

# Istraživanje učeničkih i studentskih strategija u rješavanju zadataka s grafovima iz svakodnevnog života

---

Skenderović, Nikolina

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:617471>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-26**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Nikolina Skenderović

**ISTRAŽIVANJE UČENIČKIH I**  
**STUDENSKIH STRATEGIJA U**  
**RJEŠAVANJU ZADATAKA S**  
**GRAFOVIMA IZ SVAKODNEVNOG**  
**ŽIVOTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
dr. sc. Ana Sušac

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik

2. \_\_\_\_\_, član

3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Uvod</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Teorijski okvir istraživanja</b> .....	<b>4</b>
1.1 Studentske i učeničke poteškoće s grafovima .....	4
1.2 PISA .....	8
1.3 Strah od matematike.....	12
<b>2 Istraživanje na studentima</b> .....	<b>14</b>
2.1 Metode .....	14
2.1.1 Ispitanici.....	14
2.1.2 Test.....	14
2.1.3 Mjerenja pokreta očiju .....	16
2.1.4 Postupak mjerenja .....	20
2.1.5 Analiza podataka .....	20
2.2 Rezultati i rasprava.....	21
2.2.1 Točnost u rješavanju .....	21
2.2.2 Studentske strategije u rješavanju .....	24
2.2.3 Vrijeme rješavanja zadataka.....	30
2.2.4 Usporedba pokreta očiju ispitanika koji su točno i netočno riješili zadatke .....	31
<b>3 Istraživanje s učenicima</b> .....	<b>37</b>
3.1 Metode .....	37
3.1.1 Ispitanici.....	37
3.1.2 Test i upitnik .....	37
3.1.3 Analiza podataka .....	38
3.2 Rezultati i rasprava.....	38
3.2.1 Točnost u rješavanju .....	38
3.2.2 Učeničke strategije u rješavanju.....	41
3.2.3 Veza između točnosti u rješavanju, straha od matematike i ocjene iz matematike.....	47
<b>Zaključak i implikacije na nastavu</b> .....	<b>52</b>
<b>Bibliografija</b> .....	<b>55</b>
<b>Prilozi</b> .....	<b>58</b>
Prilog 1: Test.....	58

Prilog 2: Upitnik o strahu od matematike .....	67
<b>Sažetak .....</b>	<b>68</b>
<b>Sumarry .....</b>	<b>69</b>
<b>Životopis .....</b>	<b>70</b>

# Uvod

Učenici se s grafovima susreću tijekom cijelog školovanja; prvi puta u nižim razredima osnovne škole pa sve do završetka srednjoškolskog ili fakultetskog obrazovanja. Možemo ih naći u gotovo svim udžbenicima različitih nastavnih predmeta, bila to geografija, povijest, informatika ili neki drugi predmet, ali isto tako i u svakodnevnom životu (u novinama, na televiziji, itd.). Ipak, najviše pozornosti im se pridaje u nastavi matematike i fizike. Grafovi su sažeti prikaz podataka i pomoću njih možemo jednostavno prikazivati složene probleme i veze među varijablama. Grafovi su važan izvor informacija u svakodnevnom životu i zbog toga je potrebno kod učenika poticati razvoj vještina iščitavanja informacija iz grafova. U prvom odgojno-obrazovnom ciklusu Nacionalnog okvirnog kurikulumu, kojeg čine prva četiri razreda osnovne škole, neki od ishoda u matematičkom području su „prikupiti, razvrstati i organizirati podatke koji proizlaze iz svakodnevnoga života te ih prikazati jednostavnim tablicama, piktogramima (slikovnim dijagramima) i stupčastim dijagramima“ te „pročitati i protumačiti podatke prikazane jednostavnim tablicama, piktogramima i stupčastim dijagramima“ [9]. U tom se ciklusu grafovi ne obrađuju kao zasebna jedinica, ali se pojavljuju u udžbenicima iz različitih nastavnih predmeta. U ostalim odgojno-obrazovnim ciklusima grafovi se pojavljuju u svim dimenzijama matematičkog obrazovanja, bilo kao grafički prikazi različitih podataka i ovisnosti ili kao grafovi raznih matematičkih funkcija. Ništa manje grafovi nisu zastupljeni ni u nastavi fizike, a najveći naglasak se najčešće stavlja na grafičke prikaze vezane za područje kinematike. Grafovi su zanimljivi za proučavanje prenošenja znanja iz jednog predmeta u drugi ili između različitih područja i konteksta. Zastupljeni su u svim nastavnim predmetima, u različitim disciplinama, ali i u svakodnevnom životu.

Tijekom zadnjih godina provedeno je puno istraživanja o učeničkom i studentskom razumijevanju grafova i većina njih je imala sličan zaključak, a to je da učenici imaju poteškoća s razumijevanjem grafova [2], [4], [13], [14]. Isti dojam sam i sama stekla kroz razgovor s nastavnicima matematike i fizike što me potaknulo na razmišljanje kako to utječe na interpretaciju grafova s kojima se oni svakodnevno susreću, bilo u udžbenicima, novinama ili na televiziji. Europska Unija odredila je osam temeljnih kompetencija za cjeloživotno obrazovanje među kojima je i matematička kompetencija koja se odnosi na osposobljenost učenika za razvijanje i primjenu matematičkoga mišljenja u rješavanju problema u nizu različitih svakodnevnih situacija [9]. Postavila sam si pitanje koliko su naši učenici i studenti sposobni primijeniti matematički način razmišljanja u svakodnevnom životu. 2000. godine u svijetu su se počela provoditi PISA (*Programme for International Student Assessment*) istraživanja, a 2006. su se u istraživanje uključili i hrvatski učenici [19]. PISA istraživanje se provodi na petnaestogodišnjacima diljem svijeta svake tri godine te obuhvaća tri osnovna područja: čitalačku, matematičku i prirodoslovnu pismenost. Jedno područje se na svakom istraživanju ispituje detaljnije, a 2012. naglasak je bio stavljen na matematičku pismenost. Te godine rezultatima hrvatskih učenika malo tko je bio zadovoljan. PISA testiranje nije klasično ispitivanje naučenog gradiva, već ispitivanje o tome u kojoj su mjeri učenici sposobni znanja naučena u školi primijeniti u svakodnevnom životu i snaći se u novim i nepoznatim situacijama. Iz tog razloga odlučila sam odabrati nekoliko grafova koji su se pojavili na PISA testiranju 2012. godine te provesti istraživanje na našim srednjoškolcima i studentima kako bih otkrila poteškoće na koje oni nailaze pri rješavanju te strategije koje koriste pri interpretaciji grafova iz svakodnevnog života.

Proučavajući rezultate PISA istraživanja, uočila sam još jednu zanimljivost. Naime, na testiranju su učenici ispunjavali upitnik o tome koliko vjeruju u vlastitu sposobnost učinkovitog rješavanja matematičkih problema, kako se osjećaju dok se bave matematikom te koliko su uključeni u matematičke aktivnosti izvan škole [16]. Ispostavilo se da se da matematika kod dosta učenika uzrokuje negativne emocije. Rezultati su me potaknuli da provedem slično istraživanje kako bih provjerila koliko je kod naših

srednjoškolaca prisutan negativan odnos prema matematici te strah od matematike i kako on utječe na njihov školski uspjeh.

Kroz sljedeća poglavlja detaljnije ću opisati studentske i učeničke poteškoće pri rješavanju grafova. Zatim ću objasniti što je to PISA istraživanje te kakav utjecaj ima na školske sustave. Navest ću specifičnosti straha od matematike. Opisat ću istraživanje provedeno posebno na studentima, koje je uključivalo i mjerenje pokreta očiju, a posebno na učenicima te iznijeti rezultate istraživanja, uključujući studentske i učeničke strategije u rješavanju zadataka s grafovima iz svakodnevnog života. Usporedit ću rezultate dviju grupa studenata, te učenika, i analizirati vezu između točnosti u rješavanju grafova, straha od matematike i ocjene iz matematike kod učenika. Na kraju ću navesti što možemo zaključiti iz rezultata istraživanja te kakav utjecaj oni mogu imati na nastavu matematike i fizike.



# Poglavlje 1

## Teorijski okvir istraživanja

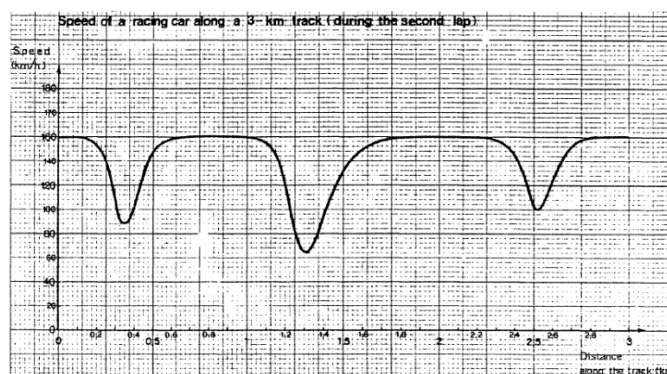
### 1.1. Studentske i učeničke poteškoće s grafovima

Od mnogih vještina koje se razvijaju na nastavi matematike i fizike, crtanje i interpretiranje grafova jedna je od učenicima najzahtjevnijih. Grafovi su bitan alat i u fizici i u matematici, ali su dodatno važni zbog toga što se znanja o grafovima mogu prenositi i u druga područja. U više istraživanja utvrđeno je da učenici i studenti imaju dosta poteškoća s razumijevanjem grafova [2], [4], [6], [12], [13], [14], [22]. Informacije koje najčešće želimo dobiti iz grafa su očitavanje točke, prepoznavanje ili opis ovisnosti, određivanje i interpretacija nagiba grafa te određivanje i interpretacija površine ispod grafa. Grafovi se u matematici uvode u 7. razredu osnovne škole kod prikazivanja podataka te prikazivanja proporcionalnosti, a kasnije se pojavljuju kod crtanja grafova raznih funkcija. U fizici se grafovi najčešće uvode kroz kinematiku gdje se najviše i diskutiraju.

Leinhardt i suradnici su 1990. pokazali da učeničko razumijevanje matematičkih pojmova, poput funkcije, ima uglavnom algebarsku osnovu [6]. S druge strane, učenici teško percipiraju vizualne informacije i ne smatraju ih bitnima za matematiku. Poteškoće s grafovima Leinhardt je podijelio u tri kategorije: zamjena intervala točkom, zamjena nagiba visinom grafa te interpretacija grafa kao fotografije. Poteškoće su se javljale u oba konteksta, u matematičkom i fizikalnom, međutim, češće su bile u fizikalnom kontekstu. Najčešća poteškoća je bila zamjena nagiba i visine grafa. McDermott i suradnici su u svom

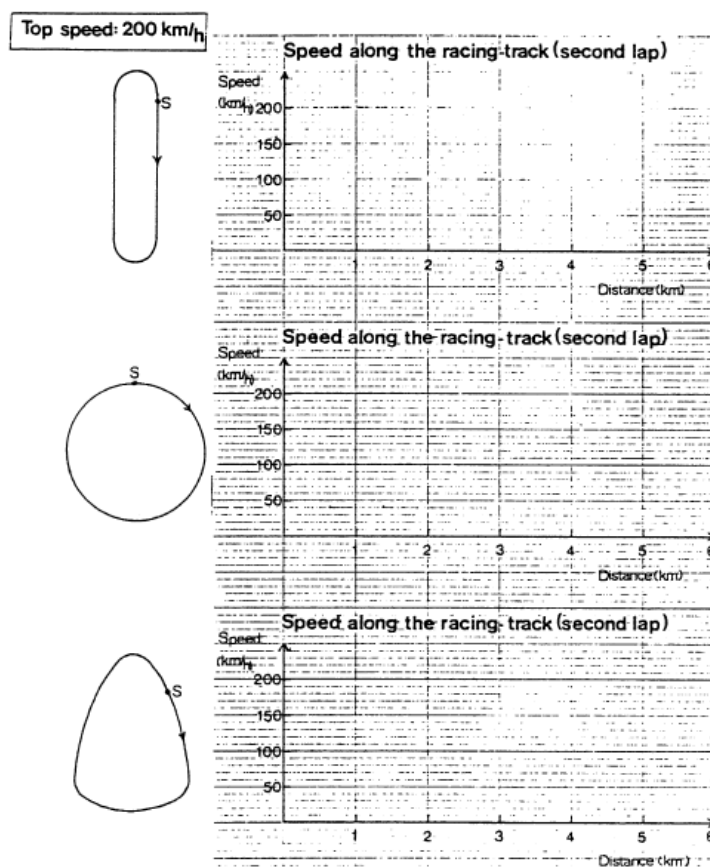
istraživanju 1987. pokazali da nedostatak matematičkih vještina nije glavni uzrok studentskih poteškoća s grafovima u fizici [11]. Pokazalo se da velik broj studenata koji uspješno analiziraju podatke iz grafova u matematici, često imaju poteškoća s primjenom tih vještina u drugim područjima. Kod nekih je studenata bio izražen nedostatak matematičkih znanja, ali čak i da nije, ispostavilo se da matematičko znanje nije jamstvo za uspješno rješavanje fizikalnih problema. Često studenti uopće ne uočavaju sličnost između matematičkih i fizikalnih problema te koriste različite strategije u analiziranju grafova.

1981. provedeno je istraživanje primjene situacija iz svakodnevnog života u nastavi matematike [3]. Učenici od 11 do 15 godina trebali su riješiti „problem trkaćeg auta“. U prvom zadatku nalazio se graf koji je prikazivao kako se mijenja brzina trkaćeg auta duž 3 km duge staze tijekom drugog kruga utrke (Slika 1.1). Učenike se usmeno pitalo mogu li iz grafa vidjeti koliko se zavoja nalazi na stazi. Učenici su morali obrazlagati svoje odgovore sve dok kroz diskusiju s ispitivačem nisu došli do točnog odgovora. Zatim ih se pitalo koji od zavoja je najoštriji i zašto. Najčešća greška je bila zamjena grafa s putanjom staze pa je dosta učenika odgovorilo da se na stazi nalazi 6, 8 ili 9 zavoja. Općenito, učenici viših razreda su točnije odgovarali od učenika nižih razreda i učenici su davali točnije odgovore od učenika.

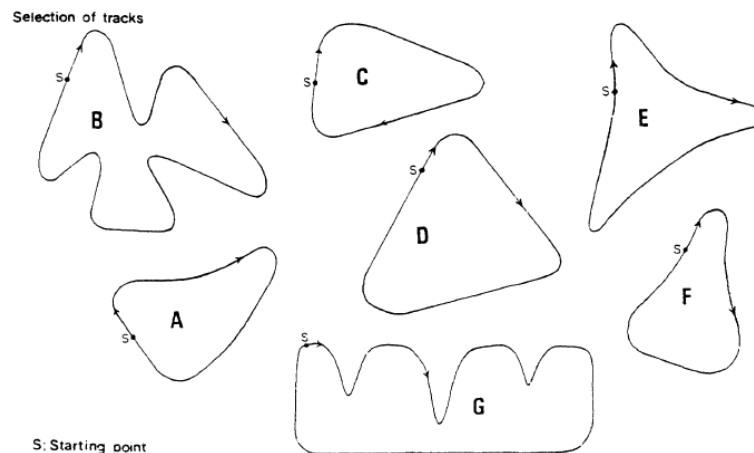


Slika 1.1: Problem trkaćeg auta. Graf prikazuje brzinu trkaćeg auta duž 3 km duge staze tijekom drugog kruga utrke. Preuzeto iz [3].

U idućem zadatku su bile prikazane tri trkaće staze duge 6 km i učenici su trebali skicirati graf kao u prethodnom zadatku za svaku pojedinu stazu (Slika 1.2). Nakon što su to riješili, ponuđene su im skice sedam trkaćih staza, a oni su trebali odabrati onu koja odgovara grafu iz prvog zadatka (Slika 1.3). Ti su se zadatci ispostavili težima od prethodnog jer su uključivali neke apstraktne elemente te poznavanje tehničkih detalja vožnje. Zanimljivo je da su učenici rješavali zadatke ovisno o osobnim iskustvima sa sličnim situacijama iz stvarnog života (npr. igranje autićima). Ispitivači su s učenicima diskutirali o zadacima i pokazalo se da uvođenje svakodnevnog konteksta i verbalna objašnjenja uvelike doprinose točnosti u rješavanju zadataka.



Slika 1.2: S lijeve strane se nalaze skice trkaćih staza. Učenici su trebali nacrtati graf brzine trkaćeg auta duž 6 km duge staze tijekom drugog kruga utrke. Preuzeto iz [3].



Slika 1.3: Skice trkaćih staza. Od učenika se tražilo da izaberu stazu koja odgovara grafu iz prvog zadatka (Slika 1.1). Preuzeto iz [3].

Nedavno je provedeno istraživanje učeničkog razumijevanja grafova u kontekstu fizike i matematike na hrvatskim učenicima drugog razreda srednje škole [14]. Sastavljeni su parovi paralelnih zadataka iz matematike i fizike. Matematički postupak u oba zadatka koja su činila par bio je jednak, no kontekst je bio različit. Također, nastavnici su ispunili upitnik u kojem su trebali procijeniti očekivane težine tih zadataka. Većina njih odlučila je staviti matematički zadatak ispred fizikalnog po težini, uz obrazloženje da je matematika apstraktnija, pa i teža, dok je fizika zbog konteksta koji je učenicima bliži lakša. Suprotno očekivanjima nastavnika, ispostavilo se da su učenici bolje snalazili u matematičkom, nego fizikalnom kontekstu. Pokazalo se da su najčešće učeničke poteškoće s kinematičkim grafovima bile slabo povezivanje grafa i gibanja, shvaćanje grafa kao “fotografije” gibanja, zamjena nagiba grafa visinom grafa, zamjena intervala točkom te kriva interpretacija značenja nagiba i površine ispod grafa.

Godinu dana kasnije istraživanje je prošireno i na druge kontekste zadacima za čije rješavanje nije bilo potrebno imati specijalna dodatna znanja iz tih područja [13]. Konstruirano je osam skupina pitanja, a svaka je skupina sadržavala po tri paralelna pitanja – jedno iz matematike, jedno u kontekstu fizike (kinematike), a jedno u nekom drugom, nefizikalnom kontekstu (npr. cijena dionica, visina vodostaja, i sl.). Test je proveden na

385 studenata prve godine fizike ili matematike istraživačkih i nastavničkih smjerova na Fizičkom i Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu na samom početku prvog semestra. Studenti su uz odgovore morali dati i obrazloženja iz kojih su se mogle odrediti njihove strategije u rješavanju. Uočeno je da u zadacima iz matematike bez dodatnog konteksta studenti uglavnom znaju što ih se pita i daju odgovore pomoću procedura koje su usvojili na nastavi matematike. Svejedno, dio studenata imao je problema pri određivanju nagiba pravca ili površine geometrijskih likova. Dodavanjem fizikalnog ili nekog drugog konteksta, povećavale su se poteškoće pri rješavanju. U fizici je uočeno jako oslanjanje na formule. U drugim kontekstima studenti su se najviše izražavali riječima, premda je bilo i pokušaja konstruiranja formula po analogiji s fizikom. Studenti su u ovom području pokazali da su sposobni i za načine zaključivanja koji se ne oslanjaju na formule.

## 1.2. PISA

*Programme for International Student Assessment* (PISA) međunarodna su istraživanja s ciljem procjene obrazovnih sustava u svijetu testiranjem znanja i vještina petnaestogodišnjih učenika koja se provode svake tri godine [16]. Započela su 2000. pod pokroviteljstvom Organizacije za ekonomsku suradnju i razvoj, OECD-a (eng. *Organisation for Economic Cooperation and Development*), radi ocjenjivanja kvalitete obrazovanja među mladima u glavnim industrijskim zemljama. Osnovni ciljevi PISA istraživanja usmjereni su na politiku obrazovanja. U PISA istraživanjima sudjeluju učenici u dobi između 15 godina i tri mjeseca te 16 godina i dva mjeseca, a do danas je u istraživanjima bilo uključeno više od 70 zemalja cijeloga svijeta. PISA razvija testove koji nisu izravno povezani s nastavnim planom i programom. Testovi su dizajnirani za procjenu obrazovnog sustava zemlje te u kojoj mjeri učenici na kraju obveznog obrazovanja mogu primijeniti svoja znanja na stvarnim situacijama i biti osposobljeni za punopravno sudjelovanje u društvu. Svaki učenik sudjeluje u pismenom ispitu u trajanju od dva sata. Testovi sadrže pitanja otvorenog i zatvorenog tipa te pitanja višestrukog izbora. Učenici rješavaju različite kombinacije testova. Ispitivanje obuhvaća i niz podataka o drugim mogućim utjecajima na obrazovna postignuća kao što su karakteristike i navike učenja,

motivacija i stavovi o učenju, socioekonomski status učenika, roditeljska očekivanja i slično. Iz tog razloga se anketiraju učenici, njihovi roditelji te ravnatelji škola. Analizom rezultata PISA istraživanja pokušavaju se odrediti glavne karakteristike uspješnih obrazovnih sustava. Na temelju toga može se formirati model uspješnog obrazovnog sustava. Uspoređujući rezultate istraživanja među ostalim zemljama, svaka zemlja ima mogućnost promijeniti svoj obrazovni sustav i dobiti povratnu informaciju o tome je li se promjena pokazala uspješnom.

