

# Kvocijentni prostori

---

Švenda, Lovro

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:556810>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2020-12-01**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Lovro Švenda

**KVOCIJENTNI PROSTORI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Metrički i topološki prostori</b>	<b>2</b>
1.1 Metrički prostori . . . . .	2
1.2 Topološki prostori . . . . .	9
<b>2 Kvocijentni prostori</b>	<b>15</b>
2.1 Kvocijentno preslikavanje . . . . .	15
2.2 Kvocijentna topologija . . . . .	20
2.3 Kompaktnost . . . . .	29
2.4 Primjeri . . . . .	36
<b>Bibliografija</b>	<b>40</b>

# Uvod

Željeli smo proučiti svojstva različitih struktura matematičkih objekata kao što su kružnica, vrpca, Möbiusova vrpca, Kleinova boca i slično. Takvi objekti se uobičajeno demonstriraju rezanjem i lijepljenjem konopca i papira. Međutim, u svrhu opisivanja nastanka takvih objekata na matematički način, moramo definirati odgovarajući topološki prostor.

Zato ćemo u ovom radu prvo definirati metričke i topološke prostore i dati nekoliko primjera. Nakon toga ćemo u topološkim prostorima inducirati kvocijentnu topologiju kvocijentnim preslikavanjem i tako definirati kvocijentne prostore. Definirat ćemo i produkt dvaju topoloških prostora.

Nadalje ćemo razmatrati kompaktnost skupova i konvergenciju nizova u topološkim prostorima.

# Poglavlje 1

## Metrički i topološki prostori

Za početak definirajmo metričke, a zatim i topološke prostore.

### 1.1 Metrički prostori

**Definicija 1.1.1.** Neka je  $X$  neprazan skup te  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija takva da je

(1)  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$  te  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2)  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

(3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$  (nejednakost trokuta)

Tada za  $d$  kažemo da je **metrika** na skupu  $X$ , a za uređen par  $(X, d)$  da je **metrički prostor**.

#### Primjer 1.1.2.

Neka je  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa  $d(x, y) = |x - y|$ . Tada je  $d$  metrika na  $\mathbb{R}$ . Dokažimo to.

Uvjeti (1) i (2) iz definicije metrike očito vrijede.

Provjerimo uvjet (3).

Neka su  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Tada je

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y),$$

dakle  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

(Ovdje smo koristili da za sve  $u, v \in \mathbb{R}$  vrijedi  $|u + v| \leq |u| + |v|$ .)

Dakle,  $d$  je metrika na  $\mathbb{R}$ .

Za funkciju  $d$  kažemo da je **euklidska metrika** na  $\mathbb{R}$ .

**Primjer 1.1.3.**

Neka je  $n \in \mathbb{N}$ , te neka je  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Za funkciju  $d$  kažemo da je euklidska metrika na  $\mathbb{R}^n$ . Uočimo da je za  $n = 1$  ova funkcija upravo euklidska metrika na  $\mathbb{R}$ .

$$(d(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1|)$$

Dokažimo da je  $d$  zaista metrika na  $\mathbb{R}^n$ .

Jedino netrivialno svojstvo koje treba provjeriti je nejednakost trokuta.

Neka su  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$ .

Tada je nejednakost

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (1.1)$$

ekvivalentna sa

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2} \quad (1.2)$$

Za  $i \in \{1, \dots, n\}$  definiramo

$$\begin{aligned} u_i &= x_i - z_i \\ v_i &= z_i - y_i. \end{aligned}$$

Uočimo da je

$$u_i + v_i = x_i - y_i$$

za svaki  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Imamo da je (1.2) ekvivalentno sa

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \\
 &\Leftrightarrow \\
 \sum (u_i + v_i)^2 &\leq \sum u_i^2 + 2\sqrt{\sum u_i^2} \sqrt{\sum v_i^2} + \sum v_i^2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 \sum (u_i^2 + 2u_i v_i + v_i^2) &\leq \sum u_i^2 + 2\sqrt{\sum u_i^2} \sqrt{\sum v_i^2} + \sum v_i^2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 \cancel{\sum u_i^2} + 2\sum u_i v_i + \cancel{\sum v_i^2} &\leq \cancel{\sum u_i^2} + 2\sqrt{\sum u_i^2} \sqrt{\sum v_i^2} + \cancel{\sum v_i^2} \\
 &\Leftrightarrow \\
 \sum u_i v_i &\leq \sqrt{\sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2}
 \end{aligned}$$

Za posljednju nejednakost dovoljno je dokazati da je

$$\left(\sum u_i v_i\right)^2 \leq \sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2 \quad (1.3)$$

U tu svrhu definirajmo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa

$$f(t) = (u_1 t + v_1)^2 + \cdots + (u_n t + v_n)^2 .$$

Očito je  $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Imamo

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (u_1 t^2 + 2u_1 v_1 t + v_1^2) + \cdots + (u_n t^2 + 2u_n v_n t + v_n^2) = \\
 &= (u_1^2 + \cdots + u_n^2) t^2 + 2(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n) t + (v_1^2 + \cdots + v_n^2)
 \end{aligned}$$

Dakle,  $f$  je nenegativna kvadratna funkcija pa joj je diskriminanta manja ili jednaka od 0. Prema tome

$$4\left(\sum u_i v_i\right)^2 - 4\sum u_i^2 \cdot \sum v_i^2 \leq 0,$$

pa slijedi (1.3), a iz toga i (1.2).

Time je nejednakost (1.1) dokazana.



**Primjer 1.1.4.**

Neka je  $X$  neprazan skup. Neka je  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Tada za  $d$  kažemo da je diskretna metrika na skupu  $X$ . Funkcija  $d$  je zaista metrika na skupu  $X$ .

**Definicija 1.1.5.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor; neka je  $x_0 \in X$  te  $r > 0$ . Definiramo

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

Za  $K(x_0, r)$  kažemo da je (otvorena) kugla oko  $x_0$  radijusa  $r$  u metričkom prostoru  $(X, d)$ .

Pišemo umjesto  $K(x_0, r)$  i  $K(x_0, r; d)$ , ako želimo naglasiti o kojoj se metrici radi.

**Definicija 1.1.6.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $U \subseteq X$ . Za  $U$  kažemo da je otvoren skup u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako vrijedi sljedeće:

$$\forall x \in U \exists r > 0 \text{ takav da } K(x, r) \subseteq U.$$

**Primjer 1.1.7.** Neka je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}$ . Neka je  $x \in \mathbb{R}$ , te  $r > 0$ .

Tada je  $K(x, r; d) = \langle x - r, x + r \rangle$

Naime, imamo

$$\begin{aligned} y \in K(x, r) &\Leftrightarrow d(x, y) < r \Leftrightarrow |y - x| < r \Leftrightarrow -r < y - x < r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - r < y < x + r \Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r \rangle \end{aligned}$$

Svaka otvorena kugla u  $(\mathbb{R}, d)$  je otvoreni interval. S druge strane, svaki otvoreni (omeđeni) interval je otvorena kugla, naime, ako su  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , onda je

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \right\rangle,$$

to jest

$$\langle a, b \rangle = K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Skup  $[0, \infty)$  nije otvoren u  $(\mathbb{R}, d)$  jer ne postoji  $r > 0$  takav da je  $K(0, r) \subseteq [0, \infty)$ .

**Propozicija 1.1.8.**

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor; neka je  $x \in X$  te  $r > 0$ .

Tada je  $K(x, r)$  otvoren skup u  $(X, d)$ .

(Dakle, svaka otvorena kugla u  $(X, d)$  je otvoren skup.)

*Dokaz.* Neka je  $y \in K(x, r)$ . Tada je  $d(x, y) < r$ , pa postoji  $s > 0$  takav da  $d(x, y) + s < r$ .  
Tvrđimo da je  $K(y, s) \subseteq K(x, r)$ .

Neka je  $z \in K(y, s)$ . Tada je  $d(y, z) < s$ , pa imamo

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s < r.$$

Dakle,  $d(x, z) < r$ , pa je  $z \in K(x, r)$ . Prema tome  $K(y, s) \subseteq K(x, r)$ .

Zaključak:  $K(x, r)$  je otvoren skup. □

**Propozicija 1.1.9.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor.

(1)  $\emptyset$  i  $X$  su otvoreni skupovi u  $(X, d)$ .

(2) Ako je  $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  indeksirana familija otvorenih skupova, onda je  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$  otvoren skup.

(3) Ako su  $U$  i  $V$  otvoreni skupovi, onda je  $U \cap V$  otvoren skup.

*Dokaz.*

(1) Tvrđnja je jasna.

(2) Neka je  $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  indeksirana familija otvorenih skupova.

Neka je  $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ . Tada je  $x \in U_{\alpha_0}$ , gdje je  $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ . Budući da je  $U_{\alpha_0}$  otvoren skup, postoji  $r > 0$  takav da

$$K(x, r) \subseteq U_{\alpha_0}.$$

No, tada je

$$K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha.$$

Prema tome,  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$  je otvoren skup.

(3) Neka su  $U$  i  $V$  otvoreni skupovi. Uzmimo da je  $x \in U \cap V$ . Tada je  $x \in U$  i  $x \in V$ .

Budući da su  $U$  i  $V$  otvoreni postoje  $r, s > 0$  takvi da je

$$K(x, r) \subseteq U \text{ i } K(x, s) \subseteq V.$$

Neka je  $t = \min\{r, s\}$ . Tada je  $t > 0$  i  $t \leq s, t \leq r$ , pa je

$$K(x, t) \subseteq K(x, s) \text{ i } K(x, t) \subseteq K(x, r).$$

Stoga je  $K(x, t) \subseteq U$  i  $K(x, t) \subseteq V$ , pa je  $K(x, t) \subseteq U \cap V$ .

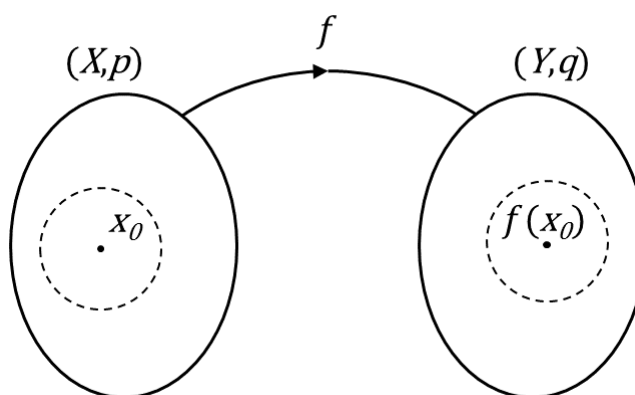
Dakle,  $U \cap V$  je otvoren skup. □

**Definicija 1.1.10.**

Neka su  $(X, p)$  i  $(Y, q)$  metrički prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  funkcija. Neka je  $x_0 \in X$ . Kažemo da je funkcija  $f$  **neprekidna u točki  $x_0$  s obzirom na metrike  $p$  i  $q$**  ako za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da

$$\forall x \in X \ p(x_0, x) < \delta \Rightarrow q(f(x_0), f(x)) < \epsilon.$$

Za funkciju  $f$  kažemo da je **neprekidna s obzirom na metrike  $p$  i  $q$**  ako je  $f$  neprekidna u  $x_0 \forall x_0 \in X$ .



Uočimo sljedeće:

$f$  je neprekidna u točki  $x_0$  s obzirom na  $p$  i  $q$  ako i samo ako za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da je

$$f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q). \quad (1.4)$$

Naime, pretpostavimo prvo da je  $f$  neprekidna u  $X$ . Neka je  $\epsilon > 0$ . Tada postoji  $\delta > 0$  takav da je  $q(f(x), f(x_0)) < \epsilon$  za svaki  $x \in X$  takav da je  $p(x, x_0) < \delta$ . Tvrđimo da tada vrijedi (1.4).

Neka je  $y \in f(K(x_0, \delta; p))$ . Tada postoji  $x \in K(x_0, \delta; p)$  takav da  $f(x) = y$ . Slijedi da je  $p(x, x_0) < \delta$ , pa iz toga slijedi

$$q(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Dakle,  $y \in K(f(x_0), \epsilon; q)$ .

Time je dokazano (1.4).

Pretpostavimo sada da  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  takav da vrijedi (1.4). Želimo dokazati da je  $f$  neprekidna u točki  $x_0$ .

Neka je  $\epsilon > 0$ . Tada postoji  $\delta > 0$  takav da vrijedi (1.4). Neka je  $x \in X$  takav da  $p(x, x_0) < \delta$ .

