Newton-Raphsonovom aproksimacijom iz Tablice 1.2 i aproksimacijama metode sekante iz Tablice 1.3.

Tablica 1.4

n	x_n	T_n	S_n
1	1	1	1
2	2	2	2
3	1.5		1.5
4	1.666666667	1.666666667	
5	1.6		1.6
6	1.625		
7	1.615384615		
8	1.619047619	1.619047619	1.619047619
9	1.617647059		
10	1.618181818		
11	1.617977528		
12	1.618055556		
13	1.618025751		1.618025751
14	1.618037135		
15	1.618032787		
16	1.618034448	1.618034448	
17	1.618033813		
18	1.618034056		
19	1.618033963		
20	1.618033999		
21	1.618033985		1.618033985
22	1.61803399		
23	1.618033988		
24	1.618033988		
25	1.618033989		

Iz ove tablice vidimo uzorak ponavljanja.

Teorem 1.0.2. *Neka je x_n n-ta iteracija formule $m(x) = 1 + \frac{1}{x}$ počevši s 1 te neka je $f(x) = x^2 - x - 1$. Nadalje, neka je T_n zadan formulom Newton-Raphsonove metode primijenjene na f sa $T_1 = 1$ i neka je S_n zadan formulom metode sekante primijenjene na f sa $S_1 = 1, S_2 = 2$. Tada je*

$$T_n = x_{2^n}$$

i

$$S_n = x_{F_n}.$$

Naš cilj je objasniti ovu pojavu na nov način i istražiti najopćenitiju situaciju u kojoj se ona javlja.

Poglavlje 2

Algebarski pristup metodi sekante

Naše rješenje ovog problema u velikoj mjeri proizlazi iz prikladnog načina označavanja. Razmotrimo sljedeću binarnu operaciju:

$$x \oplus y = \frac{xy + 1}{x + y - 1}$$

Ova operacija je dobro definirana na proširenom skupu realnih brojeva ($\overline{\mathbb{R}}$) (to jest realni brojevi sa simbolima $\pm\infty$), te je zapravo komutativna u $\overline{\mathbb{R}}$, osim u slučaju $\frac{0}{0}$; odnosno, kada je $x \cdot y = 1$ i $x + y = 1$, ili ekvivalentno, kada su x i y različite nultočke kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1$. Taj se izraz može promatrati i geometrijski; $x \oplus y$ je rezultat primjene metode sekante na funkciju $f(x) = x^2 - x - 1$, s početnim izborom vrijednosti x i y. Slučaj oblika $\frac{0}{0}$ se događa kada se sekanta podudara s x-osi ili, ekvivalentno, kada su x i y različite nultočke kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1$. "Broj" ∞ igra posebnu ulogu. Geometrijski, $x \oplus \infty$ je limes od $x \oplus z$ kada se z približava ∞, što je mjesto gdje okomita crta kroz x siječe x-os to jest kada se sekanta približava vertikalnom pravcu kroz točku x čime sjecište te sekante i x-osi teži samoj točki x. Dakle $x \oplus \infty = x$ to jest ∞ djeluje kao neutralni element za $\oplus$ i svaka sekanta kroz beskonačno daleku točku je vertikalna na x-os. Pretpostavljajući za trenutak da je $\oplus$ asocijativna, tada se može definirati $1^{\oplus n}$ kao n-struki zbroj od 1. Budući da je $x \oplus 1 = 1 + \frac{1}{x}$, tada je $1^{\oplus n}$ n-ta iteracija od $1 + \frac{1}{x}$ to jest n-struki zbroj od 1.
To znači:

$$x_n = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus \dots}_{\text{n puta}} = 1^{\oplus n}$$

Budući da je $x \oplus x = \frac{x^2+1}{2x-1}$, što je upravo Newton-Raphsonova metoda primijenjena na $x^2 - x - 1$ s početnom vrijednosti x, onda Newton-Raphsonova metoda počevši od 1 daje:

$$1, 1 \oplus 1, (1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1), ((1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1)) \oplus ((1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1)), ...$$

Tada po pretpostavci asocijativnosti i po indukciji slijedi:

$$T_n = 1^{\oplus 2^n} = x_{2^n}$$

Slično, metoda sekante primijenjena na $x^2 - x - 1$ počevši s 1 i $2 = 1 \oplus 1$ zadovoljava $S_{n+1} = S_n \oplus S_{n-1}$ i daje:

$$1, 1 \oplus 1, (1 \oplus 1) \oplus 1, ((1 \oplus 1) \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1), ...$$

Također po pretpostavci asocijativnosti i po indukciji slijedi:

$$S_n = 1^{\oplus F_n} = x_{F_n}.$$

Ostaje samo pokazati da je $\oplus$ asocijativna. Izračunajmo:

$$(x \oplus y) \oplus z = \frac{xy+1}{x+y-1} \oplus z = \frac{\frac{xy+1}{x+y-1} \cdot z + 1}{\frac{xy+1}{x+y-1} + z - 1}$$

$$= \frac{\frac{(xy+1) \cdot z + x + y - 1}{x+y-1}}{\frac{xy+1+z \cdot (x+y-1) - x - y + 1}{x+y-1}} = \frac{xyz + x + y + z - 1}{xy + xz + yz - x - y - z + 1}$$

