Taxicab geometrija

Tkalčec, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Tkalčec

TAXICAB GEOMETRIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Tema ovog diplomskog rada je taxicab geometrija. Ta geometrija jedna je od neeuklidskih geometrija, no veoma je bliska euklidskoj te je stoga lagana za razumijevanje, što je čini pogodnom za proučavanjem u srednjoj školi. Može se promatrati kao metrički sustav u kojem su točke zapravo križanja ulica u zamišljenom gradu gdje ulice idu samo vertikalno i horizontalno te nema jednosmjernih ulica (odatle i naziv taxicab geometrija).

Zamislimo li sada takav grad te želimo pozvati taksi kako bismo došli iz jedne točke u drugu što je brže moguće, prvo moramo izračunati udaljenost od jedne do druge točke. Za to se nećemo poslužiti euklidskom geometrijom, koja računa zračnu udaljenost, nego ćemo koristiti taxicab geometriju. Njome ćemo izračunati broj blokova koje moramo prijeći kako bismo došli na naše odredište. Formula za udaljenost u taxicab geometriji je $d(T_1, T_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Taxicab geometrija još je poznata pod nazivima Manhattan geometrija, L_1 geometrija, city block geometrija i pravokutna geometrija.

Taxicab geometrija može se primijeniti na razne stvarne probleme, a neki od njih razrađeni su u prvom poglavlju. Cilj ovog rada je proučiti osnovne geometrijske pojmove i konstrukcije u taxicab geometriji. Stoga su u drugom poglavlju uređeni osnovni objekti (krug i kružnica, elipsa, hiperbola i parabola) te su izvedene njihove jednadžbe. Uspoređeni su pojmovi najkraće spojnice dviju točaka iz euklidske i taxicab geometrije. U trećem poglavlju je malo detaljnije razrađena tema spojnice dviju točaka, ali i skup polovišnih točaka dviju točaka. Taj skup u euklidskoj geometriji je zapravo simetrala tih dviju točaka. U taxicab geometriji je „polovišni” skup malo kompliciraniji te ovisi o položaju tih dviju točaka. Četvrto poglavlje bavi se temom kuta, odnosno njegovom mjerom te dijeljenjem kuta na n dijelova. Vidjet ćemo da, za razliku od nerješivosti tog problema u euklidskoj geometriji, u taxicab geometriji ovaj problem ima rješenje. U petom poglavlju bavimo se malo opširnije konikama. Izvedena je opća jednadžba za konike, te su konike klasificirane po svojim svojstvima. A na kraju su prikazane i grafički. Zadnje poglavlje posvećeno je uvođenju taxicab geometrije na nastavu matematike u srednjoj školi.

Poglavlje 1

Povijest i primjene

Početkom 20. st. Hermann Minkowski[1] objavio je cijelu familiju „metrika”, tj. primjera prostora u kojima je udaljenost definirana tako da vrijede aksiomi metričkog prostora. Jedna od tih metrika naziva se „taxicab metrika”. Ona mjeri udaljenost koju vozač taksija mora prijeći u idealno oblikovanom gradu, sastavljenog od blokova, gdje su sve ulice u smjeru sjever-jug ili istok-zapad. Tako je nastala taxicab geometrija, čiji je naziv prvi puta upotrijebio Karl Menger 1952. na izložbi geometrija u Muzeju znanosti i industrije u Chicagu. Nakon toga, taxicab geometrija krenula se razvijati 1975. god. kada je Eugene Krause objavio knjigu „Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry”. Ta knjiga još i danas služi za upoznavanje s taxicab geometrijom. Moderna istraživanja krenula su se sporadično javljati tek 80-tih godina prošlog stoljeća, a kontinuirano nakon 1997. Razvoju te geometrije pridonijeli su Kevin Thompson i Rustem Kaya ([5]), koji su radili, zasebno, na kutovima i trigonometriji u taxicab geometriji (prema članku [2]).

Taxicab geometrija je neeuklidska geometrija u širem smislu tog pojma (tj. nije euklidska), ali koja se zapravo i ne razlikuje puno od euklidske. Točke i pravci su isti kao u euklidskoj, čak se i kutovi mogu mjeriti na isti način. Bitna razlika je formula za udaljenost. U euklidskoj geometriji udaljenost između dviju točaka $P = (x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ defininirana je kao:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

dok je u taxicab geometriji definirana kao:

$$d(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

[1]Rođen 1864. u Rusiji. Bio je učitelj mladog Alberta Einsteina.

Kako svaka norma definira udaljenost (metriku), imamo formulu za p-normu:

$$d(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p},$$

za $v \in \mathbb{R}^p$. Primijetimo, da je euklidska udaljenost zapravo 2-norma, tj.

$$d(X, Y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} |x_k - y_k|^2},$$

za svaki $X, Y \in \mathbb{R}^2$, a taxicab udaljenost je 1-norma, tj.

$$d(X, Y) = \sum_{k=1}^{1} |x_k - y_k|,$$

za svaki $X, Y \in \mathbb{R}$.

Minimalna udaljenost između dvije točke u euklidskoj geometriji duljina je jedinstvenog najkraćeg puta, tj. dužine koja spaja te dvije točke. Za razliku od toga, u taxicab geometriji postoji više puteva od jedne do druge točke, koji su svi jednakih duljina. Udaljenost između dvije točke P i Q duljina je najkraćeg puta od P do Q, sastavljenog od dužina paralelnih i okomitih na x-os.

Primjerice, odredimo udaljenost između točaka $A(2, 3)$ i $B(3, 7)$:

$$d(A, B) = |3 - 2| + |7 - 3| = |1| + |4| = 5$$

dok je

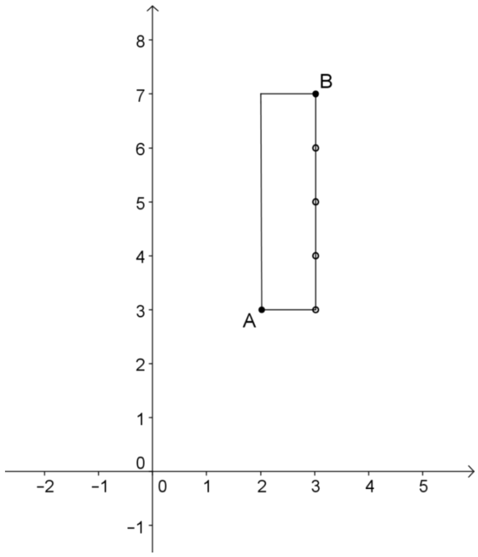
$$d_e(A, B) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{1 + 16} \approx 4.1231$$

Graf je prikazan na Slici 1.1. Postoje još tri puta jednake udaljenosti (5).
Pogledajmo sada Sliku 1.2. Zadane su točke $A(2, 1)$ i $B(5, 5)$. Možemo primijetiti kako postoji više različitih putova od A do B, svi jednakih duljina (7).
Primijetimo da je $d(P, Q) = d_e(P, Q)$ kada je $P_x = Q_x$ ili $P_y = Q_y$.

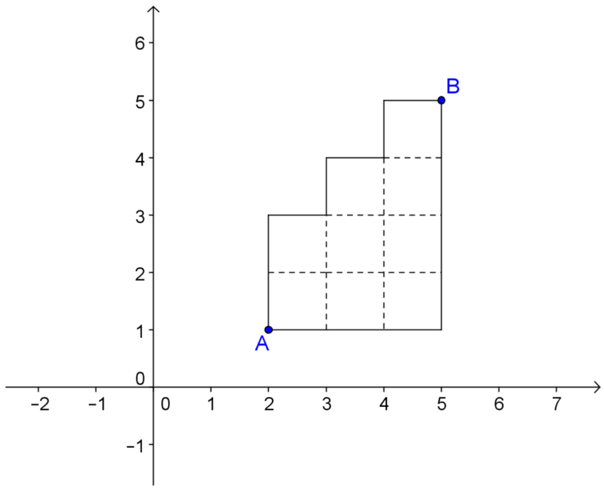
1.1 Kada koristimo taxicab geometriju?

Proučit ćemo sada tri situacije iz stvarnog života:

1. Dispečer u policiji Idealnog Grada dobiva izvješće o nesreći na mjestu $X(-1, 4)$. U tom području su dva policijska automobila. Automobil A na $(2, 1)$ i B na $(-1, -1)$. Koji automobil treba poslati?



Slika 1.1: T-udaljenost točaka A i B



Slika 1.2: Različiti putovi od točke A do B

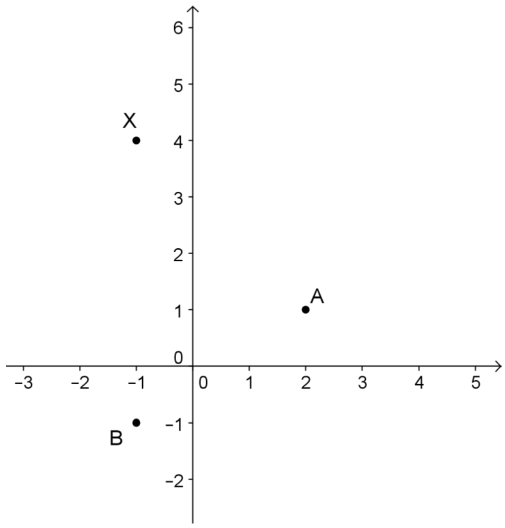
2. U Idealnom Gradu postoje tri škole. Roosevelt na $(2,1)$, Franklin na $(-3,3)$ i Jefferson na $(-6,-1)$. Potrebno je nacrtati granice oko škola tako da svaki učenik tog grada polazi školu koja mu je najbliže.

3. Telefonski operater želi postaviti telefonske govornice tako da svatko tko živi unutar dvanaest blokova od centra grada se nalazi unutar četiri bloka od telefonske govornice, na način da postave najmanji mogući broj tel. govornica.

Ova tri problema su zanimljiva, jer ih ne želimo riješiti korištenjem zračne linije, već želimo ostati na gradskim ulicama. Stoga ne možemo koristiti euklidsku geometriju, jer nam njena formula za udaljenost neće pomoći. Upravo u ovim situacijama upotrijebit ćemo taxicab geometriju. Krenimo na rješavanje problema.

Prvi problem

Dispečer u policiji Idealnog Grada dobiva izvješće o nesreći na mjestu $X(-1, 4)$. U tom području su dva policijska automobila. Automobil A na $(2, 1)$ i B na $(-1, -1)$. Koji automobil treba poslati?



Slika 1.3: Prvi problem

Problem je smješten u koordinatni sustav (vidi Sliku 1.3). S obzirom da je grad sastavljen od blokova te se policijski automobili ne kreću kroz kuće, ne možemo koristiti euklidsku geometriju, već ćemo upotrijebiti taxicab geometriju. Najjednostavniji način da riješimo ovaj problem jest da izračunamo udaljenosti jednog, odnosno drugog automobila do mjesta nesreće te zatim pošaljemo onog koji je bliže.
Pogledajmo udaljenost automobila na mjestu A do mjesta nesreće X:

$$d(X, A) = [(-1, 4), (2, 1)] = |2 - (-1)| + |1 - 4| = |3| + |-3| = 3 + 3 = 6,$$

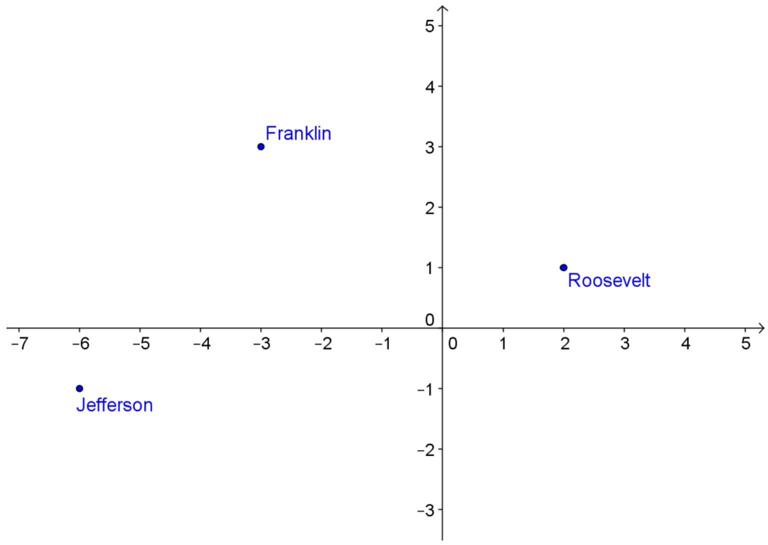
te udaljenost automobila na mjestu B do mjesta nesreće X:

$$d(X, B) = [(-1, 4), (-1, -1)] = |-1 - (-1)| + |-1 - 4| = |0| + |-5| = 5.$$

Dakle, dispečer treba poslati policijski automobil s mjesta B.

Drugi problem

U Idealnom Gradu postoje tri škole. Roosevelt na $(2, 1)$, Franklin na $(-3, 3)$ i Jefferson na $(-6, -1)$. Potrebno je nacrtati granice oko škola tako da svaki učenik tog grada polazi školu koja mu je najbliže. I ovaj problem je smješten u koordinatni sustav (vidi Sliku 1.4).



Slika 1.4: Drugi problem

S obzirom da učenici moraju prolaziti gradskim ulicama da bi došli do svoje škole očito je da ćemo primijeniti taxicab geometriju. Ovaj ćemo problem podijeliti na nekoliko manjih problema: prvo ćemo gledati granicu između Franklina i Jeffersona, zatim Franklina i Roosevelta, a potom Roosevelta i Jeffersona. Na kraju moramo protumačiti rezultate gledajući presjek ova tri dijela.

Prvi dio:

Gledamo granicu između Franklina i Jeffersona. Na granici se nalaze točke $T(x, y)$ koje su jednako udaljene od tih dviju škola, tj. vrijedi

$$d(\text{Jefferson}, T) = d(\text{Franklin}, T)$$

$$d[(-6, -1), (x, y)] = d[(-3, 3), (x, y)]$$

$$|x + 6| + |y + 1| = |x + 3| + |y - 3|.$$

Sada rješavamo dobivenu jednadžbu s apsolutnim vrijednostima prema tablici 1.1.

Tablica 1.1: Tablica slučaja za prvi dio

	$-1 \leq y \leq 3$	$y < -1$	$y > 3$
$-6 \leq x \leq -3$	1. slučaj	4. slučaj	7. slučaj
$x < -6$	2. slučaj	5. slučaj	8. slučaj
$x > -3$	3. slučaj	6. slučaj	9. slučaj

Krenimo rješavati:

1. slučaj: $-1 \leq y \leq 3$ i $-6 \leq x \leq -3$
Uvažavajući ove uvjete rješavamo početnu jednadžbu:

$$|x+6| + |y+1| = |x+3| + |y-3|$$

$$\begin{aligned} x+6+y+1 &= -x-3-y+3 \\ 2y &= -2x-7 \\ y &= -x-\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Ispunit ćemo tablicu za x iz zadanog intervala:

x	y
-6	$5/2$
-5	$3/2$
-4	$1/2$
-3	$-1/2$

Točke koje očitamo iz tablice jednako su udaljene od škola Franklin i Jefferson. Dakle, dobili smo dio granice između tih dviju škola.

2.slučaj: $-1 \leq y \leq 3$ i $x < -6$
Za ove uvjete početna jednadžba izgleda ovako:

$$|x+6| + |y+1| = |x+3| + |y-3|$$

$$\begin{aligned} -x-6+y+1 &= -x-3-y+3 \\ -x+y-5 &= -x-y \\ y &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ispunit ćemo tablicu za x iz danog intervala:

x	y
-7	$5/2$
-8	$5/2$
-9	$5/2$
$\vdots$	$\vdots$

3. slučaj: $-1 \leq y \leq 3$ i $x > -3$
Početna jednadžba sada izgleda ovako:

$$x + 6 + y + 1 = x + 3 - y + 3$$

$$x + y + 7 = x - y + 6$$

$$2y = -1$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Ispunit ćemo tablicu za x iz zadanog intervala:

x	y
-3	$-1/2$
-2	$-1/2$
-1	$-1/2$
0	$-1/2$
$\vdots$	$\vdots$

4.-9. slučaj: nemaju rješenja. Pogledajmo Sliku 1.5. Gledamo li treći i četvrti kvadrant možemo primijetiti kako će učenici koji žive ispod linije granice biti bliže Jeffersonu. Isto tako, svi učenici koji žive iznad linije granice, u prvom i drugom kvadrantu su bliže Franklinu.