Tada je  $x \in K(x_0, \delta; p)$  pa je

$$f(x) \in f(K(x_0, \delta; p)).$$

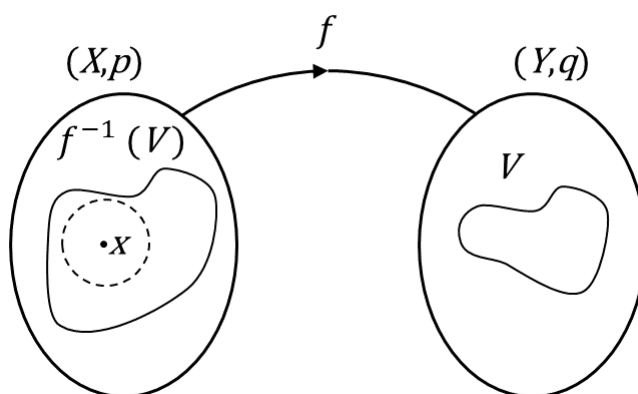
Iz (1.4) slijedi  $f(x) \in K(f(x_0), \epsilon; q)$ , što povlači  $q(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ .

Zaključak:  $f$  je neprekidna u  $x_0$ .

### Propozicija 1.1.11.

Neka su  $(X, p)$  i  $(Y, q)$  metrički prostori, te neka je  $f : X \rightarrow Y$ .

Tada je  $f$  neprekidna s obzirom na metrike  $p$  i  $q$  ako i samo ako je za svaki otvoreni skup  $V$  u  $(Y, q)$  skup  $f^{-1}(V)$  otvoren u  $(X, p)$ .



*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $f$  neprekidna s obzirom na  $p, q$ . Neka je  $V$  otvoreni skup u  $(Y, q)$ . Želimo dokazati da je  $f^{-1}(V)$  otvoreni skup u  $(X, p)$ .

Neka je  $x \in f^{-1}(V)$ . Tada je  $f(x) \in V$ . Budući da je  $V$  otvoren skup u  $(Y, q)$ , postoji  $r > 0$  takav da

$$K(f(x), r; q) \subseteq V.$$

Budući da je  $f$  neprekidna u  $x$ , postoji  $\delta > 0$  takav da

$$f(K(x, \delta; p)) \subseteq K(f(x), r; q).$$

Slijedi  $f(K(x, \delta; p)) \subseteq V$ , dakle  $K(x, \delta; p) \subseteq f^{-1}(V)$ .

Zaključak,  $f^{-1}(V)$  je otvoreni skup u  $(X, p)$ .

Pretpostavimo sada da je za svaki otvoreni skup  $V$  u  $(Y, q)$  skup  $f^{-1}(V)$  otvoren u  $(X, p)$ . Pokažimo da je  $f$  neprekidna s obzirom na  $p$  i  $q$ .

Neka je  $x_0 \in X$  i neka je  $\epsilon > 0$ . Želimo naći  $\delta > 0$  takav da je

$$f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon; q) \quad (1.4)$$

Skup  $K(f(x_0), \epsilon; q)$  je otvoren u  $(Y, q)$ , pa je stoga prasluka  $f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon; q))$  otvoren skup u  $(X, p)$ . Imamo

$$x_0 \in K(f(x_0), \epsilon; q),$$

pa stoga postoji  $\delta > 0$  takav da

$$K(x_0, \delta; p) \subseteq f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon; q))$$

Iz ovoga slijedi (1.4).

Zaključak:  $f$  je neprekidna u točki  $x_0$ . Prema tome,  $f$  je neprekidna.  $\square$

## 1.2 Topološki prostori

**Definicija 1.2.1.** Neka je  $X$  neprazan skup, te neka je  $\mathcal{T}$  familija podskupova od  $X$  takva da vrijede sljedeća svojstva:

- (1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .
- (2) Ako je  $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  indeksirana familija elemenata od  $\mathcal{T}$ , onda je  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$ .
- (3) Ako su  $U, V \in \mathcal{T}$ , onda je  $U \cap V \in \mathcal{T}$ .

Tada za  $\mathcal{T}$  kažemo da je **topologija na skupu**  $X$ , a za uređeni par  $(X, \mathcal{T})$  kažemo da je **topološki prostor**.

**Primjer 1.2.2.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor. Neka je  $\mathcal{T}_d$  familija svih skupova koji su otvoreni u  $(X, d)$ . Tada je  $\mathcal{T}_d$  topologija na skupu  $X$ . Naime, to slijedi iz propozicije 1.1.9.

Za  $\mathcal{T}_d$  kažemo da je **topologija inducirana metrikom**  $d$ .

**Primjer 1.2.3.** Neka je  $X$  neprazan skup. Tada je  $\mathcal{P}(X)$  očito topologija na  $X$ . Za  $\mathcal{P}(X)$  kažemo da je **diskretna topologija** na  $X$ .

S druge strane,  $\{\emptyset, X\}$  je također topologija na  $X$ .

Za  $\{\emptyset, X\}$  kažemo da je **indiskretna topologija** na  $X$ .

**Napomena 1.2.4.** Ako je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor,  $n \in \mathbb{N}$  te  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ , onda je  $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$ .

Ovo se lako dobiva indukcijom po  $n$ .

**Definicija 1.2.5.** Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor. Za  $(X, \mathcal{T})$  kažemo da je **metrizabilan topološki prostor** ako postoji metrika  $d$  na  $X$  takva da je  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ .

**Propozicija 1.2.6.**

Neka je  $(X, d)$  metrički prostor, te neka su  $a, b \in X$  takvi da je  $a \neq b$ .

Tada postoje skupovi  $U$  i  $V$  otvoreni u  $(X, d)$  takvi da je  $a \in U, b \in V$ , te  $U \cap V = \emptyset$ .

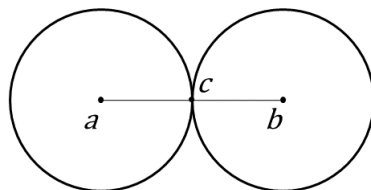


*Dokaz.*

Neka je  $r = \frac{d(a, b)}{2}$ . Tada je  $r > 0$  jer je  $a \neq b$ . Neka je  $U = K(a, r)$  te  $V = K(b, r)$ . Tada su  $U$  i  $V$  otvoreni skupovi u  $(X, d)$ , te je očito  $a \in U$  i  $b \in V$ .

Dokažimo još da je  $U \cap V = \emptyset$ .

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji  $c \in U \cap V$ .



Tada je  $c \in U$  i  $c \in V$ , pa je  $d(a, c) < r$  i  $d(b, c) < r$ .

Imamo

$$2r = d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < r + r = 2r,$$

dakle  $2r < 2r$ . Kontradikcija.

Dakle,  $U \cap V = \emptyset$ . □

**Definicija 1.2.7.** Za topološki prostor  $(X, \mathcal{T})$  kažemo da je **Hausdorffov** ako za sve  $a, b \in X$  takve da je  $a \neq b$  postoje  $U, V \in \mathcal{T}$  takvi da je  $a \in U, b \in V$  i  $U \cap V = \emptyset$ .

**Korolar 1.2.8.** Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.

*Dokaz.*

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika  $d$  na  $X$  koja inducira topologiju  $\mathcal{T}$ . Neka su  $a, b \in X, a \neq b$ . Prema propoziciji 1.2.6 postoje skupovi  $U$  i  $V$  otvoreni u  $(X, d)$  takvi da je  $a \in U, b \in V$  i  $U \cap V = \emptyset$ .

Jasno je da su  $U, V \in \mathcal{T}$ . □

**Primjer 1.2.9.** *Neka je  $X$  skup koji ima bar dva elementa. Neka je  $\mathcal{T}$  indiskretna topologija na  $X$ , to jest  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ .*

*Tada očito topološki prostor  $(X, \mathcal{T})$  nije Hausdorffov.*

*Iz ovoga slijedi da  $(X, \mathcal{T})$  nije metrizabilan.*

**Definicija 1.2.10.** *Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je **neprekidna** s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$  ako za svaki  $V \in \mathcal{S}$  vrijedi da je  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ .*

Uočimo da prema propoziciji 1.2.6 vrijedi sljedeće:

Ako su  $(X, p)$  i  $(Y, q)$  metrički prostori te  $f : X \rightarrow Y$ , onda je  $f$  neprekidna s obzirom na metrike  $p$  i  $q$  ako i samo ako je  $f$  neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}_p$  i  $\mathcal{T}_q$ .

**Definicija 1.2.11.** *Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$ .*

*Za funkciju  $f$  kažemo da je **homeomorfizam** topoloških prostora  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  ako je  $f$  bijekcija,  $f$  neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ , te  $f^{-1}$  neprekidna s obzirom na  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{T}$ .*

*Za topološke prostore  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  kažemo da su **homeomorfni** ako postoji homeomorfizam topoloških prostora  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$ .*

*U tom slučaju pišemo:  $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$ .*

**Primjer 1.2.12.**

(1) Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor. Tada je funkcija  $id : X \rightarrow X$  neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{T}$ .

(2) Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori, neka je  $y_0 \in Y$ , te neka je  $f : X \rightarrow Y$  funkcija definirana sa  $f(x) = y_0, \forall x \in X$ . Tada je  $f$  neprekidna funkcija s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .

Uočimo da iz prethodnog primjera možemo zaključiti sljedeće:

(1) Ako je  $(X, p)$  metrički prostor onda je  $id : X \rightarrow X$  neprekidna s obzirom na  $p$  i  $p$ .

(2) Ako su  $(X, p)$  i  $(Y, q)$  metrički prostori,  $y_0 \in Y$ , te  $f : X \rightarrow Y$  funkcija definirana sa  $f(x) = y_0, \forall x \in X$ , onda je  $f$  neprekidna s obzirom na metrike  $p$  i  $q$ .

**Definicija 1.2.13.**

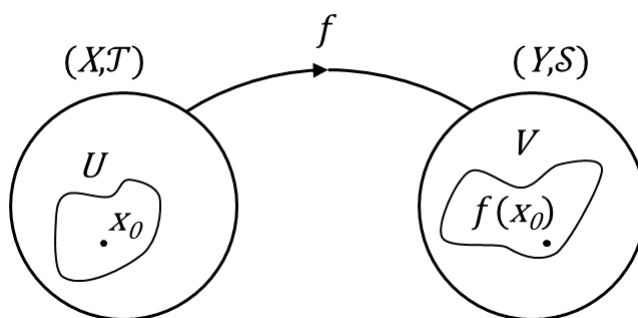
*Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor. Za skup  $U \subseteq X$  kažemo da je **otvoren u topološkom prostoru**  $(X, \mathcal{T})$  ako je  $U \in \mathcal{T}$ .*

*Neka je  $x \in X$  te  $U \subseteq X$ . Za  $U$  kažemo da je **otvorena okolina točke**  $x$  (u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T})$ ) ako je  $x \in U$  i  $U \in \mathcal{T}$ .*

**Definicija 1.2.14.**

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori, neka je  $f : X \rightarrow Y$ , te neka je  $x_0 \in X$ .

Za funkciju  $f$  kažemo da je **neprekidna u točki  $x_0$  s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$**  ako za svaku otvorenu okolinu  $V$  točke  $f(x_0)$  u  $(Y, \mathcal{S})$  postoji otvorena okolina  $U$  točke  $x_0$  u  $(X, \mathcal{T})$  takva da  $f(U) \subseteq V$ .

**Propozicija 1.2.15.**

Neka su  $(X, p)$  i  $(Y, q)$  metrički prostori, neka je  $f : X \rightarrow Y$ , te neka je  $x_0 \in X$ .

Tada je funkcija  $f$  neprekidna u  $x_0$  s obzirom na metrike  $p$  i  $q$  ako i samo ako je  $f$  neprekidna u  $x_0$  s obzirom na topologije  $\mathcal{T}_p$  i  $\mathcal{T}_q$ .

Dokaz.

$\Rightarrow$

Pretpostavimo da je  $f$  neprekidna u  $x_0$  s obzirom na  $p$  i  $q$ . Neka je  $V$  otvorena okolina točke  $f(x_0)$  u  $(Y, \mathcal{T}_q)$ , tada je  $V$  otvoren skup u metričkom prostoru  $(Y, q)$  koji sadrži  $f(x_0)$ .

Stoga postoji  $\epsilon > 0$  takav da je  $K(f(x_0), \epsilon) \subseteq V$ .

Budući da je  $f$  neprekidna u  $x_0$  s obzirom na  $p$  i  $q$ , postoji  $\delta > 0$  takav da je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon).$$

Slijedi da je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq V.$$

No,  $K(x_0, \delta)$  je otvorena okolina točke  $x_0$  u  $(X, \mathcal{T}_p)$ .