Posljednji objavljeni rezultati PISA istraživanja odnose se na testiranje obavljeno 2012. godine. Oko 510 000 učenika iz 65 zemalja iz slučajno odabranih škola sudjelovalo je u tom istraživanju gdje su se procjenjivala čitalačka, matematička te prirodoslovna pismenost. Taj broj predstavljao je oko 28 milijuna 15-godišnjaka na svjetskoj razini. 44 zemlje su sudjelovale u procjeni kreativnog rješavanja problema i 18 u procjeni financijske pismenosti. Na svakom testiranju jedan predmet se proučava s posebnim naglaskom, a 2012. matematička pismenost je bila glavno područje testiranja. Na samom vrhu ljestvice našli su se 15-godišnjaci iz Singapura, Koreje, Japana i Kine, s tim da su na začelje zasjele Crna Gora, Urugvaj, Bugarska te Kolumbija. Na Slici 1.4 se nalazi pregled uspjeha pojedinih zemalja na PISA istraživanju 2012. na području matematičke, čitalačke i prirodoslovne pismenosti [16]. Ispitivanje je provedeno i u Hrvatskoj od 5. ožujka do 13. travnja 2012. na slučajnom uzorku od 6 853 učenika iz 163 hrvatske srednje škole [21]. Pokazalo se da su hrvatski učenici na 40. mjestu od 65 zemalja po matematičkim znanjima i sposobnostima. To je nepromijenjen rezultat u odnosu na prethodno testiranje provedeno 2009., dok je 2006. Hrvatska bila na 36. mjestu od 57 zemalja. U području prirodoslovne pismenosti Hrvatska je na 34. mjestu, što je ponovno niže od prosjeka OECD-a. Usporedbe radi, Hrvatska je 2006. bila na 26. mjestu od 57, a 2009. 37. od 65 zemalja. Ispitivanje čitalačke pismenosti ukazuje na blagi porast u odnosu na prethodne cikluse. Rezultati se iskazuju u šest razina koje govore o matematičkim sposobnostima učenika te pokazuju da gotovo 30% hrvatskih učenika koji su završili osnovnu školu i upisali se u srednju školu ne doseže razinu 2 matematičke pismenosti (1 je najniža, a 6 najviša razina matematičke pismenosti). Gimnazijalci uvelike prednjače pred učenicima obrtničkih i industrijskih škola i u prosjeku su dosegli četvrtu razinu sposobnosti rješavanja praktičnih problema.

### Snapshot of performance in mathematics, reading and science

- Countries/economies with a mean performance/share of top performers above the OECD average  
Countries/economies with a share of low achievers below the OECD average
- Countries/economies with a mean performance/share of low achievers/share of top performers not statistically significantly different from the OECD average
- Countries/economies with a mean performance/share of top performers below the OECD average  
Countries/economies with a share of low achievers above the OECD average

	Mathematics				Reading		Science	
	Mean score in PISA 2012	Share of low achievers in mathematics (Below Level 2)	Share of top performers in mathematics (Level 5 or 6)	Annualised change in score points	Mean score in PISA 2012	Annualised change in score points	Mean score in PISA 2012	Annualised change in score points
OECD average	494	23.1	12.6	-0.3	496	0.3	501	0.5
Shanghai-China	613	3.8	55.4	4.2	570	4.6	580	1.8
Singapore	573	8.3	40.0	3.8	542	5.4	551	3.3
Hong Kong-China	561	8.5	33.7	1.3	545	2.3	555	2.1
Chinese Taipei	560	12.8	37.2	1.7	523	4.5	523	-1.5
Korea	554	9.1	30.9	1.1	536	0.9	538	2.6
Macao-China	538	10.8	24.3	1.0	509	0.8	521	1.6
Japan	536	11.1	23.7	0.4	538	1.5	547	2.6
Liechtenstein	535	14.1	24.8	0.3	516	1.3	525	0.4
Switzerland	531	12.4	21.4	0.6	509	1.0	515	0.6
Netherlands	523	14.8	19.3	-1.6	511	-0.1	522	-0.5
Estonia	521	10.5	14.6	0.9	516	2.4	541	1.5
Finland	519	12.3	15.3	-2.8	524	-1.7	545	-3.0
Canada	518	13.8	16.4	-1.4	523	-0.9	525	-1.5
Poland	518	14.4	16.7	2.6	518	2.8	526	4.6
Belgium	515	18.9	19.4	-1.6	509	0.1	505	-0.8
Germany	514	17.7	17.5	1.4	508	1.8	524	1.4
Viet Nam	511	14.2	13.3	m	508	m	528	m
Austria	506	18.7	14.3	0.0	490	-0.2	506	-0.8
Australia	504	19.7	14.8	-2.2	512	-1.4	521	-0.9
Ireland	501	16.9	10.7	-0.6	523	-0.9	522	2.3
Slovenia	501	20.1	13.7	-0.6	481	-2.2	514	-0.8
Denmark	500	16.8	10.0	-1.8	496	0.1	498	0.4
New Zealand	500	22.6	15.0	-2.5	512	-1.1	516	-2.5
Czech Republic	499	21.0	12.9	-2.5	493	-0.5	508	-1.0
France	495	22.4	12.9	-1.5	505	0.0	499	0.6
United Kingdom	494	21.8	11.8	-0.3	499	0.7	514	-0.1
Iceland	493	21.5	11.2	-2.2	483	-1.3	478	-2.0
Latvia	491	19.9	8.0	0.5	489	1.9	502	2.0
Luxembourg	490	24.3	11.2	-0.3	488	0.7	491	0.9
Norway	489	22.3	9.4	-0.3	504	0.1	495	1.3
Portugal	487	24.9	10.6	2.8	488	1.6	489	2.5
Italy	485	24.7	9.9	2.7	490	0.5	494	3.0
Spain	484	23.6	8.0	0.1	488	-0.3	496	1.3
Russian Federation	482	24.0	7.8	1.1	475	1.1	486	1.0
Slovak Republic	482	27.5	11.0	-1.4	463	-0.1	471	-2.7
United States	481	25.8	8.8	0.3	498	-0.3	497	1.4
Lithuania	479	26.0	8.1	-1.4	477	1.1	496	1.3
Sweden	478	27.1	8.0	-3.3	483	-2.8	485	-3.1
Hungary	477	28.1	9.3	-1.3	488	1.0	494	-1.6
Croatia	471	29.9	7.0	0.6	485	1.2	491	-0.3
Israel	466	33.5	9.4	4.2	486	3.7	470	2.8
Greece	453	35.7	3.9	1.1	477	0.5	467	-1.1
Serbia	449	38.9	4.6	2.2	446	7.6	445	1.5
Turkey	448	42.0	5.9	3.2	475	4.1	463	6.4
Romania	445	40.8	3.2	4.9	438	1.1	439	3.4
Cyprus <sup>1,2</sup>	440	42.0	3.7	m	449	m	438	m
Bulgaria	439	43.8	4.1	4.2	436	0.4	446	2.0
United Arab Emirates	434	46.3	3.5	m	442	m	448	m
Kazakhstan	432	45.2	0.9	9.0	393	0.8	425	8.1
Thailand	427	49.7	2.6	1.0	441	1.1	444	3.9
Chile	423	51.5	1.6	1.9	441	3.1	445	1.1
Malaysia	421	51.8	1.3	8.1	398	-7.8	420	-1.4
Mexico	413	54.7	0.6	3.1	424	1.1	415	0.9
Montenegro	410	56.6	1.0	1.7	422	5.0	410	-0.3
Uruguay	409	55.8	1.4	-1.4	411	-1.8	416	-2.1
Costa Rica	407	59.9	0.6	-1.2	441	-1.0	429	-0.6
Albania	394	60.7	0.8	5.6	394	4.1	397	2.2
Brazil	391	67.1	0.8	4.1	410	1.2	405	2.3
Argentina	388	66.5	0.3	1.2	396	-1.6	406	2.4
Tunisia	388	67.7	0.8	3.1	404	3.8	398	2.2
Jordan	386	68.6	0.6	0.2	399	-0.3	409	-2.1
Colombia	376	73.8	0.3	1.1	403	3.0	399	1.8
Qatar	376	69.6	2.0	9.2	388	12.0	384	5.4
Indonesia	375	75.7	0.3	0.7	396	2.3	382	-1.9
Peru	368	74.6	0.6	1.0	384	5.2	373	1.3

Slika 1.4: Uspjeh pojedinih zemalja na PISA istraživanju 2012. godine na području matematičke, čitalačke i prirodoslovne pismenosti. Svjetloplavom bojom su označene zemlje ispod prosjeka OECD-a. Uspjeh Hrvatske označen je crvenom bojom. Preuzeto s [16].

Pokazalo se da je ispitanicima najteže bilo pretočiti svakodnevni kontekst u matematički. Ispitivanje je također pokazalo da vrlo mali postotak učenika voli raditi matematičke zadatke te da su dječaci nešto malo bolji od djevojčica, što je u skladu s trendovima u cijelom svijetu [18]. Općenito gledano, prema postignutim rezultatima Hrvatska spada u skupinu zemalja u kojoj se ne bilježi nikakva promjena. Zabrinjavajuća je činjenica da više od četvrtine naših učenika nema osnovna znanja ni vještine za rješavanje problemskih zadataka. S najvišom razinom izvrsnosti može se pohvaliti manje oko pet posto hrvatskih školaraca [18], [21].

Rezultati istraživanja također pokazuju da se neke od obrazovnih politika zemalja sudionica nisu pokazale kao dobre za učenike kao npr. praksa ponavljanja razreda jer uzrokuje veće nejednakosti među naprednim i manje naprednim učenicima. Pokazalo se da obrazovni sustavi s visokim rezultatima na PISA testu imaju tendenciju da resurse ravnopravno raspoređuju socioekonomski naprednijim i manje naprednim školama. Škole koje imaju veću autonomiju nad nastavnim planom i programom, kao i u kojima postoji dobra suradnja između nastavnika i uprave, pokazuju bolje rezultate od škola u kojima autonomija i suradnja izostaju ili su na niskom nivou. Također, PISA rezultati ukazuju da više novca ne vodi nužno do boljih postignuća učenika, već ravnopravnija raspodjela sredstava i ulaganje u područja koja poboljšavaju rezultate [16].

Prošle godine provedeno je istraživanje doprinosa nastave matematike i prirodoslovlja u razvijanju kompetencija potrebnih za učinkovito rješavanje problemskih zadataka na temelju PISA rezultata 41 zemlje iz 2003. godine [23]. Također, za svaku od 41 zemlje istraženo je utječu li društvo, nastavni plan i program te drugi čimbenici vezani za školstvo na stjecanje tih kompetencija kod učenika. Rezultati su pokazali da matematičke i prirodoslovne kompetencije znatno doprinose rješavanju problemskih zadataka te da povezanost između matematike i znanosti ima više utjecaja u prirodoslovnom, nego matematičkom području. Pokazalo se da su loši rezultati pri rješavanju problemskih zadataka posljedica slabog prijenosa specifičnih znanja i vještina iz različitih područja i nedovoljnog povezivanja matematike i prirodoslovlja.



### 1.3. Strah od matematike

Na spomen matematike mnogi se osjećaju nelagodno. Iako neke osobe imaju pozitivna iskustva te čak smatraju matematiku korisnom i zanimljivom, dosta ljudi matematiku doživljava teškom i beskorisnom. 70-ih godina 20. stoljeća, u doba borbe za ravnopravnost spolova, intenzivno su se počeli proučavati stavovi o matematici [10]. Nažalost, do danas se još uvijek zadržalo mišljenje da su matematičke sposobnosti urođene. Na početku školovanja učenici uglavnom imaju pozitivne stavove prema matematici dok s godinama školovanja oni postaju sve negativniji. Istraživanja pokazuju da su negativni stavovi o matematici povezani s lošom slikom o sebi i s osjećajem nekompetentnosti te da na njih uvelike utječu stavovi i uvjerenja nastavnika o matematici. Veliku ulogu u izgradnji tih stavova imaju roditeljski stereotipi povezani s njihovim doživljajem sposobnosti za svladavanje matematike te s očekivanjima uspjeha u matematici kod svoje djece.

Uključivanjem djeteta u školski sustav javlja se ispitna anksioznost. Ispitna anksioznost se definira kao emocionalna uzbuđenost i kognitivna uznemirenost (zabrinutost) koja se javlja u ispitnim situacijama i/ili pri njihovu zamišljanju, odnosno anticipiranju te se manifestira na različite načine [10]. Jedna od prvih teorija ispitne anksioznosti je teorija Mandlera i Sarasona nastala 1952. godine. Oni su proveli istraživanje na skupini studenata i zaključili da rezultati testova inteligencije koje su rješavali nisu povezani s razinom njihovih sposobnosti. Uočili su da lošije rezultate postižu visoko anksiozni studenti posebno u stresnim situacijama. Pretpostavili su da je za to odgovorna jedna vrsta naučenih nagona koji se odnose na anksioznost i koji izazivaju anksiozne odgovore irelevantne za zadatak, a koji su praćeni osjećajem neadekvatnosti, bespomoćnosti, povećanog uzbuđenja, očekivanja kazne, gubitka statusa i sl. Kod nisko anksioznih osoba prevladava druga vrsta naučenih nagona koji se odnose na zadatak i koji uključuju potrebu za uspjehom i izvršavanjem zadataka. S druge strane, Liebert i Morris pretpostavljaju da postoje dvije komponente ispitne anksioznosti: zabrinutost (negativno mišljenje o sebi, situaciji u kojoj se nalazimo i njezinim posljedicama) i emocionalnost (povećano uzbuđenje i stres izazvani ispitnom situacijom). Pretpostavlja se da se ispitna anksioznost

prvi put pojavljuje uglavnom između sedme i petnaeste godine života, no moguće je da se kod nekih osoba pojavi tek u studentskoj dobi [10].

Strah od matematike specifična je vrsta ispitne anksioznosti. Među najprihvaćenijim definicijama straha od matematike jest ona Richardsona i Suinna iz 1972. godine: "Strah od matematike možemo definirati kao osjećaj napetosti i anksioznosti koji ometa manipulaciju brojevima i rješavanje matematičkih problema u širokom rasponu svakodnevnih životnih i školskih situacija" [10]. Razlikujemo dvije komponente straha od matematike: komponentu koja se odnosi na tjeskobu pri ispitivanju matematike i komponentu koja se odnosi na tjeskobu zbog neadekvatnog učinka u matematici. Strah od matematike teorijski i empirijski povezan je s raznim negativnim ishodima, uključujući i loš učinak na testovima znanja iz matematike, loš školski uspjeh u matematici, negativne stavove prema osobnim računalima i matematici srodnim predmetima, ali i odabir zanimanja koja ne zahtijevaju znanja složene i više matematike [10].

Na PISA testiranjima se također pokazalo da matematika često uzrokuje anksioznost, brigu, stres te osjećaj nemoći kod ispitanih 15-godišnjaka. Zanimljivo je da je prilikom PISA istraživanja 30% učenika izjavilo da se osjeća bespomoćno rješavajući matematičke probleme: 25% dječaka, 35% djevojčica, 35% lošijih učenika te 24% boljih učenika. Ispostavilo se da je anksioznost povezana s lošijim rezultatima na testu iz matematike. 59% učenika je izjavilo da ih brine da će im gradivo matematike biti preteško, 33% učenika je jako napeto prilikom rješavanja domaće zadaće iz matematike, 31% je nervozno kada treba riješiti neki matematički problem, a 61% je zabrinuto hoće li dobiti lošu ocjenu iz matematike. U većini država veću matematičku anksioznost doživljavaju učenice. Anksioznost je također povezana s uspjehom njihovih razrednih kolega. Kada učenici pohađaju školu u kojoj je većina učenika uspješnija u matematici od njih, nivo anksioznosti se povećava. Učenici su na testu trebali odgovoriti koliko često dobivaju povratnu informaciju nastavnika o svom uspjehu ili neuspjehu te upute i savjete o tome što bi trebali uraditi da budu uspješniji u matematici. Kod učenika koji su izjavili da njihovi nastavnici prakticiraju takve metode, uočena je niža razina anksioznosti [16].

# Poglavlje 2

## Istraživanje na studentima

### 2.1. Metode

#### Ispitanici

Istraživanje je provedeno na uzorku od 44 studenta Sveučilišta u Zagrebu u dobi od  $(23 \pm 3)$  godine. Polovica ispitanika su bili studenti fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu (u daljnjem tekstu „grupa A“), a drugu polovicu su činili studenti drugih studija Sveučilišta u Zagrebu („grupa B“). Grupi A činilo je 14 studentica i 8 studenata, dok je u grupi B bilo 16 studentica i 6 studenata. Studentima iz obje grupe bilo je zajedničko to što su svi učili matematiku i fiziku u osnovnoj i srednjoj školi.

#### Test

Test je činilo devet zadataka s grafovima iz svakodnevnog života koji su korišteni u PISA istraživanju [17]. Svi su zadatci bili zadatci višestrukog izbora.

U prvom zadatku na grafu je bila prikazana prosječna visina mladića i djevojaka u Nizozemskoj 1998. (Zadatak 1, Prilog 1). Od ispitanika se tražilo da iz grafa očitaju u kojoj su dobi u prosjeku djevojke više od mladića, tj. trebali su očitati za koju su dob vrijednosti na grafu koji prikazuje prosječnu visinu djevojaka (isprekidana linija) više od vrijednosti

na grafu koji prikazuje prosječnu visinu mladića (puna linija). Točan odgovor je bio B (12 godina).

U drugom zadatku se ponovno provjeravalo očitavanje s grafa. Na  $x$ -osi je bilo prikazano vrijeme, a na  $y$ -osi količina lijeka te se od ispitanika tražilo da očitaju koliko lijeka ostaje aktivno na kraju prvog dana (Zadatak 2, Prilog 1). Točan odgovor je bio D (32 mg). Treći zadatak je sadržavao isti graf i trebalo je odrediti približan postotak lijeka od prethodnog dana koji ostaje aktivan na kraju svakog dana (Zadatak 3, Prilog 1). Dakle, ispitanici su trebali s grafa očitati koliko lijeka ostane aktivno na kraju dva susjedna dana te odrediti njihov omjer u postocima. Točan odgovor je bio C (40%).

Graf u četvrtom zadatku je pokazivao brzinu trkaćeg auta duž 3 km duge staze u drugom krugu utrke (Zadatak 4, Prilog 1). Ispitanici su trebali odrediti, tj. očitati, kolika je udaljenost od startne crte do početka najdužeg ravnog dijela staze. Od studenata se zapravo očekivalo da zaključe da najduži ravni dio staze počinje tamo gdje auto najprije ubrzava (kad izađe iz zavoja), a zatim drži stalnu i najveću brzinu na najdužem dijelu staze. Točan odgovor je bio B (1.5 km). Idući zadatak je sadržavao isti graf, ali je trebalo očitati gdje je izmjerena najmanja brzina auta tijekom drugog kruga utrke (Zadatak 5, Prilog 1). Dakle, ispitanici su samo trebali očitati najnižu vrijednost brzine, tj. na kojoj udaljenosti auto ima najmanju brzinu. Točan odgovor je bio C (na približno 1.3 km). Isti graf je sadržavao i idući zadatak, a od ispitanika se tražilo da zaključe što se događa s brzinom auta između 2.6 km i 2.8 km (Zadatak 6, Prilog 1). Trebalo je, dakle, očitati vrijednosti brzine za 2.6 km i 2.8 km i vidjeti da one rastu od približno 120 km/h do 160 km/h ili pak uočiti da na tom intervalu graf ima pozitivan nagib što navodi na točan odgovor B (Brzina auta raste).

Sedmi zadatak je započeo s kratkim tekstom o vjetru kao izvoru energije, a dalje su bila prikazana četiri grafa koja su prikazivala prosječne brzine vjetra na četiri različita mjesta tijekom godine i trebalo je odrediti koji graf pokazuje najprikladnije mjesto za gradnju elektrane (Zadatak 7, Prilog 1). Točan odgovor je bio B jer je na tom grafu brzina vjetra bila relativno konstantna i visoka što na ostalim grafovima nije bio slučaj. Dakle, ispitanici su trebali zaključiti da je za gradnju elektrane najbolje imati velike brzine vjetra uz najmanje oscilacije i uočiti da je to prikazano na B grafu. I idući je zadatak bio vezan za

vjetroelektrane. U tekstu zadatka bila su opisana četiri radna uvjeta za proizvodnju električne energije u realnoj vjetroelektrani. Od četiri ponuđena grafa trebalo je odrediti koji najbolje prikazuje vezu između brzine vjetra i proizvodnje električne energije pod navedenim radnim uvjetima (Zadatak 8, Prilog 1). Trebalo je na temelju analize radnih uvjeta prepoznati koji graf prikazuje vezu brzine vjetra ( $x$ -os) i električne energije ( $y$ -os). Analizirajući radne uvjete iz teksta zadatka, vidi se da graf B najbolje opisuje ovisnost brzine vjetra i električne energije. Naime, u tekstu zadatka piše da se lopatice vjetrenjače počinju vrtjeti kada vjetar dosegne brzinu  $V_1$  što znači da je do  $V_1$  nagib grafa nula, a taj uvjet zadovoljavaju grafovi B i C. Kod oba grafa je maksimum proizvodnje električne energije pri brzini vjetra  $V_2$ . Međutim, budući da u tekstu piše da se pri brzini vjetra  $V_3$  lopatice zaustavljaju, znači da u tom trenutku prestaje proizvodnja električne energije, a na grafu C je prikazano kako se nakon brzine  $V_3$  električna energija postupno smanjuje što znači da je B traženi graf.

Zadnji zadatak je sadržavao skicu spremnika za vodu (Zadatak 9, Prilog 1). Spremnik je imao donji dio u obliku stošca, a gornji u obliku valjka. U tekstu pored skice pisalo je da je spremnik u početnom trenutku prazan, a zatim se počinje puniti vodom brzinom od jedne litre u sekundi. Ispod teksta je bilo prikazano pet grafova među kojima je trebalo odabrati onog koji prikazuje kako se tijekom vremena mijenja visina površine vode. Ispitanici su trebali zaključiti kako oblik spremnika utječe na promjenu visine površine vode. Donji dio spremnika se puni brže od gornjeg, ali jednoliko usporeno budući da se površina vode povećava, dakle, na tom dijelu će se na grafu smanjivati nagib. Gornji dio je u obliku valjka i površina vode je cijelo vrijeme ista, ali visina površine vode jednoliko raste što bi na grafu trebalo biti prikazano pomoću pravca s konstantnim pozitivnim nagibom. Takav izgled imao je upravo graf B.