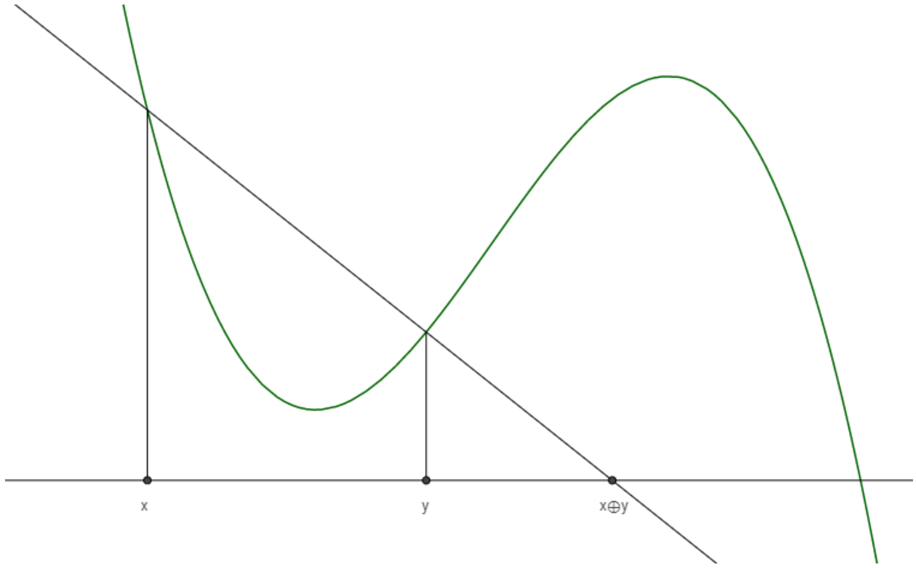
Zamjenom x i z desna strana ostaje nepromijenjena, ali lijeva strana postaje:

$$(z \oplus y) \oplus x,$$

što je, po komutativnosti, $x \oplus (y \oplus z)$.
U ovom trenutku želimo generalizirati našu operaciju $\oplus$. Funkcija $x^2 - x - 1$ ili broj 1 u formuli $x \oplus y = \frac{xy+1}{x+y-1}$ nisu ni po čemu posebni. To jest ako zamijenimo $x^2 - x - 1$ bilo kojom diferencijabilnom funkcijom $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, definiramo zbrajanje pomoću metode sekante (Slika2.1)kao:

$$x \oplus y = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}$$

i zamijenimo $1 + \frac{1}{x}$ bilo kojom funkcijom oblika $m(x) = x \oplus k$, onda vrijedi Teorem 1.0.2. ako je $\oplus$ asocijativna.



Slika 2.1

Pretpostavljamo da je f diferencijabilna jer dokaz Teorema 1.0.2 ovisi o tome da je $k^{\oplus n}$ dobro definirana, što zahtijeva dobru definiranost od $x \oplus x$. Kada je f diferencijabilna, onda uzimanjem da je

$$x \oplus x = \lim_{y \to x} (x \oplus y),$$

dolazimo do toga da je

$$\begin{aligned} x \oplus x = \lim_{y \to x} (x \oplus y) &= \lim_{y \to x} \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)} \\ = \lim_{y \to x} \frac{xf(y) - xf(x) + xf(x) - yf(x)}{f(y) - f(x)} &= \lim_{y \to x} x + \frac{f(x) \cdot (x - y)}{f(y) - f(x)} \\ = \lim_{y \to x} x - \frac{f(x)}{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}} &= x - \frac{f(x)}{\lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}} \\ &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

što je upravo Newton-Raphsonova metoda primijenjena na diferencijabilnu funkciju f s početnom vrijednosti x. Sada je prirodno postaviti pitanje: Za koje funkcije f je relacija $\oplus$ asocijativna? Pojedinačno provjeravanje funkcija nam ne pomaže previše. Algebarski

dokazi asocijativnosti su u osnovi specifični za svaku funkciju i teško je vidjeti jasnu strategiju za dokazivanje ili opovrgavanje asocijativnosti od $\oplus$ za šire klase funkcije f.
Na primjer, ako je $f(x) = x^3$, tada je

$$x \oplus y = \frac{x \cdot y^2 + x^2 \cdot y}{x^2 + x \cdot y + y^2}$$

te u tom slučaju ispada da $\oplus$ nije asocijativna jer $(1 \oplus (1 \oplus -1) = 0$, ali $(1 \oplus 1) \oplus -1 = 2/7$. Međutim, budući da je metoda sekante geometrijska, možda možemo naći geometrijski dokaz asocijativnosti kojim bi pronašli pravilo za izbor funkcije $f(x)$.