Zaključak,  $f$  je neprekidna u  $x_0$  s obzirom na topologije  $\mathcal{T}_p$  i  $\mathcal{T}_q$ .

$\Leftarrow$

Pretpostavimo sada da je  $f$  neprekidna u  $x_0$  s obzirom na topologije  $\mathcal{T}_p$  i  $\mathcal{T}_q$ . Neka je  $\epsilon > 0$ . Tada je  $K(f(x_0), \epsilon)$  otvorena okolina točke  $f(x_0)$  u  $(Y, \mathcal{T}_q)$ .



Budući da je  $f$  neprekidna u  $x_0$  s obzirom na topologije  $\mathcal{T}_p$  i  $\mathcal{T}_q$ , postoji otvorena okolina  $U$  točke  $x_0$  u  $(X, \mathcal{T}_p)$  takva da je

$$f(U) \subseteq K(f(x_0), \epsilon).$$

Tada je  $U$  otvoreni skup u  $(X, p)$  koji sadrži  $x_0$ , pa postoji  $\delta > 0$  takav da vrijedi  $K(x_0, \delta) \subseteq U$ .

Tada je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq f(U),$$

pa slijedi da je  $f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon)$ .

Iz ovoga zaključujemo da je  $f$  neprekidna s obzirom na metrike  $p$  i  $q$ . □

**Lema 1.2.16.**

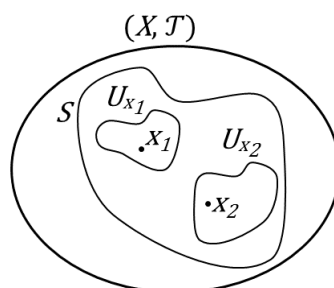
Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor te neka je  $S \subseteq X$  skup koji ima sljedeće svojstvo:

$$\forall x \in S \exists U \in \mathcal{T} \text{ takav da je } x \in U \subseteq S.$$

Tada je  $S \in \mathcal{T}$ .

*Dokaz.*

Za  $x \in S$  neka je  $U_x \in \mathcal{T}$  takav da je  $x \in U_x \subseteq S$ . Tada je  $S = \bigcup_{x \in S} U_x$ .



Naime,  $\bigcup_{x \in S} U_x \subseteq S$  jer je  $U_x \subseteq S, \forall x \in S$ .

S druge strane,  $S \subseteq \bigcup_{x \in S} U_x$  jer za svaki  $x \in S$  vrijedi da je  $x \in U_x$ .

Budući da je  $\bigcup_{x \in S} U_x \in \mathcal{T}$  imamo i da je  $S \in \mathcal{T}$ . □

**Propozicija 1.2.17.**

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te  $f : X \rightarrow Y$  funkcija.

Tada je funkcija  $f$  neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$  ako i samo ako je  $f$  neprekidna u  $x_0$  s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$  za svaki  $x_0 \in X$ .

*Dokaz.*

⇒

Pretpostavimo da je  $f$  neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .

Neka je  $x_0 \in X$ . Neka je  $V$  otvorena okolina od  $f(x_0)$  u  $(Y, \mathcal{S})$ . Neka je  $U = f^{-1}(V)$ . Iz  $V \in \mathcal{S}$  slijedi da  $U \in \mathcal{T}$ , a iz  $f(x_0) \in V$  slijedi  $x_0 \in U$ .

Dakle,  $U$  je otvorena okolina točke  $x_0$  u  $(X, \mathcal{T})$ , pa vrijedi

$$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V.$$

Zaključak:  $f$  je neprekidna u točki  $x_0$  s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .

⇐

Pretpostavimo sada da je  $f$  neprekidna u  $x_0$  s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$  za svaki  $x_0 \in X$ .

Neka je  $V \in \mathcal{S}$ . Dokažimo da je  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ .

Neka je  $x \in f^{-1}(V)$ . Tada je  $f(x) \in V$ , što znači da je  $V$  otvorena okolina točke  $f(x)$  u  $(Y, \mathcal{S})$ . Budući da je  $f$  neprekidna u točki  $x$  s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ , tada postoji otvorena okolina  $U$  točke  $x$  u  $(X, \mathcal{T})$  takva da je

$$f(U) \subseteq V.$$

Iz ovoga slijedi da je  $U \subseteq f^{-1}(V)$ .

Zaključak: Za svaki  $x \in f^{-1}(V)$  postoji  $U \in \mathcal{T}$  takav da je

$$x \in U \subseteq f^{-1}(V).$$

Iz leme 1.2.16 slijedi da je  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ .

Dakle,  $f$  je neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ . □

## Poglavlje 2

# Kvocijentni prostori

Da bismo precizno definirali kvocijentne prostore, krenimo od kvocijenta preslikavanja.

### 2.1 Kvocijento preslikavanje

#### Definicija 2.1.1.

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor. Neka je  $\mathcal{F}$  particija skupa  $X$ . Tada očito za svaki  $x \in X$  postoji jedinstveni element od  $\mathcal{F}$  koji sadrži  $x$ .

Neka je  $q : X \rightarrow \mathcal{F}$  funkcija koja svakom  $x \in X$  pridružuje upravo onaj element od  $\mathcal{F}$  koji sadrži  $x$ .

Za  $q$  kažemo da je **kvocijento preslikavanje** (pridruženo particiji  $\mathcal{F}$ ).  
Uočimo da je  $q$  surjektivna.

Neka je  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$  familija svih  $U \subseteq \mathcal{F}$  takvih sa je  $q^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ . Tada je  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$  topologija na  $\mathcal{F}$ . Dokažimo to.

Imamo  $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset, q^{-1}(\mathcal{F}) = X$ , pa su  $\emptyset, \mathcal{F}$  elementi od  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ . Neka je  $(U_{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}}$  indeksirana familija elemenata od  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ .

Želimo dokazati da je

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}.$$

Jasno je da je

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_{\alpha} \subseteq \mathcal{F}.$$

Imamo

$$q^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} q^{-1}(U_{\alpha}),$$

a  $q^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T} \forall \alpha \in A$ , pa je stoga

$$\bigcup_{\alpha \in A} q^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T},$$

dakle  $q^{-1}(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \in \mathcal{T}$ . Prema tome  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ .

Neka su  $U, V \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ . Jasno je da je  $U \cap V \subseteq \mathcal{F}$ .

Vrijedi

$$q^{-1}(U \cap V) = q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V),$$

a  $q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \in \mathcal{T}$  jer su  $q^{-1}(U)$  i  $q^{-1}(V)$  elementi od  $\mathcal{T}$ .

Dakle,  $q^{-1}(U \cap V) \in \mathcal{T}$ . Prema tome  $U \cap V \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ .

Zaključak,  $\mathcal{T}_\mathcal{F}$  je topologija na skupu  $\mathcal{F}$ .

Za  $\mathcal{T}_\mathcal{F}$  kažemo da je *kvocijentna topologija na  $\mathcal{F}$  određena s  $\mathcal{T}$* .

Za  $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_\mathcal{F})$  kažemo da je *kvocijentni prostor od prostora  $(X, \mathcal{T})$  određen particijom  $\mathcal{F}$* .

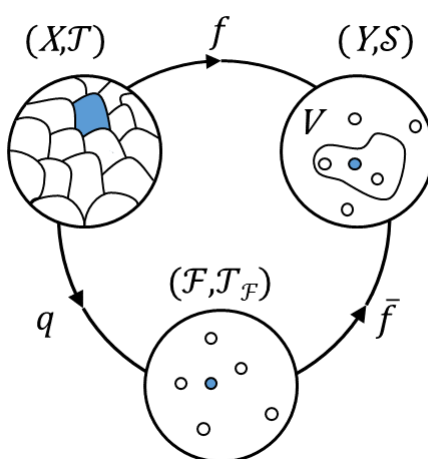
Uočimo da je funkcija  $q : X \rightarrow \mathcal{F}$  neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ .

**Propozicija 2.1.2.**

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor,  $\mathcal{F}$  particija od  $X$ ,  $q : X \rightarrow \mathcal{F}$  kvocijentno preslikavanje te neka je  $\mathcal{T}_\mathcal{F}$  kvocijentna topologija na  $\mathcal{F}$ . Nadalje, neka je  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostor te  $f : X \rightarrow Y$  funkcija neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$  koja je konstantna na svakom članu od  $\mathcal{F}$  (to jest, za svaki  $A \in \mathcal{F}$  i sve  $x, y \in A$  vrijedi  $f(x) = f(y)$ ).

Definirajmo  $\bar{f} : \mathcal{F} \rightarrow Y$  sa  $\bar{f}(A) = f(x)$ , gdje je  $x \in A, A \in \mathcal{F}$ .

Tada je  $\bar{f}$  neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}_\mathcal{F}$  i  $\mathcal{S}$ .



*Dokaz.*

Iz definicije  $\bar{f}$  slijedi da je  $\bar{f} \circ q = f$ .

Neka je  $V \in \mathcal{S}$ . Tada je

$$f^{-1}(V) = (\bar{f} \circ q)^{-1}(V) = q^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)),$$

no budući da je  $f$  neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ , imamo da je  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ . To znači da je  $q^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) \in \mathcal{T}$ .

Iz definicije topologije  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$  slijedi da je  $\bar{f}^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ .

Dakle, za svaki  $V \in \mathcal{S}$  vrijedi da je  $\bar{f}^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ .

Prema tome,  $\bar{f}$  je neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$  i  $\mathcal{S}$ . □

**Napomena 2.1.3.** *Ako je  $X$  skup i  $\sim$  relacija ekvivalencije na  $X$ , onda je skup  $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$  particija od  $X$ . Stoga, ako je  $\mathcal{T}$  topologija na  $X$ , na  $X/\sim$  imamo kvocijentnu topologiju određenu sa  $\mathcal{T}$ .*

**Definicija 2.1.4.** *Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna funkcija. Neka je  $X/f = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$ . Tada je  $X/f$  particija od  $X$ .*

Naime, jasno je da je svaki element od  $X/f$  neprazan skup te da je svaki  $x \in X$  u nekom članu od  $X/f$  ( $x \in f^{-1}\{f(x)\}$ ). Nadalje, ako su  $y_1, y_2 \in Y$  te ako je  $f^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\} \neq \emptyset$  onda

$$\exists x \in f^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\},$$

pa je  $x \in f^{-1}\{y_1\}$  i  $x \in f^{-1}\{y_2\}$ , što povlači  $f(x) = y_1$  i  $f(x) = y_2$ , dakle  $y_1 = y_2$ , to jest

$$f^{-1}\{y_1\} = f^{-1}\{y_2\}.$$

Označimo sa  $\mathcal{T}_f$  kvocijentnu topologiju na  $X/f$  određenu topologijom  $\mathcal{T}$ .

Uočimo da je funkcija  $f$  konstantna na svakom članu od  $X/f$ .

Neka je  $\bar{f} : X/f \rightarrow Y$  definirana sa  $\bar{f}(A) = f(x)$ , gdje je  $x \in A, A \in X/f$ . Tada je prema propoziciji 2.1.2,  $\bar{f}$  neprekidna funkcija s obzirom na topologije  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ .

Tvrdimo da je  $\bar{f}$  injekcija.

Neka su  $A, B \in X/f$  takvi da je  $A \neq B$ . Imamo

$$A = f^{-1}\{y_1\}, B = f^{-1}\{y_2\},$$

gdje su  $y_1, y_2 \in Y$  takvi da je  $y_1 \neq y_2$ .

Tada je  $\bar{f}(A) = y_1, \bar{f}(B) = y_2$ .

Dakle,  $\bar{f}(A) \neq \bar{f}(B)$ .

Ovime smo pokazali da je  $\bar{f}$  injekcija.

Nadalje, uočimo da je  $\text{Im}(f) = \text{Im}(\bar{f})$ . Stoga imamo sljedeći zaključak:

Ako je  $f$  surjekcija,  $\bar{f} : X/f \rightarrow Y$  je neprekidna bijekcija.

Općenito, neprekidna bijekcija između dva topološka prostora ne mora biti homeomorfizam, to jest njena inverzna funkcija ne mora biti neprekidna.

**Primjer 2.1.5.**

Neka je  $X$  neprazan skup, neka je  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  te neka je  $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$ . Neka je  $f : X \rightarrow X$  identiteta, to jest funkcija definirana sa  $f(x) = x, \forall x \in X$ .