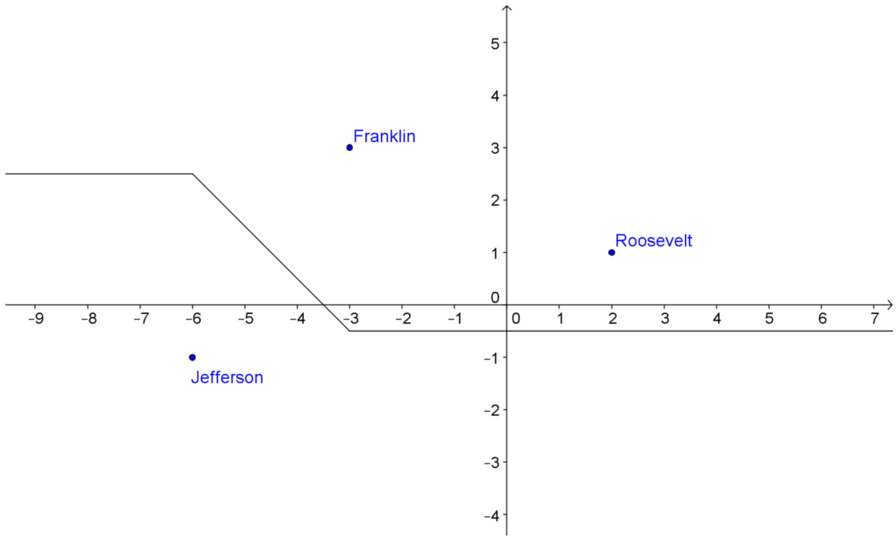
Drugi dio:

Gledamo granicu između Franklina i Roosevelta, tj. liniju koju čine točke $T(x, y)$ koje su jednako udaljene od ovih dviju škola. Imamo:

$$d(\text{Franklin}, T) = d(\text{Roosevelt}, T)$$

$$d[(-3, 3), (x, y)] = d[(2, 1), (x, y)]$$

$$|x + 3| + |y - 3| = |x - 2| + |y - 1|.$$



Slika 1.5: Drugi problem - prva granica

Tablica 1.2: Tablica slučaja za drugi dio

	$1 \leq y \leq 3$	$y < 1$	$y > 3$
$-3 \leq x \leq 2$	1. slučaj	3. slučaj	4. slučaj
$x < -3$	5. slučaj	2. slučaj	6. slučaj
$x > 2$	7. slučaj	8. slučaj	9. slučaj

Sada imamo devet slučaja iz Tablice 1.2.

1. slučaj: $1 \leq y \leq 3$ i $-3 \leq x \leq 2$
Uvažavajući ove uvjete rješavamo početnu jednadžbu :

$$|x+3| + |y-3| = |x-2| + |y-1|$$

$$x + 3 - y + 3 = -x + 2 + y - 1$$

$$x - y + 6 = -x + y + 1$$

$$-2y = -2x - 5$$

$$y = x + \frac{5}{2}$$

Ispunit ćemo tablicu za x iz danog intervala:

x	y
0	5/2
−1	3/2
⋮	⋮

2. slučaj: $x < -3$ i $y < 1$
Sada početna jednadžba izgleda ovako:

$$-x-3-y+3 = -x+2-y+1$$
$$-x-y = -x-y+3$$
$$0 = 3$$

No, to nije istina, tj. $0 \neq 3$. Stoga ova jednadžba nema rješenja za $x < -3$ i $y < 1$.
3. slučaj: $-3 \leq x \leq 2$ i $y < 1$.
Početna jednadžba izgleda ovako:

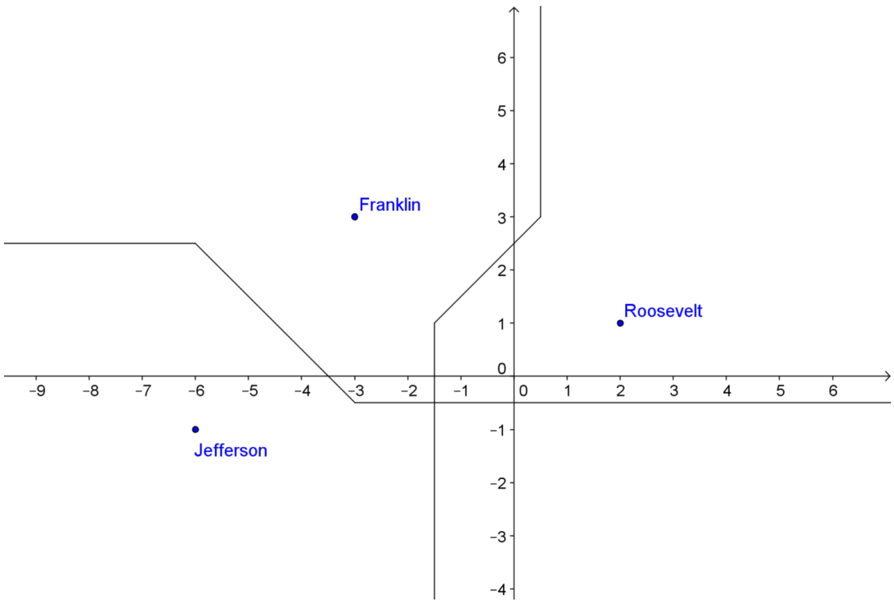
$$x+3-y+3 = -x+2-y+1$$
$$x-y+6 = -x-y+3$$
$$2x = -3$$
$$x = -\frac{3}{2}.$$

x	y
−3/2	1
−3/2	0
−3/2	−1
−3/2	−2
⋮	⋮

4. slučaj: $-3 \leq x \leq 2$ i $y > 3$
Rješavamo jednadžbu pod zadanim uvjetima:

$$x+3+y-3 = -x+2+y-1$$
$$x+y = -x+y+1$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

x	y
1/2	3
1/2	4
1/2	5
$\vdots$	$\vdots$



Slika 1.6: Drugi problem - prva i druga granica

5.-9. slučaj: nemaju rješenja. Da bismo se uvjerili u to, pogledajmo Sliku 1.6. Gledajući prvi i četvrti kvadrant vidimo da svi učenici koji žive u vanjskom dijelu su bliže Rooseveltu, a gledajući drugi i treći kvadrant primjećujemo da svi učenici iz tog područja žive bliže Franklinu.

Treći dio

Preostalo nam je naći granicu između Roosevelta i Jeffersona, tj. tražimo sve točke $T(x, y)$ za koje vrijedi:

$$d(\text{Jefferson}, T) = d(\text{Roosevelt}, T),$$

tj.

$$d[(-6-1), (x, y)] = d[(2, 1), (x, y)]$$

$$|x+6| + |y+1| = |x-2| + |y-1|$$

Tablica 1.3: Tablica slučaja za treći dio

	$y < -1$	$-1 \leq y \leq 1$	$y > 1$
$-6 \leq x \leq 2$	1. slučaj	2. slučaj	3. slučaj
$x > 2$	4. slučaj	5. slučaj	6. slučaj
$x < -6$	7. slučaj	8. slučaj	9. slučaj

Imamo devet slučaja, prema Tablici 1.3.
Krenimo na njihovo rješavanje:

1. slučaj: $-6 \leq x \leq 2$ i $y < -1$
Pod ovim uvjetima rješavamo jednadžbu

$$|x+6| + |y+1| = |x-2| + |y-1|$$

$$x + 6 - y - 1 = -x + 2 - y + 1$$
$$x - y + 5 = -x - y + 3$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$

Tablica izgleda ovako:

x	y
-1	-2
-1	-3
-1	-4
$\vdots$	$\vdots$

2. slučaj: $-6 \leq x \leq 2$ i $-1 \leq y \leq 1$
Pa imamo:

$$x + 6 + y + 1 = -x + 2 - y + 1$$
$$x + y + 7 = -x - y + 3$$
$$2y = -2x - 4$$
$$y = -x - 2$$

x	y
-1	-1
-2	0
-3	1
$\vdots$	$\vdots$

3. slučaj: $-6 \leq x \leq 2$ i $y > 1$
Imamo:

$$x + 6 + y + 1 = -x + 2 + y - 1$$
$$x + y + 7 = -x + y + 1$$
$$2x = -6$$
$$x = -3$$

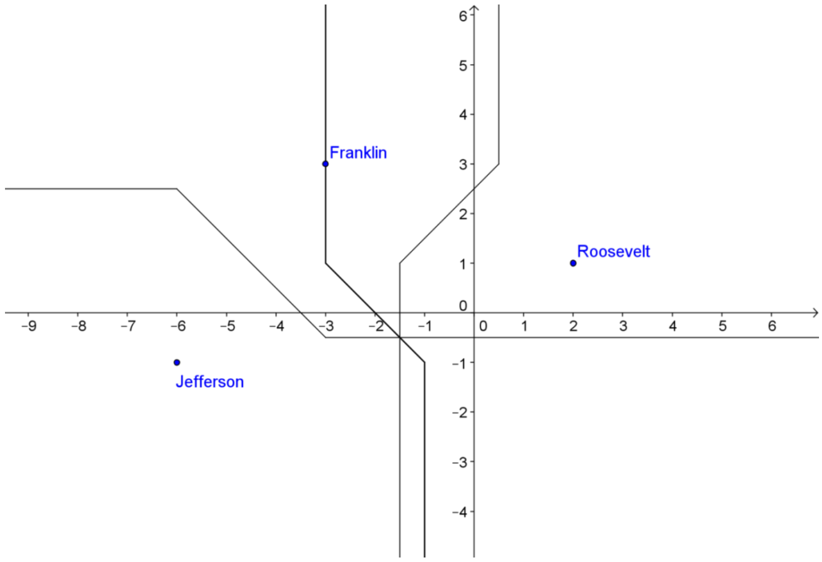
x	y
-3	2
-3	3
-3	4
$\vdots$	$\vdots$

4.-9. slučaj: nemaju rješenja. Pogledajmo Sliku 1.7. Svi učenici iz prvog i četvrtog kvadranta koji žive u vanjskom području nove linije bliže su Rooseveltu, a iz drugog i trećeg su bliže Jeffersonu.

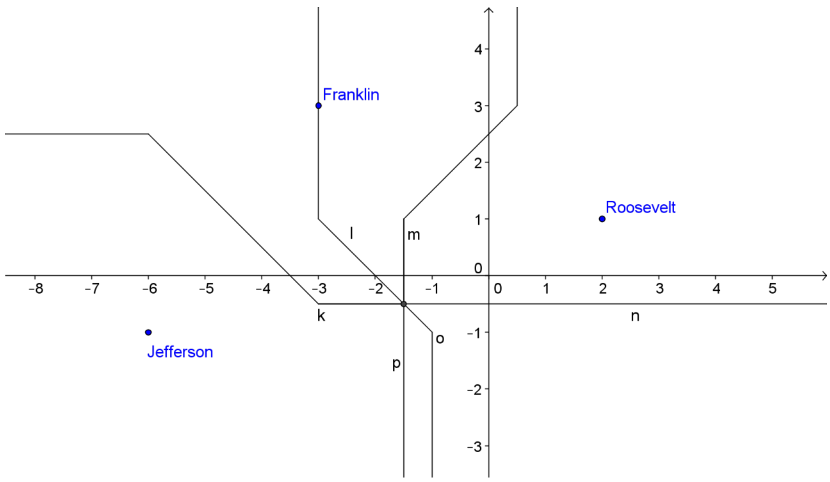
Četvrti dio

Sada ćemo izvesti zaključak na temelju rezultata u prethodna tri dijela. Prvo moramo pronaći u kojoj se točki sijeku sve tri granice. To je točka $(-3/2, -1/2)$. Ona dijeli svaku granicu na dva dijela. Promatrat ćemo koji nam je dio koje granice potreban. Označimo dijelove kao na Slici 1.8.

Pogledamo li dio k možemo primijetiti kako je upravo taj dio prve granice dobar, jer ne postoji ni jedna druga granica koja bi odvajala škole Franklin i Jefferson. Nadalje vidimo kako granica l odvaja škole Franklin i Roosevelt, no također možemo primijetiti kako je taj dio nepotreban, jer se nalazi bliže Franklinu no Rooseveltu. Stoga možemo obrisati i taj dio granice. Sada, s obzirom da smo maknuli l, moramo ostaviti dio m kako bi postojalo nešto što će odvajati te dvije škole. Dio granice označen sa n možemo obrisati. Zato što je to dio koji odvaja Jefferson i Franklin, a Roosevelt se nalazi bliže granici od njih. Dio granice koji

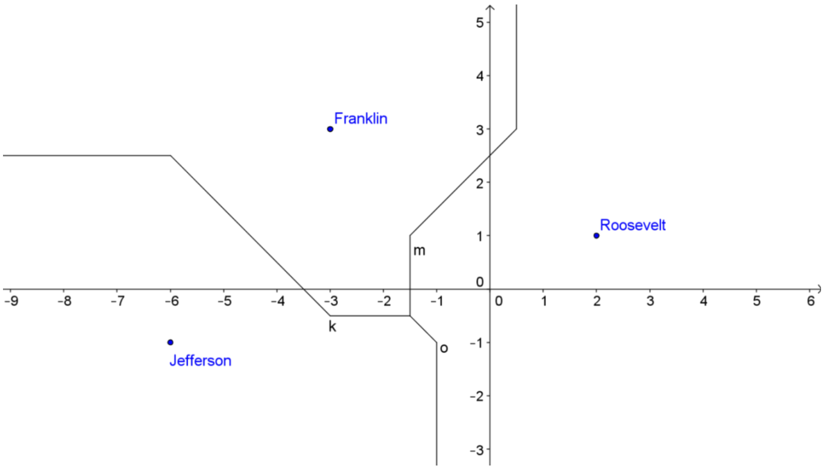


Slika 1.7: Drugi problem - uključena treća granica



Slika 1.8: Drugi problem - sve granice s oznakama

odvaja Franklin i Roosevelt p nalazi se bliže Jeffersonu, stoga možemo maknuti i taj dio. Još je jedino ostao dio granice o, a njega moramo ostaviti kako bismo imali granicu između Jeffersona i Roosevelta s obzirom da smo maknuli p. Sada imamo konačno rješenje ovog problema (vidi Sliku 1.9).



Slika 1.9: Drugi problem - konačne granice

Treći problem

Telefonski operater želi postaviti telefonske govornice tako da svatko tko živi unutar dvanaest blokova od centra grada se nalazi unutar četiri bloka od telefonske govornice, na način da postave najmanji mogući broj telefonskih govornica.

Očito je da stanovnici grada neće prolaziti kroz tuđa dvorišta ili preskakati zgrade kako bi došli do telefonske govornice. Moraju se držati ulica pa je logičan izbor za rješavanje ovog problema upravo taxicab geometrija.
Podijelit ćemo i ovaj problem na više manjih dijelova.

Prvi dio:

Želimo nacrtati granicu koja će odjeljivati 12 blokova od centra grada od ostatka grada. Stoga moramo pronaći sve točke $T(x, y)$ koje su od centra grada udaljene za 12, tj.

$$d[(0,0),(x,y)] = 12,$$

$$|x - 0| + |y - 0| = 12$$

Da bismo riješili ovu jednadžbu moramo gledati sljedeća četiri slučaja:

Tablica 1.4: Tablica slučaja za treći problem

	$-12 = x \leq 0$	$12 = x \geq 0$
$-12 = y \leq 0$	3. slučaj	2. slučaj
$12 = y \geq 0$	4. slučaj	1. slučaj

1. slučaj $12 = x \geq 0$ i $12 = y \geq 0$
Pod tim uvjetima rješavamo gornju jednadžbu:

$$|x - 0| + |y - 0| = 12$$

$$x - 0 + y - 0 = 12$$

$$y = -x + 12$$

2. slučaj $12 = x \geq 0$ i $-12 = y \leq 0$
S ovim uvjetima dobivamo:

$$x - 0 - y + 0 = 12$$

$$y = x - 12$$

3. slučaj $-12 = x \leq 0$ i $-12 = y \leq 0$
Sada imamo:

$$-x + 0 - y + 0 = 12$$

$$y = -x - 12$$

4. slučaj $-12 = x \leq 0$ i $12 = y \geq 0$
Pa imamo:

$$-x + 0 + y - 0 = 12$$

$$y = x + 12$$

Rješavajući ova četiri slučaja dobili smo 4 pravca, koja kad ucrtamo u koordinatni sustav čine graf **kružnice** radijusa 12 u taxicab geometriji (vidi Sliku 1.10). Svaki od tih pravaca leži u jednom kvadrantu. Time smo dobili geometrijsko mjesto točaka u taxicab geometriji udaljeno od središta za 12, dakle kružnicu radijusa 12 što je upravo ono što smo tražili.