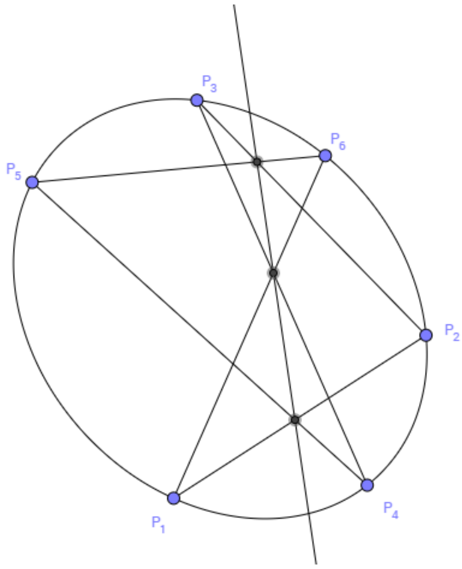
Poglavlje 3

Geometrijska interpretacija asocijativnosti operacije $\oplus$

Naš pristup temelji se na Pascalovom poznatom teoremu iz 1640. (kojeg je Blaise Pascal otkrio kada je imao samo 16 godina):

Teorem 3.0.3. *Parovi suprotnih stranica šesterovrha upisanog krivulji drugog reda sijeku se u tri kolinearne točke.*

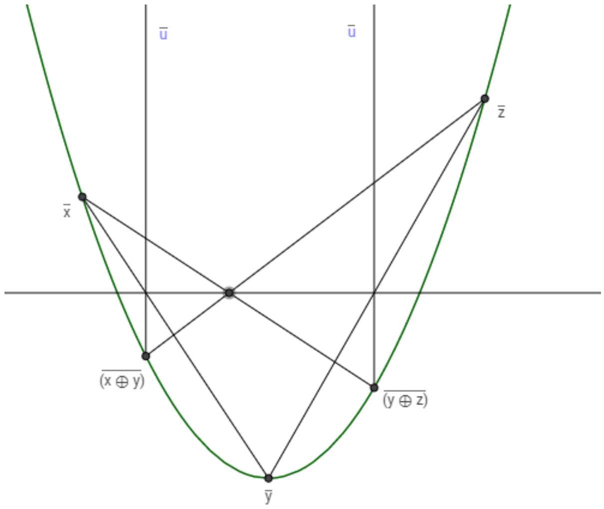
Pascalov teorem jedan je od ključnih rezultata u projektivnoj geometriji. Primijetimo da se teorem odnosi na šesterovrh to jest šesterokut koji ne mora biti konveksan, a neki parovi suprotnih stranica mogu biti paralelni pa je tada riječ o „sjecištima" na beskonačno dalekom pravcu. Pod krivuljom drugog reda se u ovom teoremu smatra bilo koja nedegenerirana krivulja drugog reda dakle elipsa (posebno kružnica), hiperbola ili parabola. Parovi suprotnih stranica su $\overline{P_1P_2}$ i $\overline{P_4P_5}$,$\overline{P_2P_3}$ i $\overline{P_5P_6}$ te $\overline{P_3P_4}$ i $\overline{P_6P_1}$.
Neka $L(P, Q)$ označava pravac kroz točke P i Q. Zatim točke $L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$, $L(P_2, P_3) \cap L(P_5P_6)$ i $L(P_3, P_4) \cap L(P_6, P_1)$ leže na istom pravcu to jest kolinearne su (Slika 3.1).



Slika 3.1

Sada ćemo pokazati asocijativnost operacije $\oplus$ koja proizlazi iz funkcije $f(x) = x^2-x-1$ (Slika3.2). Nagib naše funkcije f to jest njezine tangente neograničeno raste kada x teži u ∞, a već znamo da su sve sekante kroz beskonačno daleku točku vertikalne na x-os budući da su to međusobno paralelni pravci u smjeru osi y. Sjetimo se još da ∞ ima ulogu neutralnog elementa za operaciju $\oplus$. Za bilo koji realni broj x, neka $\overline{x}$ označava točku $(x, f(x))$. Za zadani u, točke $\overline{u}, \overline{(y\oplus z)}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, te $\overline{(x\oplus y)}$ su točke na paraboli i tako, primjenjujući Pascalov teorem, točke $L(\overline{x},\overline{y}) \cap L(\overline{u},\overline{(x\oplus y)}), L(\overline{y},\overline{z}) \cap L(\overline{u},\overline{(y\oplus z)})$ i $L(\overline{(x\oplus y)},\overline{z}) \cap L(\overline{x},\overline{(y\oplus z)})$ leže na istom pravcu. Kada u teži ka ∞, pravci $L(\overline{u},\overline{(x\oplus y)})$ i $L(\overline{u},\overline{(y\oplus z)})$ postaju okomiti na x-os i prve dvije točke redom teže k $(x\oplus y, 0)$ i $(y\oplus z, 0)$. Budući da ove prve dvije točke leže na x-osi, tada na toj osi leži i treća točka i tako dolazimo do jednakosti:

$$(x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z).$$



Slika 3.2

Naš argument vrijedi za bilo koju funkciju f čiji je graf konika čiji nagib, to jest nagib njezine tangente, neograničeno raste kada x teži u ∞. Uvjet da nagib može neograničeno rasti omogućuje nam da se operacija $\oplus$ primjeni i na beskonačno daleku točku kroz koju su sve sekante vertikalne. Konkretno, f mora biti oblika:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

za neke a, b, c, d, e takve da a i d nisu oba 0.
Tada dolazimo do sljedećeg:

Teorem 3.0.4. *Neka je f funkcija oblika*

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e},$$

Pri čemu a i d nisu oba nula. Ako je $a = 0$, onda je $be–cd \neq 0$. Tada je operacija $\oplus$ definirana s

$$x \oplus y = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}$$

asocijativna. Nadalje, za bilo koji $k \in \mathbb{R}$, neka je $m(x) = x \oplus k$, i neka je (x_n) niz zadan s $x_1 = k$ i $x_{n+1} = x_n \oplus k$. Označimo s (T_n) niz dobiven primjenom Newton-Raphson-ove metode na funkciju f s početnom vrijednosti k, a (S_n) niz dobiven metode sekante primijenjene na funkciju f s početnim vrijednostima k i $m(k)$. Tada je:

$$T_n = k^{\oplus 2^n} = x_{2^n}$$

$$i$$

$$S_n = k^{\oplus F_n} = x_{F_n}.$$

U našem izvornom primjeru, gledali smo iteracije od $m(x) = 1 + \frac{1}{x}$, s početkom u 1, i vidjeli da su oblika $1^{\oplus n}$. Sada, neka je m opća Möbiusova transformacija:

$$m(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Ovo je poopćenje izvornog primjera gdje je $m(x) = \frac{1x+1}{1x+0}$. Pokazali smo da iteracije, počevši s k, izvorne funkcije m su oblika $k^{\oplus n}$ za dobro definiranu operaciju $\oplus$. Za dani k, ako iteracije $m_n(k)$ uopće konvergiraju, onda konvergiraju k nekoj fiksnoj točki m koja je korijen tj. nultočka karakterističnog polinoma $p(x) = cx^2 + (d-a)x - b$.
Ako je zadan $w \in \overline{\mathbb{R}}$, $w \neq 0$, promatramo funkciju

$$f(x) = \frac{p(x)}{x-w}.$$

Očito je $f(x) = 0 \iff p(x) = 0$. Operacija $\oplus$ tada ispada komutativna i asocijativna. Pokazat ćemo da je komutativna, asocijativnost se dokazuje gotovo analogno.

$$x \oplus y = \frac{x \cdot \frac{p(y)}{y-w} - y \cdot \frac{p(x)}{x-w}}{\frac{p(y)}{y-w} - \frac{p(x)}{x-w}} = \frac{-1 \cdot (y \cdot \frac{p(x)}{x-w} - x \cdot \frac{p(y)}{y-w})}{-1 \cdot (\frac{p(x)}{x-w} - \frac{p(y)}{y-w})}$$

$$= \frac{y \cdot \frac{p(x)}{x-w} - - x \cdot \frac{p(y)}{y-w}}{\frac{p(x)}{x-w} - \frac{p(y)}{y-w}} = y \oplus x$$

Nadalje, funkcije $x \oplus k$ su Möbiusove transformacije (dokazat ćemo u Poglavlju 5). Želimo pokazati da je $m(x) = x \oplus m(w)$. Primijetimo da je:

$$m(x) = x \iff \frac{ax+b}{cx+d} = x \iff ax + b = cx^2 + dx \iff$$

$$cx^2 + (d-a)x – b = 0 \iff p(x) = 0.$$

Ako uzmemo da je $x \neq m(w)$ onda je

$$x \oplus m(w) = \frac{xf(m(w)) – m(w)f(x)}{f(m(w)) – f(x)} = x \iff$$

$$xf(m(w))–m(w)f(x) = xf(m(w))–xf(x) \iff f(x)(m(w)–x) = 0,$$

onda mora biti $f(x) = 0 \iff p(x) = 0$. Za $x = m(w)$ izravnim uvrštavanjem dobivamo da je

$$m(w) + m(w) = m(w) \iff f(m(w)) = 0 \iff p(x) = 0$$

pa je i $m(w)$ fiksna točka za m, a to je ako i samo ako je fiksna točka za $x \oplus m(w)$. Dakle, $m(x)$ i $x \oplus m(w)$ se podudaraju barem u dvije točke, a to su nultočke karakterističnog polinoma od f. Ako se podudaraju u barem još jednoj točki, onda vrijedi $m(x) = x \oplus m(w)$. Pokazat ćemo da je baš w ta treća točka u kojoj se podudaraju to jest da vrijedi $m(w) = w \oplus m(w)$.

$$x \oplus m(w) = \frac{xf(m(w))–m(w)f(x)}{f(m(w))–f(x)} = \frac{x \cdot \frac{p(m(w))}{m(w)-w} – m(w) \cdot \frac{p(x)}{x-w}}{\frac{p(m(w))}{m(w)-w} – \frac{p(x)}{x-w}} =$$

$$= \frac{\frac{xp(m(w))(x-w)–m(w)p(x)(m(w)-w)}{(m(w)-w)(x-w)}}{\frac{p(m(w)(x-w)–p(x)(m(w)-w)}{(m(w)-w)(x-w)}} =$$

$$= \frac{xp(m(w))(x-w)–m(w)p(x)(m(w)-w)}{p(m(w))(x-w)–p(x)(m(w)-w)}.$$

Ako uvrstimo $x = w$ dobivamo:

$$w \oplus m(w) = \frac{wp(m(w))(w-w) - m(w)p(w)(m(w)-w)}{p(m(w)(w-w) - p(w)(m(w)-w)} =$$

$$\frac{wp(m(w)) \cdot 0 - m(w)p(w)(m(w)-w)}{p(m(w) \cdot 0 - p(w)(m(w)-w)} = \frac{m(w)p(w)(m(w)-w)}{p(w)(m(w)-w)} = m(w).$$