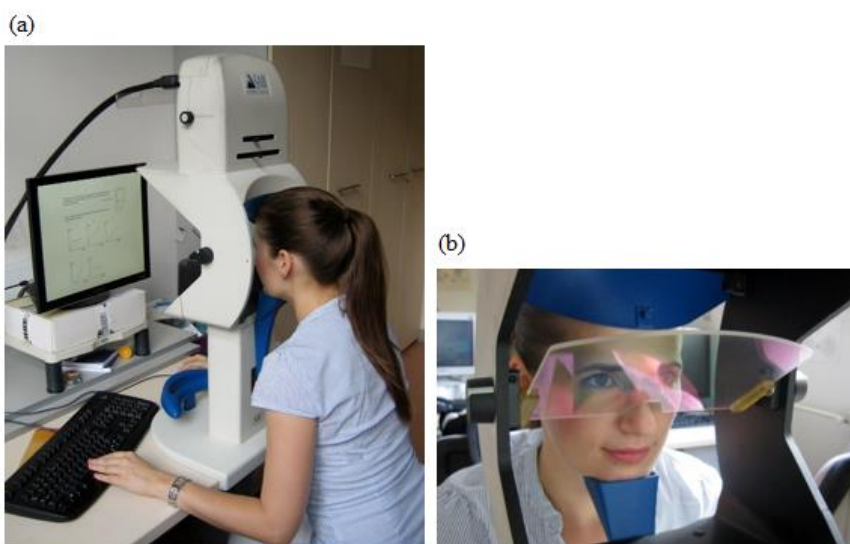
## **Mjerenja pokreta očiju**

Dok su studenti rješavali test, mjereni su im pokreti očiju. Mjerenje se zasniva na praćenju pokreta zjenice oka. Uređaj mjeri koliko dugo i kojim redom svaki ispitanik promatra sadržaj zadatka. Mjerenje pokreta očiju (eng. *eye tracking*) koristi se u istraživanju vidnog

sustava, u psihologiji, lingvistici, marketingu, dizajnu novih proizvoda, a u novije vrijeme i u edukacijskim istraživanjima. Pri testiranju korišten je SMI iView HiSpeed uređaj za snimanje pokreta očiju (Slika 2.1). Tijekom mjerenja ispitanici sjede ispred uređaja, a bradu i čelo naslone na predviđena mjesta na uređaju kako bi im glava bila fiksirana tijekom snimanja. Desnim klikom miša se odabire odgovor, a razmaknicom na tipkovnici se prelazi na slijedeći zadatak. Kako izgleda postupak mjerenja može se vidjeti na Slici 2.2.

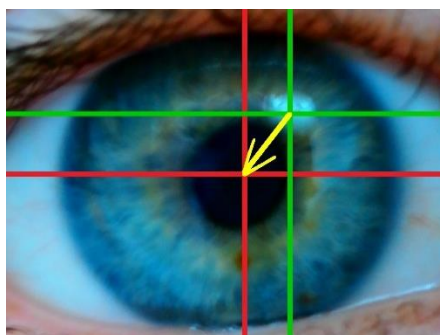


Slika 2.1: Uređaj za mjerenje pokreta očiju



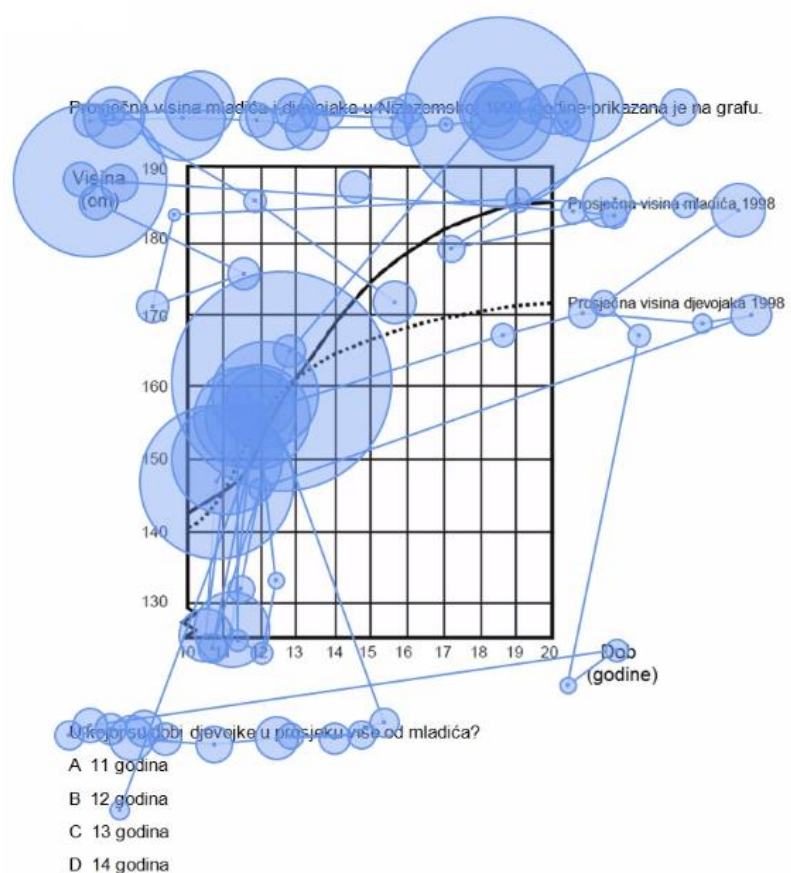
Slika 2.2: Postupak mjerenja. Ispitanik uz pomoć miša i tipkovnice rješava test (a). Glava mora biti fiksirana tijekom snimanja (b).

Uređaj snima pokret jednog ili oba oka tijekom rješavanja zadataka na računalu pomoću infracrvene lampice i kamere. Infracrvena lampica obasja oko, dok kamera snima fovealni odsjaj i sredinu zjenice. Fovealni odsjaj je nepomičan s obzirom na oko, a sredina zjenice se miče kako se miče oko. Smjer pogleda oka je vektor između fovealnog odsjaja, tj. odsjaja infracrvene lampice s površine oka, i sredine zjenice (Slika 2.3). Vektor se koristi za otkrivanje točke promatranja ili smjera gledanja [1].



Slika 2.3: Princip rada uređaja za mjerenje pokreta oka. Preuzeto s [5].

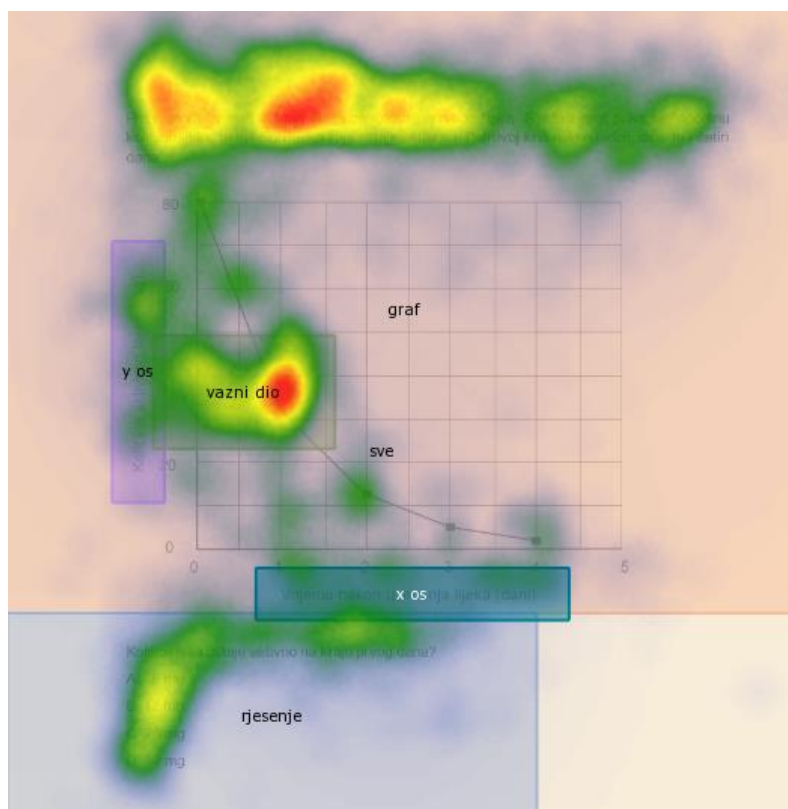
Prije mjerenja pokreta očiju potrebno je provesti kalibraciju pogleda svakog pojedinog ispitanika. Pogled svakog ispitanika kalibrira se s obzirom na 13 točaka na zaslonu. Uređaj snima pokret oka s uzorkovanjem od 500 Hz i preciznošću od  $0.25^\circ$  –  $0.5^\circ$  vidnog kuta. Pokreti očiju obično su podijeljeni na fiksacije (pogled zastaje u određenom položaju) i sakade (brzi simultani pokreti oka). Uređaj ima ugrađen algoritam kojim automatski određuje fiksacije i sakade na temelju zadanih parametara (najveće brzine i duljine). Fiksacije se automatski određuju kao grupe mikrosakada, tj. pokreta ispod praga postavljenog za sakade [5], [8]. Na Slici 2.4 vide se fiksacije i sakade jednog od ispitanika na prvom zadatku iz testa.



Slika 2.4: Trag pogleda ispitanika tijekom rješavanja zadatka. Središta krugova pokazuju položaje fiksacija, a ravne crte sakade. Polumjeri krugova pokazuju duljinu trajanja fiksacija.

Nakon kalibracije slijedi snimanje. Uređaj omogućuje bilježenje više zavisnih varijabli: vrijeme zadržavanja u određenom području interesa (*dwell time*), broj fiksacija, prosječnu duljinu fiksacija i dr. Mogu se definirati različita područja interesa (Slika 2.5) i usporediti odgovarajuće varijable. Rezultati se nakon snimanja statistički obrađuju. Animirani prikazi nam mogu pokazati gdje ispitanik usmjerava pogled u svakom trenutku. Najpoznatija vizualizacijska tehnika praćenja pokreta očiju je toplinska karta (eng. *heatmap*) pomoću koje možemo vidjeti gdje ispitanici najčešće usmjeruju pogled (Slika 2.5) [5], [8].





Slika 2.5: Područja interesa i toplinska karta

## Postupak mjerenja

Na početku smo od studenata uzeli podatke o dobi i vrsti studija. Zatim je provedena kalibracija uređaja za praćenje pokreta očiju. Ispitanici su rješavali test s devet zadataka s grafovima, najprije na računalu, tj. na uređaju za mjerenje pokreta očiju, a zatim su te iste zadatke rješavali na papiru gdje su morali dati i obrazloženja, odnosno objasniti zašto su se odlučili za određeni odgovor. Vrijeme rješavanja nije bilo ograničeno.

## Analiza podataka

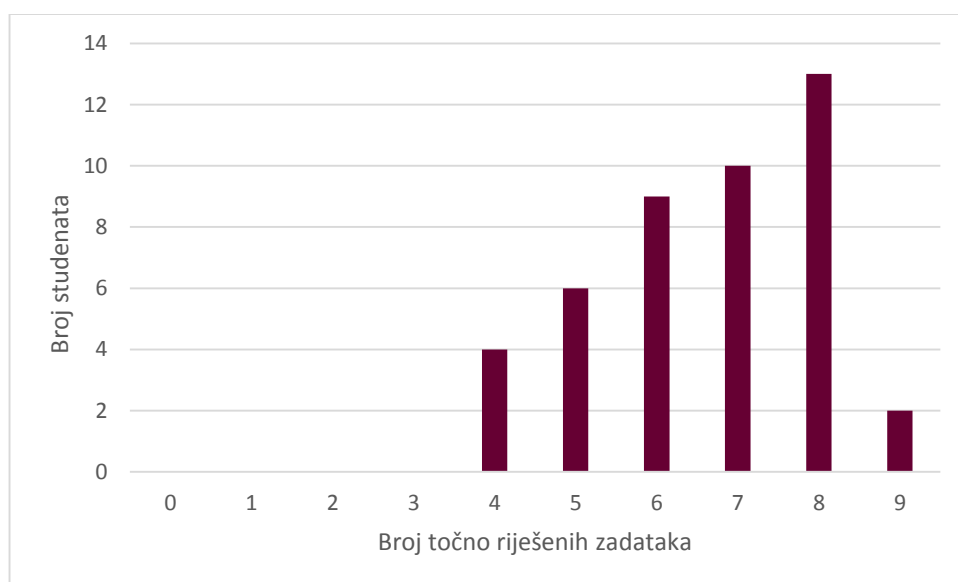
Nakon prikupljenih podataka, bodovali smo odgovore. Za točan odgovor ispitanik je dobio 1 bod, a za netočan 0 bodova. Točan odgovor je bio onaj koji je sadržavao i točno zaokruženi odgovor i ispravno obrazloženje. Također smo provjerili koliko je studenata

prilikom rješavanja zadataka na papiru promijenilo svoje odgovore. Dobiveni podatci su najprije analizirani pomoću t-testa [24] i analize varijance (ANOVA) te su grafički prikazani. U grafovima su prikazane srednje vrijednosti i pripadne standardne pogreške. Nadalje su analizirana i kategorizirana studentska obrazloženja, koja su dala uvid u studentske strategije u pristupu ovakvom tipu zadataka, kao i u njihove načine razmišljanja i zaključivanja.

## 2.2. Rezultati i rasprava

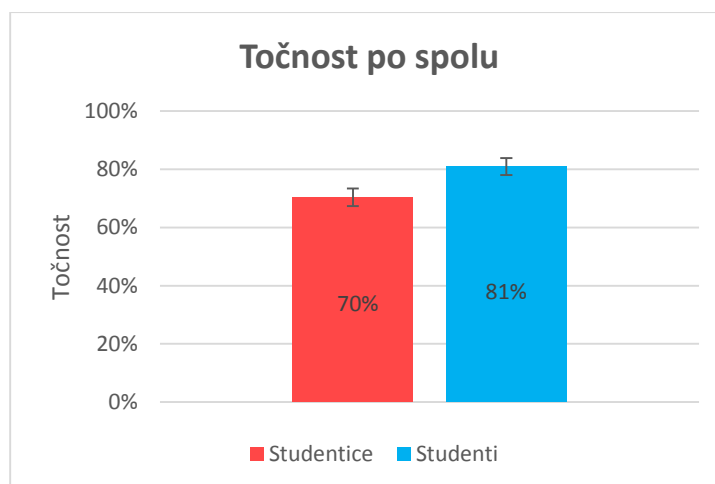
### Točnost u rješavanju

Ukupna točnost u rješavanju testa je bila 74%. Slika 2.6 prikazuje raspodjelu studenata po broju točno riješenih zadataka. Vidimo da su svi studenti točno riješili barem četiri od devet zadataka, a najviše studenata je točno riješilo čak osam zadataka. Dvoje studenata je točno riješilo svih devet zadataka, jedan iz grupe A i jedan iz grupe B. Budući da je većina studenata točno riješila više od pola testa, možemo zaključiti da test za studente nije bio težak.



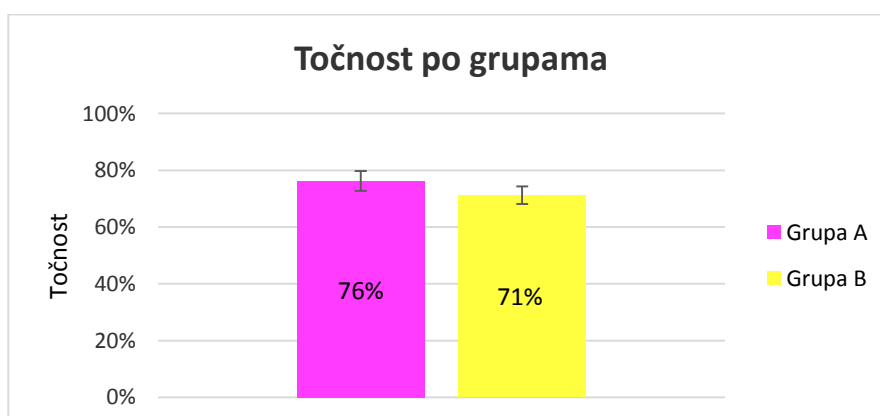
Slika 2.6: Raspodjela svih studenata po broju točno riješenih zadataka

Studentice su u prosjeku točno riješile 70% testa, a studenti 81% (Slika 2.7) što je u skladu s rezultatima PISA istraživanja. Ta razlika nije bila statistički značajna ( $p = 0.07$ ).



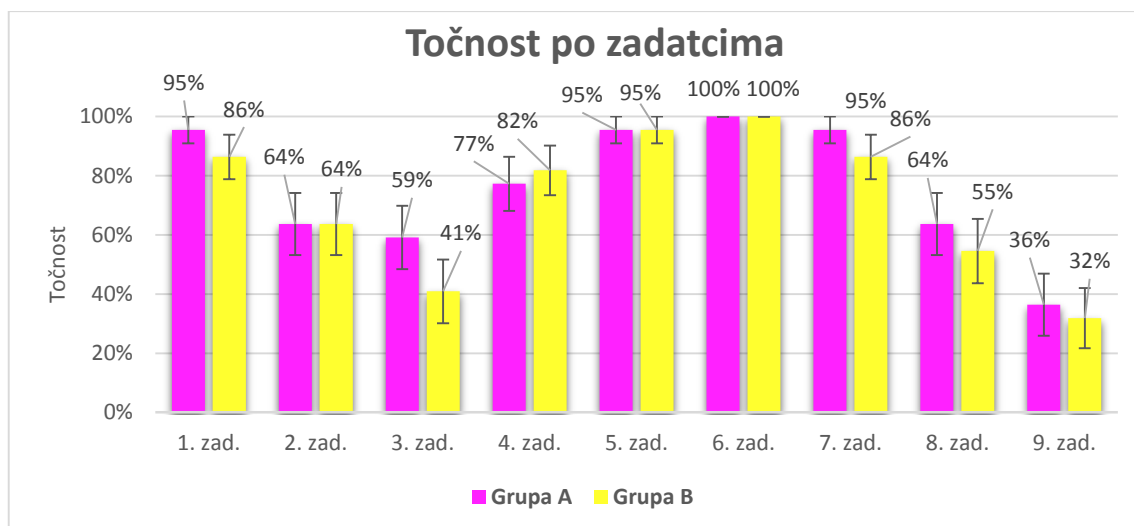
Slika 2.7: Usporedba točnosti u rješavanju testa između spolova

Prosječna točnost u rješavanju testa studenata iz grupe A je bila 76% i 71% za studente iz grupe B (Slika 2.8). Za očekivati je bilo da će studenti iz grupe A bolje riješiti test budući da se radi o studentima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Ipak, razlika ukupne točnosti testa između dvije grupe nije bila statistički značajna ( $p = 0.29$ ).



Slika 2.8: Usporedba točnosti u rješavanju testa između grupe A i grupe B

Slika 2.9 pokazuje kakva je točnost po zadacima, posebno za grupu A i posebno za grupu B. Ispostavilo se da razlika točnosti ni za jedan zadatak nije statistički značajna.



Slika 2.9: Usporedba točnosti u rješavanju svih zadataka između grupe A i grupe B

ANOVA je pokazala da razlika točnosti između grupa nije statistički značajna ( $F = 1.66$ ,  $p = 0.19$ ). Značajna je jedino razlika točnosti između zadataka ( $F = 15.35$ ,  $p < 0.0001$ ), što je i očekivano budući da su zadatci različite težine.

Dakle, pokazalo se da su studenti iz obje grupe podjednako rješavali zadatke s grafovima iz svakodnevnog života iako je možda bilo za očekivati da će se studenti iz Grupe A bolje snalaziti u takvim zadacima. Sveukupno, točnost u rješavanju testa je zadovoljavajuća, međutim, postavlja se pitanje zašto se grupa A nije bolje istaknula u točnosti u odnosu na grupu B. Možemo pretpostaviti da, bez obzira što grupu A čine studenti matematike i fizike i što se oni često susreću sa sličnim problemima u matematičkom ili fizikalnom kontekstu, kod većine ne dolazi do prijenosa znanja iz matematičkog konteksta u neki drugi kontekst iz svakodnevnog života. Zanimljivo je da su najgore riješeni treći i deveti zadatak, što možda i nije toliko neočekivano za studente iz grupe B budući da se pri rješavanju tih zadataka koristi postotni račun i koncept nagiba te se analiziraju različite ovisnosti.

Možemo zaključiti da studenti PMF-a i dalje imaju značajnih poteškoća s primjenom temeljnih matematičkih znanja i vještina.

## Studentske strategije u rješavanju

Studenti su uz odgovore pri rješavanju testa morali dati i obrazloženja iz kojih su se mogle odrediti njihove strategije u rješavanju. U nekim zadacima studenti nisu davali konkretna objašnjenja jer su im rješenja bila „očita“, dok su se u drugima dosta izražavali riječima, a na nekim mjestima su čak pokušavali konstruirati određene formule. Neki od studenata, koji su netočno odgovorili na pitanje, prilikom davanja obrazloženja su sami zaključili da su netočno odgovorili i promijenili su mišljenje na točno. Uočeno je da ne postoji značajna razlika između strategija kod studenata grupe A i studenata grupe B. U Tablici 2.1. nabrojene su točne i netočne studentske strategije pri rješavanju svih devet zadataka iz testa.

U nastavku ćemo analizirati studentske strategije i neka od zanimljivih objašnjenja.