Drugi dio:

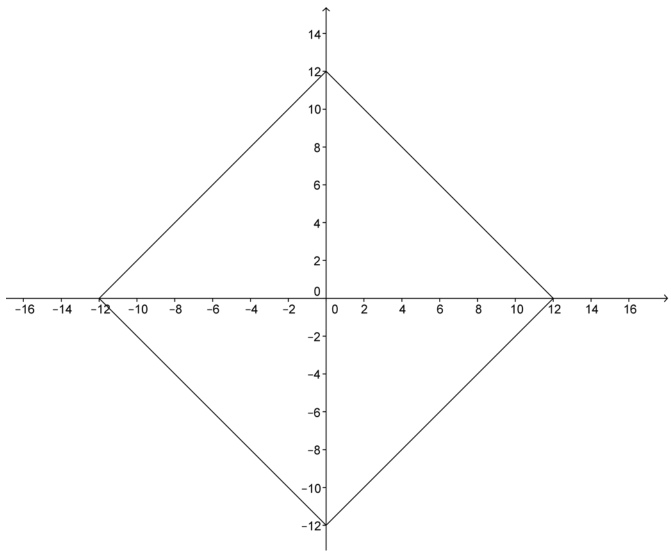
U ovom dijelu moramo pronaći jednadžbu pravca od kojeg će svatko tko živi na granici u prvom kvadrantu biti udaljen za 4 bloka. Dakle, tražimo skup točaka $T(x_1, y_1)$ za koje vrijedi:

$$d[(x, -x + 12), (x_1, y_1)] = 4$$

$$|x - x_1| + |(-x + 12) - y_1| = 4$$

Sada gledamo samo onaj slučaj koji odgovara uvjetima iz slučaja u kojem smo dobili za dio granice taj pravac. Pa vrijedi: $x_1 = x$ i $y_1 = y$, odnosno: $x - x_1 = x - x_1$ i $(-x + 12) - y_1 = -x + 12 - y_1$. Imamo:

$$x - x_1 - x + 12 - y_1 = 4$$



Slika 1.10: Treći problem

$$-x_1 + 8 = y_1.$$

Ovu liniju ćemo nazvati *l*.
Time smo dobili mjesta na koja možemo smjestiti telefonske govornice tako da budu optimalno udaljene od vanjske granice u prvom kvadrantu. Dalje moramo pronaći granicu od koje svi mogu koristiti telefonsku govornicu ispod linije *l*. Stoga moramo riješiti sljedeću jednadžbu:

$$d[(x_1, x_1 - 8), (x_2, y_2)] = 4$$

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - (x_1 - 8)| = 4$$

Ponovo gledamo iste uvjete kao i ranije pa imamo:

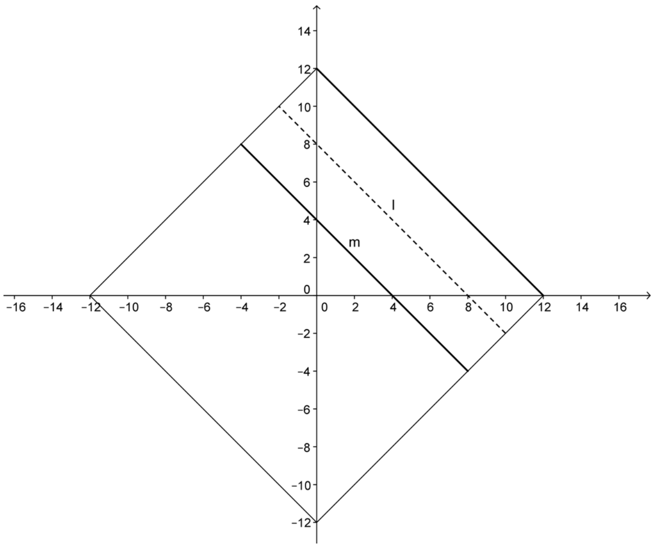
$$-x_2 + x_1 - y_2 - x_1 + 8 = 4$$

$$-x_2 - y_2 + 8 = 4$$

$$y_2 = -x_2 + 4$$

Ovu liniju nazovimo *m*.

Pogledajmo Sliku 1.11. Svi koji žive na podebljanim linijama nalaze se točno 4 bloka od telefonskih govornica smještenih na iscrtkanoj liniji.



Slika 1.11: Treći problem a)

Kao i ranije, sada moramo pronaći liniju ispod zadnje granice, tj. m, koja će biti udaljena za 4 bloka od m. Rješavamo jednadžbu:

$$d[(x_2, -x_2 + 4), (x_3, y_3)] = 4$$

S istim uvjetima kao i prije, sada imamo:

$$-x_3 + x_2 - y_3 + (-x_2 + 4) = 4$$

$$y_3 = -x_3.$$

Nazovimo ovu liniju n.
Dalje moramo tražiti donju granicu od n na kojoj žive ljudi udaljeni 4 bloka od n. Riješit ćemo donju jednadžbu s istim uvjetima kao i ranije:

$$d[(x_3, -x_3), (x_4, y_4)] = 4$$

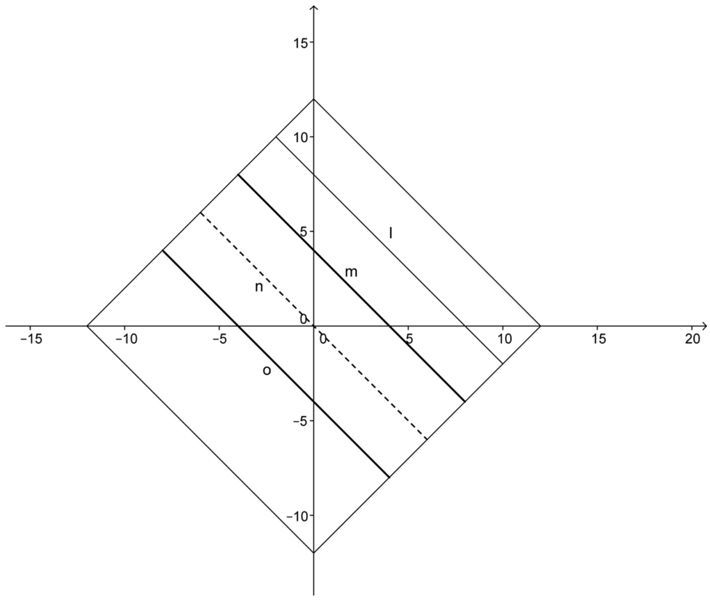
$$-x_4 + x_3 - y_4 + (-x_3) = 4$$

$$y_4 = -x_4 - 4.$$

Ovu ćemo liniju nazvati o.
Kad nadopunimo prethodni graf novim granicama imamo situaciju kao na Slici 1.12.

Ponovimo postupak još jednom. Tražimo liniju ispod o koja je od nje udaljena za 4 bloka koristeći ovu jednadžbu:

$$d[(x_4, -x_4 - 4), (x_5, y_5)] = 4$$



Slika 1.12: Treći problem b)

S uvjetima kao i ranije imamo:

$$-x_5 + x_4 - y_5 - x_4 - 4 = 4$$

$$y_5 = -x_5 - 8.$$

Te ćemo ovu liniju nazvati p i sada još moramo pronaći liniju q ispod nje:

$$d[(x_5, -x_5 - 8), (x_6, y_6)] = 4$$

$$-x_6 + x_5 - y_6 - x_5 - 8 = 4$$

$$y_6 = -x_6 - 12.$$

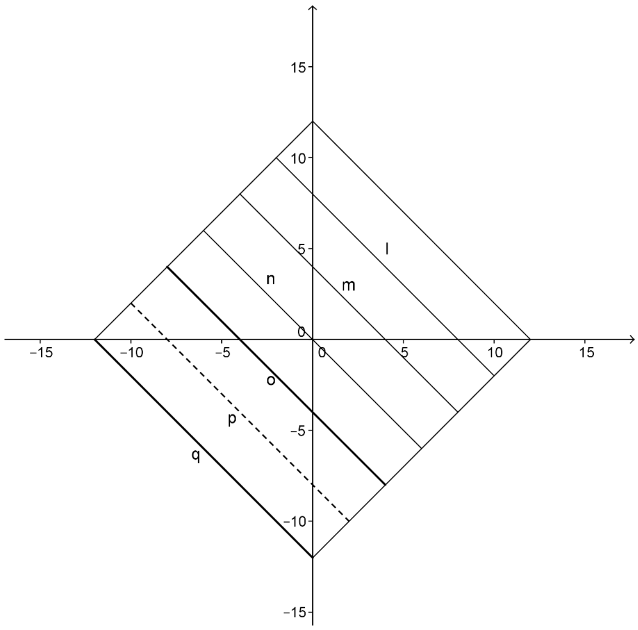
Primjećujemo da je linija q zapravo vanjska granica u trećem kvadrantu. Sada konačno imamo Sliku 1.13.

Time smo pronašli linije na koje možemo smjestiti sve telefonske govornice. No ne znamo gdje točno na tim linijama stoga krećemo na idući dio.

Treći dio:

Sada moramo ponoviti isti postupak kao u prethodnom dijelu počevši od drugog kvadranta. Tamo nam je jednadžba vanjske granice: $y = x + 12$, pa rješavamo sljedeću jednadžbu:

$$d[(x_7, x_7 + 12), (x_8, y_8)] = 4.$$



Slika 1.13: Treći problem c)

Kod rješavanja svih slučajeva u ovom dijelu koristimo ove uvjete: $x_n \geq x_{n+1}$ i $y_n \leq y_{n+1}$, zbog toga što će na svakoj novoj liniji svi x biti veći od x na prethodnoj liniji, a sve vrijednosti y na novoj liniji biti će manje od vrijednosti na prethodnoj liniji. Stoga imamo:

$$x_8 - x_7 + y_8 + x_7 + 12 = 4$$

$$y_8 = x_8 + 8$$

te nazovimo tu liniju r. Donja linija s imati će sljedeću jednadžbu:

$$d[(x_8, x_8 + 8), (x_9, y_9)] = 4$$

$$x_9 - x_8 - y_9 + x_8 + 8 = 4$$

$$y_9 = x_9 + 4.$$

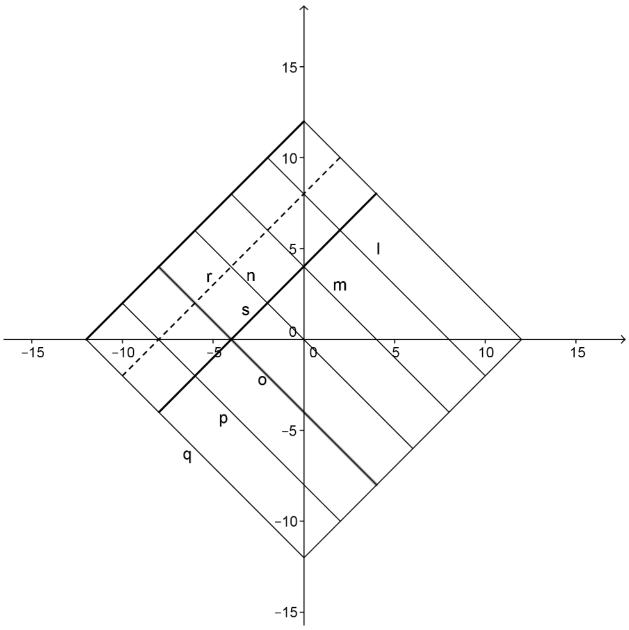
Sada imamo novi graf (Slika 1.14).

Tražimo dalje donje granice na isti način:

$$d[(x_9, x_9 + 4), (x_{10}, y_{10})] = 4$$

$$x_{10} - x_9 - y_{10} + x_9 + 4 = 4$$

$$y_{10} = x_{10}$$



Slika 1.14: Treći problem d)

čime smo dobili t, a sada tražimo u:

$$d[(x_{10}, x_{10}), (x_{11}, x_{11})] = 4$$
$$x_{11} - x_{10} - y_{11} + x_{10} = 4$$
$$y_{11} = x_{11} - 4.$$

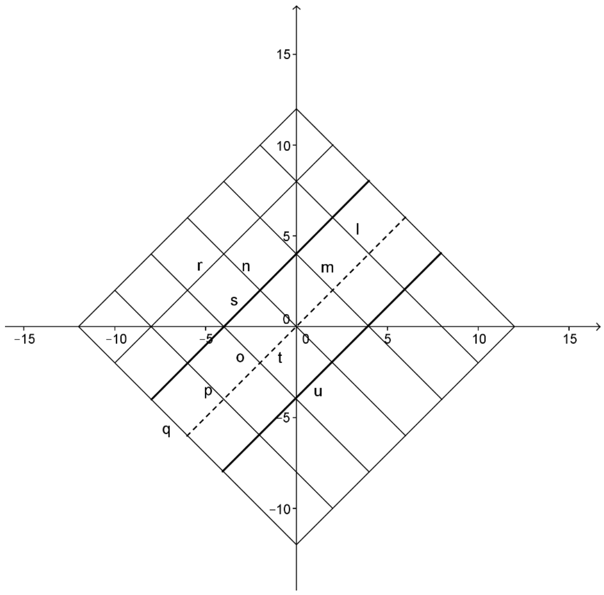
Kada ucrtamo i te dvije linije u graf imamo situaciju kao na Slici 1.15.

A sada ćemo ponoviti postupak još jednom. Liniju v ćemo pronaći koristeći ovu jednadžbu:

$$d[(x_{11}, x_{11} - 4), (x_{12}, y_{12})] = 4$$
$$x_{12} - x_{11} - y_{12} + x_{11} - 4 = 4$$
$$y_{12} = x_{12} - 8$$

i još liniju w:

$$d[(x_{12}, x_{12} - 4), (x_{13}, y_{13})] = 4$$
$$x_{13} - x_{12} - y_{13} + x_{12} - 8 = 4$$
$$y_{13} = x_{13} - 12.$$



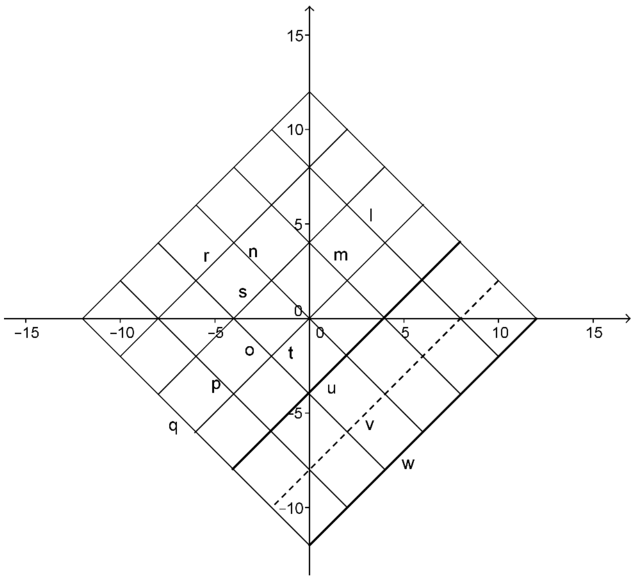
Slika 1.15: Treći problem e)

Linija w je zapravo vanjska granica u četvrtom kvadrantu. Konačni graf imamo na Slici 1.16.

Četvrti dio:

U ovom dijelu ćemo interpretirati dobiveni graf. Dobivene linije predstavljaju optimalna mjesta za postavljanje telefonskih govornica. Primijetimo da se te linije sijeku dijeleći tako čitavo područje na 9 manjih područja. Svako od tih manjih područja sadrži sjecište. Upravo u tim sjecištima trebaju biti postavljene telefonske govornice tako da svatko tko živi unutar 12 blokova od centra grada, živi i unutar 4 bloka od telefonske govornice.

Dakle, možemo primijetiti kako nam je taxicab geometrija zbilja koristila u modelu urbane geografije, jer je za ljude u njoj upravo taxicab udaljenost „prava” udaljenost. Taxicab geometrija ima mnoge primjene te ju je lako istražiti.



Slika 1.16: Treći problem f)

Poglavlje 2

Definicije

Metrički prostor je matematička struktura koja se sastoji od skupa točaka i pravila (ili funkcije d) za mjerenje udaljenosti između bilo koje dvije točke tog skupa. Funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ima svojstva:

1. Udaljenost između bilo koje dvije točke je nenegativna, tj. $d(A, B) \geq 0$, $\forall A, B \in X$. Ako je $d(A, B) = 0$, onda je $A = B$, gdje su $A, B \in X$.
2. Udaljenost od točke A do B jednaka je udaljenosti točke B do A, tj. $d(A, B) = d(B, A)$, $\forall A, B \in X$.
3. $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$, $\forall A, B, C \in X$.