Dakle, budući da se $m(x)$ i $x \oplus m(w)$ podudaraju u barem 3 točke (2 nultočke karakterističnog polinoma $p(x)$ i u točki w), vrijedi da je

$$m(x) = x \oplus m(w).$$

Sada postoji $k \in \overline{\mathbb{R}}$ takav da je $w = m^{-1}(k)$ te ako je tada $f(x) = \frac{p(x)}{x-m^{-1}(k)}$, onda je $m(x) = x \oplus k$. Tada imamo:

$$m_n(k) = k^{\oplus(n+1)}.$$

Kao primjer, uzmimo

$$m(x) = \frac{2x+3}{4x+5)}, k = 7.$$

Tada

$$m_{-1}(7) = \frac{-16}{13},$$

i definiramo

$$f(x) = \frac{52x^2 + 39x - 39}{13x + 16}$$

i dobivamo da je

$$x \oplus y = \frac{25xy + 39(x + y) + 48}{52xy + 64(x + y) + 87}$$

iz čega slijedi da je

$$x \oplus 7 = \frac{2x + 3}{4x + 5}$$

i

$$m_n(7) = 7^{\oplus(n+1)}.$$

Poglavlje 4

Primjeri

Primjer 4.0.5. *Promatrajmo* $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. *Odgovarajuća operacija je* $x \oplus y = \frac{x+y}{1-xy}$. *Ta operacija očito podsjeća na tangens zbroja:*

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Odatle slijedi:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy},$$

odnosno

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}(x \oplus y).$$

To znači da funkcija arkus tangens djeluje kao homomorfizam između operacija $\oplus$ *i* $+$. *Primjerice, poznata Machinova formula:*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

odnosno

$$\operatorname{arctg} 1 \oplus \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$$

može se napisati u obliku

$$1 \oplus \frac{1}{129} = \frac{1}{5} \oplus \frac{1}{5} \oplus \frac{1}{5} \oplus \frac{1}{5}$$

Nadalje, može se dobiti zatvorena formula za iteracije Möbiusove transformacije s obzirom na f:

$$x \oplus c = \text{tg}(\text{arctg}(x) + \text{arctg}(c))$$

i stoga $m_n(c) = \text{tg}(n \cdot \text{arctg}(c))$.

Primjer 4.0.6. *Promatrajmo* $f(x) = \frac{x^2-c^2}{x}$. *Zatim* $x \oplus y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}$, *što je relativistički zakon zbrajanja brzina, a c je brzina svjetlosti. Ako je* $c^2 = k$ *cijeli broj, dodajući taj broj samom sebi n puta,* $1 \leq n < \infty$,*dobivamo beskonačno mnogo konvergenata jednostavnom verižnom razlomku od c.*

Primjer 4.0.7. *Ako je* $f(x) = \frac{1}{x}$, *tada je* $x \oplus y = x + y$ *to jest uobičajeno zbrajanje. Postoji li tada f takva da se operacija* $\oplus$ *ponaša kao uobičajeno množenje? To jest, postoji li f takav da je* $x \oplus y = xy$ *? Ako postoji, uzmemo* $y = x$, *tada dobivamo* $x \oplus x = x^2$. *S druge strane,* $x \oplus x$ *je iteracija Newton-Raphsonove metode i imamo diferencijalnu jednadžbu:*

$$x^2 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe pronalazimo $f(x) = \frac{x}{1-x}$. *Konačno, nakon provjere da je operacija* $\oplus$ *za dobiveni f zaista obično množenje, možemo zaključiti da je odgovor da takav f postoji.*

Primjer 4.0.8. *Ako je* $f(x) = x^2$, *dobivamo* $x \oplus y = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$, *što možemo prepoznati kao oblik formule zbroja otpora spojenih paralelno. S druge strane, otpornici raspoređeni serijski su pokriveni slučajem* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Nakon ovog zaključka prirodno je postaviti pitanje imaju li sva ta različita pravila zbrajanja tumačenje u području elektriciteta.*

Primjer 4.0.9. *Ako je f Möbiusova transformacija,* $x \oplus y$ *je tada oblika* $Axy + B(x + y) + C$. *U Primjeru 4.0.5, vidjeli smo da arkus tangens djeluje kao homomorfizam i da to dovodi do zatvorene formule za iteracije od m. To vrijedi za sve navedene primjere , i još više (Tablica 4.1):*

Tablica 4.1

$f(x)$	$x \oplus y$	$F(x)$
$\frac{x^2+1}{x}$	$\frac{x+y}{1-xy}$	$\mathrm{tg}^{-1}(x)$
$\frac{x^2-1}{x}$	$\frac{x+y}{1+xy}$	$\mathrm{th}^{-1}(x)$
x^2+1	$\frac{xy-1}{x+y}$	$\mathrm{ctg}^{-1}(x)$
x^2-x-1	$\frac{xy+1}{x+y-1}$	
$\frac{1}{x}$	$x+y$	x
x^2	$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{x}{1-x}$	xy	$\ln(x)$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$Axy+B(x+y)+C$	

Poglavlje 5

Neke posljedice asocijativnosti operacije $\oplus$

Navest ćemo neke posljedice asocijativnosti od $\oplus$. Mi inače ne pretpostavljamo nikakva dodatna svojstva funkcije f osim neprekidnosti i činjenice da nagib grafa funkcije f nije omeđen. Ako je w realan broj takav da je $f(w) = \infty$, onda definiramo $p(x) = f(x)(x - w)$, inače definiramo $p(x) = f(x)$. Ako je graf funkcije f konika neomeđenog nagiba, onda je p jednostavno brojnik od f.