Tada je  $f$  neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ , to jest  $f$  je neprekidna funkcija iz topološkog prostora  $(X, \mathcal{T})$  u  $(X, \mathcal{S})$ .

Jasno je da je  $f$  bijekcija te da je  $f^{-1} = f$ , no  $f$  nije neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{T}$  (to jest,  $f^{-1}$  nije neprekidna funkcija iz topološkog prostora  $(X, \mathcal{S})$  u  $(X, \mathcal{T})$ ) ako  $X$  ima barem 2 elementa.

**Definicija 2.1.6.** Neka su  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  funkcija. Za  $f$  kažemo da je **otvoreno preslikavanje** (s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ ) ako za svaki  $U \in \mathcal{T}$  vrijedi  $f(U) \in \mathcal{S}$ .

**Primjer 2.1.7.**

Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa  $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

Tada je  $f$  neprekidna funkcija (na  $\mathbb{R}$  promatramo euklidsku topologiju  $\mathcal{E}$ ). No,  $f$  nije otvoreno preslikavanje. Naime,  $\mathbb{R} \in \mathcal{E}$ , no  $f(\mathbb{R}) \notin \mathcal{E}$  jer je  $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ .

**Propozicija 2.1.8.** Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  bijekcija neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .

Tada je  $f$  homeomorfizam ako i samo ako je  $f$  otvoreno preslikavanje.

*Dokaz.* Neka je  $S \subseteq X$ .

Tada je praslika od  $S$  pri funkciji  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ , to jest  $(f^{-1})^{-1}(S)$ , jednaka slici skupa  $S$  pri funkciji  $f$ , to jest  $f(S)$ .

Posebno, za svaki  $U \in \mathcal{T}$  vrijedi

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \quad (2.1)$$

Pretpostavimo da je  $f$  homeomorfizam. Tada je  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  neprekidna funkcija s obzirom na  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{T}$ , pa za svaki  $U \in \mathcal{T}$  vrijedi

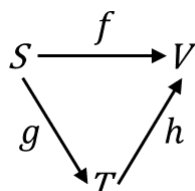
$$(f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{S}.$$

Iz (2.1) zaključujemo da je  $f$  otvoreno preslikavanje.

Obratno, ako je  $f$  otvoreno preslikavanje, onda iz (2.1) zaključujemo da je  $f^{-1}$  neprekidna s obzirom na  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$ , dakle  $f$  je homeomorfizam.  $\square$

**Lema 2.1.9.** *Neka su  $S, T$  i  $V$  skupovi te neka su  $g : S \rightarrow T$  i  $h : T \rightarrow V$  funkcije pri čemu je  $g$  surjekcija. Neka je  $f = h \circ g$ .*

*Neka je  $W \subseteq T$ . Tada je  $h(W) = f(g^{-1}(W))$ .*



*Dokaz.*

Neka je  $y \in h(W)$ . Tada postoji  $z \in W$  takav da je  $h(z) = y$ . Budući da je  $g$  surjekcija, postoji  $x \in S$  takav da  $g(x) = z$ . Imamo  $g(x) \in W$ , pa je  $x \in g^{-1}(W)$ .

Imamo

$$y = h(z) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) = f(x).$$

Dakle,  $y = f(x)$  i  $x \in g^{-1}(W)$ . Prema tome

$$y \in f(g^{-1}(W)).$$

Obratno, pretpostavimo da je  $y \in f(g^{-1}(W))$ . Tada postoji  $x \in g^{-1}(W)$  takav da  $f(x) = y$ .

Imamo

$$y = f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)).$$

Budući da je  $x \in g^{-1}(W)$ , imamo  $g(x) \in W$ . Sada je  $y = h(g(x))$ .

Zaključujemo  $y \in h(W)$ . □

**Propozicija 2.1.10.** *Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna funkcija s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ , te ujedno otvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .*

*Tada je  $\bar{f} : X/f \rightarrow Y$  otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ .*

*Dokaz.* Neka je  $q : X \rightarrow X/f$  kvocijentno preslikavanje.

Tada je  $f = \bar{f} \circ q$ .

Želimo pokazati da je  $\bar{f}$  otvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ .

Neka je  $U \in \mathcal{T}_f$ . Budući da je  $q$  surjekcija, prema lemi 2.1.9 imamo

$$\bar{f}(U) = f(q^{-1}(U)).$$

Iz  $U \in \mathcal{T}_f$  slijedi

$$q^{-1}(U) \in \mathcal{T},$$

pa je

$$f(q^{-1}(U)) \in \mathcal{S}$$

jer je  $f$  otvoreno preslikavanje. Dakle,  $\bar{f}(U) \in \mathcal{S}$ .

Zaključak,  $\bar{f}$  je otvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ .  $\square$

### Korolar 2.1.11.

*Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna surjektivna koja je otvoreno preslikavanje.*

*Tada je  $\bar{f} : X/f \rightarrow Y$  homeomorfizam (s obzirom na  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ ).*

*Dokaz.* Znamo da je  $\bar{f}$  neprekidna bijekcija. Iz prethodne propozicije slijedi da je  $\bar{f}$  otvoreno preslikavanje.

Iz propozicije 2.1.8 slijedi da je  $\bar{f}$  homeomorfizam.  $\square$

## 2.2 Kvocijentna topologija

**Definicija 2.2.1.** *Neka je  $X$  skup te neka je  $\mathcal{T}$  topologija na  $X$ . Neka je  $\mathcal{B}$  familija podskupova od  $X$  takva da vrijedi sljedeće:*

(1)  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$

(2) Svaki neprazan element od  $\mathcal{T}$  se može napisati kao unija nekih elemenata od  $\mathcal{B}$ , to jest ako je  $U \in \mathcal{T}$ ,  $U \neq \emptyset$ , onda postoji indeksirana familija  $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  elemenata od  $\mathcal{B}$  takva da je  $U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$ .

*Tada za  $\mathcal{B}$  kažemo da je baza topologije  $\mathcal{T}$ .*

### Propozicija 2.2.2.

*Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor te neka je  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ .*

*Tada je  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}$  ako i samo ako za svaki  $U \in \mathcal{T}$  i svaki  $x \in U$  postoji  $B \in \mathcal{B}$  takav da je  $x \in B \subseteq U$ .*

*Dokaz.*

Pretpostavimo da je  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}$ . Neka je  $U \in \mathcal{T}$  te  $x \in U$ .

Tada je  $U$  neprazan skup, pa postoji indeksirana familija  $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  elemenata od  $\mathcal{B}$  takva da je

$$U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha.$$



Iz  $x \in U$  slijedi da postoji  $\alpha \in \mathcal{A}$  takav da  $x \in B_\alpha$ .

Očito vrijedi da je  $B_\alpha \subseteq U$ . Dakle,  $x \in B_\alpha \subseteq U$  i  $B_\alpha \in \mathcal{B}$ .

Obratno, pretpostavimo da za svaki  $U \in \mathcal{T}$  i svaki  $x \in U$  postoji  $B \in \mathcal{B}$  takav da je

$$x \in B \subseteq U.$$

Dokažimo da je  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}$ .

Prema pretpostavci propozicije, imamo  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ . Neka je  $U \in \mathcal{T}$ ,  $U \neq \emptyset$ .

Za svaki  $x \in U$  postoji  $B_x \in \mathcal{B}$  takav da je

$$x \in B_x \subseteq U.$$

Imamo indeksiranu familiju  $(B_x)_{x \in U}$  elemenata od  $\mathcal{B}$  i vrijedi

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Zaključak:  $\mathcal{B}$  je baza topologije  $\mathcal{T}$ . □

**Primjer 2.2.3.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor. Neka je  $\mathcal{B} = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$ .

Tada je  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}_d$ .

Naime, iz propozicije 1.1.8 slijedi da je  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$ .

S druge strane, ako je  $U \in \mathcal{T}_d$ , onda je  $U$  otvoren skup u  $(X, d)$ , pa ako je  $x \in U$  onda postoji  $r > 0$  takav da je

$$K(x, r) \subseteq U.$$

Jasno,  $x \in K(x, r)$ .

Dakle, postoji  $B \in \mathcal{B}$  takav da je  $x \in B \subseteq U$ .

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da je  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}_d$ .

**Napomena 2.2.4.** Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $U \subseteq X$ ,  $U \neq \emptyset$ .

Tada iz prethodnog primjera slijedi da je  $U$  otvoren skup u  $(X, d)$  ako i samo ako je  $U$  unija nekih otvorenih kugli.

**Primjer 2.2.5.** Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor. Tada je  $\mathcal{T}$  baza topologije  $\mathcal{T}$ .

**Propozicija 2.2.6.**

Neka je  $X$  neprazan skup te neka je  $\mathcal{B}$  familija podskupova od  $X$  takva da vrijedi sljedeće:

$$(1) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

(2) Ako su  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  te ako je  $x \in B_1 \cap B_2$  onda postoji  $B_3 \in \mathcal{B}$  takav da je  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

Tada postoji jedinstvena topologija  $\mathcal{T}$  na  $X$  takva da je  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}$ .

*Dokaz.*

Dokažimo prvo da takva topologija mora biti jedinstvena.

Pretpostavimo da su  $\mathcal{T}_1$  i  $\mathcal{T}_2$  topologije na  $X$  kojima je  $\mathcal{B}$  baza. Neka je  $U \in \mathcal{T}_1$ . Ako je  $U = \emptyset$  onda je  $U \in \mathcal{T}_2$ .

Pretpostavimo da je  $U \neq \emptyset$ . Tada postoji indeksirana familija  $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  elemenata iz  $\mathcal{B}$  takva da je  $U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$ . No, budući da je  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}_2$ , vrijedi  $B_\alpha \in \mathcal{T}_2$  za svaki  $\alpha \in \mathcal{A}$ , pa je stoga  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha \in \mathcal{T}_2$ . Dakle,  $U \in \mathcal{T}_2$ .

Prema tome,  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ . Analogno,  $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ , dakle  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ .

Dokažimo sada da postoji topologija na  $X$  kojoj je  $\mathcal{B}$  baza.

Neka je  $\mathcal{T}$  familija svih podskupova  $U$  od  $X$  koji imaju sljedeće svojstvo:

$$\forall x \in U \exists B \in \mathcal{B} \text{ takav da je } x \in B \subseteq U$$

Dokažimo sada da je  $\mathcal{T}$  topologija na  $X$  te da je  $\mathcal{B}$  njena baza.

Očito  $\emptyset \in \mathcal{T}$ . Neka je  $x \in X$ . Iz svojstva (1) slijedi da postoji  $B \in \mathcal{B}$  takav da je  $x \in B \subseteq X$ . Stoga je  $X \in \mathcal{T}$ . Neka je  $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  indeksirana familija elemenata od  $\mathcal{T}$ . Želimo dokazati da je unija  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$ . Neka je  $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ . Tada postoji  $\alpha_0 \in \mathcal{A}$  takav da je  $x \in U_{\alpha_0}$ .

Budući da je  $U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$ , postoji  $B \in \mathcal{B}$  takav da  $x \in B \subseteq U_{\alpha_0}$ .

Stoga je  $x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ .

Zaključak:  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$

Neka je  $U, V \in \mathcal{T}$ . Dokažimo da je  $U \cap V \in \mathcal{T}$ .

Neka je  $x \in U \cap V$ . Tada je  $x \in U$  i  $x \in V$ . Stoga postoje  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  takvi da je  $x \in B_1 \subseteq U$  i  $x \in B_2 \subseteq V$ . Iz ovoga slijedi  $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$ .

Prema svojstvu (2) postoji  $B_3 \in \mathcal{B}$  takav da je  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ , iz čega slijedi da je  $x \in B_3 \subseteq U \cap V$ .

Zaključak:  $U \cap V \in \mathcal{T}$ .

Ovim smo dokazali da je  $\mathcal{T}$  topologija  $X$ .

Iz definicije od  $\mathcal{T}$  je očito da je  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ . Nadalje, ako je  $U \in \mathcal{T}$  i  $x \in U$  onda postoji  $B \in \mathcal{B}$  takav da je  $x \in B \subseteq U$ .

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da je  $\mathcal{B}$  baza topologije  $\mathcal{T}$ .  $\square$

### Definicija 2.2.7.

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori. Neka je

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$$

Tada je, očito,  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y$ , naime  $X \times Y \in \mathcal{B}$ .

Neka su  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  te neka je  $a \in B_1 \cap B_2$ .

Tada je  $B_1 = U_1 \times V_1, B_2 = U_2 \times V_2$ , gdje su  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}, V_1, V_2 \in \mathcal{S}$ .

Stoga je  $B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ .

Jasno je da je

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}, V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S},$$

pa slijedi da je  $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ .

Neka je  $B_3 = B_1 \cap B_2$ . Imamo, dakle,  $B_3 \in \mathcal{B}$  i  $a \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

Iz propozicije 2.2.6 slijedi da postoji jedinstvena topologija  $\mathcal{R}$  na  $X \times Y$  takva da je  $\mathcal{B}$  baza od  $\mathcal{R}$ .

Za  $\mathcal{R}$  kažemo da je **produktna topologija** na  $X \times Y$  određena topologijama  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ , a za topološki prostor  $(X \times Y, \mathcal{R})$  da je **produkt prostora**  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$ .

### Propozicija 2.2.8.

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $(X \times Y, \mathcal{R})$  njihov produkt. Neka je  $W \subseteq X \times Y$ .

Tada je  $W \in \mathcal{R}$  ako i samo ako za sve  $x \in X$  i  $y \in Y$  takve da je  $(x, y) \in W$  postoje  $U \in \mathcal{T}$  i  $V \in \mathcal{S}$  takvi da je  $(x, y) \in U \times V \subseteq W$ .

*Dokaz.* Neka je  $W \in \mathcal{R}$ . Neka su  $x \in X, y \in Y$  takvi da je  $(x, y) \in W$ .

Iz propozicije 2.2.2 slijedi da postoje  $U \in \mathcal{T}$  i  $V \in \mathcal{S}$  takvi da vrijedi  $(x, y) \in U \times V \subseteq W$ .

Obratno, pretpostavimo da je  $W \subseteq X \times Y$  te da za sve  $x \in X, y \in Y$  takve da je  $(x, y) \in W$  postoje  $U \in \mathcal{T}$  i  $V \in \mathcal{S}$  sa svojstvom  $(x, y) \in U \times V \subseteq W$ .

Uočimo da za sve  $U \in \mathcal{T}$  i  $V \in \mathcal{S}$  vrijedi  $U \times V \in \mathcal{R}$ . Iz ovoga zaključujemo da za svaki  $z \in W$  postoji  $Q \in \mathcal{R}$  takav da je  $z \in Q \subseteq W$ . Iz leme 1.2.16 slijedi  $W \in \mathcal{R}$ .  $\square$

**Propozicija 2.2.9.**

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $(X \times Y, \mathcal{R})$  njihov produkt. Neka je  $p : X \times Y \rightarrow X$  projekcija na prvu koordinatu, a  $q : X \times Y \rightarrow Y$  projekcija na drugu koordinatu, to jest

$$p(x, y) = x, \quad q(x, y) = y \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Tada je  $p$  neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{T}$ , a  $q$  je neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{S}$ .

*Dokaz.* Neka je  $U \in \mathcal{T}$ . Tada je  $p^{-1}(U) = U \times Y$ , pa slijedi (budući da je  $Y \in \mathcal{S}$ ) da je  $p^{-1}(U) \in \mathcal{R}$ . Dakle,  $p$  je neprekidna s obzirom na  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{T}$ . Analogno dokazujemo da je  $q$  neprekidna s obzirom na  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Propozicija 2.2.10.**

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $(X \times Y, \mathcal{R})$  njihov produkt. Neka su  $p : X \times Y \rightarrow X$  i  $q : X \times Y \rightarrow Y$  projekcije.

Tada je  $p$  otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{T}$ , a  $q$  otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{S}$ .

*Dokaz.* Neka je  $W \in \mathcal{R}$ . Želimo dokazati da je  $p(W) \in \mathcal{T}$ .

Ako je  $W = \emptyset$  onda je tvrdnja jasna.

Pretpostavimo sada da je  $W \neq \emptyset$ .

Neka je  $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$ . Tada postoji indeksirana familija  $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  elemenata iz  $\mathcal{B}$  takva da je  $W = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$ . Za svaki  $\alpha \in \mathcal{A}$  postoje  $U_\alpha \in \mathcal{T}$  i  $V_\alpha \in \mathcal{S}$  takvi da je  $B_\alpha = U_\alpha \times V_\alpha$  i pri tome uzimamo  $U_\alpha = V_\alpha = \emptyset$  ako je  $B_\alpha = \emptyset$ .

Tada je  $p(B_\alpha) = p(U_\alpha \times V_\alpha) = U_\alpha$ , pa slijedi

$$p(W) = p\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} p(B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha.$$

Dakle,  $p(W) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$  iz čega slijedi  $p(W) \in \mathcal{T}$ .

Zaključak:  $p$  je otvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{T}$ .

Analogno dobivamo da je  $q$  otvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Uočimo sljedeće:

Ako su  $X$  i  $Y$  neprazni skupovi, onda je  $\{\{x\} \times Y \mid x \in X\}$  particija skupa  $X \times Y$ .

**Teorem 2.2.11.**

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $(X \times Y, \mathcal{R})$  njihov produkt. Neka je  $\mathcal{F} = \{\{x\} \times Y \mid x \in X\}$  te neka je  $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$  kvocijenta topologija na  $\mathcal{F}$  određena s  $\mathcal{R}$ .

Tada su topološki prostori  $(\mathcal{F}, \mathcal{R}_{\mathcal{F}})$  i  $(X, \mathcal{T})$  homeomorfni. Pri tome je homeomorfizam  $f : \mathcal{F} \rightarrow X$  dan sa  $f(\{x\} \times Y) = x$ .

*Dokaz.* Neka je  $p : X \rightarrow Y$  projekcija na prvu koordinatu. Tada je  $p$  očito surjekcija.

Nadalje,  $p$  je neprekidna funkcija s obzirom na  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{T}$  (propozicija 2.2.9), a prema propoziciji 2.2.10 imamo da je  $p$  otvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{T}$ . Iz korolara 2.1.11 slijedi da je  $\bar{p} : (X \times Y)/p \rightarrow X$  homeomorfizam s obzirom na  $\mathcal{R}_p$  i  $\mathcal{T}$ .

Prema definiciji skupa  $(X \times Y)/p$  imamo

$$(X \times Y)/p = \{p^{-1}(\{x\}) \mid x \in X\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\} \times Y \mid x \in X\} = \mathcal{F}$$

Po definiciji,  $\mathcal{R}_p$  je kvocijentna topologija na  $(X \times Y)/p$  određena s  $\mathcal{R}$ , dakle to je kvocijentna topologija na  $\mathcal{F}$  određena s  $\mathcal{R}$ , to jest  $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ .

Zaključak:  $\bar{p} : \mathcal{F} \rightarrow X$  je homeomorfizam s obzirom na  $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$  i  $\mathcal{T}$ .

Uočimo da za svaki  $x \in X$  vrijedi

$$\bar{p}(\{x\} \times Y) = p(x, y),$$

gdje je  $y$  proizvoljni element od  $Y$ . Stoga je  $\bar{p}(\{x\} \times Y) = x, \forall x \in X$ . □

Analogno dokazujemo sljedeći teorem.

**Teorem 2.2.12.**

*Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $(X \times Y, \mathcal{R})$  njihov produkt.*

*Neka je  $\mathcal{G} = \{X \times \{y\} \mid y \in Y\}$  te neka je  $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$  kvocijentna topologija na  $\mathcal{G}$  određena s  $\mathcal{R}$ .*

*Tada su topološki prostori  $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_{\mathcal{G}})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  homeomorfni. Pri tome je homeomorfizam  $g : \mathcal{G} \rightarrow Y$  dan sa  $g(X \times \{y\}) = y$ .* □

**Definicija 2.2.13.** *Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor te neka je  $F \subseteq X$ . Kažemo da je  $F$  zatvoren skup u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T})$  ako je  $F^C$  otvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ , to jest ako je  $F^C \in \mathcal{T}$ .*

**Propozicija 2.2.14.**

*Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$ .*

*Tada je  $f$  neprekidna funkcija s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$  ako i samo ako je  $f^{-1}(F)$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$  za svaki zatvoren skup  $F$  u  $(Y, \mathcal{S})$ .*

*Dokaz.* Neka je  $F \subseteq Y$ . Tvrdimo da je

$$(f^{-1}(F))^C = f^{-1}(F^C) \tag{2.2}$$

Ako je  $x \in (f^{-1}(F))^C$ , onda je  $x \in X$  i  $x \notin f^{-1}(F)$ , pa  $f(x) \notin F$  to jest  $f(x) \in F^C$  iz čega slijedi  $x \in f^{-1}(F^C)$ .

Obratno, ako je  $x \in f^{-1}(F^c)$ , onda je  $x \in X$  i  $f(x) \in F^c$ , pa  $f(x) \notin F$ , to jest  $x \notin f^{-1}(F)$ , dakle  $x \in (f^{-1}(F))^c$ .

Dakle, (2.2) vrijedi.

Pretpostavimo da je  $f$  neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .

Neka je  $F$  zatvoren skup u  $(Y, \mathcal{S})$ . Tada je  $F^c$  otvoren u  $(Y, \mathcal{S})$ , pa je  $f^{-1}(F^c)$  otvoren u  $(X, \mathcal{T})$ . Dakle, prema (2.2) skup  $(f^{-1}(F))^c$  je otvoren u  $(X, \mathcal{T})$ . To znači da je  $f^{-1}(F)$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ .

Pretpostavimo sada da je  $f^{-1}(F)$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$  za svaki zatvoren skup  $F$  u  $(Y, \mathcal{S})$ . Dokažimo da je  $f$  neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .

Neka je  $V \in \mathcal{S}$ . Tada je (prema (2.2))  $(f^{-1}(V))^c = f^{-1}(V^c)$ .

Budući da je  $V \in \mathcal{S}$ , skup  $V^c$  je zatvoren u  $(Y, \mathcal{S})$ , stoga je  $f^{-1}(V^c)$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ . Dakle,  $(f^{-1}(V))^c$  je zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ , pa je  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ .

Dakle,  $f$  je neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ . □

**Definicija 2.2.15.** *Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$ . Kažemo da je  $f$  **zatvoreno preslikavanje** s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$  ako je  $f(A)$  zatvoren skup u  $(Y, \mathcal{S})$  za svaki zatvoren skup  $A$  u  $(X, \mathcal{T})$ .*

**Primjer 2.2.16.** *Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa  $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .*

*U primjeru 2.1.7 smo vidjeli da  $f$  nije otvoreno preslikavanje. No,  $f$  je zatvoreno preslikavanje. Naime, ako je  $A \subseteq \mathbb{R}$  onda je  $f(A) = \{0\}$  ili  $f(A) = \emptyset$ , a  $\{0\}$  i  $\emptyset$  su zatvoreni skupovi u  $\mathbb{R}$ .*

*Dakle, zatvoreno preslikavanje ne mora biti otvoreno.*

**Definicija 2.2.17.** *Neka su  $(X, d)$  i  $(Y, p)$  metrički prostori takvi da je  $Y \subseteq X$  te  $p(a, b) = d(a, b)$  za sve  $a, b \in Y$ .*

*Tada za  $(Y, p)$  kažemo da je **potprostor metričkog prostora**  $(X, d)$ .*

Uočimo sljedeće:

Ako je  $(X, d)$  metrički prostor te  $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset$  onda postoji jedinstvena metrika  $p$  na  $Y$  takva da je  $(Y, p)$  potprostor metričkog prostora  $(X, d)$ .

**Propozicija 2.2.18.**

*Neka je  $(Y, p)$  potprostor metričkog prostora  $(X, d)$ .*

*Ako je  $U$  otvoreni skup u  $(X, d)$ , onda je  $U \cap Y$  otvoren skup u  $(Y, p)$ .*

*Obratno, ako je  $V$  otvoren skup u  $(Y, p)$ , onda postoji otvoreni skup  $U$  u  $(X, d)$  takav da je  $V = U \cap Y$ .*

*Dokaz.*

Uočimo, prije svega, sljedeće: ako su  $y \in Y$  i  $r > 0$  onda je

$$K(y, r; p) = K(y, r; d) \cap Y \quad (2.3)$$

Naime,

$$\begin{aligned} K(y, r; p) &= \{x \in Y \mid p(y, x) < r\} = \{x \in Y \mid d(y, x) < r\} = \\ &= \{x \in X \mid d(y, x) < r\} \cap Y = \\ &= K(y, r; d) \cap Y \end{aligned}$$

Neka je  $U$  otvoren skup u  $(X, d)$ . Dokažimo da je  $U \cap Y$  otvoren skup u  $(Y, p)$ . Neka je  $y \in U \cap Y$ . Tada je  $y \in U$ , pa budući da je  $U$  otvoren u  $(X, d)$  postoji  $r > 0$  takav da je  $K(y, r; d) \subseteq U$ . Iz ovoga slijedi da je  $K(y, r; d) \cap Y \subseteq U \cap Y$ . Iz (2.3) slijedi da je

$$K(y, r; p) \subseteq U \cap Y.$$

Iz ovoga zaključujemo da je  $U \cap Y$  otvoren skup u metričkom prostoru  $(Y, p)$ .