Dvodimenzionalni **euklidski prostor** E_2 možemo definirati kao skup svih uređenih parova realnih brojeva, tj. skup $\mathbb{R}^2$, pri čemu udaljenost definiramo za bilo koje dvije točke $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2) \in E_2$ prema Pitagorinom teoremu:

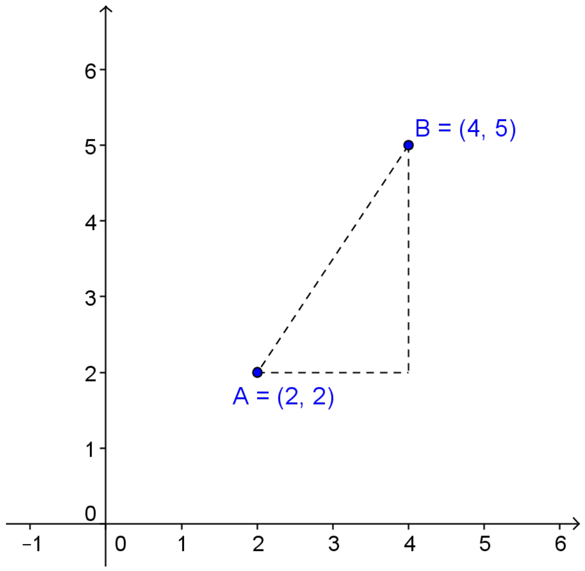
$$d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Dvodimenzionalni **taxicab prostor** T_2 sadrži iste točke kao i euklidski prostor. Udaljenost u taxicab prostoru je definirana za bilo koji par točaka A, $B \in \mathbb{R}^2$ kao:

$$d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Primjer. Neka je $A(2, 2)$ i $B(4, 5)$. Tada A i B možemo prikazati u koordinatnom sustavu (vidi Sliku 2.1). Provjerimo sada jesu li zadovoljena svojstva funkcije za mjerenje udaljenosti u taxicab geometriji:

1. $d(A, B) = |2 - 4| + |2 - 5| = |-2| + |-3| = 2 + 3 = 5 \geq 0$



Slika 2.1: Točke A i B u koordinatnom sustavu

2. $d(B, A) = |4 - 2| + |5 - 2| = 2 + 3 = 5 = d(A, B)$
3. Neka je $C(5, 3)$. Tada: $d(A, B) + d(B, C) = 5 + (|4 - 5| + |5 - 3|) = 5 + 3 = 8 \geq |2 - 5| + |2 - 3| = 3 + 1 = 4 = d(A, C)$

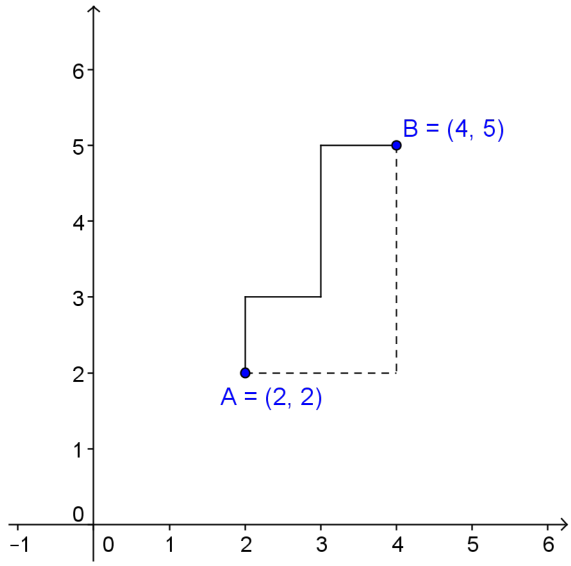
Može se pokazati da su svojstva zadovoljena za bilo koje točke.

Dokaz. Neka su $A, B \in \mathbb{R}^2$.

1. $d(A, B) \geq 0$, jer je zbroj apsolutnih vrijednosti za koji vrijedi $|a_1 - b_1| \geq 0$, $|a_2 - b_2| \geq 0$ $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow |a_1 - b_1| = 0$ i $|a_2 - b_2| = 0$, tj. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 \Leftrightarrow A = B$.
2. Simetričnost očito vrijedi, jer vrijedi $|-x| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Tvrdimo $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |b_1 - c_1| + |b_2 - c_2| \geq |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2|$. Za apsolutnu vrijednost općenito vrijedi nejednakost trokuta, tj. $|x + y| \leq |x| + |y|$ pa slijedi $|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + |b - c|$

□

U ovom je primjeru euklidska udaljenost tih dviju točaka $\sqrt{13}$, dok je taxicab udaljenost 5. Primijetimo sljedeće, ako su A i B uglovi ulica u „idealnom” gradu tada postoji više različitih puteva kojima možemo doći od A do B. Primjer dva takva različita puta imamo na Slici 2.2. Ukoliko moramo ostati na ulicama grada i ne možemo se kretati dijagonalno kroz blokove, najkraći put od A do B je svakih 5 blokova.



Slika 2.2: Dva različita puta od točke A do B

Jedan primjer na kojem možemo vidjeti efekt takve definicije udaljenosti je kroz promatranje različitih, a sličnih geometrijskih likova, kao što su krugovi, elipse, hiperbole i parabole.

2.1 Krug i kružnica

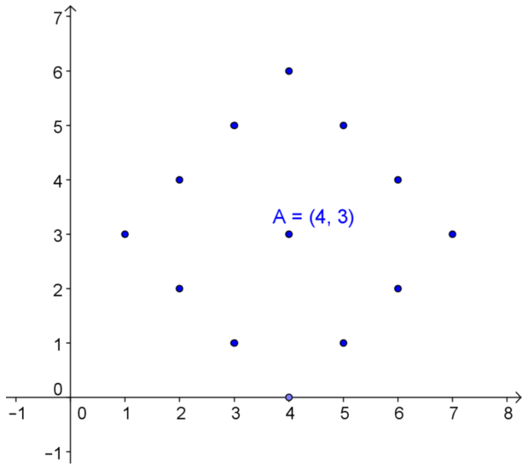
U analitičkoj geometriji definiramo kružnicu kao skup točaka u $\mathbb{R}^2$ koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke. Ako definiramo udaljenost kao u euklidskoj geometriji kružnice su „okrugle”. No, mogli bismo se iznenaditi izgledom kružnice i kruga u taxicab geometriji. Pogledajmo razmještaj cjelobrojnih točaka t-kružnice s centrom u $A(4, 3)$, radijusa 3 na Slici 2.3.
Analitički, t-krug s centrom $C = (h, k)$ i radijusom r je skup sljedećih točaka:

$$\{P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : |p_1 - h| + |p_2 - k| \leq r\},$$

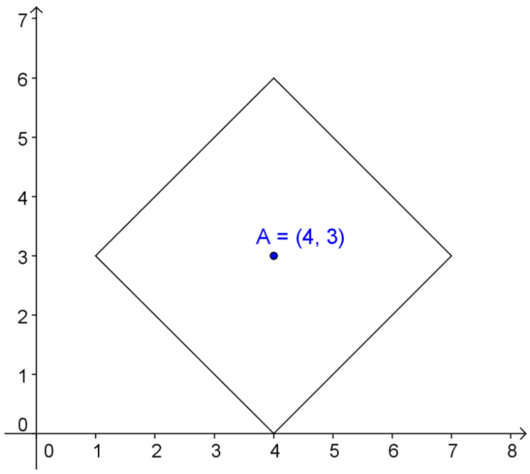
a t-kružnica s centrom $C = (h, k)$ i radijusom r je skup točaka:

$$\{P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : |p_1 - h| + |p_2 - k| = r\}.$$

Ovime je t-kružnica opisana kao unija 4 dužine sa krajnjim točkama u $(h, k \pm r)$ i $(h \pm r, k)$. Svaka od ovih dužina ima nagib ± 1. Čitavu t-kružnicu imamo na Slici 2.4. Definiramo li konstantu π_T kao omjer opsega i promjera kružnice, zanimljivo je da tada π_T iznosi 4. Dakle, broj 4 u taxicab geometriji je analogon konstante π. Također je zanimljivo da



Slika 2.3: Cjelobrojne točke t-kružnice s centrom A(4,3) radijusa 3



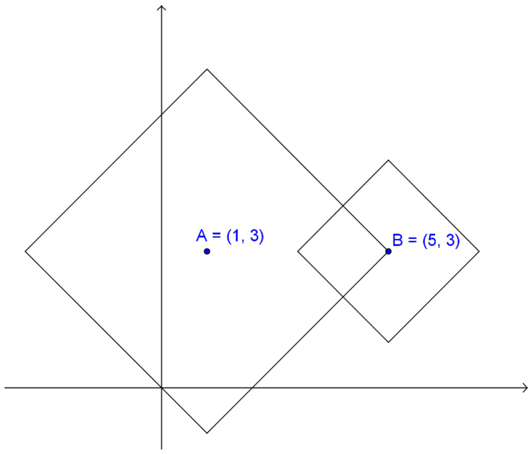
Slika 2.4: T-kružnica s centrom A(4,3) radijusa 3

za razliku od euklidske geometrije, gdje se dvije različite kružnice sijeku u najviše dvije točke, u taxicab geometriji se dvije kružnice mogu sijeći u dvije točke ili duž jedne ili dvije dužine (vidi Slike 2.5, 2.6 i 2.7).

2.2 Elipsa

Definicija 2.2.1. *Neka su A i B dvije čvrste točke u $\mathbb{R}^2$, tada definiramo elipsu kao:*

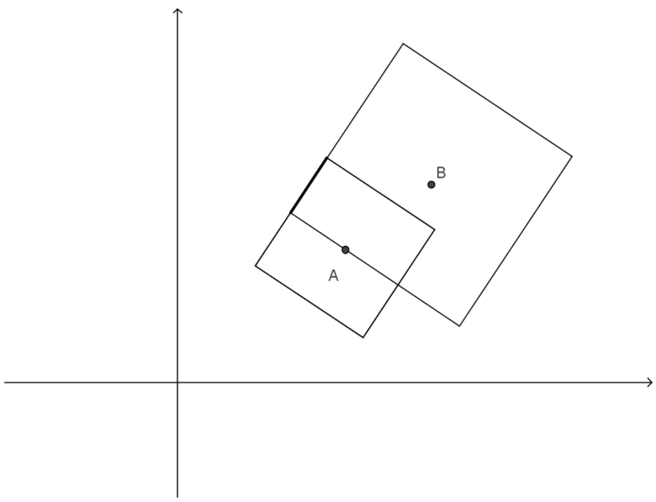
$$\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, A) + d(P, B) = const\}.$$



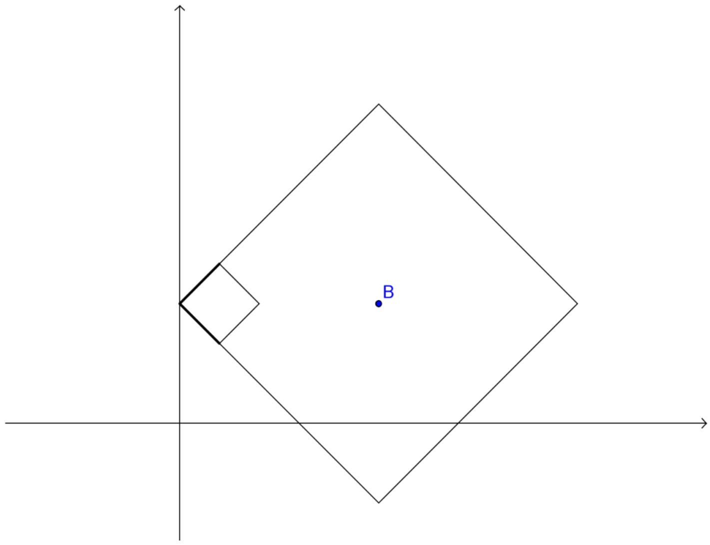
Slika 2.5: T-kružnice s radijusima 4 i 2 - sijeku se u dvije točke

Pritom točke A i B zovemo ***fokusi (žarišta)*** *elipse.*

Sad već možemo pretpostaviti kako će se izgled elipse u taxicab geometriji razlikovati od izgleda u euklidskoj geometriji. U euklidskoj geometriji konstruiramo elipsu vrtlarskom konstrukcijom, te ćemo ovdje izvesti njezin taxicab analogon. Krauss je predložio sljedeću metodu crtanja t-elipse.
Neka su dane točke $A(1,3)$ i $B(5,3)$ te neka je zadano $c = 6$. Treba nacrtati t-elipsu.

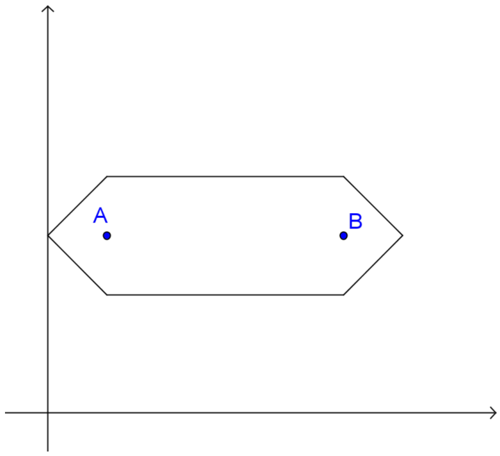


Slika 2.6: T-kružnice s radijusima 5 i 1 - sijeku se po jednoj dužini



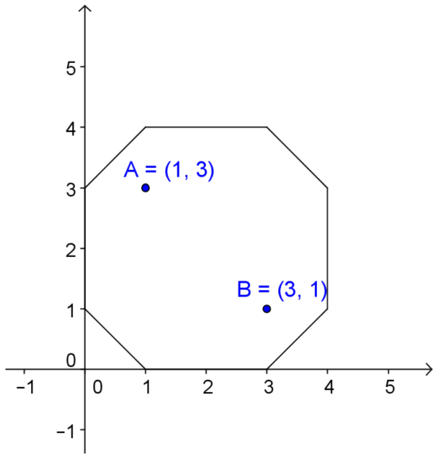
Slika 2.7: T-kružnice s radijusima 5 i 1 - sijeku se po dvije dužine

Rješenje. Krećemo s crtanjem dviju kružnica radijusa 4 i 2 (jer je $6 = 4 + 2$), vidi Sliku 2.5. Sva sjecišta tih dviju kružnica biti će udaljena od A za 4, a od B za 2, stoga se ona nalaze na traženoj elipsi. Dalje nastavljamo isti postupak s kružnicama različitih radijusa čiji će zbroj biti jednak 6. Tako dobivamo ostale točke elipse. Pogledajmo sada što će se desiti uzmemo li za vrijednosti radijusa 5 i 1 (Slika 2.7). Ove dvije kružnice sijeku se u dvije strane manje kružnice. Eksperimentirajući s kružnicama različitih radijusa na koncu dobivamo traženu elipsu (Slika 2.8).



Slika 2.8: T-elipsa

U ovom smo primjeru dobili da je elipsa u taxicab geometriji zapravo šesterokut. No to ne znači da su sve t-elipse šesterokuti. Pogledamo li npr. elipsu sa fokusima u $A(1, 3)$ i $B(3, 1)$ te kojoj je $c = 6$ primjećujemo da je ona oblika osmerokuta (vidi Sliku 2.9).



Slika 2.9: T-elipsa (oblik osmerokuta)

Možemo primijetiti i sljedeću sličnost s euklidskom geometrijom. U euklidskoj geometriji vrijedi što su fokusi elipse bliže, to je elipsa sve sličnija kružnici. Primijetimo da u koordinarnom sustavu bilo koje dvije točke su ili suprotni vrhovi pravokutnika čije su strane paralelne sa osima ili leže na pravcu paralelnom s jednom od osi (vidi Slike 2.8 i 2.9). Dakle, što se više A i B približavaju, to se više smanjuje taj pravokutnik, sve dok konačno A i B ne postanu jedna točka. Tada su i visina i širina tog pravokutnika jednake 0. Pogledamo li ponovo Slike 2.8 i 2.9 možemo primijetiti odnos između vertikalne i horizontalne strane t-elipse te malog pravokutnika određenog fokusima. Što su fokusi bliže, to je pravokutnik manji te se horizontalna i vertikalna strana t-elipse smanjuju, sve dok oba fokusa ne padnu u istu točku čime t-elipsa postaje savršena t-kružnica.