Propozicija 5.0.10. *Ako je f takva da je $\oplus$ asocijativna, onda*

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) = \frac{p(x \oplus y)}{p(x)}.$$

Dokaz. Neka je $s(x, y) = \frac{f(x)}{x - x \oplus y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Neka je $i = w$ i ako $f(w) = \infty$ (ako je $f(w) = \infty$ za nekoliko vrijednosti w, uzmemo bilo koju od njih), inače neka $i = \infty$. U svakom slučaju,

$$\lim_{z \to i}(x \oplus z) = x.$$

Tada, zbog asocijativnosti operacije $\oplus$ je $x \oplus y \oplus z$ dobro definirana i vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) = \lim_{z \to i} \frac{x \oplus y - x \oplus y \oplus z}{x - x \oplus z} = \lim_{z \to i} \frac{f(x \oplus y)}{s(x \oplus y, z)} \cdot \frac{s(x, z)}{f(x)} = \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} \cdot \lim_{z \to i} \frac{s(x, z)}{s(x \oplus y, z)}.$$

Primijetimo da je

$$\lim_{z \to i} \frac{s(x, z)}{s(x \oplus y, z)} = \lim_{z \to i} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \cdot \frac{x \oplus y - z}{f(x \oplus y) - f(z)} = \lim_{z \to i} \frac{x \oplus y - z}{x - z},$$

što je jednako 1 ako $i = \infty$ i jednako je $\frac{x \oplus y - w}{x - w}$ ako je $i = w$. $\square$

Odmah slijedi, po definiciji od f, da $f(x) = \infty$ ima najviše jedno realno rješenje. Drugu posljedicu smo koristili u Poglavlju 3, a to je da je funkcija oblika $x \oplus k$ Möbiusova transformacija. Za taj zaključak potreban nam je pojam Schwarzove derivacije i neka njezina svojstva.
Za funkciju f klase $\mathbb{C}^3$ Schwarzova derivacija izgleda ovako:

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

(Naziv Schwarzova derivacija ili Schwarzian uveo je Arthur Cayley po matematičaru Hermannu Schwarzu, no prvi je tu operaciju zapravo otkrio Lagrange u 18. stoljeću). Mi ćemo koristiti svojstvo : $S(f) = S(g)$ ako i samo ako je

$$f(x) = \frac{a_1 g(x) + b_1}{c_1 g(x) + d_1},$$

gdje je $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$.
Također ćemo pokazati da je $S(f) = 0$ ako i samo ako je f Möbiusova transformacija. Računom je lako pokazati da je Schwarzova derivacija svake Möbiusove transformacije jednaka 0. Uzmimo na primjer slučaj

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Dobivamo:

$$S(f(x)) = \frac{6}{x^2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^2} = 0.$$

Općenito, ako je f bilo koja funkcija takva da je $S(f) = 0$, a g neka Möbiusova transformacija, uzmimo $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, onda vrijedi $S(f) = S(g) = 0$ pa iz prethodnog svojstva Schwarzove derivacije slijedi da je f oblika

$$f(x) = \frac{a_1 g(x) + b_1}{c_1 g(x) + d_1},$$

pri čemu je $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$.
Uvrštavanjem $g(x)$ dobivamo kompoziciju dviju Möbiusovih transformacija što je ponovo Möbiusova transformacija to jest

$$f(x) = \frac{a_1 \frac{ax+b}{cx+d} + b_1}{c_1 \frac{ax+b}{cx+d} + d_1} = \frac{(aa_1 + b_1 c)x + (a_1 b + b_1 d)}{(ac_1 + cd_1)x + (bc_1 + d_1 d)}.$$

Vidimo da tada $S(f) = 0 \Longrightarrow f$ je Möbiusova transformacija. Dakle, dobili smo da vrijedi: $S(f) = 0 \Longleftrightarrow f$ je Möbiusova transformacija.

Korolar 5.0.11. *Neka je p kvadratni polinom. Tada za sve k, $m(x) = x \oplus k$ je Möbiusova transformacija.*

Dokaz. Izračunat ćemo Schwarzovu derivaciju funkcije $m(x) = x \oplus k$ čime će se pokazati da je $S(m) = 0$ pa će po prethodno navedenom svojstvu Schwarzove derivacije slijediti da je m Möbiusova transformacija.
Po Propoziciji 5.0.10 vrijedi

$$m' = \frac{p \circ m}{p}.$$

Uvrštavanjem u Schwarzovu derivaciju možemo izračunati da je

$$S(m) = \frac{q \circ m - 1}{p^2}$$

pri čemu je $q = pp'' - \frac{1}{2}(p')^2$. Budući da je p kvadratni polinom lako dolazimo do toga da je q konstanta te je tada $S(m) = 0$.

□

U 4. poglavlju, smo našli homomorfizam za Primjer 5.0.5. Pokušajmo sada naći takav homomorfizam za opći slučaj.

Korolar 5.0.12. *Ako F zadovoljava $F' = \frac{1}{p}$ i $F(i) = 0$, onda je*

$$F(x \oplus y) = F(x) + F(y).$$

Dokaz. Pretpostavimo da $F' = \frac{1}{p}$. Po Propoziciji 5.0.10 je tada

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x \oplus y) = F'(x)$$

te je zbog toga $F(x \oplus y) = F(x) + G(y)$ za neku funkciju G. Po komutativnosti $F(x) + G(y) = F(y) + G(x)$ iz čega slijedi da je $F(x) - G(x) = F(y) - G(y)$ te se zbog toga F i G razlikuju samo u konstanti (neka je to neki c). Konačno je onda

$$F(x \oplus y) = F(x) + F(y) + c.$$

Zbog uvjeta $F(\tau) = 0$ slijedi da je konstanta $c = 0$.