Pretpostavimo da je  $V$  otvoren skup u  $(Y, p)$ . Tada za svaki  $y \in V$  postoji  $r_y > 0$  takav da je  $K(y, r_y; p) \subseteq V$ . Iz ovoga slijedi da je  $V = \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; p)$ .

Neka je  $U = \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; d)$ . Tada je  $U$  otvoren skup u  $(X, d)$  (jer je  $U$  unija otvorenih skupova u  $(X, d)$ ).

Imamo

$$\begin{aligned} U \cap Y &= \left[ \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; d) \right] \cap Y = \\ &= \bigcup_{y \in V} (K(y, r_y; d) \cap Y) = \\ &= \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; p) = V. \end{aligned}$$

Dakle,  $U \cap Y = V$ . □

**Napomena 2.2.19.** Neka je  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $S \neq \emptyset$ . Neka je  $p : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa  $p(x, y) = |x - y|$ ,  $x, y \in S$ . Tada je  $p$  metrika na  $S$  i  $(S, p)$  je potprostor metričkog prostora  $(\mathbb{R}, d)$ , gdje je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}$ .

Za  $p$  kažemo da je **euklidska metrika** na  $S$ .

**Primjer 2.2.20.**

Neka je  $p$  euklidska metrika na  $\langle 0, 1 \rangle$  te neka je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}$ . Neka je  $\mathcal{T}$  topologija na  $\langle 0, 1 \rangle$  inducirana metrikom  $p$  te neka je  $\mathcal{E}$  euklidska topologija na  $\mathbb{R}$ , to jest topologija inducirana metrikom  $d$ .

Neka je  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana sa  $f(x) = x, \forall x \in \langle 0, 1 \rangle$ . Tada je  $f$  neprekidno i otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{E}$ , no  $f$  nije zatvoreno s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{E}$ . Dokažimo to.

Neka je  $V \in \mathcal{E}$ . Tada je  $V$  otvoren skup u  $(\mathbb{R}, d)$ . Imamo

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{x \in \langle 0, 1 \rangle : f(x) \in V\} = \\ &= \{x \in \langle 0, 1 \rangle : x \in V\} = \\ &= \langle 0, 1 \rangle \cap V. \end{aligned}$$

Prema propoziciji 2.2.18, skup  $\langle 0, 1 \rangle \cap V$  je otvoren u  $(\langle 0, 1 \rangle, p)$ , to jest  $\langle 0, 1 \rangle \cap V \in \mathcal{T}$ . Dakle,  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$  za svaki  $V \in \mathcal{E}$ .

Prema tome,  $f$  je neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{E}$ .

Dokažimo da je  $f$  otvoreno preslikavanje. Neka je  $V \in \mathcal{T}$ . Tada je  $V$  otvoreni skup u  $(\langle 0, 1 \rangle, p)$ , pa prema propoziciji 2.2.14, postoji otvoren skup  $U$  u  $(\mathbb{R}, d)$  takav da je

$$V = U \cap \langle 0, 1 \rangle.$$

No,  $\langle 0, 1 \rangle$  je također otvoren skup u  $(\mathbb{R}, d)$ , pa je stoga  $V$  otvoren u  $(\mathbb{R}, d)$ . Prema tome  $V \in \mathcal{E}$ . Uočimo da je  $f(V) = V$ . Dakle, za svaki  $V \in \mathcal{T}$  vrijedi  $f(V) \in \mathcal{E}$ .

Zaključujemo da je  $f$  otvoreno preslikavanje s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{E}$ .

Skup  $\langle 0, 1 \rangle$  je zatvoren u  $(\langle 0, 1 \rangle, \mathcal{T})$ , no  $f(\langle 0, 1 \rangle)$  nije zatvoren u  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ .

Naime,  $f(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 0, 1 \rangle$ , a skup  $\mathbb{R} \setminus \langle 0, 1 \rangle$  nije otvoren u  $(\mathbb{R}, d)$ .

**Propozicija 2.2.21.**

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  bijekcija neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .

Tada je  $F$  homeomorfizam ako i samo ako je  $f$  zatvoreno preslikavanje.

*Dokaz.* Kao u dokazu propozicije 2.1.8 imamo da je

$$(f^{-1})^{-1}(S) = f(S) \quad \text{za svaki } S \subseteq X. \quad (2.1)$$

Pretpostavimo da je  $f$  homeomorfizam. Tada je  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  neprekidna funkcija s obzirom na  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ . Neka je  $F$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ . Prema propoziciji 2.2.14 skup  $(f^{-1})^{-1}(F)$  je zatvoren u  $(Y, \mathcal{S})$ . Dakle,  $f(F)$  je zatvoren u  $(Y, \mathcal{S})$ .

Zaključak:  $f$  je zatvoreno preslikavanje.



Pretpostavimo da je  $f$  zatvoreno preslikavanje. Želimo dokazati da je  $f$  homeomorfizam. U tu svrhu, dovoljno je dokazati da je  $f^{-1}$  neprekidna funkcija s obzirom na  $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ . Prema propoziciji 2.2.14 dovoljno je dokazati da je  $(f^{-1})^{-1}(F)$  zatvoren skup u  $(Y, \mathcal{S})$  za svaki  $F$  koji je zatvoren u  $(X, \mathcal{T})$ . No, to slijedi iz (2.1) i činjenice da je  $f$  zatvoreno preslikavanje.  $\square$

**Propozicija 2.2.22.**

*Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna funkcija s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ , te ujedno otvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .*

*Tada je  $\bar{f} : X/f \rightarrow Y$  zatvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ .*

*Dokaz.*

Neka je  $q : X \rightarrow X/f$  kvocijentno preslikavanje. Tada je  $f = \bar{f} \circ q$ .

Neka je  $F$  zatvoren skup u topološkom prostoru  $(X/f, \mathcal{T}_f)$ . Budući da je  $q$  surjekcija, iz leme 2.1.9 slijedi  $\bar{f}(F) = f(q^{-1}(F))$ .

Funkcija  $q$  je neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ , pa je prema propoziciji 2.2.14,  $q^{-1}(F)$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ . Sada iz činjenice da je  $f$  zatvoreno preslikavanje, slijedi da je  $f(q^{-1}(F))$  zatvoren skup u  $(Y, \mathcal{S})$ . Dakle,  $\bar{f}(F)$  je zatvoren u  $(Y, \mathcal{S})$ .

Zaključak:  $\bar{f}$  je zatvoreno preslikavanje s obzirom na  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Korolar 2.2.23.**

*Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna surjekcija koja je zatvoreno preslikavanje.*

*Tada je  $\bar{f} : X/f \rightarrow Y$  homeomorfizam (s obzirom na  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ ).*

*Dokaz.* Funkcija  $\bar{f}$  je bijekcija te je neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}_f, \mathcal{S}$ . Prema prethodnoj propoziciji 2.2.22,  $\bar{f}$  je zatvoreno preslikavanje. Propozicija 2.2.21 sada povlači da je  $\bar{f}$  homeomorfizam.  $\square$

## 2.3 Kompaktnost

Definirajmo sada kompaktan topološki prostor i kompaktan skup u topološkom prostoru.

**Definicija 2.3.1.** *Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor, te neka je  $\mathcal{U}$  familija otvorenih skupova u  $(X, \mathcal{T})$  (to jest  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ ) čija je unija jednaka  $X$ , to jest  $\bigcup \mathcal{U} = X$ . Tada za  $\mathcal{U}$  kažemo da je **otvoreni pokrivač topološkog prostora**  $(X, \mathcal{T})$ .*

**Definicija 2.3.2.** *Za topološki prostor  $(X, \mathcal{T})$  kažemo da je **kompaktan** ako za svaki otvoreni pokrivač  $\mathcal{U}$  od  $(X, \mathcal{T})$  postoje  $n \in \mathbb{N}$  i  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$  takvi da je  $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ .*

**Primjer 2.3.3.**

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor, pri čemu je  $\mathcal{T}$  konačan skup. Tada je  $(X, \mathcal{T})$  kompaktan topološki prostor.

Naime, ako je  $\mathcal{U}$  otvoreni pokrivač od  $(X, \mathcal{T})$  onda je  $\mathcal{U}$  konačan skup. Posebno, ako je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor takav da je  $X$  konačan skup, onda je  $(X, \mathcal{T})$  kompaktan.

**Primjer 2.3.4.**

Neka je  $X$  beskonačan skup. Tada topološki prostor  $(X, \mathcal{P}(X))$  nije kompaktan.

Naime, neka je  $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ . Tada je  $\mathcal{U}$  otvoreni pokrivač od  $(X, \mathcal{P}(X))$ , no jasno je da ne postoje  $n \in \mathbb{N}$  i  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$  takvi da je  $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ .

**Definicija 2.3.5.** Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor,  $K \subseteq X$  te  $\mathcal{U}$  neprazan podskup od  $\mathcal{T}$ . Za  $\mathcal{U}$  kažemo da je **otvoreni pokrivač skupa**  $K$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T})$  ako je  $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ .

Uočimo da je  $\mathcal{U}$  otvoreni pokrivač topološkog prostora  $(X, \mathcal{T})$  ako i samo ako je  $\mathcal{U}$  otvoreni pokrivač skupa  $X$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T})$ .

**Definicija 2.3.6.** Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor te  $K \subseteq X$ . Za  $K$  kažemo da je **kompaktan skup** u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T})$  ako za svaki otvoreni pokrivač  $\mathcal{U}$  od  $K$  u  $(X, \mathcal{T})$  postoje  $n \in \mathbb{N}$  i  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$  takvi da je  $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$ .

Uočimo sljedeće: Topološki prostor  $(X, \mathcal{T})$  je kompaktan ako i samo ako je  $X$  kompaktan skup u  $(X, \mathcal{T})$ .

**Propozicija 2.3.7.**

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  kompaktan topološki prostor te neka je  $F$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ .

Tada je  $F$  kompaktan skup u  $(X, \mathcal{T})$ .

*Dokaz.* Neka je  $\mathcal{U}$  otvoreni pokrivač od  $F$ . Neka je  $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap \{X \setminus F\}$ .

Jasno je da je  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{T}$ . Nadalje, ako je  $x \in X$  onda je  $x \in F$  ili  $x \in X \setminus F$ .

Ako je  $x \in F$ , onda postoji  $U \in \mathcal{U}$  takav da je  $x \in U$ , dakle  $x$  je sadržan u nekom članu od  $\mathcal{U}'$ , a isto vrijedi u slučaju  $x \in X \setminus F$  jer je  $X \setminus F \in \mathcal{U}'$ .

Zaključak:  $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$ .

Prema tome  $\mathcal{U}'$  je otvoreni pokrivač od  $(X, \mathcal{T})$ . Stoga postoje  $n \in \mathbb{N}$  i  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$  takvi da je

$$X = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup (X \setminus F).$$

Iz ovoga slijedi da je  $F \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$ .

Zaključak:  $F$  je kompaktan skup u  $(X, \mathcal{T})$ . □

Obrat prethodne propozicije općenito ne vrijedi, što pokazuje sljedeći primjer.

**Primjer 2.3.8.** Neka je  $X$  skup koji ima bar 2 elementa. Neka je  $K \subseteq X$  takav da je  $K \neq \emptyset$  i  $K \neq X$ . (Takav skup  $K$  sigurno postoji.)

Tada je  $K$  kompaktan skup u  $(X, \{\emptyset, X\})$  koji nije zatvoren u tom topološkom prostoru.

Naime, topologija  $\{\emptyset, X\}$  je konačan skup, pa je svaki podskup od  $X$  kompaktan u ovom topološkom prostoru, a  $K$  nije zatvoren jer je  $K^C \neq \emptyset$  i  $K^C \neq X$ , to jest  $K^C$  nije otvoren.

**Teorem 2.3.9.**

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  Hausdorffov topološki prostor te neka je  $K$  kompaktan skup u ovom prostoru.

Tada je  $K$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ .

*Dokaz.* Ako je  $K = \emptyset$ , tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo sada da je  $K \neq \emptyset$ . Dokažimo da je  $K^C$  otvoren u  $(X, \mathcal{T})$ .