2.3 Hiperbola

Definicija 2.3.1. *Neka su A i B dvije čvrste točke u $\mathbb{R}^2$, tada definiramo hiperbolu kao:*

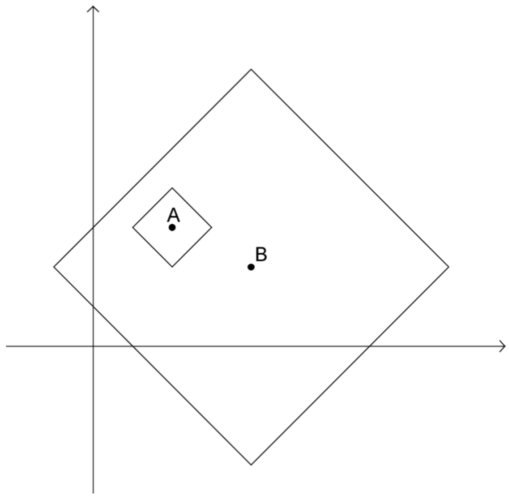
$$\{P \in \mathbb{R}^2 : |d(P, A) - d(P, B)| = const\}.$$

*Pritom točke A i B zovemo **fokusi (žarišta)** hiperbole.*

S obzirom da je konstanta jednaka apsolutnoj vrijednosti razlike dviju udaljenosti, najmanja moguća vrijednost te konstante je 0, stoga vrijedi:

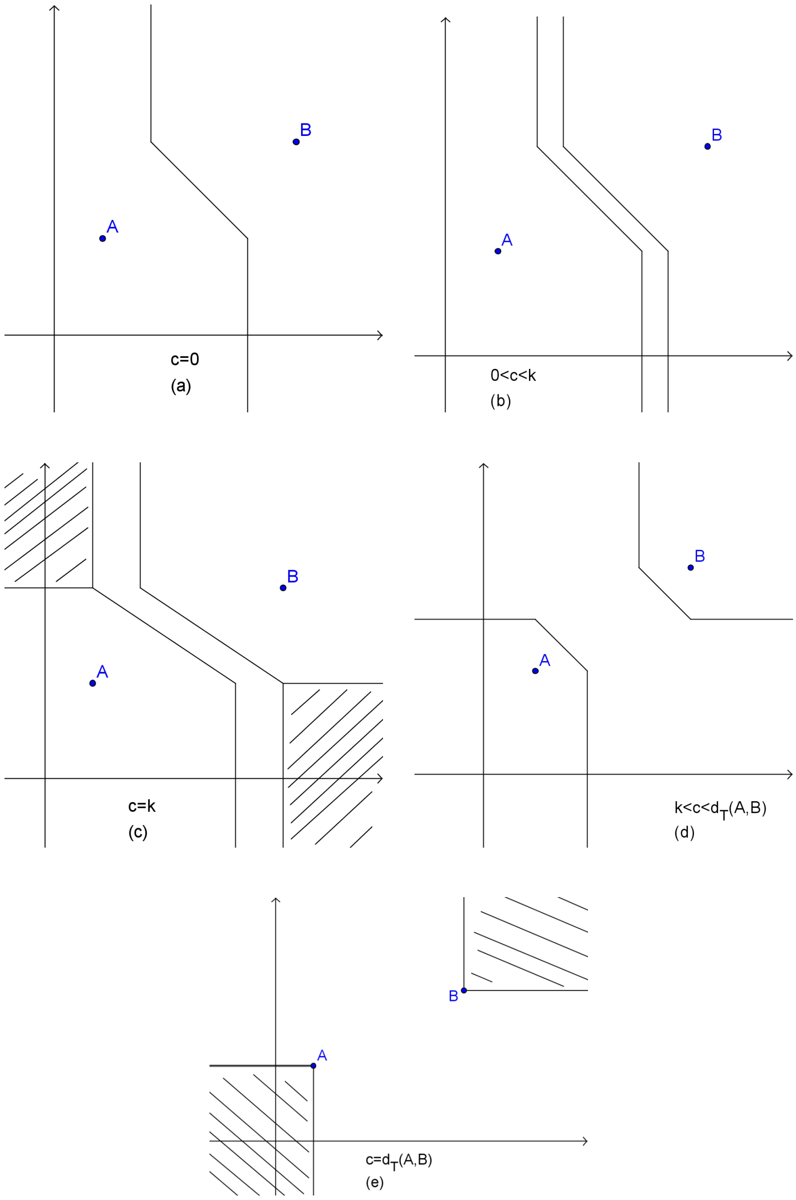
$$\{P \in \mathbb{R}^2 : |d(P, A) - d(P, B)| = 0\} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, A) = d(P, B)\}.$$

Ovaj skup nam u E_2 obično predstavlja simetralu dužine $\overline{AB}$, no u T_2 simetrala ne mora biti ravna linija.
Da bismo nacrtali t-hiperbolu koristit ćemo metodu sličnu onoj za crtanje t-elipse. Moramo pronaći sjecišta parova t-kružnica čija su središta u A i B, a radijusi r_A i r_B, redom, te vrijedi $|r_A - r_B| = const.$



Slika 2.10: T-hiperbola je prazan skup

Što će se dogoditi ako je $const \geq d(A, B)$? U tom slučaju t-kružnice se neće sijeći (vidi Sliku 2.10) te će t-hiperbola za bilo koji $c > d(A, B)$ biti prazan skup (to vrijedi bilo za d_E ili d_T). To znači da je konstanta ograničena ovako: $0 \leq const \leq d(A, B)$.
Dok oblik t-elipse ovisi samo o veličini pravokutnika određenog fokusima, oblik t-hiperbole ovisi i o veličini konstante koja je u relaciji s duljinama stranica pravokutnika. Tj. definiramo li $k = |a_1 - b_1| - |a_2 - b_2|$, tada oblik t-hiperbole djelomično ovisi o tome je li c manji, jednak ili veći od k (vidi Sliku 2.11).
Što ako je c jednak k ili $d_T(A, B)$? Svaki par t-kružnica sa središtima u A i B, redom, čiji se radijusi razlikuju ili za k ili za $d_T(A, B)$ sijeku se, ne u jednoj ili dvjema točkama, već u segmentu. U oba slučaja t-hiperbola nije dio pravca i zatamnjeni dijelovi su dijelovi t-hiperbole (vidi Sliku 2.11 c, e). Nadalje, A i B mogu biti odabrani tako da je $k = 0$. Tada simetrala od AB nije pravac.



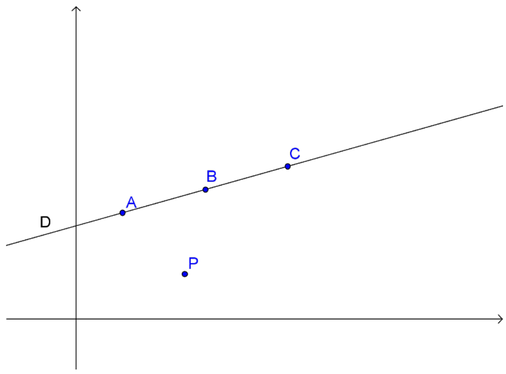
Slika 2.11: Oblici t-hiperbole

2.4 Parabola

Definicija 2.4.1. *Neka je dana točka F, fokus (žarište), i pravac D kojeg zovemo direktrisa (ravnalica). Tada definiramo parabolu kao*

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F) = d(P, D)\}.$$

Ova definicija nameće pitanje kako ćemo mjeriti udaljenost točke od pravca. Poznato je da u E_2 spuštamo okomicu iz te točke na pravac. No u T_2 ta okomica ne mora biti ravna linija, stoga ne možemo tako tražiti rješenje. Želimo definirati udaljenost od točke P do pravca D kao najkraći od svih mogućih puteva od P do D ili kao udaljenost od P do točke na D koja je najbliže P. Postoji li dobar i sistematičan način za ovo? Koja je od točaka A, B, C najbliža P (Slika 2.12)? Postoji li neka točka bliža od navedenih?



Slika 2.12: Parabola

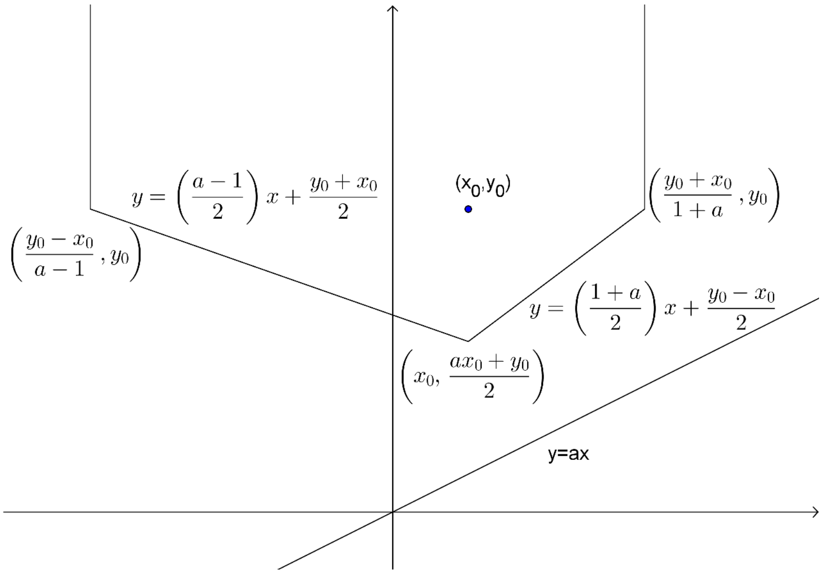
Zaključak:
Ovo poglavlje stavlja pred nas dva pitanja:

1. Kako mjeriti udaljenost od točke do pravca u T_2?
2. Kako izgledaju parabole u T_2?

Pokušat ćemo dati odgovor na ta dva pitanja. Zato ćemo iskazati i dokazati sljedeća dva teorema.

Teorem 2.4.2. *Najkraća udaljenost od točke (x_1, y_1) do pravca $Ax + By + C = 0$ u taxicab geometriji je horizontalna udaljenost od točke do pravca ako $1 < -A/B < \infty$ ili $-\infty < -A/B < -1$, a vertikalna udaljenost od točke do pravca ako $0 < -A/B < 1$ ili $-1 < -A/B < 0$. Ako je $|-A/B| = 1$ tada je svejedno uzmemo li vertikalnu ili horizontalnu udaljenost. Nagib linije je $-A/B$.*

Dokaz. 1. SLUČAJ:
$1 < -A/B < \infty$ ili $0 < -A/B < 1$
Slika 2.13 ukazuje da za l_1, $1 < -A/B < \infty$, l_2 ima svojstvo $0 < -A/B < 1$. Promotrimo l_1. Želimo pokazati da je $k + g < q + k$ ili $g < q$. Vrijedi da je $\alpha < 45°$, stoga je $g < q$. Promotrimo li l_2, analogno pokazujemo da je $e + c < e + b$.



Slika 2.13: Parabola 1

2. SLUČAJ:
$-\infty < -A/B < -1$ ili $-1 < -A/B < 0$
Slika 2.14 ukazuje da za l_1, $-\infty < -A/B < -1$, l_2 ima svojstvo $-1 < -A/B < 0$. Ovaj dio dokaza je analogan 1. slučaju. □

Krećemo na rješavanje drugog problema. Parabolu definiramo kao skup točaka koje su jednako udaljene od dane točke (x_1, y_1) koju zovemo fokus i danog pravca $y = ax + b$ koji zovemo direktrisa. S obzirom da je t-udaljenost nepromjenjiva ako je translatiramo, možemo pretpostaviti da direktrisa prolazi kroz kroz ishodište, tj. $b = 0$.
Tada imamo 4 slučaja:

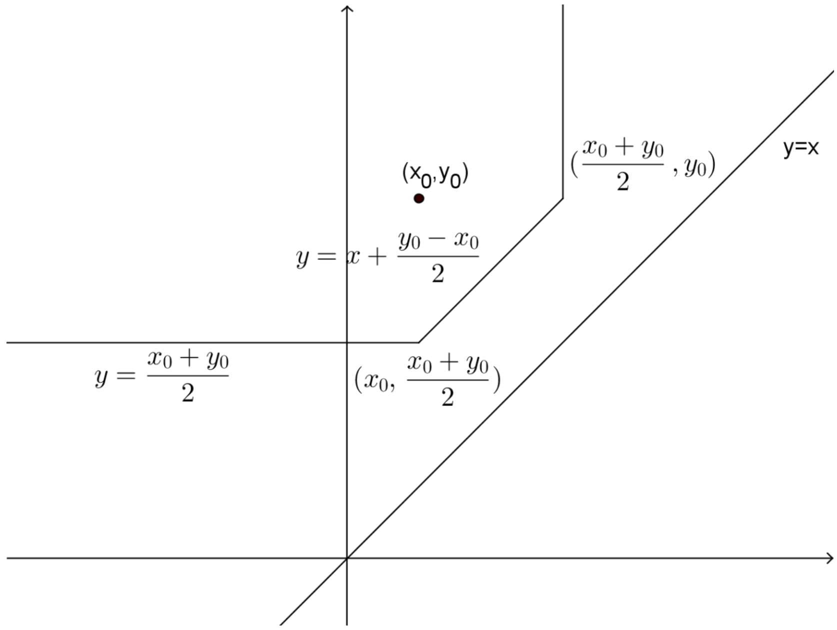
i.) $y_0 > ax_0$, $|a| < 1$

ii.) $y_0 < ax_0$, $|a| < 1$

iii.) $y_0 > ax_0$, $|a| > 1$

iv.) $y_0 < ax_0$, $|a| > 1$

Primijetimo sada da ne trebamo riješiti sva 4 slučaja. Dovoljno je riješiti prvi slučaj, a zatim ostale rješavamo kao prvi s određenim transformacijama. Problem stavljamo u novi $\mu\nu$ - koordinatni sustav, koristimo rješenje prvog slučaja te se na kraju vraćamo u stari koordinatni sustav. Potrebne transformacije po slučajevima su:



Slika 2.14: Parabola 2

slučaj (ii)	$\mu = x,$	$\nu = -y$
slučaj (iii)	$\mu = y,$	$\nu = -x$
slučaj (iv)	$\mu = -y,$	$\nu = -x$

Teorem 2.4.3. *Parabola u taxicab geometriji s fokusom* (x_0, y_0) *i direktrisom* $y = ax$*, pri čemu* $y_0 > ax_0$ *i* $|a| < 1$*, opisana je na Slici 2.13.*

Dokaz. Primijetimo da je na Slici 2.13, $a > 0$, no rješenje ne ovisi o tome. Također primijetimo da je t-udaljenost između točke (x, y) i pravca jednaka $|y - ax|$, jer je $|a| < 1$. Odnosno, ta udaljenost je paralelna sa y-osi.
Očito je da parabola mora biti s iste strane pravca s koje se nalazi točka. S obzirom da je $y_0 > ax_0$, parabola se nalazi iznad pravca $y = ax$.
Međutim, t-parabola ne može biti opisana jednom jednadžbom kao što je slučaj u euklidskoj geometriji. Zbog toga, izvod je proveden za različite dijelove ravnine, iznad pravca $y = ax$.
1. $\underline{x = x_0, ax_0 < y < y_0}$
Jasno je da točka parabole za $x = X_0$ mora ležati na pola puta između direktrise $y = ax$ i

fokusa (x_0, y_0) vertikalno. Neka je $d_p = d[(x, y), (x_0, y_0)]$, a $d_l = d[(x, y), y = ax]$. Tada:

$$\begin{aligned} d_p &= |y_0 - y| + |x_0| - x \\ &= |y_0 - y| + |x_0 - x_0| \\ &= y_0 - y, \end{aligned} \tag{2.1}$$

jer je $y_0 > y$; i

$$d_l = |y - ax| = |y - ax_0| = y - ax_0,$$

jer je $y > ax_0$.

2. $\underline{x > x_0 \text{ i } ax < y \leq y_0}$
Sada imamo:

$$d_p = |y_0 - y| + |x_0 - x| = y_0 - y + x - x_0$$

i

$$d_l = y - ax$$

Tada

$$d_p = d_l$$

akko

$$y_0 - y + x - x_0 = y - ax$$

akko

$$y = \frac{1 + a}{2} \cdot x + \frac{y_0 - x_0}{2}.$$

Ova jednadžba vrijedi za pravac s pozitivnim nagibom. Dio je parabole tako dugo dok je manji ili jednak y_0. Pronaći ćemo sada najveći x za koji ovo vrijedi:

$$y = \frac{1 + a}{2} \cdot x + \frac{y_0 - x_0}{2}$$

$$x = \frac{y_0 + x_0}{1 + a}.$$

3. $\underline{x > \frac{y_0+x_0}{1+a}}$
Imamo:

$$\begin{aligned} d_p &= |y_0 - y| + |x - x_0| \\ &= |y_0 - y| + \left(x - \frac{y_0 + x_0}{1 + a}\right) + \left(\frac{y_0 + x_0}{1 + a} - x_0\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

i

$$d_l = y_0 - \left(-\frac{y_0 + x_0}{1 + a}\right)a - a\left(x - \frac{y_0 + x_0}{1 + a}\right) + (y - y_0).$$

Jer $\left(\frac{y_0+x_0}{1+a}, y_0\right)$ je na paraboli,

$$\frac{y_0 + x_0}{1 + a} - x_0 = y_0 - \left(\frac{y_0 + x_0}{1 + a}\right)a.$$

Također $y - y_0 \leq |y_0 - y|$ i

$$-a\left(x - \frac{y_0 + x_0}{1 + a}\right) < x - \frac{y_0 + x_0}{1 + a}$$

jer $|a| < 1$ i $x - \frac{y_0+x_0}{1+a} > 0$. Stoga, ovdje imamo: $d_l < d_p$.
Dakle, nijedna točka odavde ne pripada t-paraboli.