□

To nam daje (kao u Primjeru 5.0.5) zatvorenu formulu za $k^{\oplus n}$ koja glasi

$$k^{\oplus n} = F^{-1}(nF(k)).$$

Funkcije F i p su, za danu funkciju m, rješenja nama poznatih funkcijskih jednadžbi. Naime, do na skalar, F je rješenje Abelove funkcijske jednadžbe

$$F(m(x)) = F(x) + 1,$$

a p je rješenje Julijeve jednadžbe

$$p(m(x)) = p(x)m'(x).$$

Za naš prvotni primjer je homomorfizam

$$5^{-\frac{1}{2}} \cdot \log |(x - \overline{\Phi}) \cdot (x - \Phi)|$$

gdje su $\overline{\Phi}$ i Φ dva rješenja jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$. Zbog toga je, ako je k bliže Φ nego $\overline{\Phi}$, $F(k) > 0$ i $F(k^{\oplus n}) \to \infty$ kako $n \to \infty$ te slijedi

$$k^{\oplus n} \to \Phi.$$

Na primjer $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1^{\oplus n} \to \Phi$.

Poglavlje 6

Još neki primjeri i napomene

Primjer 6.0.13. *GRUPE. Pitanje koje si sada postavljamo je sljedeće: Postoji li za funkcije oblika*

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

grupa s operacijom $\oplus$*? Odgovor je potvrdan. Geometrijski,* $\tau = \frac{-e}{d}$ *(* $\tau = \infty$ *ako je* $d = 0$ *) djeluje kao identiteta. Neka je* $Z(f) = \{x : f(x) = 0\}$ *označuje skup nultočaka od* f *i neka je* $G = \overline{\mathbb{R}} \setminus Z(f)$*. Tada je* G *zatvoren s obzirom na operaciju* $\oplus$*. Inverz za bilo koji* k *postoji zbog činjenice da je svaki* $x \oplus k$ *Möbiusova transformacija, za zadani* k*, neka* $m(x) = x \oplus k$ *i definiramo* $k^{-1} = m^{-1}(\tau)$*. Nadalje, umjesto nad* $\overline{\mathbb{R}}$*, Möbiusove transformacije možemo promatrati nad proširenjem polja kompleksnih brojeva* $\overline{\mathbb{C}}$*, kako je i uobičajeno. Tada je*

$$G = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \colon f(z) \neq 0\}$$

grupa s operacijom $\oplus$ *i neutralnim elementom* τ*.*

Primjer 6.0.14. *ELIPTIČKE KRIVULJE. Uočava se sličnost između našeg „sekantnog zbrajanja" i operacije zbrajanja točaka na eliptičkim krivuljama koje daju takvim krivuljama strukturu grupe. Eliptička krivulja je vrsta kubne krivulje, to jest krivulje trećeg stupnja zadane jednadžbom oblika*

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

uz dodatan uvjet nesingularnosti. Unija x-osi i grafa krivulje

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

također je eliptička krivulja, ali degenerirana i zadana formulom

$$y^2(dx + e) = y(ax^2 + bx + c).$$

Ovo je primjer generalizirane kubične krivulje čiji je graf unija x-osi i grafa neke funkcije. Poznato je da se na skupu točaka kubne krivulje može definirati binarna operacija zasnovana na tome da spojnica dviju točaka krivulje siječe krivulju u jednoznačno određenoj točki. Takva operacija primijenjena na naše degenerativne krivulje upravo je operacija sekantnog zbrajanja. Uobičajen dokaz da je operacija asocijativna slijedi iz Cayley-Bacharachovog teorema, koji je poznata generalizacija Pascalovog teorema i može se formulirati ovako:
Neka se dvije kubne krivulje u projektivnoj ravnini sijeku u devet točaka. Tada svaka kubika koja prolazi kroz osam tih točaka prolazi i kroz devetu točku.

Primjer 6.0.15. *Teorija aproksimacije polinoma na* $[-1, 1]$ *uključuje težišnu funkciju* $\sqrt{1-x^2}$*. U tom kontekstu, zakon zbrajanja*

$$a \oplus b = a \cdot \sqrt{1-b^2} + b \cdot \sqrt{1-a^2}$$

ima veliku važnost. Iako to nije očigledno, "sekantni" zakon zbrajanja je asocijativan na intervalu $[-1, 1]$ *(arkus sinus djeluje kao homomorfizam). Općenito, teorija zakona zbrajanja oblika* $a \oplus b = af(b) + bf(a)$ *u mnogočemu je analogna sekantnom zbrajanju.*