Neka je  $x \in K^C$ . Tada za svaki  $y \in K$  imamo  $x \neq y$ , pa postoje disjunktni otvoreni skupovi  $U_y$  i  $V_y$  takvi da je  $x \in U_y$  i  $y \in V_y$ . Neka je

$$\mathcal{V} = \{V_y \mid y \in K\}.$$

Tada je  $\mathcal{V}$  otvoreni pokrivač od  $K$  u  $(X, \mathcal{T})$ . Budući da je  $K$  kompaktan skup, postoje  $n \in \mathbb{N}$  i  $y_1, \dots, y_n \in K$  takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}. \quad (2.4)$$

Neka je  $W = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ . Tada je  $W \in \mathcal{T}$ , te je očito  $x \in W$ .

Dokažimo sada da je  $W \subseteq K^C$ .

Neka je  $z \in W$ . Pretpostavimo da je  $z \in K$ .

Iz (2.4) slijedi da je  $z \in V_{y_i}$ , gdje je  $i \in \{1, \dots, n\}$ . No  $z \in W$  povlači da je  $z \in U_{y_i}$ . Ovo je u kontradikciji s činjenicom da su skupovi  $U_{y_i}$  i  $V_{y_i}$  disjunktni. Dakle,  $z \notin K$ , to jest  $z \in K^C$ . Ovime smo dokazali da je  $W \subseteq K^C$ .

Zaključak: Za svaki  $x \in K^C$  postoji  $W \in \mathcal{T}$  takav da je  $x \in W \subseteq K^C$ .

Iz leme 1.2.16 slijedi da je  $K^C$  otvoren skup. Prema tome  $K$  je zatvoren skup.  $\square$

**Propozicija 2.3.10.**

Neka su  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna funkcija s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ .

Neka je  $K$  kompaktan skup u  $(X, \mathcal{T})$ . Tada je  $f(K)$  kompaktan skup u  $(Y, \mathcal{S})$ .

*Dokaz.* Neka je  $\mathcal{V}$  otvoren pokrivač od  $f(K)$  u topološkom prostoru  $(Y, \mathcal{S})$ . Neka je

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

Dokažimo da je  $\mathcal{U}$  otvoreni pokrivač od  $K$  u  $(X, \mathcal{T})$ . Jasno je da je svaki element od  $\mathcal{U}$  otvoren u  $(X, \mathcal{T})$ . Dokažimo još da je  $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ .

Neka je  $x \in K$ . Tada je  $f(x) \in f(K)$ , pa postoji  $V \in \mathcal{V}$  takav da je  $f(x) \in V$ , pa je  $x \in f^{-1}(V)$ . Dakle,  $\mathcal{U}$  je pokrivač od  $K$  u  $(X, \mathcal{T})$ .

Budući da je  $K$  kompaktan u  $(X, \mathcal{T})$ , postoje  $n \in \mathbb{N}$  i  $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$  takvi da je

$$K \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \dots \cup f^{-1}(V_n).$$

Iz ovoga slijedi da je  $f(K) \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n$ .

Zaključak:  $f(K)$  je kompaktan u  $(Y, \mathcal{S})$ . □

**Propozicija 2.3.11.** *Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori pri čemu je  $(X, \mathcal{T})$  kompaktan, a  $(Y, \mathcal{S})$  Hausdorffov.*

*Neka je  $f : X \rightarrow Y$  funkcija neprekidna s obzirom na  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ . Tada je  $f$  zatvoreno preslikavanje.*

*Dokaz.* Neka je  $F$  zatvoren skup u  $(X, \mathcal{T})$ . Po propoziciji 2.3.7, skup  $F$  je kompaktan u  $(X, \mathcal{T})$ . Prema propoziciji 2.3.10 skup  $f(F)$  je kompaktan u  $(Y, \mathcal{S})$ . Stoga je  $f(F)$  zatvoren u  $(Y, \mathcal{S})$  (Teorem 2.3.9).

Prema tome  $f$  je zatvoreno preslikavanje. □

**Definicija 2.3.12.** *Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor, neka je  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz u  $X$ , te neka je  $a \in X$ .*

*Kažemo da niz  $(x_n)$  teži prema (konvergira k) a ako za svaku otvorenu okolinu  $U$  točke  $a$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T})$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da je  $x_n \in U \forall n \geq n_0$ .*

*Ako  $(x_n)$  teži prema  $a$ , pišemo  $x_n \rightarrow a$ .*

**Definicija 2.3.13.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor,  $a \in X$ , te  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz u  $X$ .*

*Kažemo da niz  $(x_n)$  teži prema (konvergira k) a u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da je  $d(a, x_n) < \epsilon$  za svaki  $n \geq n_0$ .*

**Propozicija 2.3.14.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor,  $a \in X$  te  $(x_n)_n$  niz u  $X$ .*

*Tada niz  $(x_n)_n$  teži prema  $a$  u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako i samo ako  $(x_n)_n$  teži prema  $a$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T}_d)$ .*

*Dokaz.*

Pretpostavimo da  $x_n \rightarrow a$  u metričkom prostoru  $(X, d)$ .

Neka je  $U$  okolina točke  $a$  u  $(X, \mathcal{T}_d)$ . To znači da je  $a \in U$  i  $U \in \mathcal{T}_d$ .  $U$  je otvoren skup u  $(X, d)$ , pa postoji  $r > 0$  takav da  $K(a, r) \subseteq U$ . Tada postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da  $x_n \in K(a, r)$ , za svaki  $n \geq n_0$ .

Zaključujemo da je  $x_n \in U \forall n \geq n_0$ .

Dakle,  $x_n \rightarrow a$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T}_d)$ .

Obratno, pretpostavimo da  $x_n \rightarrow a$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T}_d)$ .

Neka je  $\epsilon > 0$ . Tada je  $K(a, \epsilon) \in \mathcal{T}_d$ , pa je  $K(a, \epsilon)$  otvorena okolina točke  $a$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T}_d)$ . Stoga postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da je  $x_n \in K(a, \epsilon)$  za svaki  $n \geq n_0$ . Ovo znači da je  $d(a, x_n) < \epsilon$  za svaki  $n \geq n_0$ .

Dakle,  $x_n \rightarrow a$  u metričkom prostoru  $(X, d)$ .  $\square$

Ako  $x_n \rightarrow a$  u nekom topološkom ili metričkom prostoru, onda za  $a$  kažemo da je **limes niza**  $(x_n)$  (u tom topološkom ili metričkom prostoru).

### Primjer 2.3.15.

Neka je  $X$  neprazan skup,  $a \in X$  te  $(x_p)$  niz u  $X$ . Tada niz  $x_n \rightarrow a$  u topološkom prostoru  $(X, \{\emptyset, X\})$ .

Naime, jedina otvorena okolina točke  $a$  u ovom topološkom prostoru je  $X$ . Dakle, svaki niz u ovom topološkom prostoru konvergira prema svakoj točki.

Prethodni primjer pokazuje da limes niza u topološkom prostoru ne mora biti jedinstven.

### Propozicija 2.3.16.

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  Hausdorffov topološki prostor, neka je  $(x_n)$  niz u  $X$  te neka su  $a, b \in X$  takvi da  $x_n \rightarrow a$  i  $x_n \rightarrow b$ .

Tada je  $a = b$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, to jest da  $a \neq b$ .

Tada postoje otvoreni disjunktne skupovi  $U$  i  $V$  takvi da je  $a \in U, b \in V$ . Skupovi  $U$  i  $V$  su očito otvorene okoline točaka  $a$  odnosno  $b$ .

Budući da  $x_n \rightarrow a$ , postoji  $n_1 \in \mathbb{N}$  takav da  $x_n \in U$  za svaki  $n \geq n_1$ .

Budući da  $x_n \rightarrow b$ , postoji  $n_2 \in \mathbb{N}$  takav da  $x_n \in V$  za svaki  $n \geq n_2$ .

Neka je  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Slijedi da je  $x_{n_0} \in U$  i  $x_{n_0} \in V$ , no to je u kontradikciji sa činjenicom da su  $U$  i  $V$  disjunktne.

Zaključujemo da je  $a = b$ .  $\square$

Prethodna propozicija kaže da je u Hausdorffovom prostoru limes niza, ako postoji, jedinstven.

### Definicija 2.3.17.

Neka je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor,  $(x_n)$  niz u  $X$  te  $a \in X$ . Kažemo da je  $a$  **gomilište niza**  $(x_n)$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T})$  ako za svaku otvorenu okolinu  $U$  točke  $a$  i za svaki  $n \in \mathbb{N}$  postoji  $m \in \mathbb{N}, m \geq n$  takav da je  $x_m \in U$ .

Ako je  $(X, d)$  metrički prostor,  $(x_n)$  niz u  $X$  te  $a \in X$ , onda za  $a$  kažemo da je **gomilište niza**  $(x_n)$  u metričkom prostoru  $(X, d)$  ako je  $a$  gomilište niza  $(x_n)$  u topološkom prostoru  $(X, \mathcal{T}_d)$ .

Uočimo sljedeće:

Ako je  $(X, \mathcal{T})$  topološki prostor,  $(x_n)$  niz u  $X$  te  $a \in X$  takav da  $x_n \rightarrow a$  onda je  $a$  gomilište niza  $(x_n)$ .

**Teorem 2.3.18.** *Neka je  $(X, \mathcal{T})$  kompaktan topološki prostor te neka je  $(x_n)$  niz u  $X$ .*

*Tada je  $(x_n)$  ima gomilište u  $(X, \mathcal{T})$ , to jest postoji  $a \in X$  takav da je  $a$  gomilište od  $(x_n)$ .*

*Dokaz.*

Pretpostavimo suprotno. Neka je  $a \in X$ .

Tada  $a$  nije gomilište niza  $(x_n)$ , pa postoji otvorena okolina  $U_a$  točke  $a$  u  $(X, \mathcal{T})$  i  $n_a \in \mathbb{N}$  takvi da ne postoji  $m \in \mathbb{N}$  takav da je

$$m \geq n_a \text{ i } x_m \in U_a.$$

To znači da za svaki  $m \in \mathbb{N}$  takav da je  $m \geq n_a$  vrijedi  $x_m \notin U_a$ .

Neka je  $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in X\}$ .

Tada je  $\mathcal{U}$  otvoreni pokrivač od  $(X, \mathcal{T})$ . Budući da je  $(X, \mathcal{T})$  kompaktan, postoje  $k \in \mathbb{N}$  i  $a_1, \dots, a_k \in X$  takvi da

$$X = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_k}. \quad (2.5)$$

Neka je  $n = \max\{n_{a_1}, \dots, n_{a_k}\}$ . Tada je  $n \geq n_{a_1}, \dots, n \geq n_{a_k}$ , pa imamo da  $x_n \notin U_{a_1}, \dots, x_n \notin U_{a_k}$ .

Dakle,  $x_n \notin U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_k}$ , što je u kontradikciji sa (2.5) jer je  $x_n \in X$ .

Zaključak: Niz  $(x_n)$  ima gomilište u  $(X, \mathcal{T})$ . □

**Definicija 2.3.19.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te  $S \subseteq X$ .*

*Za skup  $S$  kažemo da je **omeđen u metričkom prostoru**  $(X, d)$  ako postoje  $x_0 \in X$  i  $r > 0$  takvi da je  $S \subseteq K(x_0, r)$ .*

**Propozicija 2.3.20.** *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor te neka je  $S$  omeđen skup u  $(X, d)$ . Neka je  $x \in X$ .*

*Tada postoji  $r > 0$  takav da je  $S \subseteq K(x, r)$ .*

*Dokaz.*

Budući da je  $S$  omeđen, postoje  $x_0 \in X$  i  $r_0 > 0$  takvi da je  $S \subseteq K(x_0, r_0)$ . Neka je  $r = r_0 + d(x, x_0)$ . Tvrđimo da je  $K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r)$ .

Neka je  $y \in K(x_0, r_0)$ . Tada je  $d(x_0, y) < r_0$ . Imamo

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < d(x, x_0) + r_0 = r.$$

Dakle,  $d(x, y) < r$ , to jest,  $y \in K(x, r)$ .

Prema tome,  $K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r)$ , pa je  $S \subseteq K(x, r)$ . □

**Korolar 2.3.21.**

Neka su  $(X, \mathcal{T})$  i  $(Y, \mathcal{S})$  topološki prostori te neka je  $f : X \rightarrow Y$  surjekcija neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{S}$ . Pretpostavimo da je  $(X, \mathcal{T})$  kompaktan, a  $(Y, \mathcal{S})$  Hausdorffov. Tada je  $\bar{f} : X/f \rightarrow Y$  homeomorfizam (s obzirom na  $\mathcal{T}_f$  i  $\mathcal{S}$ ).