4. $\underline{x < x_0 \text{ i } ax < y \leq y}$
Sada imamo:

$$\begin{aligned} d_p &= |y_0 - y| + |x_0 - x| \\ &= y_0 - y + x_0 - x \end{aligned} \tag{2.3}$$

i

$$d_l = y - ax.$$

Tada

$$d_p = d_l$$

akko

$$y_0 - y + x_0 - x = y - ax$$

akko

$$y = \left(\frac{a - 1}{2}\right)x + \frac{y_0 + x_0}{2}$$

Ovaj pravac ima negativni nagib i dio je parabole tako dugo dok je manji ili jednak y_0. Želimo pronaći najmanji x za koji ovo vrijedi, te iz

$$y = \left(\frac{a - 1}{2}\right)x + \frac{y_0 + x_0}{2}$$

dobivamo

$$x = \frac{y_0 - x_0}{a - 1}$$

5.$\underline{x < \frac{y_0-x_0}{a-1}}$
U ovom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} d_p &= |y_0 - y| + |x_0 - x| \\ &= y_0 - y + x_0 - x \\ &= |y_0 - y| + x_0 - \frac{y_0 - x_0}{a - 1} + \frac{y_0 - x_0}{a - 1} - x \end{aligned} \tag{2.4}$$

i

$$d_l = y_0 - \left(\frac{y_0 - x_0}{a-1}\right)a + a\left(\frac{y_0 - x_0}{a-1} - x\right) + y - y_0.$$

Jer se $\left(\frac{y_0-x_0}{a-1}, y_0\right)$ nalazi na paraboli, vrijedi

$$\frac{y_0 - x_0}{a-1} - x_0 = y_0 - \left(\frac{y_0 - x_0}{a-1}\right)a.$$

Također $y - y_0 \leq |y_0 - y|$ i

$$a\left(\frac{y_0 - x_0}{a-1} - x\right) < \frac{y_0 - x_0}{a-1} - x$$

jer $|a| < 1$ i $\frac{y_0-x_0}{a-1} - x > 0$.
Stoga, ovdje imamo: $d_l < d_p$ te nijedna točka odavde ne pripada t-paraboli.

6. $\underline{\frac{y_0-x_0}{a-1} \leq x \leq x_0 \text{ i } y > y_0}$
Ovdje imamo:

$$\begin{aligned} d_p &= |y - y_0| + |x - x_0| \\ &= y - y_0 + x - x_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

i

$$d_l = y - ax.$$

Tada

$$d_p = d_l$$

akko

$$y - y_0 + x_0 - x = y - ax$$

akko

$$x = \frac{y_0 - x_0}{a-1}.$$

Točke na paraboli u ovom dijelu čine polupravac $x = \frac{y_0-x_0}{a-1}$ za $y > y_0$.

7. $\underline{x_0 \leq x < \frac{y_0+x_0}{1+a} \text{ i } y > y_0}$
Sada imamo:

$$\begin{aligned} d_p &= |y_0 - y| + |x_0 - x| \\ &= y - y_0 + x - x_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

i

$$d_l = y - ax.$$

Tada

$$d_p = d_l$$

akko

$$y - y_0 + x - x_0 = y - ax$$

akko

$$x = \frac{y_0 + x_0}{1 + a}.$$

Točke na paraboli u ovom dijelu čine polupravac
$x = \frac{y_0+x_0}{1+a}$ za $y > y_0$.

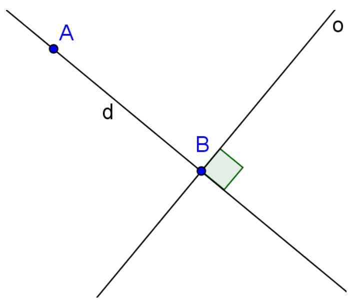
<u>Specijalni slučaj $a = 1$</u>
T-parabola izgleda drukčije kad je za direktrisu $y = ax$, $|a| = 1$. Opis ponovo ovisi o tome je li $y_0 > ax_0$ ili $y_0 < ax_0$. Ti slučajevi su granični slučajevi prethodno opisanih slučaja. Slika 2.14 ilustrira slučaj u kojem je $y_0 > ax_0$ i $a > 0$. □

Poglavlje 3

T-udaljenosti

Način određivanja udaljenosti od točke do pravca već smo sreli u prethodnom poglavlju. U ovom poglavlju, sistematizirat ćemo rečeno i proučiti t-analogon simetrale dužine.

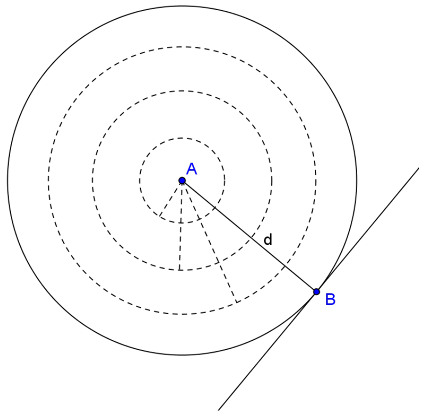
3.1 Udaljenost točke od pravca



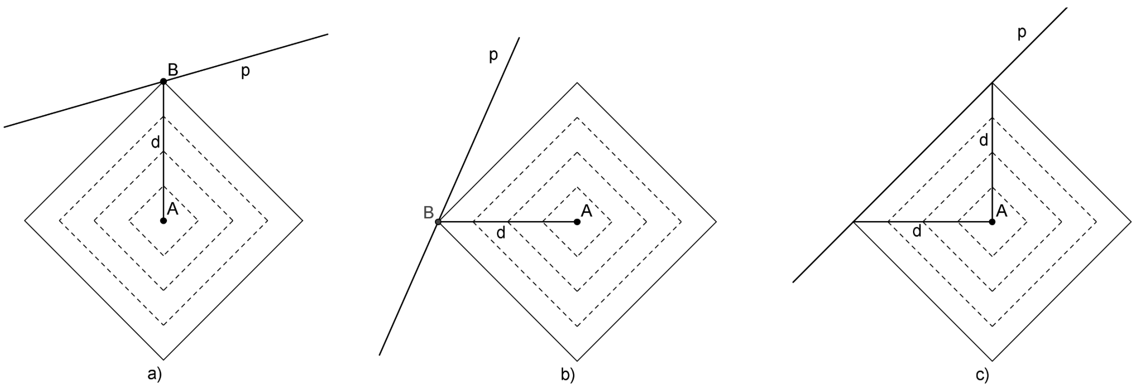
Slika 3.1: Euklidska udaljenost od točke A do B - siječe u jednoj točki

Kada u euklidskoj geometriji tražimo udaljenost točke od pravca radimo to kroz nekoliko koraka. Prvo spustimo okomicu iz zadane točke na zadani pravac, zatim tražimo sjecište tih dvaju pravaca te na kraju mjerimo udaljenost od zadane točke do točke sjecišta (Slika 3.1). No, postoji i drugi način na koji možemo saznati kolika je ta udaljenost, a to je da tražimo kružnicu kojoj je centar zadana točka, a čija je tangenta zadani pravac („širenje kružnica"). Tada je udaljenost točke od pravca jednaka radijusu te kružnice (Slika 3.2). Ovaj način je pogodan za nalaženje udaljenosti i u taxicab geometriji. Dakle, tražimo kružnicu oko zadane točke koja dira zadani pravac. Pogledajmo Sliku 3.3 a). Primjećujemo da je udaljenost točke od pravca okomita udaljenost od točke do pravca. No također možemo primijetiti kako je nagib zadanog pravca „plitak", tj. apsolutna vrijednost mu je manja od

1 pa se nameće pitanje što kad je nagib pravca veći, odnosno „strm” kao na Slici 3.3 b). Apsolutna vrijednost tog pravca veća je od 1 te je tražena udaljenost zapravo horizontalna udaljenost od točke do pravca. Sada možemo zaključiti da položaj pravca utječe na to kako ćemo računati udaljenost zadane točke od tog pravca.



Slika 3.2: Udaljenost od točke A do B - „širenje kružnica”



Slika 3.3: Vizualizacija t-udaljenosti „širenjem kružnica”. Tri slučaja za a) plitak, b) strm, c) dijagonalni pravac

Sada još preostaje vidjeti što se događa kada je nagib pravca jednak 1 (ili -1). To nam pokazuje Slika 3.3 c). S obzirom da kružnica ne dira pravac, već se jedan dio kružnice preklapa s pravcem, postoji beskonačno putova koji predstavljaju udaljenost točke od pravca u tom slučaju.

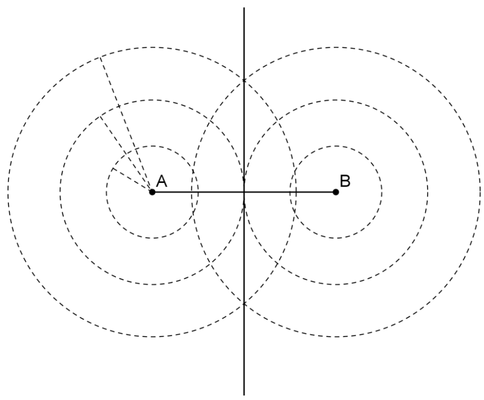
Zaključujemo, udaljenost točke od pravca računamo ovako:

- Ako je pravac „plitak”, tj. apsolutna vrijednost nagiba tog pravca manja je od 1, tada mjerimo udaljenost duž vertikalnog puta.
- Ako je pravac „strm”, tj. apsolutna vrijednost nagiba tog pravca veća je od 1, tada mjerimo udaljenost duž horizontalnog puta.
- Ako je apsolutna vrijednost nagiba pravca jednaka 1, tada mjerimo udaljenost bilo duž vertikalnog ili horizontalnog puta.

Možemo primijetiti da to slijedi i iz Teorema 2.4.2.

3.2 Skup polovišnih točaka dviju točaka

Skup polovišnih točaka u euklidskoj geometriji zapravo je simetrala dužine koju čine te dvije točke. Do te simetrale lako možemo doći imitirajući tzv. širenje kružnica spomenuto u prethodnom odjeljku (vidi Sliku 3.4). Koristimo li taj način u taxicab geometriji

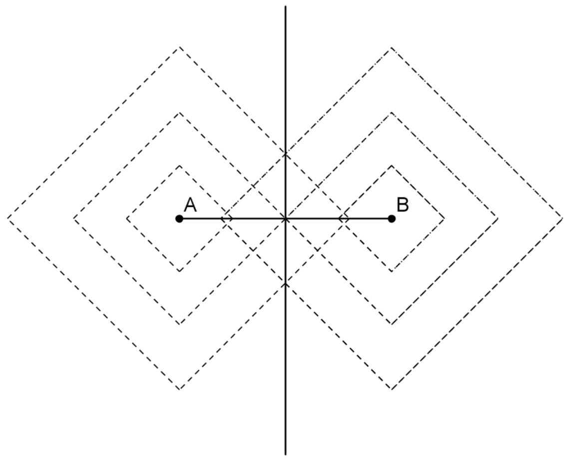


Slika 3.4: Stvaranje skupa polovišnih točaka u euklidskoj geometriji širenjem kružnica

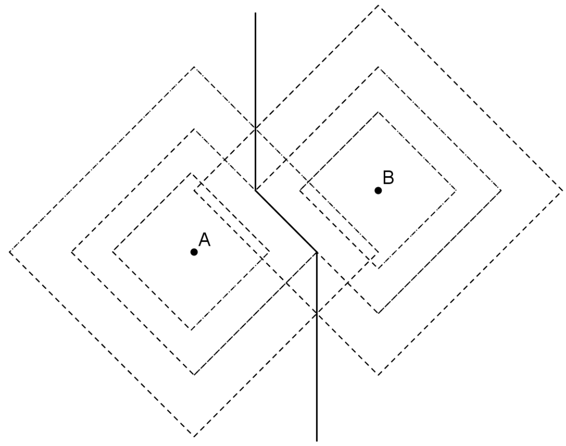
pojavljuju se četiri različita slučaja s obzirom na to kako se sijeku t-kružnice. Krenimo redom:

1. slučaj baziramo na Slici 3.5. Ovaj slučaj daje rezultat kao i euklidska geometrija. Kada je dužina koja spaja točke horizontalna ili vertikalna, tada t-kružnice koje se šire, dodiruju se u točno jednoj točki, a to je polovište dužine $\overline{AB}$. Kako se t-kružnice nastavljaju širiti, dalje se sijeku u točno dvije točke. Tako nastaje isti pravac kao i u euklidskoj geometriji, tj. simetrala dužine $\overline{AB}$.

2. slučaj: dužina $\overline{AB}$ nije ni horizontalna ni vertikalna (vidi Sliku 3.6). T-kružnice se u početku sijeku u dužini koja prolazi polovištem dužine $\overline{AB}$. Kako se t-kružnice nastavljaju



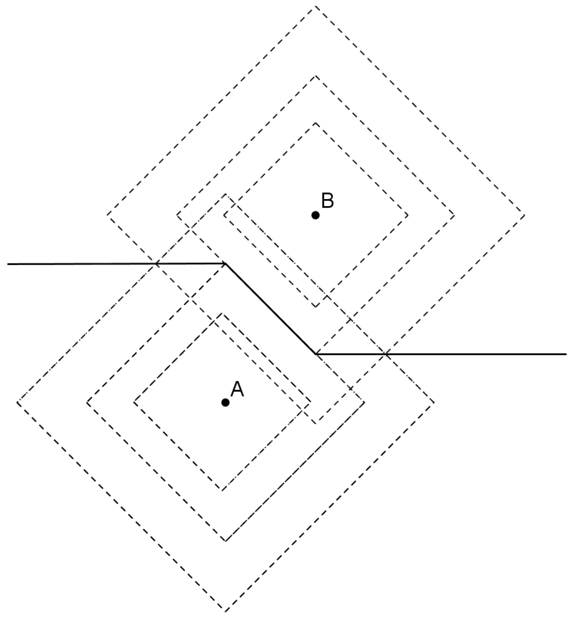
Slika 3.5: Skup polovišnih točaka u taxicab geometriji - 1. slučaj



Slika 3.6: Skup polovišnih točaka u taxicab geometriji - 2. slučaj

širiti, dalje se sijeku u točno dvije točke. T-kružnice dalje formiraju dvije zrake u suprotnim smjerovima koje se udaljavaju od početnih točaka.
Primijetimo sada kako su u ovom slučaju zapravo sadržana dva slučaja. Zrake koje su formirane siječenjem t-kružnica koje se šire, imaju različite orijentacije s obzirom na nagib dužine $\overline{AB}$. Na Slici 3.6 prikazan je slučaj kada je nagib manji od 1, a na Slici 3.7 - (3. slučaj) je nagib veći od 1.

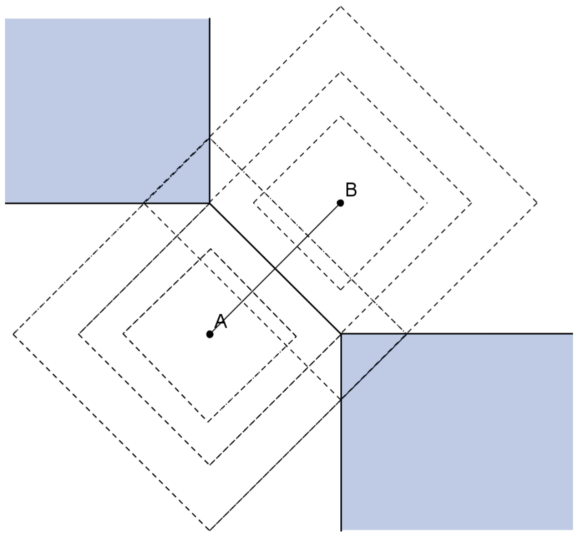
4. slučaj: sada jedino preostaje vidjeti što kada je nagib dužine $\overline{AB}$ jednak 1 (vidi Sliku



Slika 3.7: Skup polovišnih točaka u taxicab geometriji - 3. slučaj

3.8). T-kružnice se i ovdje prvo sijeku u dužini, no kako se nastavlja širenje t-kružnica tako se one nastavljaju sijeći u dužinama, a ne kao u prethodna dva slučaja u točkama. Time nastaje skup polovišnih točaka koji se sastoji od dva skupa točaka povezanih dijagonalnom linijom.

Dakle, samo kad je dužina koja spaja dvije zadane točke horizontalna ili vertikalna, skup polovišnih točaka ispada jednostavna linija (pravac) kao i u euklidskoj geometriji. U drugim slučajima skup polovišnih točaka je po dijelovima linija ili pak u najgorem slučaju čak i nije linija već skup točaka. No, kao i u euklidskoj geometriji, skup polovišnih točaka uvijek uključuje polovište dužine koja spaja te dvije točke.



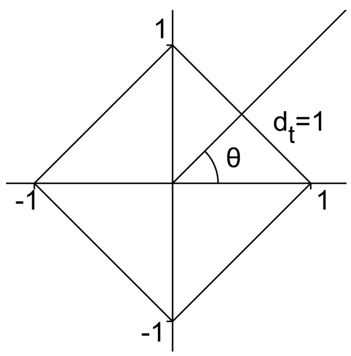
Slika 3.8: Skup polovišnih točaka u taxicab geometriji - 4. slučaj

Poglavlje 4

T-kut

Općenito, mjeru kuta možemo definirati kao duljinu pripadajućeg luka jedinične kružnice sa središtem u vrhu kuta. Koristimo li istu definiciju u taxicab geometriji, možemo primijetiti da će se mjera kuta razlikovati od mjere kuta u euklidskoj geometriji, jer kako smo ranije ustanovili, t-kružnice se razlikuju od kružnica u euklidskoj geometriji.
Krenut ćemo s definicijom jedinice za mjeru kuta.