Prvi zadatak je uglavnom uspješno riješen. U tom se zadatku od studenata tražila usporedba grafova i očitavanje vrijednosti na  $x$ -osi pa su i obrazloženja bila jednostavna:

- „Gledala sam kad je crta za prosječnu visinu djevojčica viša od crte za prosječnu visinu dječaka.“

U drugom zadatku su se već počele pojavljivati poteškoće. Studenti su krivo očitavali vrijednosti na  $y$ -osi (umjesto 32 mg, očitali su 26 mg). Evo jednog zanimljivog odgovora:

- "Mislim da sam dva puta čitala zadatak (kad sam pročitala pitanje drugi put da bolje razumijem) i gledala sam  $x$ -os označava li dane. Gledala sam graf, za prvi dan iščitala podatke, 26 mg. Ajoj, krivo sam odgovorila! Ne znam zašto sam pretpostavila da je tu u sredini 25, a ne 30..."

Tablica 2.1: Studentske strategije pri rješavanju zadataka s grafovima iz svakodnevnog života

Studentske strategije					
Redni broj zadatka	Točna strategija	Broj studenata	Netočna strategija	Broj studenata	Promjena mišljenja na točno
1.	Očitavanje	40	Krivo očitavanje	1	3
2.	Očitavanje	28	Krivo očitavanje 26 mg	4	4
			Krivo očitavanje kraja prvog dana	3	
			Nekategorizirano	4	
			Nema strategije	1	
3.	Očitavanje i standardni račun	9	Oduzimanje	4	4
	Proporcionalnost	11	Dobro očitavanje, krivi račun	2	
	Nekategorizirano	2	Nekategorizirano	5	
			Nema strategije	7	
4.	Razmatranje ravnog dijela grafa	26	Gledanje prvog ravnog dijela staze	4	2
	Razmatranje gibanja	7	Nekategorizirano	2	
	Nekategorizirano	2	Nema strategije	1	
5.	Očitavanje	42	Krivo očitavanje	2	0
6.	Očitavanje	44			
7.	Razmatranje vrijednosti funkcije	35	Nema strategije	3	1
	Razmatranje površine ispod grafa	3			
	Nekategorizirano	2			
8.	Analiza podataka iz teksta zadatka	20	Lopaticе se između $V_2$ i $V_3$ mogu vrtjeti i manjom brzinom	2	0
	Točan odgovor, ali postoji dvojba između B i C	5	Krivo interpretiranje podataka	10	
	Nekategorizirano	1	Gledanje iskoristivosti	3	
			Nekategorizirano	2	
			Nema strategije	1	
9.	Brz porast visine površine vode, a zatim linearno povećanje	14	Ako je brzina punjenja stalna, graf treba biti pravac	12	2
	Nekategorizirano	1	Ostalo	11	
			Nekategorizirano	2	
			Nema strategije	2	

Neki su pak krivo očitali kraj prvog dana na  $x$ -osi; nisu bili sigurni označava li kraj prvog dana broj 1 ili broj 2 na  $x$ -osi:

- "Tu sam se malo zbunila. Na kraju prvog dana, je li to 1 ili 2? Zapravo, sad kužim, odgovorila sam krivo. Pratila sam krivulju i gledala gdje se ona sječe sa 1. Sad vidim da je 32, mislim da sam ja 12 odgovorila."

Treći zadatak je bio jedan od loše riješenih. Uočili smo da studenti imaju dosta problema s postotcima. Čak i neki od studenata koji dobro očitaju vrijednosti na  $y$ -osi, ne znaju što dalje, tj. kako odrediti postotak aktivnog lijeka. Neki od njih su oduzimali vrijednosti aktivnog lijeka na kraju dva susjedna dana:

- "Pogledala sam nakon prvog dana (znam 32), na kraju drugog dana (12), to oduzmem i ispadne 20%."

Neki studenti nisu mogli točno riješiti ovaj zadatak jer su krivo očitali vrijednosti iz prethodnog zadatka. Većina točnih odgovora temeljila se na standardnom postotnom računu, no neki su studenti primijenili proporcionalno mišljenje uz procjenu postotaka:

- "Opet sam izračunao; 40 je 50% od 80, a ispod 40 je, znači manje od 50%, približno 40%. Po istom principu se i ove druge smanjuju 40%."

U četvrtom zadatku je pitanje loše formulirano jer su neki studenti točno odgovorili iako nisu znali o kakvom je gibanju riječ. Većina studenata je zaključila da je najduži ravni dio staze na intervalu gdje je vodoravan dio grafa (konstantna brzina) što i nije posve točno jer auto prvo ubrzava na početku ravnog dijela kada izađe iz zavoja:

- "Najduži ravni dio staze sam pretpostavila da je ovaj ravni dio gdje je brzina konstantna, po nekom mom proračunu bi trebalo biti 1.8, ali nisam to našla pa sam kliknula 1.5."

Dio studenata je ipak razmišljao o gibanju:

- "Njemu se brzina smanjuje kad je u zaokretu, minimalna brzina kad je u piku zaokreta; tu negdje bi bio pik zaokreta pa kad počne ubrzavati je na ravnom dijelu (1.5 km)."

Većina krivih strategija ima uzrok u gledanju prvog ravnog dijela staze:

- "Zaključila sam da je ravni dio staze gdje ne mora smanjivati brzinu da bi skrenuo i onda sam zaključila da je ravni dio staze gdje ima istu brzinu i onda sam išla gledati gdje to počinje i zaokružila na 0.5. Nisam vidjela da se traži najduži dio."

U petom zadatku većina studenata nije imala poteškoća. Najčešći su bili odgovori poput:

- "Pogledala sam gdje je najniži i očitala i tu je čak i točno 1.3 km."
- "Gledao sam gdje je najveće dno."

Neki su govorili da se na tom dijelu najviše spustio graf ili da je tamo najveće udubljenje. Nekolicina ih je pogriješila jer su gledali drugo „udubljenje“ budući da se radilo o drugom krugu utrke što ih je svejedno dovelo do točnog odgovora, međutim, način razmišljanja nije bio ispravan.

Šesti zadatak su svi studenti točno riješili. Strategije su se razlikovale samo u tome što su neki studenti zaključivali prema obliku grafa, a neki su gledali i konkretne vrijednosti brzine:

- "Brzina auta raste jer graf ide prema gore."
- "Brzina raste jer postoji neki nagib, pozitivan je nagib, brzina je pozitivna pa raste."
- "Brzina raste (povećava se brzina, derivacija pozitivna)."
- "Između 2.4 i 2.8 ubrzava jer se penje sa oko 100 na 160 km/h."

Sedmi zadatak je također bio dobro riješen. Većina studenata je gledala vrijednosti funkcije, tj. jesu li približno visoke i konstantne:

- "B jer ima tijekom cijele godine prosječno jednake energije pa je pouzdano."

Ipak, nekima se to i nije ispostavilo kao najbolja strategija:

- "Više na blef (B). U psihologiji se vjeruje da, ako je konstantnost dobra (npr. u sportskoj psihologiji), ako si konstantan u nekom poslu, to je kvaliteta rada bolja, isto u sportu, velike oscilacije nisu pozitivna stvar. To sam primjenila na vjetrenjače."



Dio njih je gledao površinu ispod grafa:

- "Tu je jednostavno najveća površina ispod grafa, to znači da brzina vjetra uvijek ima visoku prosječnu vrijednost. Dobra stvar za elektranu je da konstantno proizvodi struju."

Neki od studenata su spominjali i prosječne vrijednosti.

U osmom zadatku je velik broj studenata krivo protumačio podatke iz zadatka, tj. dane radne uvjete. Većina studenata koji su točno odgovorili je samo analizirala tekst zadatka:

- "Stavila sam B. Počne se vrtjeti na  $V_1$ , kad je  $V_2$ , ne može brže i prestane se vrtjeti na  $V_3$ . Idem logično, čitam redom."

Dio njih je točno odgovorio, ali i dalje sumnja na odgovor C:

- "Ovdje sam isto dugo razmišljao, uspoređivao sam svaku od ovih točaka s prvim grafom i prešao na drugi graf kad nešto nije pasalo. Drugi graf mi je pasao po svemu. Ovo me je bunilo: lopatice se prestanu vrtjeti za  $V_3$  (ili se samo uspore i zaustave), ali sam na kraju zaključio da se stvarno zaustave."

Neki studenti koji su krivo odgovorili zaključili su da se između  $V_2$  i  $V_3$  lopatice mogu vrtjeti manjom brzinom:

- "Odgovorila sam C, počne se vrtjeti kad dosegne  $V_1$ , postiže maksimum kad je  $V_2$  i onda se snižava nakon toga (iako se brzina vjetra povećava), ali nisam sigurna, možda je točan B. Dvoumila sam se između B i C, tu piše da se neće lopatice vrtjeti brže, ali neće ni manje (možda jednako)."

Troje studenata očito nije dobro pročitao zadatak pa su gledali iskoristivost kao u prošlom zadatku:

- "Odlučila sam se za D, iz grafa mi se čini da je iskoristivost najveća, da proizvede najviše električne energije."

Deveti zadatak je studentima zadao najviše poteškoća i ispostavio se najtežim. Većina studenata koja je dala netočan odgovor mislila je na način da, ako je brzina stalna, graf cijelo vrijeme mora biti pravac (horizontalan ili s nekim nagibom):

- „On se ipak puni nekom konstantnom brzinom pa sam stavio odgovor C.”

Ostatak studenata je mislio da horizontalna linija predstavlja linearno povećanje, a neki su pak gledali promjenu površine vode u vremenu:

- "D odgovor; prvih 1.5 m ovaj stožac, radijus raste linearno prvih 1.5 m, a površina kruga na nekoj razini je  $r^2\pi$  pa mora imati kvadratnu ovisnost, a slijedećih 1.5 m mora imati linearnu ovisnost. Vidio sam kvadratnu ovisnost i tražio sam to na grafu; nisam provjerio to logički."
- "Tu sam gledao površinu kako se mijenja. U ovom dijelu raste linearno, a onda se ne mijenja. Zaokružio sam A."

Neki studenti su zaključili da visina površine vode prvo ubrzano raste, a zatim se linearno povećava:

- "D jer je dolje šiljati dio i visina površine vode raste, a kad dođe do drugog dijela, brzina je pravac."

Dio studenata je mislio da treba uzeti u obzir i dio kad voda počinje curiti iz spremnika:

- "A zato jer ide od 0 i bude puno i stalno je ravna crta."

Neke studente je zanimalo s koje se strane puni spremnik:

- "Ovaj je bio grozan, nije mi bilo jasno od kud se puni (gore ili dolje). Ako se puni od gore, u jednom trenutku postigne istu površinu, ali mi nije bilo jasno kakav je rast, eksponencijalan ili linearan. Zaokružila E (sad vidim da nije eksponencijalno).“

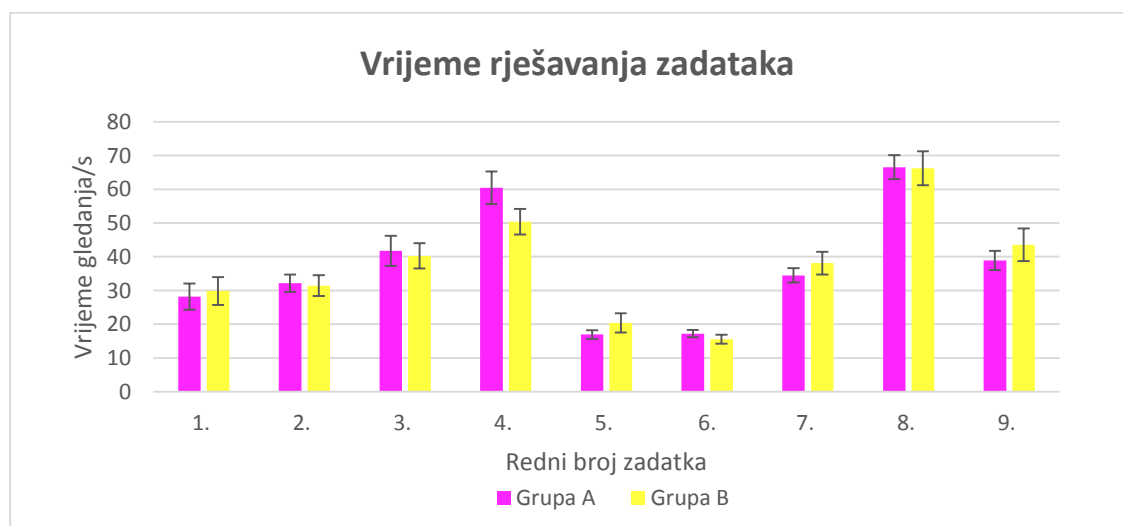
Dio njih koji su točno odgovorili nije imao najbolje objašnjenje, ali je ipak dio razmišljao ispravno o promjeni visine površine vode:

- "Odabrala sam B, kako da to objasnim? Stalna je količina vode u vremenu, a spremnik je dolje uži, gore širi. Kako dolazi voda, dolje brzo raste i sve sporije i sporije i sporije, kad dođe do stalne širine, i u grafu je linearno."

Analizirajući obrazloženja, vidjeli smo da studenti učestalo nailaze na poteškoće pri rješavanju ovakvih zadataka, čak i pri samom očitavanju podataka iz grafa. Studenti su u dosta slučajeva krivo interpretirali i tekstualne podatke iz zadataka. Najviše poteškoća imali su s primjenom postotaka te predviđanjem grafičkog prikaza neke funkcije. Ispostavilo se da nema značajne razlike između dvije grupe studenata niti u strategijama pri rješavanju zadataka.

## Vrijeme rješavanja zadataka

Zanimalo nas je koliko su dugo studenti iz pojedine grupe rješavali svaki zadatak; tko je rješavao duže te za koji zadatak je bilo potrebno najviše vremena. To vrijeme rješavanja smo odredili iz pokreta očiju mjereći koliko su se vremena (eng. *dwelt time*) ispitanici zadržali na pojedinom zadatku. Na Slici 2.10 se nalazi graf koji prikazuje vrijeme rješavanja svakog pojedinog zadatka.

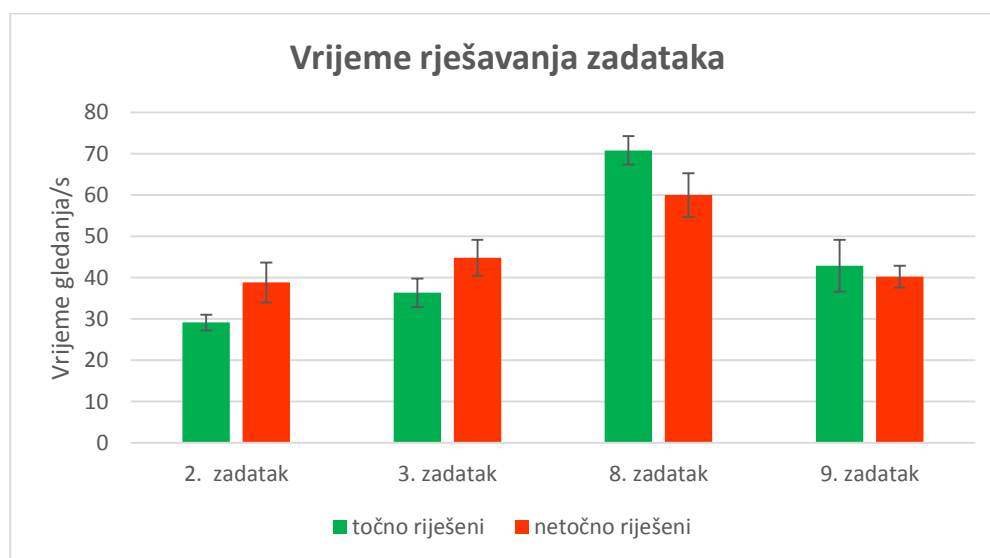


Slika 2.10: Vrijeme rješavanja zadataka za grupe A i B

Ponovno nije uočena statistički značajna razlika između vremena rješavanja zadataka studenata iz grupe A i grupe B ( $F = 0.003$ ,  $p > 0.05$ ). Razlikuju se jedino vremena rješavanja svakog pojedinog zadatka ( $F = 43.38$ ,  $p < 0.0001$ ). Vidimo da je najmanje vremena bilo potrebno za rješavanje šestog zadatka, kojeg su ujedno svi studenti riješili točno, pa možemo zaključiti da je taj zadatak studentima bio najlakši. Najduže su se rješavali četvrti i osmi zadatak, duže nego deveti zadatak koji se ispostavio najtežim s obzirom na postotak točnosti. Iako su ti zadatci bolje riješeni od nekih drugih, osmi zadatak je zahtijevao puno više vremena za čitanje teksta te je moguće da su studenti bili neodlučni prilikom odabira točnog odgovora.

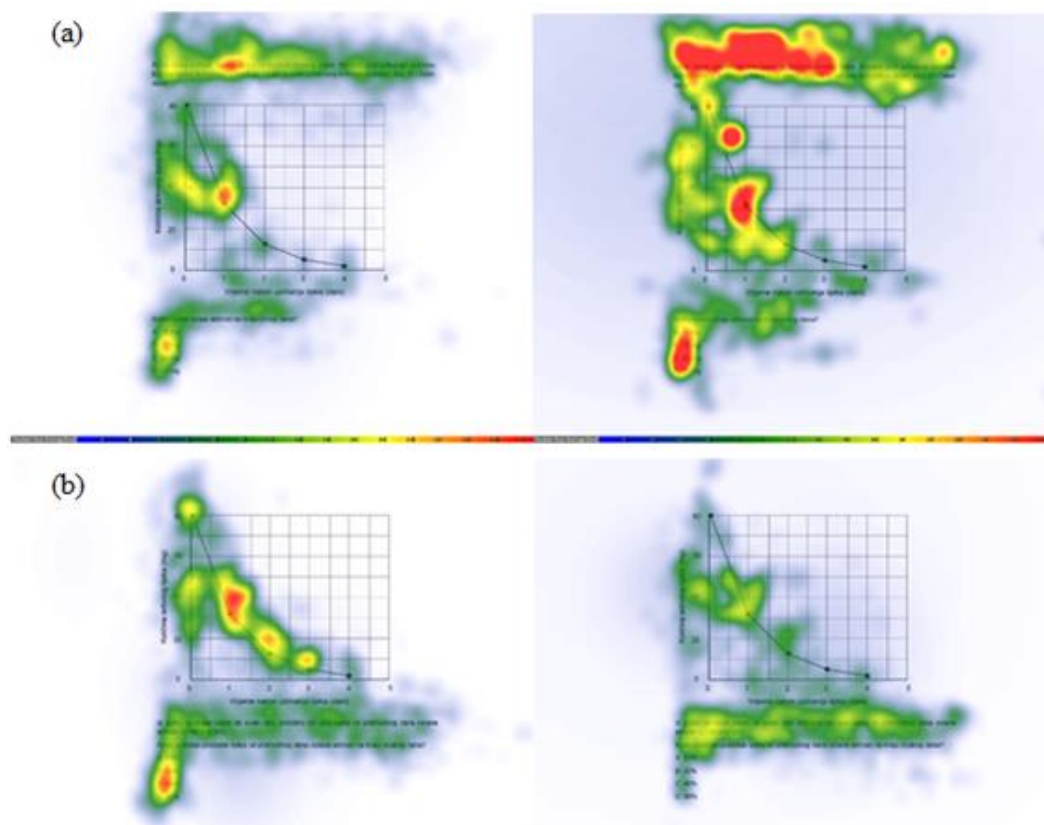
## Usporedba pokreta očiju ispitanika koji su točno i netočno riješili zadatke

Ispitanike smo podijelili u dvije grupe, one koji su točno i one koji su netočno riješili, posebno 2., 3., 8. i 9. zadatak. Ostale zadatke nismo razmatrali budući da je njihova točnost visoka i ne bi bio podjednak broj ispitanika u obje grupe.



Slika 2.11: Usporedba vremena rješavanja ispitanika koji su točno i netočno riješili 2., 3., 8. i 9. zadatak

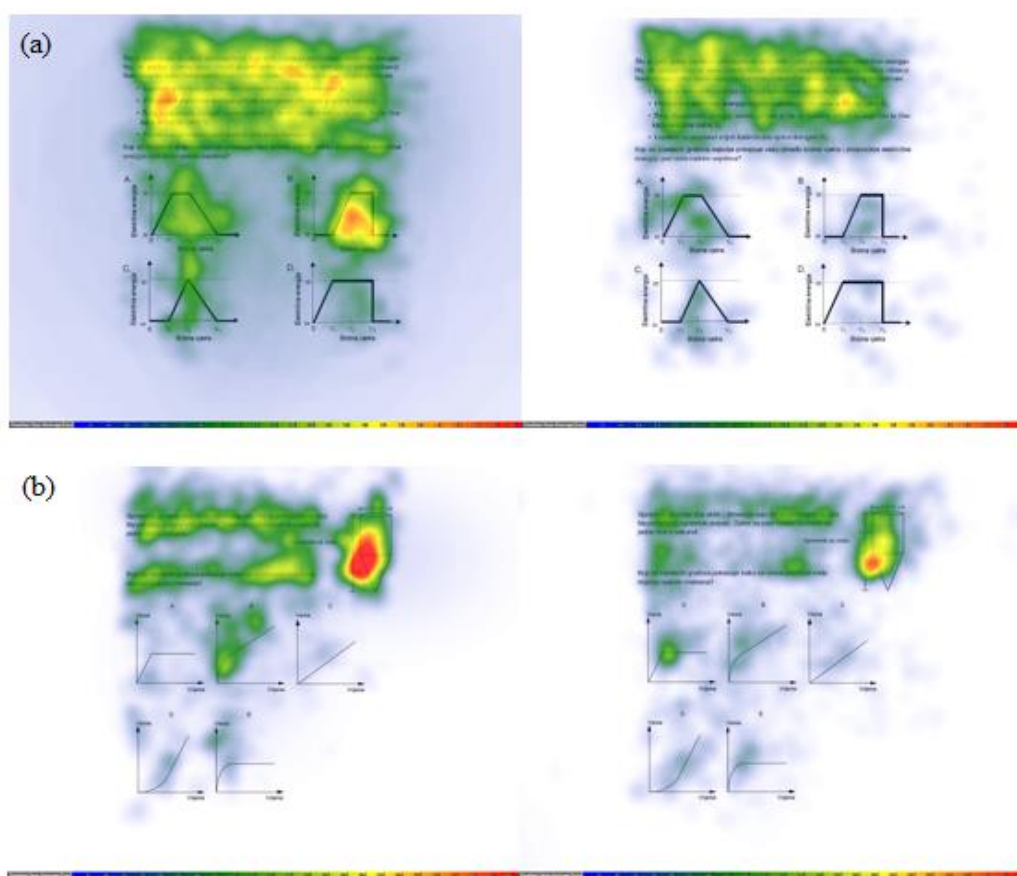
Na slici 2.11 nalazi se graf koji prikazuje vrijeme rješavanja tih četiriju zadataka za dvije grupe studenata; onih koji su točno i onih koji su netočno riješili zadatke. Razlike u vremenu rješavanja pojedinih zadataka između dvije grupe nisu bile statistički značajne (svi  $p > 0.05$ ). Međutim, toplinske karte dviju grupa se razlikuju što možemo vidjeti na Slici 2.12 i Slici 2.13.