Primjer 6.0.16. *Na kraju samo da spomenemo zanimljivu vezu s matricama. Prisjetimo se inicijalnog primjera:*

$$m(x) = 1 + \frac{1}{x},$$

$$f(x) = x^2 - x - 1,$$

$$x \oplus y = \frac{xy+1}{x+y-1}.$$

Neka je A 2×2 *matrica s karakterističnom jednadžbom* $x^2 - x - 1 = 0$*. Na primjer, neka je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primijetimo korespondenciju sa $1 + \frac{1}{x} = \frac{1x+1}{1x+0}$*. Budući da A zadovoljava karakterističnu jednadžbu,* $A^2 = A + I$ *te imamo*

$$(A - xI)(A - yI) = (1 - x - y)A + (xy + 1)I \doteq A - (x \oplus y)I$$

gdje je $\doteq$ *jednakost do na skalar.*
Općenito, neka je A matrica s kvadratnim karakterističnom polinomom p. Ako je $f(x) = p(x)$*, tada gornja formula vrijedi ako* $f(x) = \frac{p(x)}{x-w}$*,*

$$(A - xI)(A - yI) \doteq (A - (x \oplus y)I)(A - wI).$$

Pritom je u bilo kojem slučaju $\oplus$ definirano sa

$$x \oplus y = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}.$$

Zaključno, napomenimo da je ovaj rad pretežno koncipiran na temelju članka Sama Northshielda [4], u kojem su dane smjernice i prema drugim poopćenjima i dubljim vezama s različitim područjima matematike.

Bibliografija

[1] Robert Bix, *Conics and Cubics: A Concrete Introduction to Algebraic Curves*, Springer Science & Business Media, 2006.

[2] Andrej Dujella, *Uvod u teoriju brojeva (skripta)*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf`

[3] John H. Mathews, *Numerical Methods For Mathematics, Science, and Engineering*, Prentice Hall College Div, 1992. `http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews//n2003/newtonsmethod/Newton%27sMethodProof.pdf`

[4] Sam Northshield, *Associativity of the Secant Method* The American Mathematical Monthly 109(3): 246-257 (2002) `http://faculty.plattsburgh.edu/sam.northshield/monthly.pdf`

[5] V. Ovsienko, S. Tabachnikov, *What is the Schwarzian Derivative?* `http://www.ams.org/notices/200901/tx090100034p.pdf`

Sažetak

U ovom diplomskom radu izložen je jedan algebarski pristup poznatim iterativnim metodama za izračunavanje nultočaka realnih funkcija, odnosno u drukčijoj formulaciji, određivanje fiksnih točaka funkcije.

Primjena metode sekante interpretira se kao binarna operacija $\oplus$ na proširenom skupu realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$. Razmatraju se moguća algebarska svojstva operacije $\oplus$ te se pokušavaju naći šire klase funkcija za koje je pripadna operacija asocijativna. Primjenom glasovitog Pascalovog teorema o šesterovrhu upisanom krivulji drugog reda dokazuje se asocijativnost operacije $\oplus$ za jednu klasu racionalnih funkcija čime se dobiva potpuni analogon početnom primjeru za iterativno određivanje vrijednosti Zlatnog reza različitim metodama: iteracijama niza $m(x) = 1 + \frac{1}{x}$ odnosno nizovima dobivenim primjenom metoda tangente i sekante na polinom $f(x) = x^2 - x - 1$.

Nadalje, Möbiusove transformacije također pružaju zanimljivo poopćenje tog početnog primjera pri čemu iteracije konvergiraju prema korijenu karakterističnog polinoma Möbiusove transformacije. Navodi se niz primjera koji ilustriraju kako neke dobro poznate operacije poput zbrajanja točaka na eliptičkim krivuljama, relativističkog zbrajanja brzina, zbrajanja otpora serijski ili paralelno spojenih otpornika pa i standardno zbrajanje i množenje realnih brojeva predstavljaju posebne slučajeve binarne operacije $\oplus$ uz odgovarajući izbor početne funkcije f.

Na taj način uočavaju se dublje veze između nekih poznatih rezultata i metoda iz matematičke analize, algebre, geometrije i fizike.

Summary

In this thesis we present an algebraic approach to some well known iterative methods for calculating roots of real functions or in a different formulation, finding fixed points of functions.

The use of the secant method is interpreted as a binary operation $\oplus$ on the extended set of real numbers $\overline{R}$. We consider possible algebraic properties of operation $\oplus$ and try to find some classes of functions for which this operation is associative. Applying Pascal's famous Hexagrammum Mysticum Theorem we prove the associativity of operation $\oplus$ for a class of rational functions and to obtain an analogue of the initial example of determing the value of the Golden Mean by various iterative methods: a sequence of iterations of function $m(x) = 1 + \frac{1}{x}$ and sequences we get by using tangent method and secant method on polynomial $f(x) = x^2 - x - 1$.

Furthermore, Möbius transformations also provide interesting generalization of the initial example where iterations converge to the root of the characteristic polynomial of the Möbius transformation. We list a variety of examples that illustrate how some well known operations such as the group law on elliptic curves, the velocity addition law of special relativity, the addition of electric resistances in parallel and in series and also the standard addition and multiplication of real numbers are special cases of binary operation $\oplus$ with an appropriate choice of initial f.

Životopis

Moje ime je Marko Sačić. Rođen sam 20. prosinca 1991. godine u Varaždinu. Odrastao sam u mjestu Nedeljanec.

Svoje obrazovanje započeo sam u Osnovnoj školi Vidovec. Nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja, 2006. godine upisao sam opću gimnaziju u Drugoj gimnaziji Varaždin.

Po završetku srednjoškolskog obrazovanja 2010. godine, upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon toga sam 2013. godine upisao Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer nastavnički, kojeg upravo završavam.