Definicija 4.0.1. *Jedan t-radijan je mjera kuta čiji vrh je središte jedinične t-kružnice i kojim krakovi određuju luk jedinične t-duljine (taxicab duljina 1). T-mjera kuta je broj t-radijana određenih zadanim lukovima jedinične t-kružnice (vidi Sliku 4.1).*



Slika 4.1: T-radijan

4.1 Prijelaz iz euklidske u taxicab mjeru kuta

Ukoliko se jedan krak kuta podudara s pozitivnim dijelom x-osi, kažemo da je kut u standardnom položaju (vidi Sliku 4.1). Označimo euklidsku (radijansku) mjeru tog kuta s

θ_e.

Teorem 4.1.1. *Šiljasti euklidski kut θ_e u standardnom položaju ima sljedeću taxicab mjeru:*

$$\theta = 2 - \frac{2}{1 + \mathrm{tg}_e\,\theta_e} = \frac{2\sin_e\theta_e}{\sin_e\theta_e + \cos_e\theta_e}$$

gdje e označava da se radi o euklidskoj veličini ili funkciji.

Dokaz. Drugi krak kuta je polupravac koji prolazi kroz ishodište s nagibom $\mathrm{tg}_e\,\theta_e$. Dakle, taxicab mjera θ euklidskog kuta jednaka je t-udaljenosti od $(1, 0)$ do sjecišta pravaca $y = -x + 1$ i $y = x\,\mathrm{tg}_e\,\theta_e$.
Za x-koordinatu sjecišta dobivamo

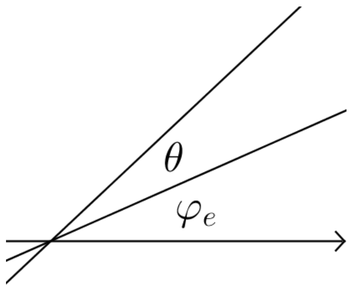
$$x_0 = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}_e\,\theta_e},$$

a y-koordinata je $y_0 = -x_0 + 1$. Sada možemo izračunati udaljenost od $(1, 0)$ do sjecišta pravaca

$$\theta = 1 - x_0 + y_0 = 2 - \frac{2}{1 + \mathrm{tg}_e\,\theta_e} = \frac{2\sin_e\theta_e}{\sin_e\theta_e + \cos_e\theta_e}.$$

□

Ukoliko kut nije u standardnom položaju, označimo sa φ_e euklidsku mjeru dopunjenog kuta do x-osi (tzv. referentni kut, vidi Sliku 4.2). Tada možemo izvesti opću formulu.



Slika 4.2: Kut θ i njegov referentni kut φ_e

Korolar 4.1.2. *Neka je kut θ_e koji nije u standardnom položaju, φ_e euklidska mjera referentnog kuta, te neka je θ potpuno sadržan u jednom kvadrantu, tada kut ima t-mjeru:*

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{2}{1 + \mathrm{tg}_e\,\phi_e} - \frac{2}{1 + \mathrm{tg}_e(\theta_e + \phi_e)} \\ &= \frac{2\sin_e\theta_e}{(\cos_e(\theta_e + \phi_e) + \sin_e(\theta_e + \phi_e))(\cos_e\phi_e + \sin_e\phi_e)}\end{aligned} \tag{4.1}$$

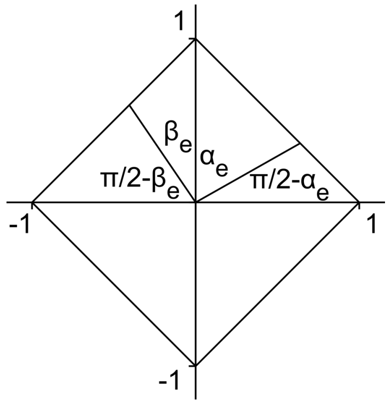
Da bismo dokazali ovaj korolar, prvo trebamo pronaći t-mjeru kutova $(\theta_e + \varphi_e)$ i φ_e u standardnom položaju, a zatim izračunati razliku.

Ovaj korolar povlači da će isti kut (u euklidskom smislu) u različitim položajima imati različite t-mjere. Taxicab kutovi jesu invarijantni translacijski, ali ne i rotacijski.
Taxicab mjeru ostalih kutova također možemo pronaći, no u nekim slučajima će biti kompliciranija, jer kutovi koji leže u dva ili više kvadranata obuhvaćaju krajeve jedinične kružnice.

Pravi kut

Pravi kut je kut čija je mjera $\pi/2$ radijana ili 90 stupnjeva. Ranije je spomenuto kako isti kut u različitim položajima ima različite t-mjere, no za prave kutove to ne vrijedi. Zaista, mjera pravog kuta ne ovisi o φ_e.

Teorem 4.1.3. *Taxicab mjera za bilo koji euklidski pravi kut iznosi* 2 *t-radijana.*



Slika 4.3: Pravi kut u taxicab geometriji

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka je θ_e euklidski pravi kut koji obuhvaća y-os. Kao na Slici 4.3, podijelimo kut θ na dva manja kuta, α_e i β_e s referentnim kutovima $\pi/2 - \alpha_e$ i $\pi/2 - \beta_e$. Vrijedi da je $\alpha_e = \pi/2 - \beta_e$ te $\cos(\pi/2 - \alpha_e) = \sin\alpha_e$ pa koristeći prethodni korolar slijedi da je mjera pravog kuta:

$$\begin{aligned}
\theta &= \alpha + \beta \\
&= \frac{2\sin_e \alpha_e}{(\cos_e \pi/2 + \sin_e \pi/2)(\cos_e(\pi/2 - \alpha_e) + \sin_e(\pi/2 - \alpha_e))} \\
&\quad + \frac{2\sin_e \beta_e}{(\cos_e \pi/2 + \sin_e \pi/2)(\cos_e(\pi/2 - \beta_e) + \sin_e(\pi/2 - \beta_e))} \\
&= \frac{2\sin_e \alpha_e}{\sin_e \alpha_e + \cos_e \alpha_e} + \frac{2\sin_e \beta_e}{\cos_e \alpha_e + \sin_e \alpha_e} \\
&= \frac{2\sin_e \alpha_e}{\sin_e \alpha_e + \cos_e \alpha_e} + \frac{2\sin_e(\pi/2 - \alpha_e)}{\cos_e \alpha_e + \sin_e \alpha_e} \\
&= \frac{2\sin_e \alpha_e}{\sin_e \alpha_e + \cos_e \alpha_e} + \frac{2\cos_e \alpha_e}{\cos_e \alpha_e + \sin_e \alpha_e} \\
&= \frac{2(\sin_e \alpha_e + \cos_e \alpha_e)}{\sin_e \alpha_e + \cos_e \alpha_e} \\
&= 2
\end{aligned} \tag{4.2}$$

□

Napomena: Primijetimo da iz prethodnog teorema slijedi da je broj 4 analogon broja π.

Duljina luka

Teorem 4.1.4. *Duljina s luka dobivena presjekom t-kružnice radijusa r sa središnjim kutom θ dana je formulom $s = r\theta$ (vidi Sliku 4.4).*

Dokaz. Polupravci $y = k_1 x$ i $y = k_2 x$ tvore kut θ. U taxicab geometriji on ima mjeru:

$$\theta = 2 - \frac{2}{1 + \mathrm{tg}_e\, \theta_e},$$

pri čemu $\mathrm{tg}_e\, \theta_e$ određuje smjer pravca $y = kx$ koji određuje θ. Dakle, $k = tg_e\theta_e$. Zanima nas čemu je k jednak u taxicab geometriji. Imamo:

$$\frac{2}{1 + \mathrm{tg}_e\, \theta_e} = 2 - \theta$$

odnosno

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{tg}_e\,\theta_e &= \frac{2}{2-\theta} \\ \mathrm{tg}_e\,\theta_e &= \frac{2}{2-\theta} - 1 \\ &= \frac{2-2+\theta}{2-\theta} \\ &= \frac{\theta}{2-\theta} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dalje imamo za x_1:

$$\begin{aligned} k_1 x &= -x + r \\ x(k_1+1) &= r \\ x_1 &= \frac{r}{k_1+1} \end{aligned}$$

Izrazimo k_1 kao u 4.3:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{r}{\frac{\varphi}{2-\varphi}+1} \\ &= \frac{r(2-\varphi)}{2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Analogno za x_2:

$$\begin{aligned} k_2 x &= -x + r \\ x(k_2+1) &= r \\ x_2 &= \frac{r}{k_2+1} \end{aligned}$$

Izrazimo k_2 kao u 4.3:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{r}{\frac{\varphi+\theta}{2-\varphi-\theta}+1} \\ &= \frac{r(2-\varphi-\theta)}{2-\varphi-\theta+\varphi+\theta} \\ &= \frac{r(2-\varphi-\theta)}{2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sada računamo:

$$s = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$s = |x_2 - x_1| \left(1 + \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} \right)$$

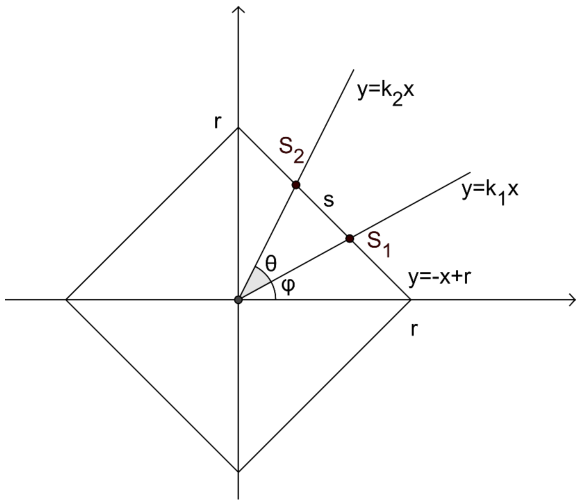
Primijetimo da je $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ koeficijent smjera pravca kojem pripadaju točke S_1 i S_2, a s obzirom da one leže na pravcu $y = -x + r$ tada on iznosi -1 pa imamo:

$$s = |x_2 - x_1|(1 + | - 1|)$$
$$s = 2|x_2 - x_1|$$

Sada uvrštavamo izraze koje smo dobili u 4.4 i 4.5 za x_1 i x_2, redom:

$$\begin{aligned} s &= 2 \cdot \frac{r}{2} |2 - \varphi - \theta - (2 - \theta)| \\ s &= r\theta \end{aligned} \tag{4.6}$$

□



Slika 4.4: Duljina luka kao produkt mjere središnjeg kuta i radijusa kružnice

4.2 Dijeljenje kuta

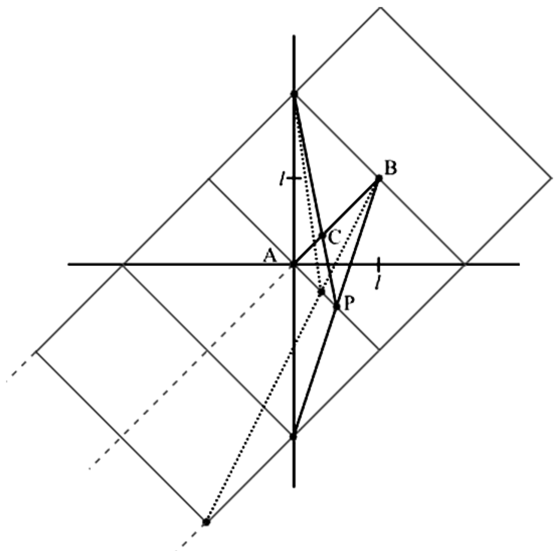
U srednjoj školi naučili smo kako podijeliti kut na dva dijela. Nadalje, upoznali smo se i s problemom trisekcije kuta i njegovom nerješivošću [1]. U taxicab geometriji ovaj

[1] 1837. Pierre Wantzel dokazao je da se kut ne može konstruktivno (pomoću ravnala i šestara) podijeliti na tri dijela.

je problem riješen zahvaljujući jednostavnosti t-kutova, koji su definirani kao segmenti pravca. T-kut možemo proizvoljno podijeliti na bilo koji broj jednakih kutova.
Dijeljenje t-kutova na proizvoljan broj jednakih dijelova prvi puta je bilo spomenuto u radu Thompsona i Draya o taxicab kutovima i trigonometriji. Kasnije je to ispitao Robert Dawson u članku o aksiomatskoj taxicab geometriji. Ipak, i dalje je nejasno može li se t-kut dijeliti proizvoljno sa samo taxicab konstrukcijama. Postoje mnoge euklidske konstrukcije za dijeljenje dužine na proizvoljno mnogo dijelova, stoga se one mogu koristiti za dijeljenje t-kuta na proizvoljno mnogo dijelova. No, kako bi izgledalo dijeljenje t-kuta samo taxicab konstrukcijama?

Konstrukcija: dijeljenje t-segmenta nagiba 1 na $n \geq 3$ jednakih dijelova

Neka je dana dužina $\overline{AB}$ t-duljine 2, s nagibom 1 u ishodištu A. Konstruirajmo t-kružnicu radijusa 2 sa središtem u B (Slika 4.5). Zatim konstruirajmo t-kružnicu radijusa 2 sa središtem u A. Ako je $n > 3$ u sjecištu t-kružnice oko A i pravca AB, konstruirajmo t-kružnicu radijusa $2l$. Ako je $n > 4$, ponoviti zadnji korak još $n - 4$ puta. Zatim povucimo pravac iz donjeg kuta posljednje t-kružnice prema točki B. Točku u kojoj taj pravac siječe t-kružnicu sa središtem u B označimo sa P. Nadalje, povucimo pravac iz gornjeg kuta t-kružnice oko A kroz P te presjek tog pravca sa segmentom $\overline{AB}$ označimo sa C. T-duljina dobivenog segmenta AC jednaka je $2l/n$.



Slika 4.5: Konstrukcija - dijeljenje dužine na n jednakih dijelova (ovdje: $n = 3$ i $n = 4$)

Dokaz. Neka je $A(0,0)$ i $B(l,l)$. Donji kut zadnje konstruirane t-kružnice nalazi se u točki $((3-n)l,(1-n)l)$. Pravac koji prolazi tom točkom i točkom B ima jednadžbu

$$y = \frac{n}{n-2}(x-l) + l.$$

Ovaj pravac siječe pravac $y=-x$ u točki P koja ima x-koordinatu $x = \frac{l}{n-1}$. Pravac iz tog sjecišta kroz točku $(0,2l)$, koja se nalazi u gornjem kutu t-kružnice sa sjecištem u A, ima jednadžbu

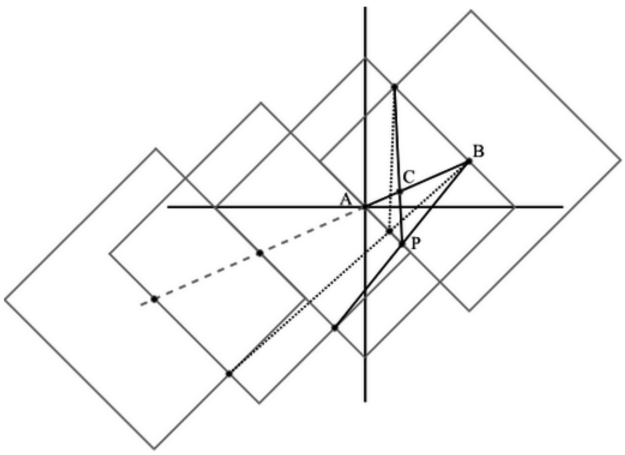
$$y = (1-2n)x + 2l.$$

Ovaj pravac siječe pravac $y=x$ u $x = l/n$. Pritom je udaljenost od A do C jednaka

$$d(A,C) = |\frac{l}{n} - 0| + |\frac{l}{n} - 0| = \frac{2l}{n}.$$

□

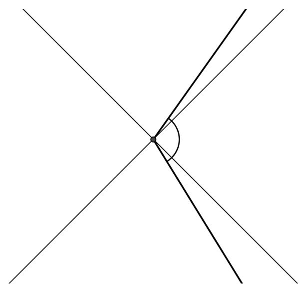
Ta konstrukcija ne smije biti ograničena samo na pravce s nagibom 1. Ovdje smo tako radili samo zbog pojednostavljivanja računa te jer su kutovi t-radijana definirani duž dijagonalnog pravca. Općom konstrukcijom možemo podijeliti t-kutove na proizvoljno mnogo jednakih kutova, jer je t-radijan samo t-duljina duž pravca s nagibom -1. Ovime osim što smo naučili kako podijeliti t-kut i t-segment na proizvoljno mnogo jednakih dijelova, proizveli smo još jednu metodu za dijeljenje euklidske dužine (Slika 4.6).