Slika 2.12: Toplinske karte drugog (a) i trećeg zadatka (b). S lijeve strane nalazi se toplinske karte ispitanika koji su točno riješili zadatke, a s desne strane ispitanika koji su netočno riješili zadatke. Tamo gdje je boja toplija, ispitanici su češće usmjeravali svoj pogled.

Ispitanici koji su točno riješili drugi zadatak su se najviše fokusirali na tekst zadatka, ponuđene odgovore te na točku grafa koja prikazuje količinu aktivnog lijeka na kraju prvog dana. Ispitanici koji su netočno odgovorili češće su usmjeravali svoj pogled na te, ali i

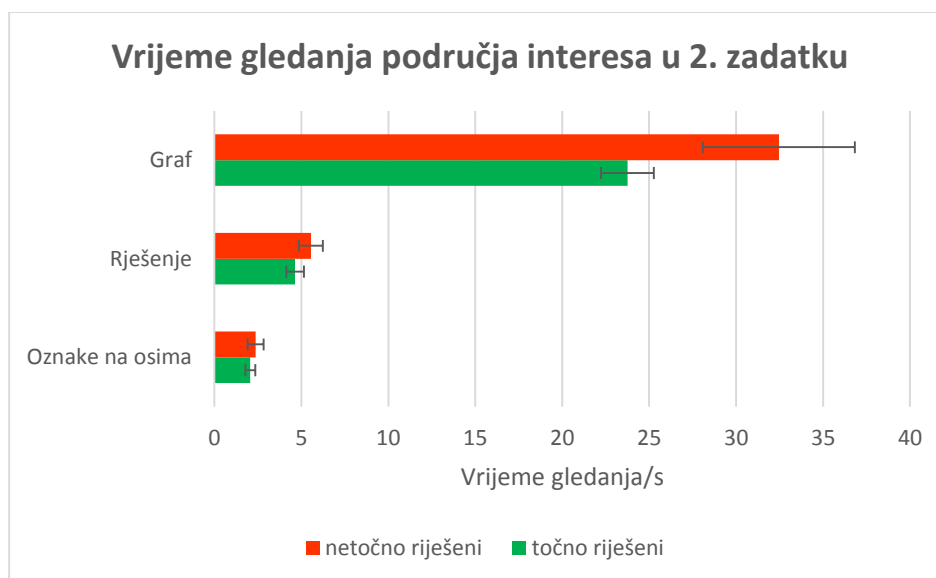
ostale dijelove zadatka kao što su koordinatne osi te točke koje prikazuju količinu aktivnog lijeka na početku prvog te kraju drugog dana. U trećem zadatku je situacija bila obrnuta; ispitanici koji su točno riješili zadatak su više fokusirali svoj pogled na graf i to uglavnom na karakteristične točke na grafu te na ponuđene odgovore, dok su ispitanici koji su netočno riješili zadatak najviše promatrali drugu točku na grafu (količina aktivnog lijeka na kraju prvog dana) i tekst zadatka. Iz ovih toplinskih karata može se zaključiti da su ispitanici koji su točno riješili zadatak znali gdje trebaju usmjeriti pažnju, tj. gdje se nalaze informacije relevantne za rješavanje zadatka.



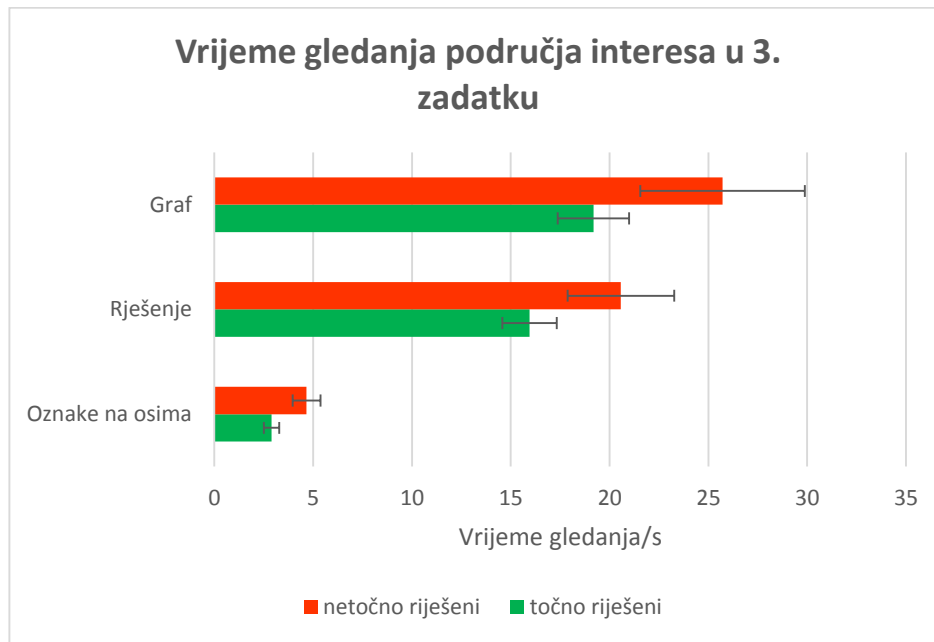
Slika 2.13: Toplinske karte osmog (a) i devetog zadatka (b). S lijeve strane nalaze se toplinske karte ispitanika koji su točno riješili zadatke, a s desne strane ispitanika koji su netočno riješili zadatke. Tamo gdje je boja toplija, ispitanici su češće usmjeravali svoj pogled.

Ispitanici koji su točno riješili osmi i deveti zadatak su ponovno češće usmjeravali svoj pogled na zadatke od ispitanika koji su netočno riješili te zadatke i opet su bili više fokusirani na relevantne podatke. U osmom zadatku, ispitanici koji su točno riješili zadatak su najviše promatrali tekst zadatka gdje su opisani radni uvjeti za vjetrenjače te ponuđeni B graf (točan odgovor) gdje su provjeravali odgovara li opisu iz teksta zadatka. Toplinska karta pokazuje da ispitanici koji nisu točno riješili zadatak nisu pažljivo čitali opis radnih uvjeta te nisu puno proučavali ni izgled pojedinih grafova. Slično je i u devetom zadatku; ponovno su ispitanici koji su točno odgovorili češće fokusirali pogled na tekst i sliku u zadatku. Zanimljivo je da su ispitanici koji su točno odgovorili od ponuđenih grafova najviše gledali B graf (točan odgovor), a ostali ispitanici su najviše gledali graf A. Svi ispitanici su najviše gledali dio gdje se na grafu mijenja nagib.

Nadalje, usporedili smo vremena promatranja pojedinih područja interesa između studenata koji su točno i netočno riješili zadatke. Na Slici 2.14 i Slici 2.15 možemo vidjeti da su u drugom i trećem zadatku ispitanici najduže promatrali dio zadatka gdje se nalazio graf. U drugom zadatku je ta razlika statistički značajna ( $p = 0.02$ ), tj. ispitanici koji su netočno odgovorili su značajno duže promatrali graf.



Slika 2.14: Usporedba vremena gledanja pojedinih područja interesa u drugom zadatku između studenata koji su točno i netočno riješili zadatke

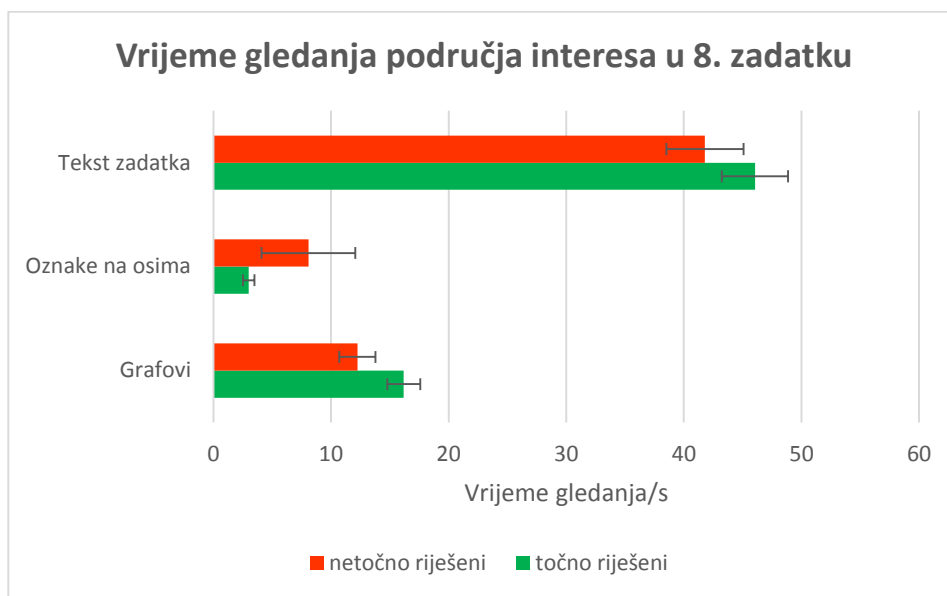


Slika 2.15: Usporedba vremena gledanja pojedinih područja interesa u trećem zadatku između studenata koji su točno i netočno riješili zadatke

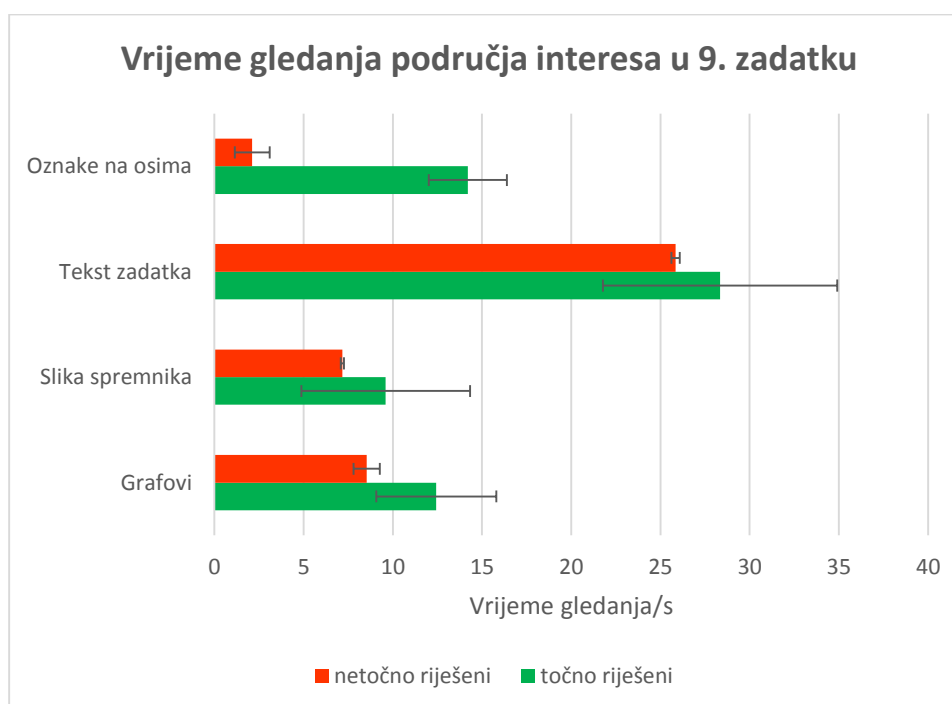
Na koordinatnim osima su se ispitanici najkraće zadržavali, međutim razlika između vremena promatranja koordinatnih osi u trećem zadatku (Slika 2.15) je statistički značajna ( $p = 0.02$ ). Ispitanici koji nisu točno riješili taj zadatak su duže gledali oznake na osima u usporedbi s ispitanicima koji su ga točno riješili.

Na Slici 2.16 i Slici 2.17 vidimo da su studenti u osmom i devetom zadatku najduže promatrali ponuđene odgovore (grafove), što je i očekivano, a najkraće ponovno koordinatne osi. U ta dva zadatka nije uočena niti jedna značajna razlika vremena gledanja pojedinih dijelova zadatka između studenata koji su točno i netočno riješili te zadatke.





Slika 2.16: Usporedba vremena gledanja pojedinih područja interesa u osmom zadatku između studenata koji su točno i netočno riješili zadatke



Slika 2.17: Usporedba vremena gledanja pojedinih područja interesa u devetom zadatku između studenata koji su točno i netočno riješili zadatke

## **Poglavlje 3**

# **Istraživanje s učenicima**

### **3.1. Metode**

#### **Ispitanici**

Testiranje je sa studenata prošireno i na srednjoškolce. U testiranju je sudjelovalo 43 učenika (dva razredna odjela) prvih razreda jedne opće gimnazije u Zagrebu, tj. 24 učenice i 19 učenika, u dobi između 15 i 16 godina.

#### **Test i upitnik**

Učenicima je podijeljen isti test s grafovima iz svakodnevnog života kao i studentima. Razlika je bila u tome što su učenici rješavali zadatke samo na papiru te odmah zapisivali obrazloženja svojih odgovora. Prije podjele testova učenicima su dane upute za rješavanje zadataka. Bilo je važno da učenici odgovore na sva pitanja iz testa te obavezno zapišu obrazloženja, tj. opišu zašto su i kako došli do određenog odgovora. Nakon što su učenici riješili svih devet zadataka, proveden je upitnik o strahu od matematike (Prilog 2). Upitnik se sastojao od 20 situacija koje su na neki način povezane s matematikom [11]. Učenici su trebali, zaokruživši broj od 1 do 4, opisati kako su se osjećali u danim situacijama, s time da je broj 1 predstavljao najmanju, a broj 4 najveću uznemirenost u opisanoj situaciji. Rješavanje testa i upitnika je trajalo oko 35 minuta.

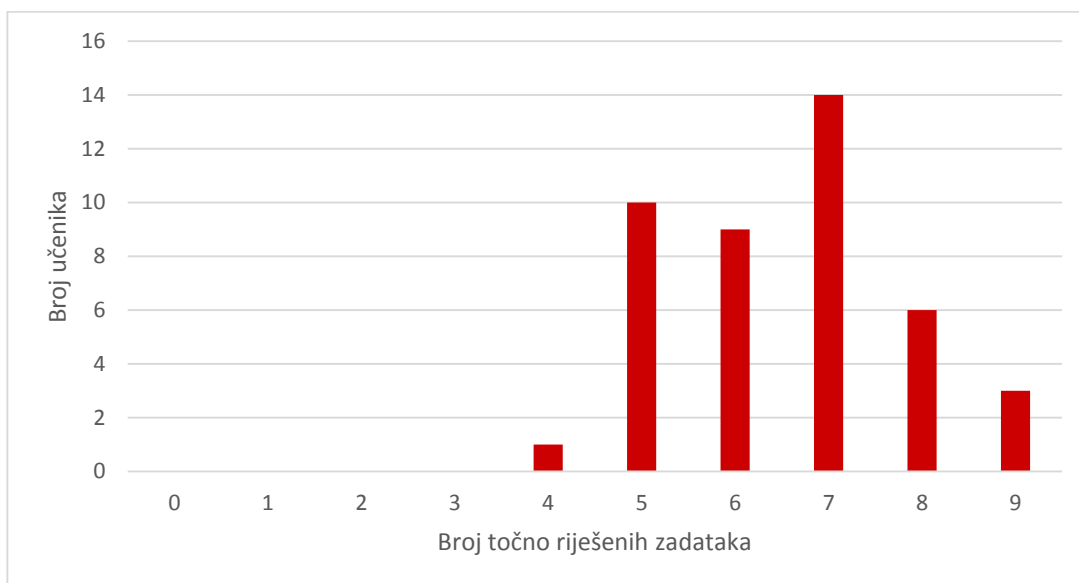
## **Analiza podataka**

Odgovori su se bodovali na isti način kao kod studenata. Na temelju bodovanih odgovora mogli smo izračunati prosječnu točnost testa, ali i svakog pojedinog zadatka. Uz pomoć t-testa napravljena je usporedba točnosti u rješavanju zadataka između učenika i studenata. Nakon toga su analizirana učenička obrazloženja iz kojih su određene njihove strategije pri rješavanju zadataka te njihov način razmišljanja. Na temelju rezultata upitnika proučeno je postoji li veza između straha od matematike, ocjena iz matematike te točnosti testa s grafovima. Izračunat je Pearsonov koeficijent korelacije između tih vrijednosti [15]. Vrijednosti Pearsonovog koeficijenta korelacije mogu biti od +1 (savršena pozitivna korelacija) do -1 (savršena negativna korelacija), a predznak koeficijenta govori o smjeru korelacije, tj. je li ona pozitivna ili negativna. Granična vrijednost za  $p$  je uzeta 0.05 [20].

## **3.2. Rezultati i rasprava**

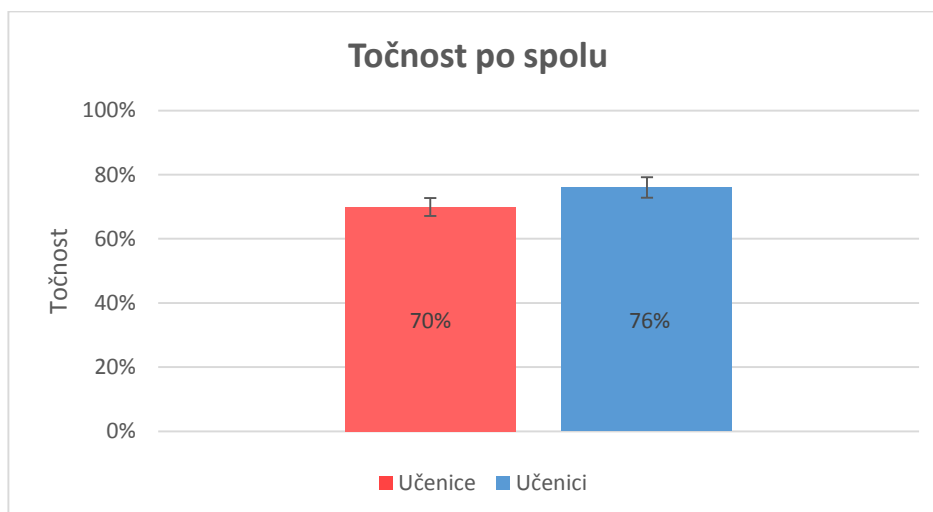
### **Točnost u rješavanju**

Ukupna točnost u rješavanju testa je bila 73%. Na Slici 3.1 prikazana je raspodjela učenika s obzirom na broj točno riješenih zadataka. Kao i kod studenata, svi su učenici točno riješili barem četiri zadatka. Broj učenika koji su točno odgovorili na sva pitanja je za jedan veći nego kod studenata, tj. troje učenika je riješilo test sa 100 % točnosti. Najveći broj učenika je točno riješio sedam zadataka što navodi na zaključak da ni učenicima ovaj test nije bio težak.



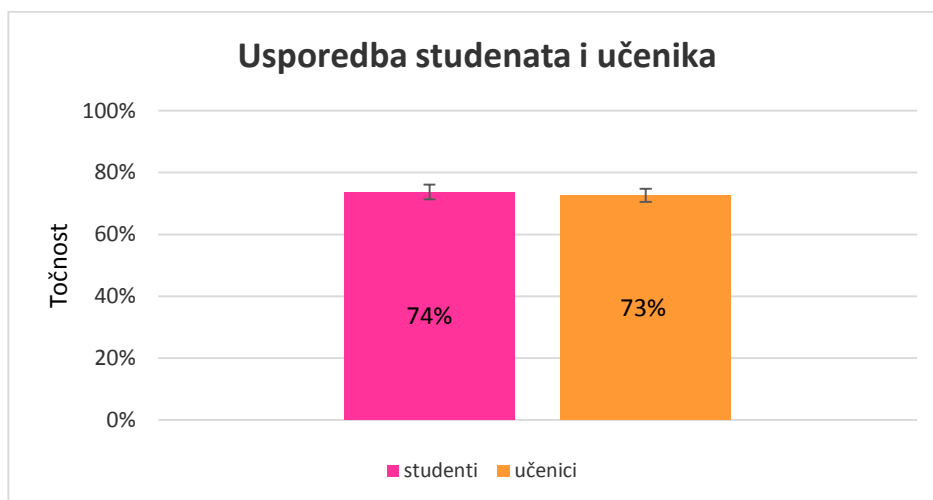
Slika 3.1: Raspodjela učenika po broju točno riješenih zadataka

Učenice su u prosjeku točno riješile 70% testa, a učenici 76% (Slika 3.2). Razlika nije bila statistički značajna ( $p > 0.05$ ).