*Dokaz.* Ovo slijedi iz propozicije 2.3.11 i korolara 2.2.23. □

**Definicija 2.3.22.**

Neka je  $n \in \mathbb{N}$  te neka je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}^n$ . Neka je  $S \subseteq \mathbb{R}^n, S \neq \emptyset$ . Očito je  $d|_{S \times S} : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  metrika na  $S$ .

Za  $d|_{S \times S}$  kažemo da je **euklidska metrika** na  $S$ .

Za topologiju induciranu euklidskom metrikom na  $S$  kažemo da je **euklidska topologija** na  $S$ .

**Propozicija 2.3.23.** Neka je  $n \in \mathbb{N}$  te neka je  $d$  euklidska metrika na  $\mathbb{R}^n$ . Neka je  $(X, p)$  metrički prostor,  $x_0 \in X$  te  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  funkcija.

Neka su  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  komponentne funkcije od  $f$ , to jest funkcije takve da je  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ .

Tada je  $f$  neprekidna ako i samo ako su funkcije  $f_1, \dots, f_n$  neprekidne u  $x_0$ .

*Dokaz.*

Pretpostavimo da je  $f$  neprekidna u  $x_0$ .

Neka je  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Neka je  $x \in X$ .

Tada je

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \dots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2},$$

to jest

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq d(f(x), f(x_0)). \quad (2.6)$$

Neka je  $\epsilon > 0$ . Budući da je  $f$  neprekidna u  $x_0$ , postoji  $\delta > 0$  takav da za svaki  $x \in X$  vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Iz (2.6) zaključujemo da za svaki  $x \in X$  vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon.$$

Zaključak: funkcija  $f_i$  je neprekidna u  $x_0$ .

Obratno, pretpostavimo da su  $f_1, \dots, f_n$  neprekidne u  $x_0$ .  
Neka je  $\epsilon > 0$ .

Tada za svaki  $i \in \{1, \dots, n\}$  postoji  $\delta_i > 0$  takav da za svaki  $x \in X$  vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ . Tada za svaki  $x \in X$  takav da je  $p(x, x_0) < \delta$  vrijedi

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &= \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \dots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2} < \\ &< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n} + \dots + \frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon. \end{aligned}$$

Dakle, za svaki  $x \in X$  vrijedi

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome,  $f$  je neprekidna u  $x_0$ . □

## 2.4 Primjeri

Uvodimo oznaku za jediničnu kružnicu  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .

Uzmemo li konopac i spojimo krajeve, dobit ćemo objekt sličan kružnici.

U sljedećem primjeru dajemo precizan smisao izjavi da *identificiranjem krajnjih točaka segmenta dobivamo kružnicu*.

### Primjer 2.4.1.

Neka je  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  funkcija definirana sa  $h(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ .

Iz prethodne propozicije slijedi da je  $h$  neprekidna funkcija s obzirom na pripadne euklidske metrike. Stoga je funkcija  $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definirana sa  $g(x) = h(x)$  neprekidna s obzirom na euklidske metrike na  $\mathbb{R}$  i  $d$ , gdje je  $d$  euklidska metrika na  $S^1$ .

Iz ovoga slijedi da je funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow S^1$  definirana sa  $f(x) = g(x)$  neprekidna s obzirom na metrike  $p$  i  $d$ , gdje je  $p$  euklidska metrika na  $[0, 1]$ .

Za svaki  $x \in [0, 1]$  vrijedi  $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ .

Uočimo da je  $f$  surjekcija. Imamo da je  $f$  neprekidna s obzirom na topologije  $\mathcal{T}_p$  i  $\mathcal{T}_d$ .

Sada koristimo činjenicu da je topološki prostor  $([0, 1], \mathcal{T}_p)$  kompaktan. (Dokaz se može naći u knjizi Sutherland, Introduction to metric and topological spaces [3].)

Očito je da je  $(S^1, \mathcal{T}_d)$  Hausdorffov.



Iz korolara 2.3.21 slijedi da je  $\bar{f} : [0, 1]/f \rightarrow S^1$  homeomorfizam (s obzirom na  $(\mathcal{T}_p)_f$  i  $\mathcal{T}_d$ ). Neka je  $\mathcal{E} = \mathcal{T}_p$  i  $\mathcal{E}' = \mathcal{T}_d$ . Dakle,  $\mathcal{E}$  je euklidska topologija na  $[0, 1]$ , a  $\mathcal{E}'$  je euklidska topologija na  $S^1$ .

Imamo sljedeći zaključak:  $([0, 1]/f, \mathcal{E}_f) \cong (S^1, \mathcal{E}')$ .

Neka je  $\mathcal{F} = \{ \{t\} \mid t \in \langle 0, 1 \rangle \} \cup \{ \{0, 1\} \}$ .

Uočimo da je  $[0, 1]/f = \mathcal{F}$ . Stoga je  $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ .

Prema tome,  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}}) \cong (S^1, \mathcal{E}')$ .

U sljedećim primjerima istražujemo neke matematičke objekte koji se mogu zorno prikazati (ili čiji model možemo konstruirati) lijepljenjem rubova pravokutnog komada papira.

### Primjer 2.4.2.

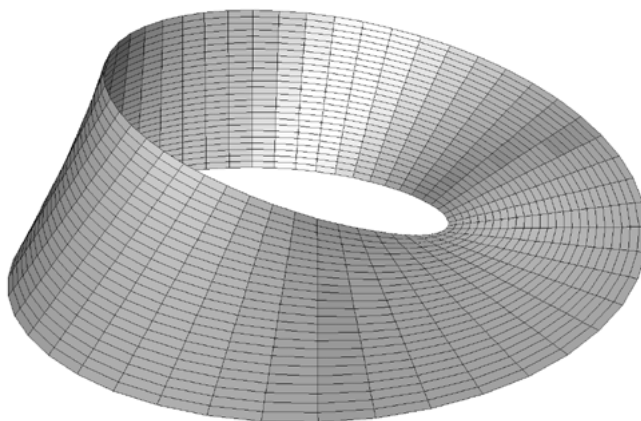
Neka je  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  te neka je  $\mathcal{E}$  euklidska topologija na  $X$ .  
Neka je

$$\mathcal{F} = \{ \{(t, s)\} \mid t \in \langle 0, 1 \rangle, s \in [0, 1] \} \cup \{ \{(0, s), (1, 1 - s)\} \mid s \in [0, 1] \}.$$

Tada je  $\mathcal{F}$  particija od  $X$ .

Za topološki prostor  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$  kažemo da je **Möbiusova vrpca**.

Rezultat je moguće prikazati u trodimenzionalnom euklidskom prostoru.



Slika 2.1: Preuzeto sa <http://paulbourke.net> [1]

**Primjer 2.4.3.**

Neka je  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  te neka je  $\mathcal{E}$  euklidska topologija na  $X$ .

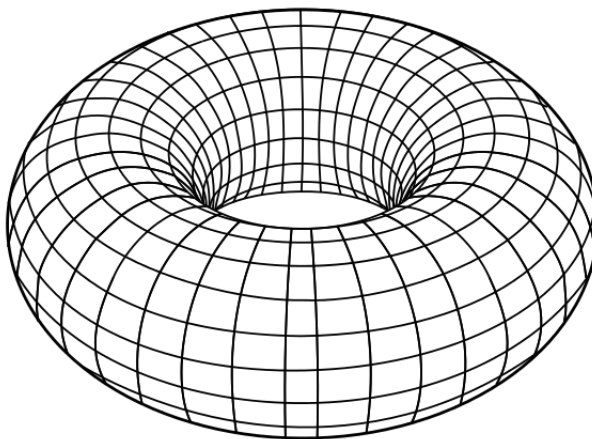
Neka je

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \{ \{(t, s)\} \mid t \in \langle 0, 1 \rangle, s \in \langle 0, 1 \rangle \} \cup \\ & \cup \{ \{(0, s), (1, s)\} \mid s \in \{0, 1\} \} \cup \{ \{(t, 0), (t, 1)\} \mid t \in \{0, 1\} \} \cup \\ & \cup \{ \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \}. \end{aligned}$$

Tada je  $\mathcal{F}$  particija od  $X$ .

Za topološki prostor  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$  kažemo da je **torus**.

Parametrizacija torusa u trodimenzionalnom prostoru izgleda ovako:



Slika 2.2: Preuzeto sa <http://commons.wikimedia.org/>

Pokušajmo sada papir zalijepiti malo drugačije. Okrenimo smjer identificiranja dvije nasuprotne stranice.

**Primjer 2.4.4.**

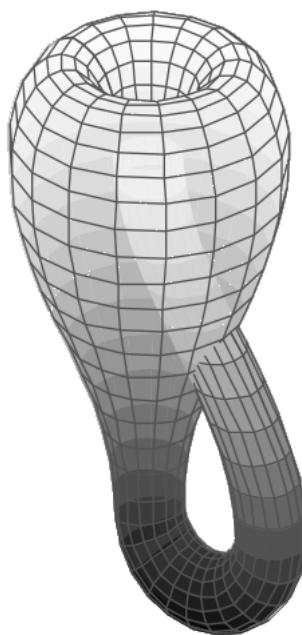
Neka je  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  te neka je  $\mathcal{E}$  euklidska topologija na  $X$ .  
Neka je

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \{ \{(t, s) \mid t \in \langle 0, 1 \rangle, s \in \langle 0, 1 \rangle \} \cup \\ & \cup \{ \{(0, s), (1, 1 - s) \mid s \in \{0, 1\} \} \cup \{ \{(t, 0), (t, 1) \mid t \in \{0, 1\} \} \cup \\ & \cup \{ \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \} \} . \end{aligned}$$

Tada je  $\mathcal{F}$  particija od  $X$ .

Za topološki prostor  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}})$  kažemo da je **Kleinova boca**.

Pokušaj parametrizacije Kleinove boce u tri dimenzije izgleda ovako.



Slika 2.3: Preuzeto sa [http://en.wikipedia.org/wiki/Klein\\_bottle](http://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle) [4]

Uočimo da u slučaju torusa i Kleinove boce identificiramo dva para paralelnih stranica kvadrata  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Kod torusa, oba para stranica identificiramo u istom smjeru, dok kod Kleinove boce jedan par stranica identificiramo u suprotnim smjerovima. Također, točke u kutu pravokutnika smo ostavili za kraj i sve ih želimo slijepiti zajedno.

# Bibliografija

- [1] Paul Bourke, *Möbius (Moebius) strip*, <http://paulbourke.net/geometry/mobius/>, (kolovoz 2015.).
- [2] C. O. Christenson i W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.
- [3] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.
- [4] Wikipedia, *Klein bottle* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Klein\\_bottle&oldid=678207335](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Klein_bottle&oldid=678207335), (kolovoz 2015.).

# Sažetak

U radu su istražena svojstva topoloških prostora kojima je topologija inducirana kvocijentalnim preslikavanjem.

Ispitani su dovoljni uvjeti (korolar 2.3.21) na prostore  $X$  i  $Y$  te funkciju  $f : X \rightarrow Y$  da inducirano preslikavanje  $\bar{f}$  bude homeomorfizam.

Na primjeru kružnice uočeno je da kvocijentalna topologija  $\mathcal{F}$  ukazuje na izbor točaka koje se identificiraju ili "spajaju". Ostali primjeri (Möbiusova vrpca, torus i Kleinova boca) su konstruirani direktno, zadavanjem kvocijentalne topologije.

# Summary

This paper investigates the properties of topological spaces where the topology is induced by a quotient map.

Sufficient conditions on spaces  $X$  and  $Y$  and a map  $f : X \rightarrow Y$  so that the induced map  $\bar{f}$  is a homeomorphism are found. (Corollary 2.3.21) .

The example with a circle shows that quotient topology  $\mathcal{F}$  indicates the choice of the points to be identified or "glued" together. Other examples (Möbius strip, torus and Klein bottle) are constructed directly, by giving the quotient topology.

# Životopis

Rođen sam 29.1.1985. u Zagrebu. Osnovnu školu Jordanovac završio sam 1999. godine i upisao prirodoslovno-matematički smjer III gimnazije u Zagrebu. Nakon mature 2003. godine upisujem studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nastavnički smjer preddiplomskog studija matematike upisujem 2008. godine, a 2011. diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika smjer: nastavnički.

Završio sam nižu glazbenu školu Elly Bašić glavni predmet violina. Pjevao sam u nekoliko pjevačkih zborova i svirao u gudačem ansamblu.