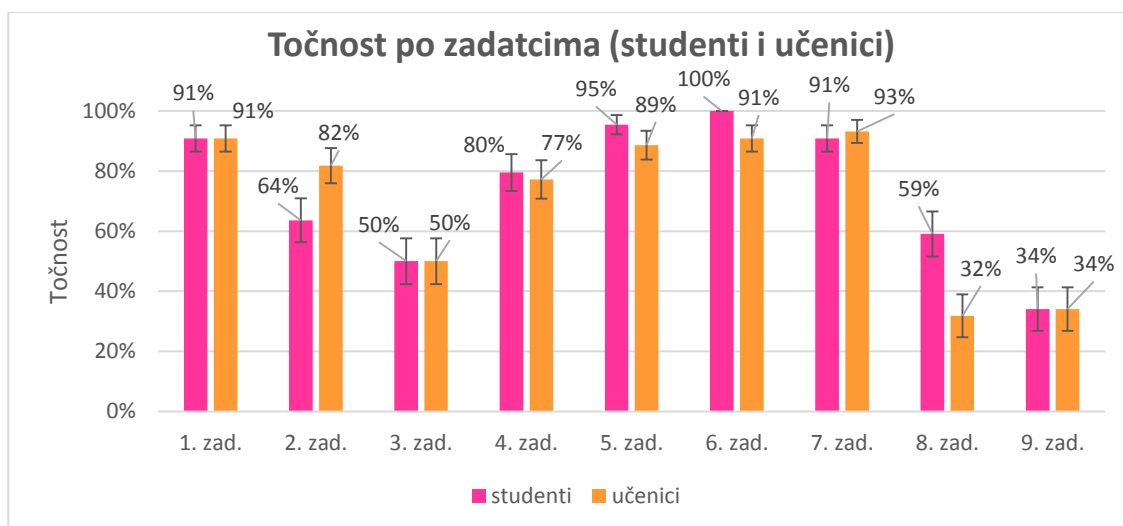
Slika 3.2: Usporedba točnosti između spolova

Očekivali smo da će učenici slabije riješiti test od studenata, međutim, razlika ukupne točnosti nije bila statistički značajna ( $p > 0.05$ ). Usporedba točnosti između studenata i učenika može se vidjeti na Slici 3.3.



Slika 3.3: Usporedba točnosti na testu između studenata i učenika

Usporedba točnosti po zadacima između studenata i učenika prikazana je na Slici 3.4. Razlika ukupne točnosti između te dvije grupe nije statistički značajna ( $F = 1.01$ ,  $p > 0.05$ ). Ako pogledamo svaki zadatak zasebno, uočava se značajna razlika između točnosti u drugom ( $p = 0.03$ ) i osmom zadatku ( $p = 0.01$ ).



Slika 3.4: Usporedba točnosti zadataka između studenata i učenika

Pokazalo da zadatci s grafovima iz svakodnevnog života nisu ništa lakši učenicima prvog razreda opće gimnazije, ali nisu ni teži što je dosta neočekivano. U usporedbi sa studentima, pogotovo ako uzmemo u obzir da polovica studenata studira na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, učenici su prilično uspješno riješili test. Budući da se radi o učenicima prvog razreda srednje škole, moguće je da razlog uspješnosti leži u činjenici što su se nedavno u nastavi fizike detaljno bavili grafovima iz kinematike te su usvojene vještine uspjeli prenijeti na grafove iz svakodnevnog života. U usporedbi sa studentima, učenici su bolje riješili drugi zadatak u kojem se tražilo očitavanje vrijednosti s grafa ( $p = 0.03$ ). Ipak, pokazalo se da postotni račun predstavlja učenicima jednako veliki problem kao i studentima. Deveti zadatak je ponovno uzrokovao mnogo poteškoća. Međutim, učenici nisu najgore riješili deveti već osmi zadatak i to sa značajnom razlikom u odnosu na studente ( $p = 0.01$ ). Budući da se u tom zadatku ispitivala analiza teksta na temelju kojeg se trebao konstruirati tj. prepoznati graf, možemo zaključiti da učenici imaju dosta poteškoća s čitanjem teksta zadatka.

## **Učeničke strategije u rješavanju**

Učenička obrazloženja većinom nisu bila toliko opširna kao studentska, ali strategije su uglavnom bile iste. U Tablici 3.1. prikazane su točne i netočne učeničke strategije pri rješavanju zadataka iz testa.

Prvi zadatak je učenicima, sudeći po obrazloženjima, bio „trivijalan“ pa nismo uočili posebne strategije. Evo nekih od zanimljivijih odgovora:

- "Iz grafa vidim da su djevojke u dobi od 12 godina više (zato što je "ženski" graf viši od "muškog" na dijelu gdje imaju 12 godina)."
- "Prema grafu zaključujemo da je crta koja označava prosječnu visinu djevojaka iznad crte koja označava prosječnu visinu mladića. Zatim sam pogledala na os koja označava godine i uočila da se to dogodilo u 12. godini."

U tom zadatku se ispitivalo očitavanje s grafa i učenici su to uglavnom uspješno savladali. Jedan ispitanik je zapisao:

- "Povlači se okomica prema osi dob, a u tom trenutku 12 godina, djevojke su okomitije na pravcu."

Nekoliko odgovora je bilo posebno zanimljivo jer su učenici čak razmišljali o tome što je uzrokovalo točno takav izgled grafa pa su primijenili znanja iz biologije:

- "Zato jer djevojčice ranije ulaze u pubertet i tom razdoblju dođe do naglog rasta i ostalih tjelesnih i psihičkih osobina."

Tablica 3.1: Učeničke strategije pri rješavanju zadataka s grafovima iz svakodnevnog života

Učeničke strategije				
Redni broj zadatka	Točna strategija	Broj učenika	Netočna strategija	Broj učenika
1.	Očitavanje	40	Krivo očitavanje	3
2.	Očitavanje	36	Krivo očitavanje	7
3.	Očitavanje i standardni račun	8	Nema strategije	11
	Proporcionalnost	8	Nekategorizirano	7
	Nekategorizirano	6	Ostalo	3
4.	Razmatranje ravnog dijela grafa	12	Nekategorizirano	6
	Razmišljanje o gibanju	3	Ostalo	3
	Nekategorizirano	19		
5.	Očitavanje	39	Krivo očitavanje	4
6.	Očitavanje	40	Krivo očitavanje	3
7.	Razmatranje vrijednosti funkcije	22	Nekategorizirano	2
	Razmatranje prosječnih vrijednosti	7		
	Ostalo	12		
8.	Analiza podataka iz teksta zadatka	11	Krivo interpretiranje podataka	16
	Nekategorizirano	3	Gledanje iskoristivosti	7
			Nekategorizirano	5
			Nema strategije	1
9.	Porast visine površine vode, a zatim linearno povećanje	15	Ako je brzina punjenja stalna, graf treba biti pravac	10
			Linearno povećanje predstavlja vodoravna crta	5
			Ostalo	9
			Nekategorizirano	4

Drugi zadatak je također uspješno riješen. Kao što je već navedeno, učenici su u ovom zadatku značajno uspješnije očitavali podatke iz grafa u odnosu na studente. Kod učenika koji su netočno odgovorili na pitanje teško je na temelju odgovora prepoznati netočnu strategiju, tj. zaključiti jesu li krivo očitali količinu lijeka na  $y$ -osi ili su krivo očitali kraj prvog dana na  $x$ -osi. Učenici su često procjenjivali:

- "Iz grafa možemo uočiti da je količina lijeka (mg) između 20 i 40 mg, znači oko 30 mg je ostalo aktivno. Sredina dužine između 20 mg i 40 mg je 30 mg, a vidimo da je točka malo iznad crte stoga je iznad 30 mg."

Neki su ovako objasnili svoj odabir:

- "Zato što linija sječe "1.dan" u točki gdje se nalazi 32 mg."
- "Na grafu se vidi da se vrijeme (1. dan) i doza spajaju."

U trećem zadatku su se, kao i kod studenata, počele javljati poteškoće. Učenici su uglavnom zaključivali na temelju postotnog računa ili koristeći proporcionalnost uz često procjenjivanje rezultata:

- "Uvijek ostane nešto manje od polovice prošlog dana.  $32:80=0.4$ ."

Za većinu učenika teško je zaključiti u čemu su točno griješili; jedan je učenik 80 mg dijelio na 4 dana i zaključio da je to 20%:

- "Zato jer imamo 80 mg na 4 dana i to kad podijelimo na 4 dijela, dobijemo 20%."

Jedan je učenik oduzimao kao što je to činila nekolicina studenata:

- " $32\% - 12\% = 26\%$ , cca 30%."

Kao i kod studenata, u četvrtom zadatku, većina učenika zaključuje da je ravni dio staze tamo gdje je brzina auta konstantna, tek manji dio njih razmišljao je o gibanju:

- "Auto će najviše ubrzavati i ostati pri toj brzini na najdužem ravnom dijelu. Na 1.5 km počinje ubrzavati te ostaje pri toj brzini."



Za većinu učenika je teško zaključiti koju su strategiju koristili jer ih je najveći dio izjavio da su jednostavno s grafa očitali odgovor (među njima i oni koji su točno i oni koji su krivo odgovorili). Jedan učenik je imao problema sa konceptom zadatka:

- "Očitao sam s grafa. Iako piše da je cijela staza ravna?!"

Zanimljive su i neke izjave koje se nisu pojavljivale kod studenata:

- "Zato što kad zbrojimo dužine svih ravnih linija dobijemo rezultat."
- "Pa da bi traka bila najduža trebamo uzeti što manju startnu vrijednost."
- "Jer počinje auto usporavati nakon toga."

U petom zadatku su i učenici gledali najveće „udubljenje“ na grafu, a neki od njih su promatrali i konkretne vrijednosti brzine. Zadatak je uglavnom riješen bez poteškoća. Pojavljivali su se raznoliki odgovori:

- "Crna crta je najviše udubljena. Dubina crte = manja brzina."
- "Linija je najbliža nuli."
- "Najlogičnije, najviše je usporio na tom dijelu."
- "Tamo je amplituda brzine najniža."

Zanimljivo da su, za razliku od studenata, dvije osobe krivo zaključile da je najniža brzina na startnoj crti: "Jer je na startnoj crti  $v = 0$  km/h i  $s = 0$  km."

Šesti zadatak je riješen još uspješnije od prethodnog. Najčešći su bili odgovori poput:

- "Graf ide u koso gore."
- "Jer se krivulja penje."
- "Parabola se povisuje."
- "Nagib se povećava."

Nekima je opet zadatak bio prejednostavan pa su izjavili da sve piše u grafu. Neki su učenici ponovno gledali konkretne vrijednosti, a neki koristili znanja iz fizike:

- "U  $v-t$  grafu ukoliko se linija grafa giba u pozitivnom smjeru, ona ubrzava."

Troje učenika je krivo odgovorilo na pitanje; ili su zaključili da brzina auta ostaje stalna:

- "Crta na grafu je ravna što znači da mu je brzina ostala ista.")

ili da se brzina smanjuje

- "Zbog toga što linija ide od dolje prema gore."

Vidimo na su se učenici u ovom zadatku više od studenata pozivali na znanja iz fizike, međutim neki su imali poteškoća s konceptom nagiba grafa.

U sedmom zadatku su učenici uglavnom gledali vrijednosti funkcije, tj. jesu li konstantne:

- "Brzina vjetra je tijekom cijele godine dovoljna za proizvodnju električne energije, a nema velikih promjena pa neće doći do perioda sa mnogo energije nakon čega će uslijediti period s malo električne energije."
- "Linija na grafu je tada otprilike stalna, kao na jednolikom pravocrtnom gibanju i dosta je dobra brzina vjetra."

Jedan dio učenika je promatrao prosječne vrijednosti brzine vjetra, a ostatak je uglavnom davao odgovore poput:

- "Vjetar je stalno prisutan tako da bi se vjetrenjače trebale pokretati i proizvoditi električnu energiju (tijekom cijele godine)."
- "Graf B to pokazuje jer je tijekom cijele godine vjetrovito."

Jedan učenik je promatrao površinu ispod grafa:

- "Površina ispod grafa je najveća i stoga će električna energija biti najveća."

Osmi zadatak je izazvao dosta problema i većina učenika je komentirala da nisu sigurni u svoj odgovor. Možemo zaključiti da je kod učenika postajalo puno dvojbi između B i C odgovora. Pretpostavljam da je većina učenika koji su izabrali odgovor C razmišljala na ovaj način:

- "Loptice se počinju vrtjeti tek u  $V_1$ , stoga prije miruju. U  $V_2$  točki je maksimalan rad i samo u točki  $V_2$ , a ne u  $V_1$  i  $V_3$ . Loptice se usporavaju sve dok ne dosegne do točke  $V_3$ . Tada se zaustave i miruju."

Dio njih je opet gledao iskoristivost kao u prošleme zadatku pa možemo postaviti pitanje jesu li učenici uopće dobro pročitali zadatak:

- "Zato što se najviše energije proizvede."

Ipak, dio učenika je dobro analizirao podatke iz zadatka:

- "Električna energija je 0 dok se lopatice ne počnu vrtjeti i stalna je brzina do  $V_3$  i čim se dosegnu  $V_3$ , lopatice se prestanu vrtjeti. U B se odmah smanji energija dok npr. u C se snižava. Što po meni znači da kada se dosegne maksimum i lopatice se prestanu vrtjeti, da se energija odmah smanji."

Deveti zadatak je također loše riješen što i nije bilo toliko neočekivano. Najveći dio učenika je zaključio da, ako je brzina punjenja stalna, onda se visina površine vode mora jednoliko mijenjati:

- "Brzina punjenja je stalna tako da graf samo raste, tj. pod C je najvjerniji prikaz. Jednolikom brzinom se spremnik za vodu puni."

Jedan dio učenika je zaključio da na početku razina vode ubrzano raste, a zatim linearno (što je točno), ali su mislili da se taj linearni porast vode na grafu prikazuje kao horizontalna crta:

- "Na početku se puni dno koje ima drukčiji oblik. Ono se puni neravnomjerno pa zbog toga imamo parabolu. Kasnije, tj. u 2. dijelu, imamo dio posude koji je pravilan i u svim dijelovima ima isti oblik i on se puni konstantno, zbog čega imamo ravnu crtu."

Našlo se i ovakvih odgovora:

- "Donji dio spremnika ima pravilan kosi oblik pa pravac grafa se penje pravilno i ravno, a pošto u jednom trenutku su stjenke spremnika skroz ravne tako se i voda penje istom brzinom, a pravac ima isti iznos."

Neki su ponovno, poput studenata, gledali promjenu površine vode:

- "Odgovor E je najlogičniji jer se prvo površina povećava proporcionalno, a zatim u jednom trenutku postaje stalna."

Među točnim odgovorima ponovno su se našle dvije verzije objašnjenja; neki misle da razina vode u početku ubrzano raste dok ne dođe do valjkastog dijela spremnika, međutim dio učenika je dobro objasnio što se zapravo događa s promjenom razine vode:

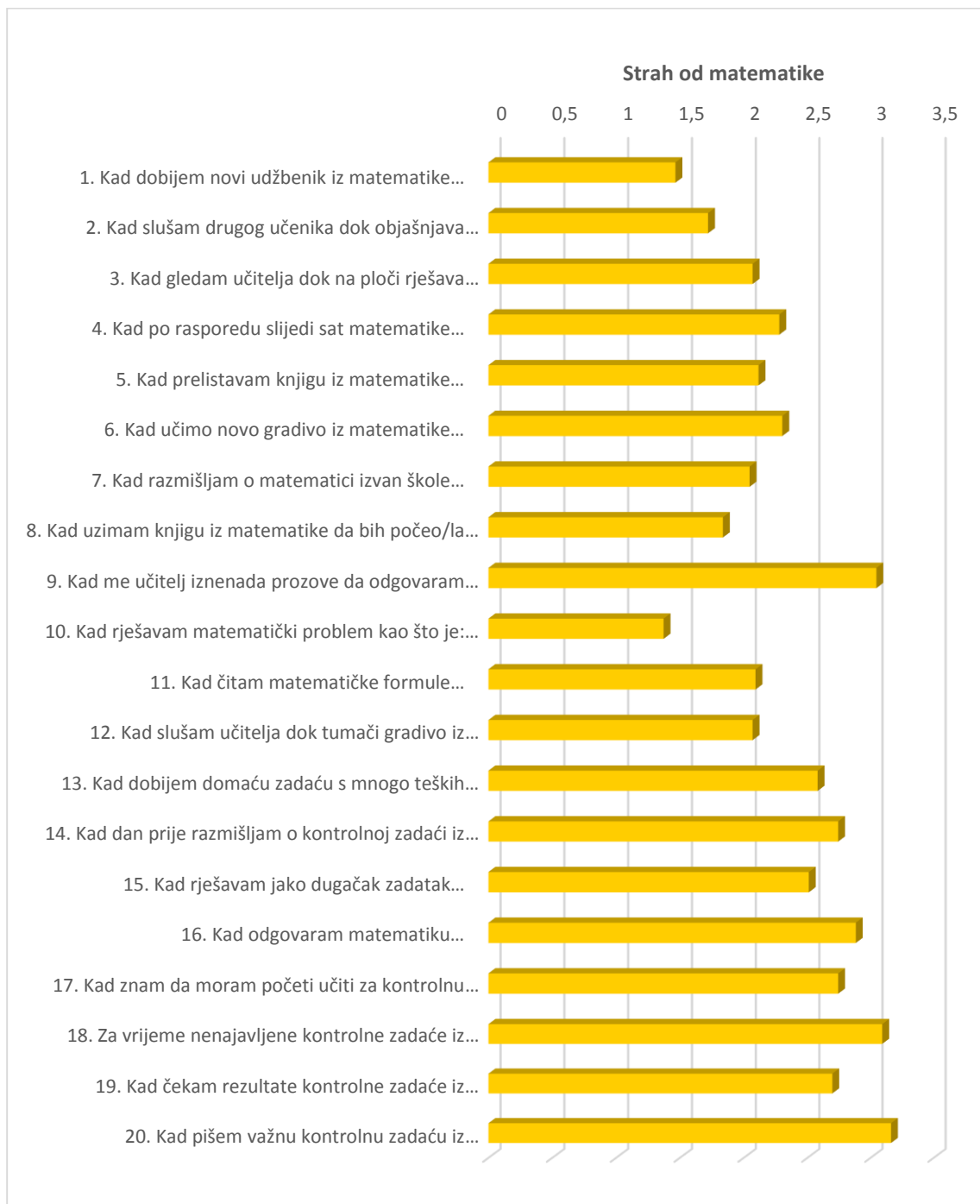
- "Vidi se na grafu. Pošto je dno u obliku stošca, ono će se brže napuniti nego ostali dio spremnika."
- "Zato što visina na početku najbrže raste (od 0 do 1.5 m), ali u svom rastu usporava. Porast visine dobiva stalnu brzinu nakon 1.5 m zbog oblika posude."
- "Prema obliku spremnika vidimo da će se najbrže ispuniti donji dio, dakle, mora biti visok nagib. Onda se spremnik ispunjuje s manjom promjenom visine površine što znači da je nagib blaži nego u prvom dijelu, no nagib ne smije biti vodoravan nego mora rasti. Ove sve uvjete zadovoljava samo B graf."

Niti kod točnosti, niti kod strategija, nema značajnih razlika između studenata i učenika. Standardno, dosta problema je kod učenika izazvala primjena postotnog računa. U osmom zadatku je uočeno da učenici imaju poteškoća s analizom teksta zadatka. U posljednjem zadatku se pokazalo da učenici još uvijek loše prepoznaju ovisnosti na grafovima te ne interpretiraju dobro nagib grafa.

## **Veza između točnosti u rješavanju, straha od matematike i ocjene iz matematike**

Analizom odgovora dobivenih iz upitnika o strahu od matematike pokazalo se da je prosječna „ocjena“ straha od matematike među učenicima 2.34. Zapravo je samo petero učenika svoj strah od matematike iskazalo prosječnom ocjenom većom od 3. Možemo zaključiti da kod ove grupe učenika nije bio prisutan izraženi strah od matematike. Ipak,

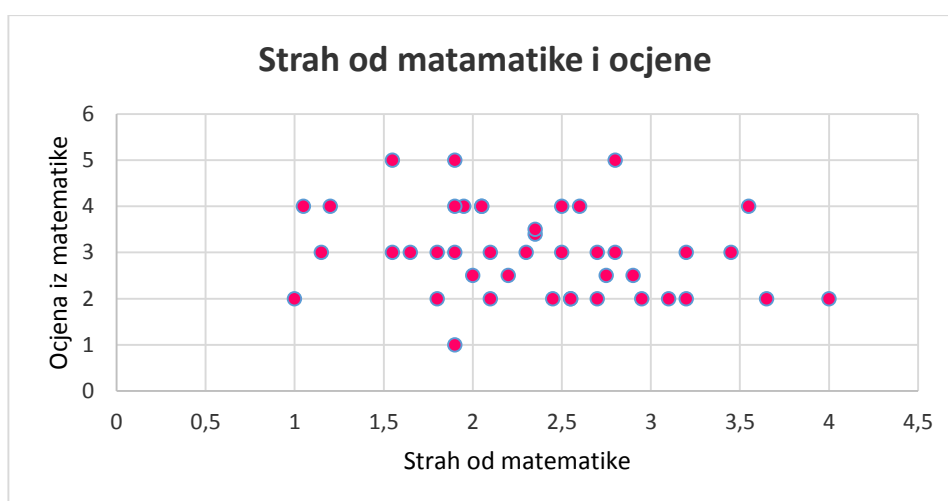
možemo usporediti prosječne ocjene za svaku od dvadeset situacija navedenih u upitniku (Slika 3.5).



Slika 3.5: Strah od matematike u pojedinim situacijama iskazan na skali od 1 do 4 (1-nisam bio/la uznemiren/a, 2-malo, 3-jako, 4-strašno)

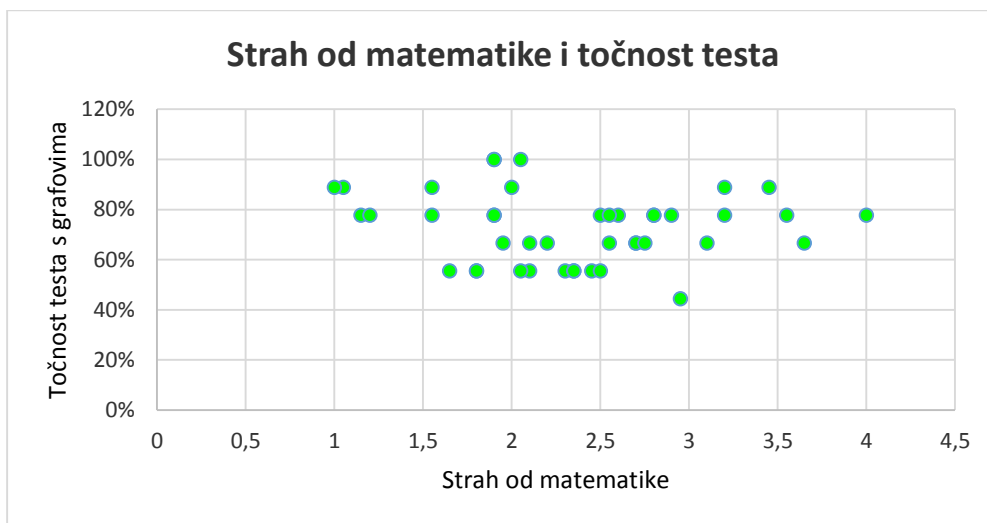
Problem kod ovakvih upitnika je taj što ne možemo biti sigurni koliko iskreno ispitanici odgovaraju na pitanja, pogotovo kada to rade nakon što su riješili devet zadataka s grafovima iz svakodnevnog života. Izgleda da se strah od matematike najviše javlja u školskom kontekstu (prilikom rješavanja testa ili zadaće iz matematike), a situacije iz svakodnevnog života vezane za matematiku ne uzrokuju veliku razinu stresa kod učenika.

Zanimljivo je provjeriti postoji li veza između straha od matematike i ocjena iz matematike kod učenika. Iz tog razloga smo prikupili ocjene iz matematike ispitanih učenika. Budući da smo testiranje radili tijekom školske godine, gledala sam prosječnu ocjenu iz matematike do tog datuma. Izračunat je Pearsonov koeficijent korelacije između straha od matematike i ocjene iz matematike  $R = -0.25$ , što znači da je strah od matematike veći što je ocjena iz matematike manja (Slika 3.6), međutim ta veza nije statistički značajna ( $p = 0.11$ ).



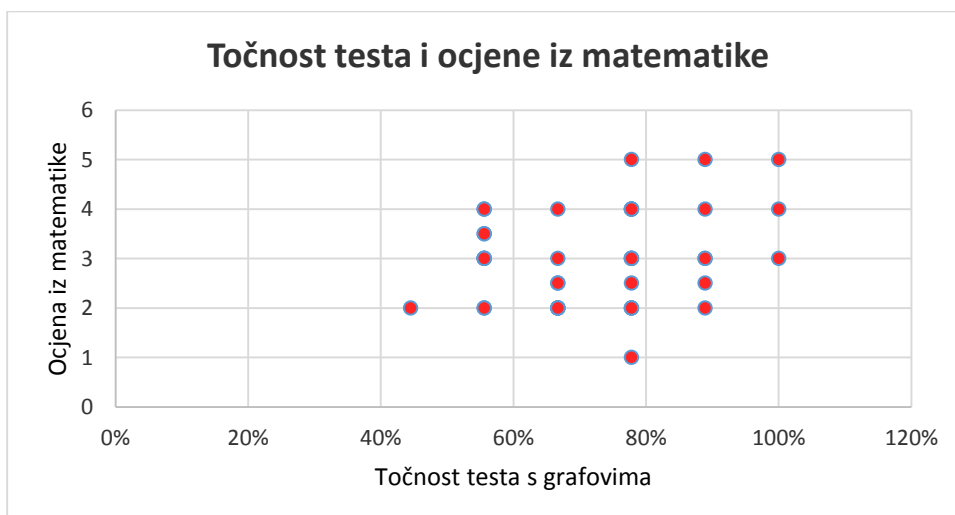
Slika 3.6: Veza straha od matematike i ocjene iz matematike

Na isti način smo provjerili vezu između straha od matematike i točnosti u rješavanju testa sa zadacima s grafovima. Dobiven je koeficijent korelacije  $R = -0.12$  i  $p = 0.45$ . Vidimo da nema statistički značajne korelacije između straha od matematike i uspjeha na testu s grafovima (Slika 3.7).



Slika 3.7: Veza straha od matematike i točnosti testa s grafovima

Na kraju smo provjerili postoji li korelacija između ocjene i točnosti na testu. Za očekivati je bilo da je ta veza pozitivna, tj. da učenici s većom ocjenom iz matematike bolje rješavaju test s grafovima. Koeficijent korelacije je u ovom slučaju bio  $R = 0.27$ , no veza nije statistički značajna ( $p = 0.08$ ). Grafički je to prikazano na Slici 3.8.



Slika 3.8: Veza ocjene iz matematike i točnosti na testu s grafovima

Trend korelacija je u sva tri slučaja bio u očekivanom smjeru, ali korelacije nisu statistički značajne. Trebalo bi vjerojatno povećati broj ispitanika kako bi se dobile statistički značajne korelacije.



## Zaključak i implikacije na nastavu

Ovim istraživanjem se pokazalo da studenti i učenici imaju poteškoća pri interpretaciji grafičkih prikaza s kojima se svakodnevno susreću. Smatram da bi u nastavi matematike i fizike bilo dobro što više stečena znanja i vještine povezivati, kako međusobno tako i sa realnim kontekstom, te poticati učenike i studente na češće korištenje naučenih strategija razmišljanja i zaključivanja u svakodnevnom životu. Česta je situacija da učenici izjavljuju da ne razumiju matematiku i da im nije jasno zašto im je ona potrebna u životu. Nastava matematike i fizike bi učenike trebala osposobiti za pristup problemima u raznolikim kontekstima, u suprotnom stečena znanja ostaju na razini reprodukcije i učenici ne znaju kako ih primijeniti u stvarnosti.

Podatci koje smo prikupili pokazali su da nema velike razlike u rješavanju zadataka s grafovima iz svakodnevnog života između studenata Prirodoslovno-matematičkog fakulteta i drugih fakulteta te između učenika i studenata. Najzanimljivija je činjenica da se studenti PMF-a nisu istaknuli u točnosti zadataka s grafovima, usprkos tome što studiraju područja u kojima se svakodnevno koriste grafovima. Moguće je da uzrok tome leži u tradicionalnoj nastavi na našim fakultetima, nedovoljnoj praktičnoj primjeni znanja te većem korištenju proceduralnog, za razliku od konceptualnog znanja. S druge strane, studenti koji su došli s drugih fakulteta vjerojatno ne predstavljaju prosjek svih studenata na Sveučilištu u Zagrebu jer su oni znali da je istraživanje vezano za matematiku, dobrovoljno su mu pristupili i vjerojatno nisu osjećali strah od matematike. Većina tih studenata je završila gimnaziju, a dio njih je studirao na tehničkim fakultetima.

Velik dio studenata i učenika je koristio pristupe problemima razvijene na nastavi matematike i fizike kao npr. postotni račun, koncept nagiba grafa ili površine ispod grafa. Međutim, iako je uočen prijenos znanja iz tih područja na realni kontekst, analizirajući obrazloženja ispitanika te otkrivajući njihove strategije uočeno je da studenti i učenici imaju dosta poteškoća s postotcima, očitavanjem točaka, a posebno s prepoznavanjem ovisnosti te interpretiranjem nagiba grafa. Trebalo bi se u nastavi matematike i fizike više posvetiti razumijevanju i primjeni tih koncepata kako bi se oni mogli primijeniti i u drugim kontekstima.

Iz obrazloženja se često dalo naslutiti da ovakvi zadatci uzrokuju nelagodu, pogotovo kod studenata koji ne studiraju na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. U testu su se nalazili isključivo primjeri na koje studenti i učenici svakodnevno nailaze, kao npr. izvori energije, trkaći auti, količina lijeka... Bez obzira što je kontekst ispitanicima bio blizak, pokazalo se da neki koncepti, kao npr. postotci, uzrokuju dosta poteškoća. Pojam postotka se prvi put uvodi na nastavi matematike u 7. razredu osnovne škole, ali učenici su redovito s njime upoznati od ranijih godina (sniženja, sportske statistike, udio vode u organizmu, postotak iskoristive energija u bateriji mobitela i dr.). Iako se kasnije učenici sve više susreću s postotcima, njihova primjena ne samo da uzrokuje poteškoće, već učenici, a i studenti, loše reagiraju na samu spoznaju da će trebati primijeniti postotke što se moglo iščitati iz njihovih obrazloženja. Slično je uočeno i u posljednjem zadatku iz testa gdje je trebalo odrediti grafički prikaz ovisnosti. U dosta slučajeva, studenti su izjavljivali da im je taj zadatak pretežak i da nisu sigurni u odgovor, dok su učenici davali jednako loše odgovore, međutim bilo su sigurniji u svoj odabir. Na temelju njihovih obrazloženja možemo zaključiti da bismo na nastavi matematike trebali više provjeravati razumijevanje tih dvaju koncepata. Učenike moramo aktivno uključiti u nastavu i tražiti njihova obrazloženja kako bismo na vrijeme mogli uočiti i učinkovito promijeniti njihove pogrešne koncepcije.

Očekivali smo da će se kod učenika otkriti prisutnost straha od matematike. Rezultati ankete su pokazali da učenici najveći strah od matematike osjećaju u školskom okruženju, a u svakodnevnim aktivnostima strah nije toliko izražen. Iako je među našim ispitanicima strah bio u manjoj mjeri prisutan, iskustvo pokazuje da među učenicima strah od matematike postoji isto kao odbojnost prema matematici. Kako bi se takvi stavovi prema

matematici promijenili, potrebno je među učenicima i studentima stvoriti atmosferu u kojoj će svi biti slobodni iznasti vlastita mišljenja i pristupati težim problemima. Veoma je važno s učenicima raspravljati, dati im dovoljno vremena za zaključivanje te uvažavati razlike među njima. U školi bi nastavnici trebali od početka razvijati pozitivan stav prema matematici te o tome razgovarati i s roditeljima. Ako se uz sve to u nastavu uključe i primjeri u kojima učenici uočavaju važnost primjene matematike u svakodnevnom životu, odbojnost prema tom nastavnom predmetu će se smanjiti i učenici će se uvjeriti da im je matematika zaista korisna u svakodnevnom životu. Time ćemo postići ono na čemu se temelje PISA istraživanja; učenici će biti sposobni primijeniti naučeno u novim situacijama te sudjelovati u razvoju društva.

# Bibliografija

- [1] A. T. Duchowski, *Eye Tracking Methodology: Theory and Practice*, Springer, Clemson, SC, USA, 2007.
- [2] C. Hadjimetriou, J. S. Williams, *Children's graphical conceptions*, Res. Math. Edu. 4 (2002), 69–87.
- [3] C. Janvier, *Use of situations in mathematics education*, Edu. Stud. Math. 12(1) (1981), 113–122.
- [4] D. H. Nguyen, N. S. Rebello, *Students' understanding and application of the area under the curve concept in physics problems*, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 7 (2011), 010112
- [5] Eye tracking, dostupno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Eye\\_tracking](https://en.wikipedia.org/wiki/Eye_tracking) (lipanj 2015.)
- [6] G. Leinhardt, O. Zaslavsky, M. K. Stein, *Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching*, Rev. Educ. Res. 60 (1990), 1–64.
- [7] Hrvatski jezični portal, dostupno na <http://hjp.novi-liber.hr/> (lipanj 2015.)
- [8] I. Galić Jušić, M. Palmović, *Anticipirajući pokreti oka i posebne jezične teškoće*, Suvremena lingvistika 36 (2010), 195–208.
- [9] I. Milanović Litre, R. Fuchs, D. Vican, *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*, dostupno na [public.mzos.hr/fgs.axd?id=18247](http://public.mzos.hr/fgs.axd?id=18247) (svibanj 2015.)

- [10] L. Arambašić, *Anksioznost u ispitnim situacijama – pregled istraživanja*, *Revija za psihologiju* 18 (1988), 1–2.
- [11] L. Arambašić, V. Vlahović-Štetić, A. Severinac, *Je li matematika bauk? Stavovi, uvjerenja i strah od matematike kod gimnazijalaca*, *Društvena istraživanja* 14(6) (2005), 1081–1102.
- [12] L. C. McDermott, M. L. Rosenquist, E. H. van Zee, *Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics*, *Am. J. Phys.* 55 (1987), 503–513.
- [13] M. Planinić, L. Ivanjek, A. Sušac, Ž. Milin-Šipuš, *Comparison of student understanding of graphs in different contexts*, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Rev.* 9 (2013), 020103
- [14] M. Planinić, Ž. Milin-Šipuš, H. Katić, A. Sušac, L. Ivanjek, *Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics*, *Int. J. Sci. Math. Educ.* 10 (2012), 1393
- [15] Pearson Correlation Coefficient Calculator, dostupno na <http://www.socscistatistics.com/tests/pearson/Default.aspx> (lipanj 2015.)
- [16] PISA – OECD, dostupno na <http://www.oecd.org/pisa/> (svibanj 2015.)
- [17] P. J. Fensham, *Real World Contexts in PISA Science: Implications for Context Based Science Education*, *Journal of Research in Science and Teaching* 46 (2009), 884–896.
- [18] Predstavljene rezultati međunarodne procjene znanja i vještina PISA 2012, dostupno na <http://public.mzos.hr/Default.aspx?art=12857> (svibanj 2015.)
- [19] Programme for International Student Assessment, dostupno na [http://hr.wikipedia.org/wiki/PISA\\_%28istra%C5%BEivanje%29](http://hr.wikipedia.org/wiki/PISA_%28istra%C5%BEivanje%29) (svibanj 2015.)
- [20] P Value from Pearson (R) Calculator, dostupno na <http://www.socscistatistics.com/pvalues/pearsondistribution.aspx> (lipanj 2015.)

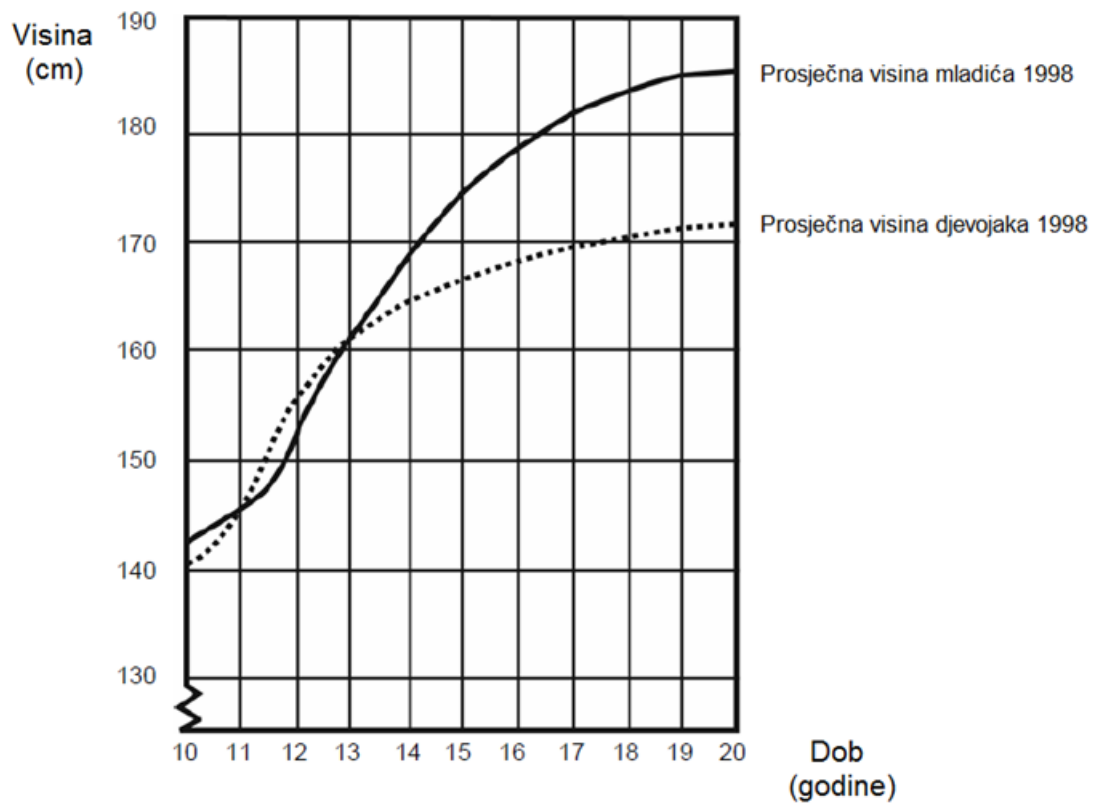
- [21] Rezultati OECD-ova istraživanja PISA 2012 provedenog u Republici Hrvatskoj, dostupno na [http://dokumenti.nevvo.hr/PISA/PISA\\_2012\\_priopcenje\\_za\\_medije.pdf](http://dokumenti.nevvo.hr/PISA/PISA_2012_priopcenje_za_medije.pdf) (svibanj 2015.)
- [22] R. J. Beichner, *Testing student interpretation of kinematics graphs*, Am. J. Phys. 62 (1994), 750–762.
- [23] R. Scherer, J. F. Beckmann, *The acquisition of problem solving competence: evidence from 41 countries that math and science education matters*, Large-scale Assessments in Education 2(10) (2014)
- [24] T-test calculator, dostupno na <http://www.graphpad.com/quickcalcs/ttest1.cfm> (travanj 2015.)

# Prilozi

## Prilog 1: Test

Zadatak 1.

Prosječna visina mladića i djevojaka u Nizozemskoj 1998. godine prikazana je na grafu.

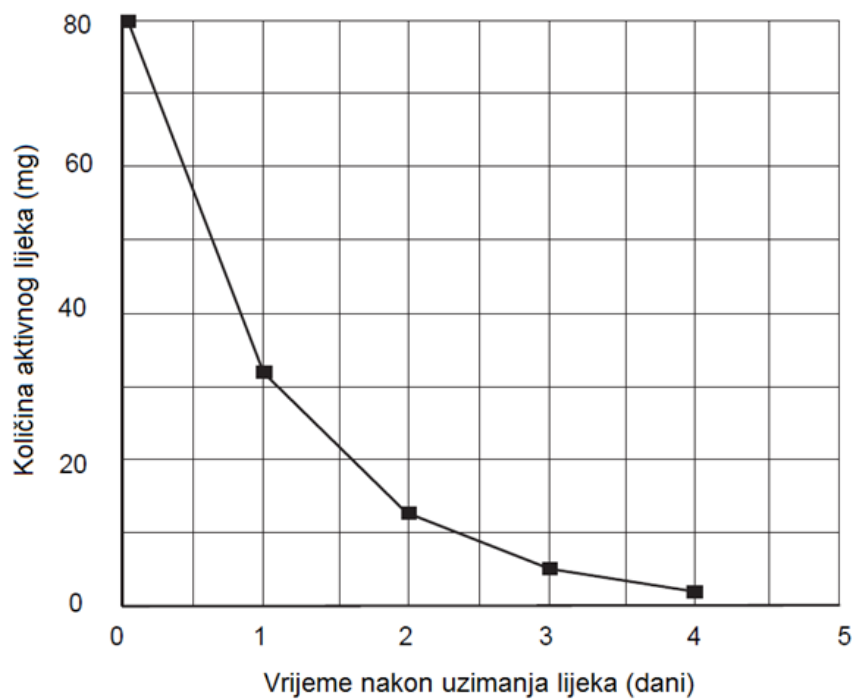


U kojoj su dobi djevojke u prosjeku više od mladića?

- A 11 godina
- B 12 godina
- C 13 godina
- D 14 godina

Zadatak 2.

Petar mora uzimati 80 mg lijeka za kontrolu krvnog tlaka. Sljedeći graf prikazuje početnu količinu lijeka, te količinu lijeka koja ostaje aktivna u Petrovoj krvi nakon jedan, dva, tri i četiri dana.

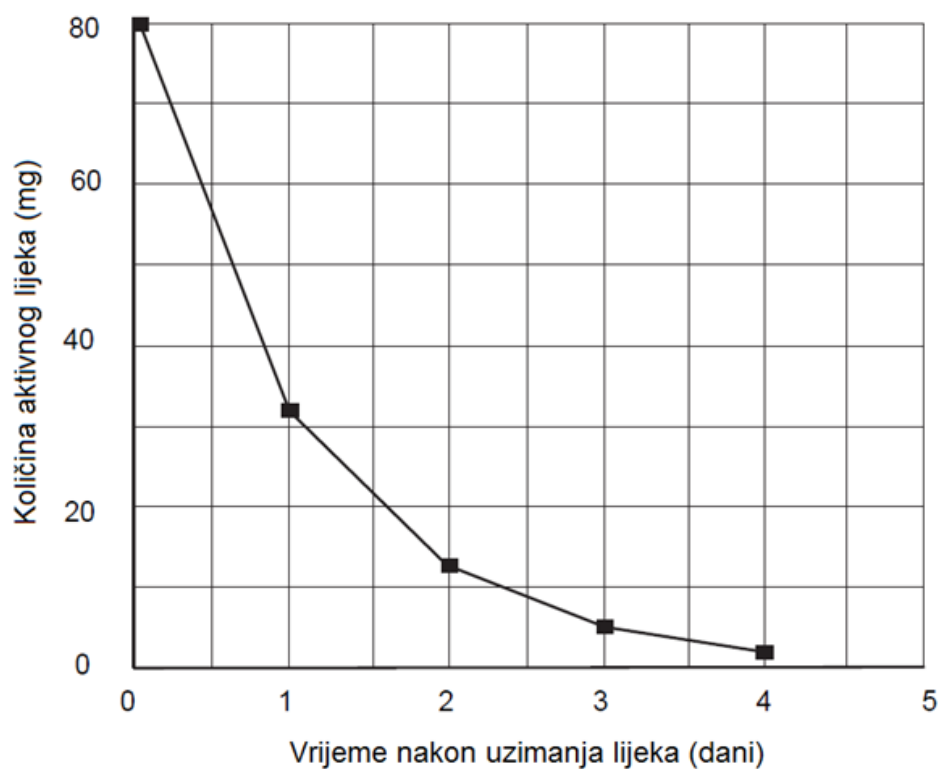


Koliko lijeka ostaje aktivno na kraju prvog dana?

- A 6 mg
- B 12 mg
- C 26 mg
- D 32 mg



Zadatak 3.



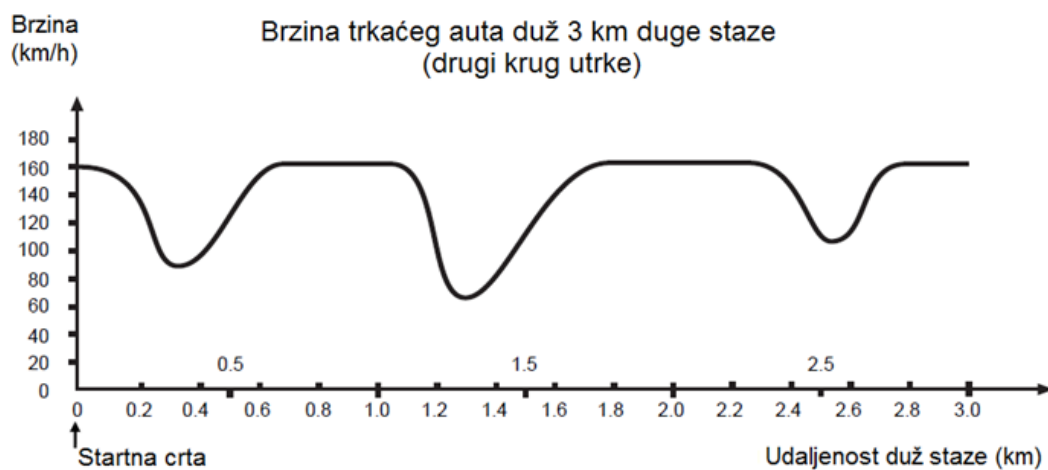
Iz grafa se može vidjeti da svaki dan, približno isti udio lijeka od prethodnog dana ostane aktivan u Petrovoj krvi.

Koliki približan postotak lijeka od prethodnog dana ostane aktivan na kraju svakog dana?

- A 20%
- B 30%
- C 40%
- D 80%

Zadatak 4.

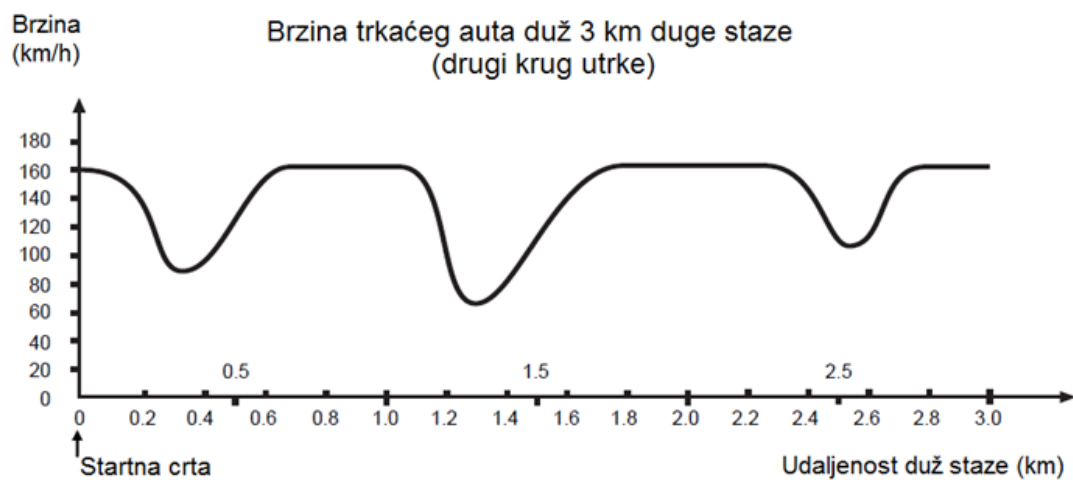
Sljedeći graf prikazuje kako se brzina trkaćeg auta mijenja duž ravne 3 km duge staze tijekom drugog kruga utrke.



Kolika je približna udaljenost od startne crte do početka najdužeg ravnog dijela staze?

- A 0.5 km
- B 1.5 km
- C 2.3 km
- D 2.6 km

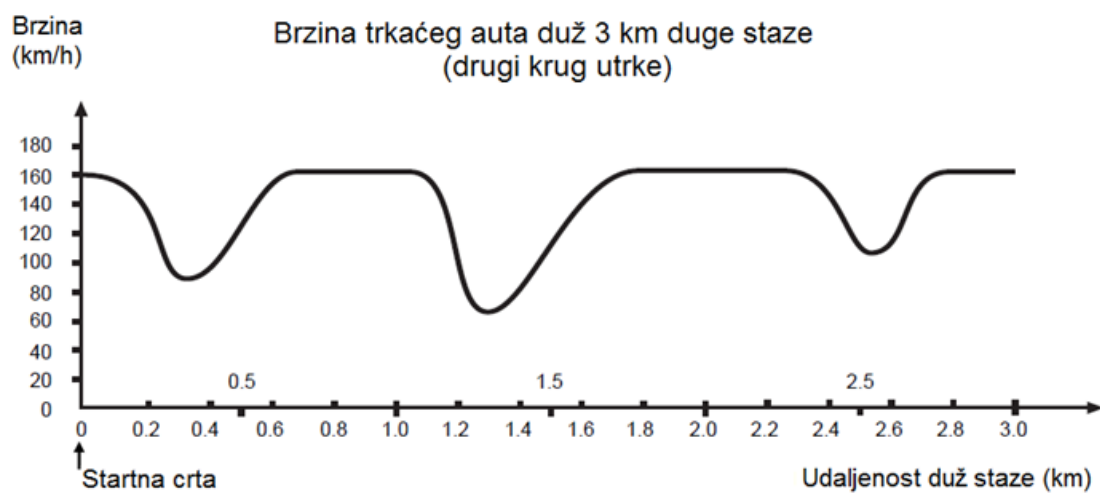
Zadatak 5.



Gdje je izmjerena najmanja brzina tijekom drugog kruga utrke?

- A na startnoj crti
- B na približno 0.8 km
- C na približno 1.3 km
- D na pola puta oko staze

Zadatak 6.



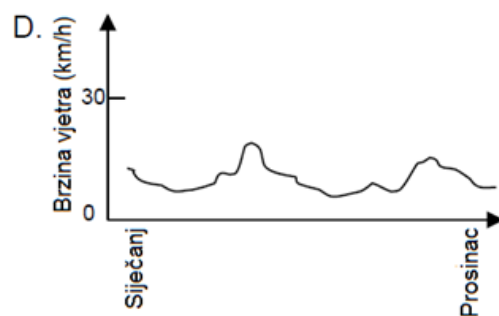
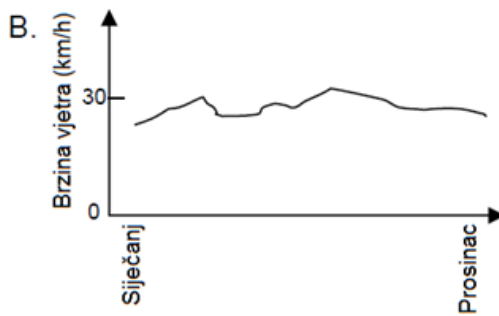
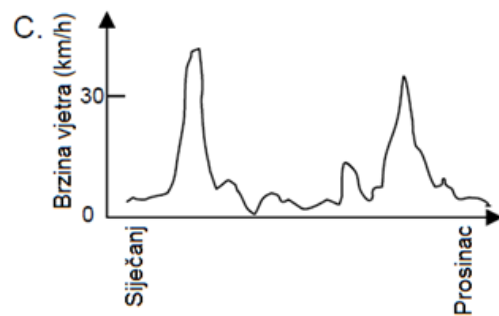
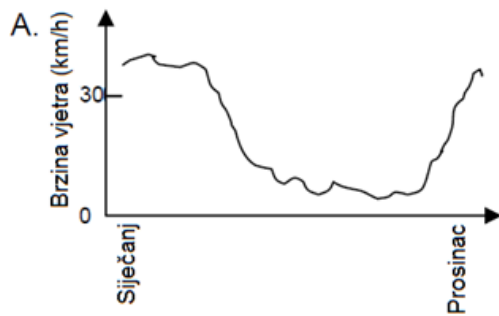
Što možete reći o brzini auta između 2.6 km i 2.8 km?

- A Brzina auta ostaje stalna.
- B Brzina auta raste.
- C Brzina auta se smanjuje.
- D Brzina auta se ne može odrediti iz grafa.

Zadatak 7.

Mnogi ljudi vjeruju da bi vjetar trebao zamijeniti naftu i ugljen kao izvor energije za proizvodnju električne struje. Konstrukcije na slici su vjetrenjače s lopaticama koje vrti vjetar. Pomoću generatora, koje pokreću vjetrenjače, proizvodi se električna energija.

Sljedeći grafovi prikazuju prosječne brzine vjetra na četiri različita mjesta tijekom godine. Koji graf pokazuje najprikladnije mjesto za izgradnju vjetroelektrane za proizvodnju električne energije?

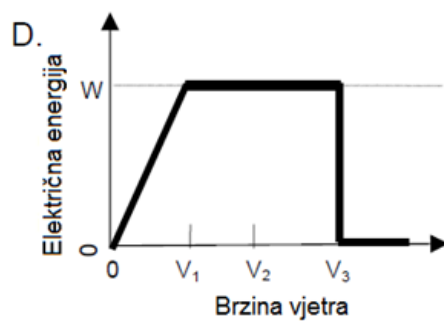
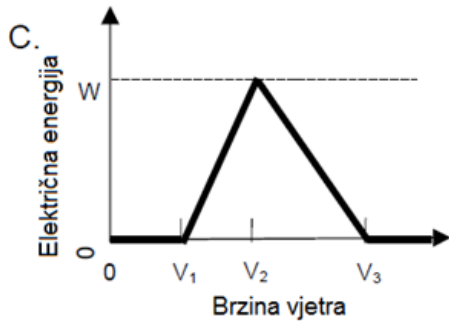
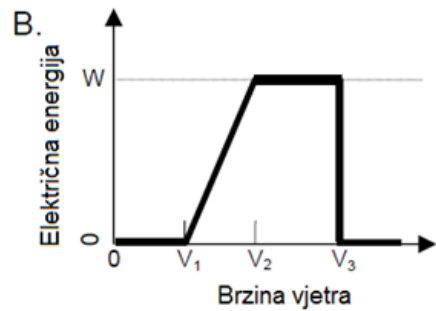
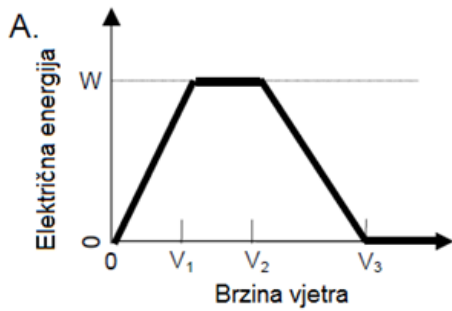


Zadatak 8.

Što je jači vjetar, lopatice vjetrenjače se brže vrtje i veća je proizvodnja električne energije. No, ne postoji izravna veza između brzine vjetra  $u$  i električne energije u realnoj situaciji. Navedena su četiri radna uvjeta za proizvodnju električne energije u realnoj vjetroelektrani.

- Lopatice vjetrenjače počinju se vrtjeti kada brzina vjetra dosegne  $V_1$ .
- Proizvodnja električne energije postiže maksimum ( $W$ ) kada je brzina vjetra  $V_2$ .
- Zbog sigurnosnih razloga, onemogućeno je da se lopatice vrtje brže nego što to čine kada je brzina vjetra  $V_2$ .
- Lopatice se prestanu vrtjeti kada brzina vjetra dosegne  $V_3$ .

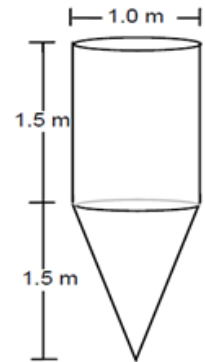
Koji od sljedećih grafova najbolje prikazuje vezu između brzine vjetra i proizvodnje električne energije pod ovim radnim uvjetima?



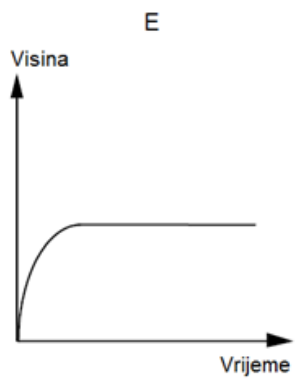
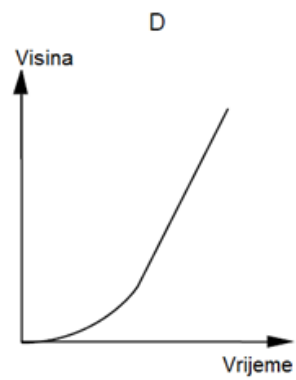
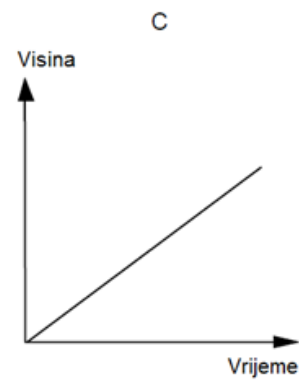
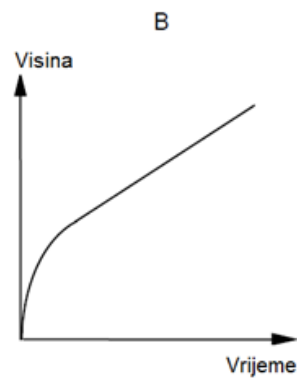
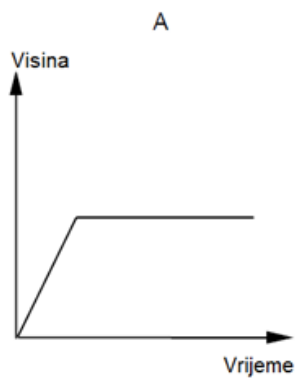
Zadatak 9.

Spremnik za vodu ima oblik i dimenzije kao što je prikazano na slici. Na početku je spremnik prazan. Zatim se puni vodom brzinom od jedne litre u sekundi.

Spremnik za vodu



Koji od sljedećih grafova pokazuje kako se visina površine vode mijenja tijekom vremena?



## Prilog 2: Upitnik o strahu od matematike

Neki učenici matematiku smatraju lakom i zabavnom, a neki je opisuju kao najteži predmet i "baur". Zanima nas Vaš odnos prema matematici, tj. koliko Vas je ona plašila u školi. Molimo Vas da se prisjetite kako ste se osjećali u opisanoj situaciji i zaokružite jedan broj uz svaku tvrdnju.

	uznemireno			nisam bio/bila uznemiren/a
	strašno	jako	malo	
1. Kad dobijem novi udžbenik iz matematike...	4	3	2	1
2. Kad slušam drugog učenika dok objašnjava matematički problem...	4	3	2	1
3. Kad gledam učitelja dok na ploči rješava matematički problem...	4	3	2	1
4. Kad po rasporedu slijedi sat matematike...	4	3	2	1
5. Kad prelistavam knjigu iz matematike...	4	3	2	1
6. Kad učimo novo gradivo iz matematike...	4	3	2	1
7. Kad razmišljam o matematici izvan škole...	4	3	2	1
8. Kad uzimam knjigu iz matematike da bih počeo/la pisati domaću zadaću...	4	3	2	1
9. Kad me učitelj iznenada prozove da odgovaram matematiku...	4	3	2	1
10. Kad rješavam matematički problem kao što je: "Ako u dućanu potrošim 387 kn, koliko moram dobiti natrag ako sam dao novčanicu od 500 kn?"...	4	3	2	1
11. Kad čitam matematičke formule...	4	3	2	1
12. Kad slušam učitelja dok tumači gradivo iz matematike...	4	3	2	1
13. Kad dobijem domaću zadaću s mnogo teških matematičkih zadataka...	4	3	2	1
14. Kad dan prije razmišljam o kontrolnoj zadaći iz matematike...	4	3	2	1
15. Kad rješavam jako dugačak zadatak...	4	3	2	1
16. Kad odgovaram matematiku...	4	3	2	1
17. Kad znam da moram početi učiti za kontrolnu zadaću iz matematike...	4	3	2	1
18. Za vrijeme nenajavljene kontrolne zadaće iz matematike...	4	3	2	1
19. Kad čekam rezultate kontrolne zadaće iz matematike...	4	3	2	1
20. Kad pišem važnu kontrolnu zadaću iz matematike...	4	3	2	1



# Sažetak

U više navrata pokazalo se da učenici i studenti imaju poteškoća pri rješavanju zadataka s grafovima, ali i u rješavanju zadataka s kontekstom iz svakodnevnog života, posebno ako se ne susreću često s takvom vrstom zadataka. Nažalost, u nastavi matematike i fizike još uvijek je veliki naglasak stavljen na svladavanje određenih procedura, a malo pozornosti se pridaje primjeni stečenih znanja i vještina u svakodnevnom životu.

Cilj ovog diplomskog rada je bio istražiti učeničko i studentsko razumijevanje grafova kao važnog izvora informacija. Napravili smo test od devet zadataka s grafovima iz svakodnevnog života koji su korišteni u PISA istraživanju 2012. godine. Osim standardnog testiranja kod studenata i učenika te mjerenja pokreta očiju tijekom rješavanja zadataka kod studenata, ispitanici su trebali obrazložiti svoje odgovore što nam je pomoglo da odredimo njihove strategije u rješavanju zadataka te prepoznamo poteškoće na koje nailaze u tom procesu. Rezultati su pokazali da nije bilo statistički značajnih razlika u točnosti u rješavanju testa između studenata koji studiraju na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu i studenata ostalih fakulteta Sveučilišta u Zagrebu koji su dobrovoljno sudjelovali u ovom istraživanju. Također nije bilo razlike u točnosti između studenata i učenika prvog razreda jedne opće gimnazije u Zagrebu, kao ni razlika u njihovim strategijama. Uz pomoć mjerenja pokreta očiju odredili smo vrijeme rješavanja zadataka i analizirali na koje dijelove zadataka su ispitanici posebno obraćali pažnju i je li im to pomoglo da riješe zadatak. Rezultati su ukazali da su ispitanici koji su točno rješavali zadatke više usmjeravali pažnju na mjesta gdje su se nalazile informacije relevantne za rješavanje zadataka. Na kraju smo odredili koliko je kod učenika prisutan strah od matematike te koliko je on povezan s njihovim ocjenama te rezultatima testa.

Možemo zaključiti da je u nastavi matematike potrebno što više uključivati primjere iz svakodnevnog života kako bi se matematička znanja učvrstila i bolje povezala s drugim područjima. Također, to bi pomoglo da učenici razviju pozitivan stav prema matematici i budu sposobni primijeniti matematičke koncepte u novim situacijama.

# Summary

On several occasions, it has been shown that pupils and students have difficulties in solving tasks with graphs, but also in solving the problems with everyday life context, especially if they do not often meet this kind of problems. Unfortunately, in teaching of mathematics and physics there is still great emphasis on mastering certain procedures, but little attention is given to the application of acquired knowledge and skills in everyday life.

The main goal of this diploma thesis was to investigate the pupils' and students' understanding of graphs as an important source of information. We constructed a test consisting of nine problems with graphs related to daily life that were used in the PISA survey in 2012. Beside the standard testing of students and pupils, and measurements of eye movements of students during problem solving, the participants had to explain their answers which helped us to determine their strategies in problem solving and recognize the difficulties they encounter in the process. The results showed that there was no statistically significant difference in accuracy in solving the test between the students studying at the Faculty of Science and students of other faculties at the University of Zagreb who voluntarily participated in this study. There was also no difference in accuracy between the students and the first year pupils of a general type gymnasium in Zagreb, as well as no differences in their strategies. By measuring the eye movements, we determined the time needed to solve problems and analyzed to which parts of the problems the participants paid more attention and whether it helped them to solve the task. The results suggested that the participants who correctly solved the problems focused their attention more to the areas with information relevant for problem solving. Finally, we determined how many of the students experience anxiety related to mathematics, how it is related to their grades and test results. We can conclude that in the teaching of mathematics it is necessary to include more examples from everyday life to strengthen the mathematical knowledge and to connect it better with other areas. This would also help students to develop a positive attitude towards mathematics and to be able to apply mathematical concepts to new situations.

# Životopis

Nikolina Skenderović rođena je 9. svibnja 1990. godine u Zagrebu. Od 1997. do 2000. godine pohađala je Osnovnu školu „Vladimir Nazor“ Pisarovina, PŠ Bratina, a iduće četiri godine matičnu školu u Pisarovini. 2015. godine upisala je u Zagrebu XI. gimnaziju općeg usmjerenja. 2009. godine upisala je Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij Matematika i fizika; smjer: nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Služi se engleskim i talijanskim jezikom. Živi u Bratini, općina Pisarovina. U slobodno vrijeme bavi se folklorom.