Slika 4.6: Opća konstrukcija - dijeljenje dužine na n jednakih dijelova (ovdje: $n=3$ i $n=4$)

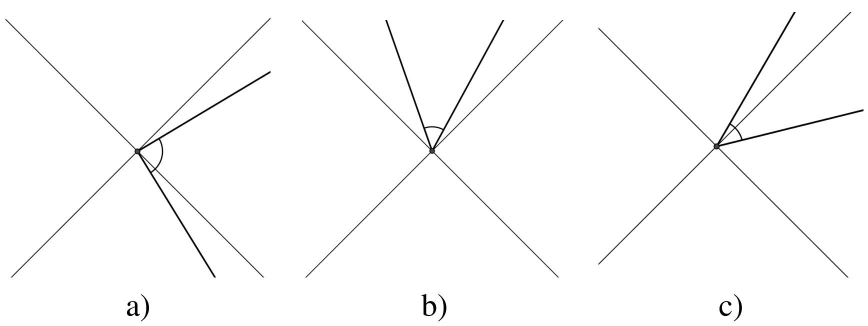
4.3 Upisani kutovi (Obodni kut)

U euklidskoj geometriji smatramo upisanim kutovima sve kutove manje od π radijana. No u taxicab geometriji kružnice nisu zakrivljene, već se sastoje od ravnih crta, stoga neki t-kutovi ne mogu biti upisani (vidi Sliku 4.7). Hoće li t-kut biti upisan ovisi o veličini



Slika 4.7: T-kut koji nije upisan

kuta, ali i o njegovom položaju (vidi Sliku 4.8). Stoga neki kutovi koji su samo malo veći od 2 t-radijana nisu upisani, dok neki kutovi malo manji od 4 t-radijana jesu upisani.



Slika 4.8: Upisani t-kutovi. T-kut je: a) strogo pozitivno upisan, b) potpuno upisan, c) strogo negativno upisan

Sada ćemo se kroz nekoliko definicija upoznati s različitim vrstama upisanih kutova.

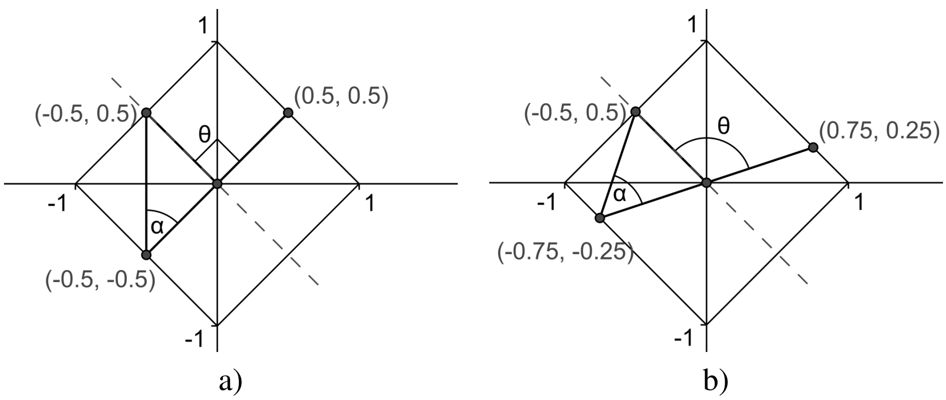
Definicija 4.3.1. *T-kut je pozitivno upisan ako se pravac, čiji je nagib* 1*, kroz vrh tog kuta nalazi izvan kuta.*

Definicija 4.3.2. *T-kut je negativno upisan ako se pravac, čiji je nagib* -1*, kroz vrh tog kuta nalazi izvan kuta.*

Definicija 4.3.3. *T-kut je upisan, ako je pozitivno upisan ili negativno upisan, ili oboje.*

Definicija 4.3.4. *T-kut je potpuno upisan, ako je pozitivno upisan i negativno upisan.*

Definicija 4.3.5. *T-kut je strogo pozitivno upisan, ako je pozitivno upisan, ali nije negativno upisan. Slično, t-kut je strogo negativno upisan, ako je negativno upisan, ali nije pozitivno upisan.*



Slika 4.9: Euklidski teorem o upisanim kutovima ne vrijedi u taxicab geometriji

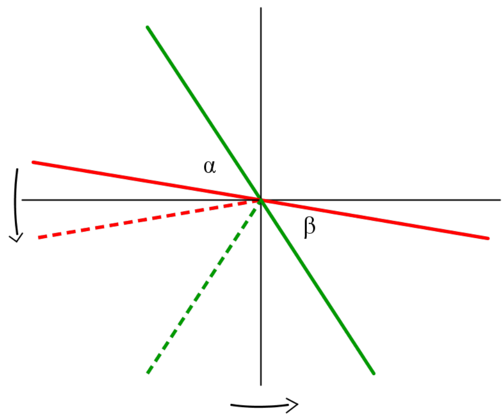
Primijetimo da teorem o središnjem i obodnom kutu iz euklidske geometrije ne vrijedi u taxicab geometriji. Na Slici 4.9 vidimo dva primjera u kojima je omjer obodnog prema središnjem kutu nad istim lukom različit. Lijevo, obodni kut α ima mjeru 1 t-radijan, a središnji θ 2 t-radijana. A desno, α ponovo ima mjeru 1 t-radijana, dok θ iznosi 2.5 t-radijana.

4.4 Kutovi uz paralelne pravce

U euklidskoj geometriji koristimo teoreme koji govore o kutovima uz presječnicu paralelnih pravaca, sada nas zanima imaju li ti teoremi smisla u taxicab geometriji. Primijetimo za početak da je t-udaljenost invarijanta pri translaciji, rotaciji za pravi kut, zrcaljenju oko horizontalnog ili vertikalnog pravca, ili kompoziji tih preslikavanja. S obzirom da se t-kutovi mjere koristeći t-udaljenost, t-kutovi su također invarijante kod tih preslikavanja.

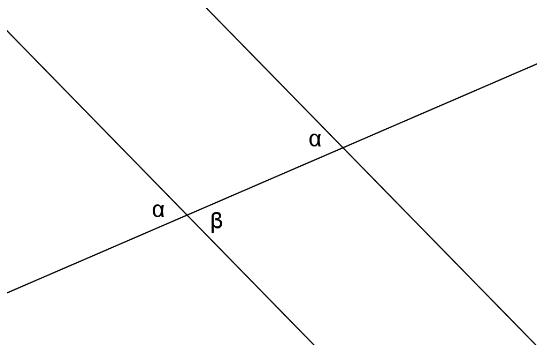
Teorem 4.4.1. *Vršni kutovi su sukladni.*

Dokaz. Gledajući Sliku 4.10 možemo primijetiti da je jedan kut sadržan u drugom, primjenimo li na njega kompoziciju dviju refleksija, oko horizontalnog i vertikalnog pravca. Stoga, vršni kutovi su sukladni. □



Slika 4.10: T-kut koji nije upisan

Teorem 4.4.2. *Neka su dana dva paralelna pravca i njihova transverzala. Unutarnji izmjenični kutovi uz transverzalu su sukladni.*



Slika 4.11: Kutevi pri transverzali

Dokaz. Kao na Slici 4.11, translatirajmo kut α duž presječnice tako da on bude nasuprot kuta β. Taj translatirani kut ima istu mjeru kao i α. S obzirom da su nasuprotni kutovi jednaki (prema teoremu 4.4.1), onda su α i β jednaki. □

Poglavlje 5

T-konike

Poznato je da u euklidskoj geometriji konike možemo definirati na više načina. Jednako tako u taxicab geometriji matematičari su definirali konike na različite načine. E.F. Krausse proučavao je t-elipsu i t-hiperbolu koristeći definicije dane sa dva fokusa, a t-parabolu pomoću fokusa i direktrise. Te smo skupove prikazali u Poglavljima 2.2-2.4. S druge strane, Laatsch definira konike koristeći pristup fokus - direktrisa, tj. analogonima Pappus-Boškovićevih definicija. Pritom ukazujući na to da su t-konike dobivene projiciranjem ravninskih presjeka četverostrane piramide na ravninu koja je okomita na os piramide. Prisjetimo se Pappus-Boškovićevih definicija za konike u euklidskoj geometriji, u kojima se one razlikuju ovisno o omjeru udaljenosti točke do fokusa i udaljenosti te točke do direktrise, za bilo koju točku konike.

Skupovi t-elipsa i t-hiperbola opisanih na ova dva načina međusobno se razlikuju, tj. lik definiran preko dva fokusa i lik definiran fokusom i direktrisom nisu jednaki. Sada ćemo vidjeti kojim su jednadžbama određene konike, te ih klasifirati na temelju koeficijenata u tim jednadžbama.

5.1 Opće jednadžbe za t-konike

Lema 5.1.1. *Udaljenost točke $P(x_0, y_0)$ do pravca $l \ldots ax + by + c = 0$ u t-ravnini dana je jednadžbom:*

$$d_T(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}.$$

Dokaz. U taxicab geometriji udaljenost od točke P do pravca l definirana je kao

$$\begin{aligned} d_T(P, l) &= \text{najmanja od svih udaljenosti } d_T(P, X) \text{ gdje je } X \in l \\ &= \min_{X \in l} d_T(P, X) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Na temelju zaključka u poglavlju 3.1, s obzirom da je X sjecište pravca l sa pravcima $x = x_0$ i $y = y_0$ imamo:

$$
\begin{aligned}
d_T(P, l) &= \begin{cases} \min\{|\frac{ax_0+by_0+c}{b}|, |\frac{ax_0+by_0+c}{a}|\}, & \text{if } a \neq 0 \neq b \\ |\frac{by_0+c}{b}|, & \text{if } a = 0 \\ |\frac{ax_0+c}{a}|, & \text{if } b = 0 \end{cases} \\
&= (\max\{|a|, |b|\})^{-1} \cdot |ax_0 + by_0 + c|
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

□

Teorem 5.1.2. *Taxicab konika sa fokusima (x_1, y_1) i (x_2, y_2) ili sa fokusom (x_1, y_1) i direktrisom $ax + by + c = 0$ dana je jednadžbom*

$$|x - x_1| + |y - y_1| + \alpha(|x - x_2| + |y - y_2|) + \beta(|ax + by + c|) \mp \alpha\gamma = 0 \tag{5.3}$$

gdje je $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $\beta = e(\alpha^2 - 1)(\max\{|a|, |b|\})^{-1}, \gamma \leq 0$ i e je ekscentricitet dane konike.

Dokaz. Taxicab konika s fokusima (x_1, y_1) i (x_2, y_2) dana je jednadžbom

$$|x - x_1| + |y - y_1| + p(|x - x_2| + |y - y_2|) = \mp q \tag{5.4}$$

gdje je $p \in \{-1, 1\}$ i $q \geq 0$.
Slično, taxicab konika s fokusom (x_1, y_1) i direktrisom $l \ldots ax + by + c = 0$ dana je jednadžbom:

$$|x - x_1| + |y - y_1| + r|ax + by + c| = 0, r < 0 \tag{5.5}$$

Stoga linearna kombinacija 5.4 i 5.5

$$a_1(|x - x_1| + |y - y_1|) + a_2(|x - x_2| + |y - y_2|) + a_3(|ax + by + c|) \mp a_4 = 0 \tag{5.6}$$

predstavlja sve taxicab konike.
Za $a_1 \neq 0$, uzmimo $a_1 = 1$. Jednadžba 5.6 sadrži jednadžbu 5.4 akko $a_2 \in \{-1, 1\}$, $a_3 = 0$ i $a_4 = 0$. Stoga, $a_4 = a_2\gamma$ i $s > 0, \gamma \leq 0$. Neka je sada $a_2 = \alpha$. Tada jednadžba 5.6 postaje:

$$|x - x_1| + |y - y_1| + \alpha(|x - x_2| + |y - y_2|) + (\alpha^2 - 1)s|ax + by + c| \mp \alpha\gamma = 0$$

(4) gdje je $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $s > 0$ i $y \leq 0$.
Uvrstimo li u gornju jednadžbu $\alpha = 0$ dobivamo:

$$\frac{|x - x_1| + |y - y_1|}{|ax + by + c|} = s.$$

Koristeći lemu 5.1.1 dobivamo

$$e = \max\{|a|, |b|\} \cdot \frac{|x - x_1| + |y - y_1|}{|ax + by + c|} = s \cdot \max\{|a|, |b|\}.$$

Očito je e ekscentricitet konika. Tj.

$$s = e(\max\{|a|, |b|\})^{-1}$$

i

$$(\alpha^2 - 1) \cdot (\max\{|a|, |b|\})^{-1} = \beta$$

čime je dokaz gotov.

□

Napomena:
1. Primijetimo da nije potrebno gledati slučaj kada je desna strana jednadžbe (5.4) jednaka $-q$ za slučaj t-elipse. Tada je dovoljno u opću jednadžbu umjesto $\pm\alpha\gamma$ uzeti $\alpha\gamma$ kada je $\alpha = 1$.
2. Očito, opća jednadžba taxicab konika može biti:

$$||x - x_1| + |y - y_1| + \alpha(|x - x_2| + |y - y_2|)| + \beta|ax + by + c||\alpha|\gamma = 0, \gamma \leq 0$$

pri čemu su α i β isti kao u iskazu teorema.

5.2 Klasifikacija t-konika

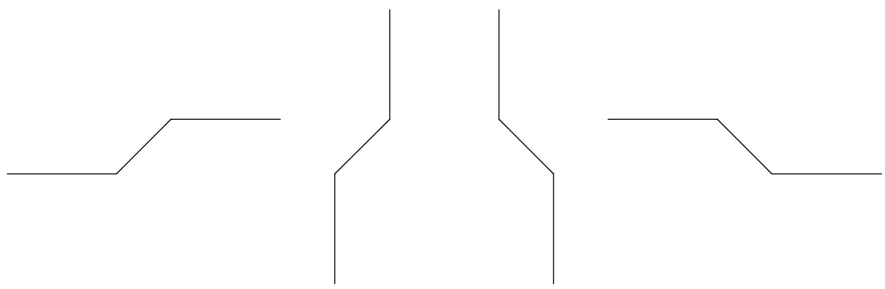
T-konike definirane jednadžbom 5.3 dijelimo u dvije klase ovisno o koeficijentu α:

- t-konike za koje je $\alpha = 0$ zovemo fokus-direktrisa t-konike
- t-konike za koje je $\alpha = \mp 1$ zovemo dvofokusne t-konike.

Posebno, ako je $\alpha = 1$ t-koniku još zovemo dvofokusna t-elipsa, a ako je $\alpha = -1$ dvofokusna t-hiperbola. Slično, fokus-direktrisa konike zovemo različitim imenima ovisno o e:

- fokus-direktrisa elipsa, ako je $0 < e < 1$
- fokus-direktrisa parabola, ako je $e = 1$
- fokus-direktrisa hiperbola, ako je $e > 1$.

Kako bismo dalje ispitali sve tipove konika, za početak ćemo dati neke kratice koje ćemo koristiti tijekom daljnjeg teksta: Neka su $F_1 = (x_1, y_1)$ i $F_2 = (x_2, y_2)$ dvije fiksirane točke (fokusi), pri čemu je $x_1 \leq x_2$ i neka m predstavlja nagib pravca F_1F_2 u taxicab ravnini. Uzet ćemo $m = \infty$ akko je pravac F_1F_2 paralelan s y-osi. Za pravac, dužinu ili zraku kažemo da je horizontalna ako je paralelna x-osi, a vertikalna ako je paralelna y-osi.
Degeneriran pravac je dio ravnine koji se sastoji od dužine nagiba 1 ili -1 i dviju horizontalnih (ili dviju vertikalnih) zraka sa suprotnim orijentacijama (vidi Sliku 5.1). Jednadžba



Slika 5.1: Degenerirani pravac

5.3 dopušta klasificiranje t-konika kao u sljedećim teoremima:

Teorem 5.2.1. *Tipovi dvofokusnih t-konika danih jednadžbom 5.3 su jedinstveno određeni koeficijentima α, γ te položajem fokusa $F_1 = (x_1, y_1)$ i $F_2 = (x_2, y_2)$ kao u tablicama 5.1, 5.2, 5.3, 5.4.*

Teorem 5.2.2. *Tipovi fokus-direktrisa t-konika danih jednadžbom 5.3 su jedinstveno određeni ekscentricitetom e te položajem direktrise $l \ldots ax+by+c = 0$ i fokusa $F = F_1 = (x_1, y_1)$ kao u tablicama 5.5, 5.6, 5.7.*

Dalje ćemo koristiti oznaku: $d_T(F_1, F_2) = \delta$.
Nagib svih dužina koje pripadaju lokusu uvijek je element skupa $\{-1, 0, 1, \infty\}$ kada lokus ne sadrži dio ravnine u tablici 5.1. Ako je lokus dio ravnine tada su njegove granice ili okomite ili vodoravne. T-kružnice, šesterokute i osmerokute smatramo pravim t-elipsama u familiji dvofokusnih t-elipsa.

Tablica 5.1: Dvofokusne t-elipse ($\alpha = 1$)

$\lvert x - x_1\rvert + \lvert y - y_1\rvert + \lvert x - x_2\rvert + \lvert y - y_2\rvert + \gamma = 0, \gamma \leq 0$		
Položaj od F_1, F_2, m	γ	Lokus
$F_1 = F_2$	$\gamma = 0$	Točka (x_1, y_1)
$F_1 \neq F_2$	$\gamma = 0$	Prazan skup
$F_1 = F_2$	$\gamma < 0$	T-kružnica sa središtem F_1 i radijusom $-\frac{\gamma}{2}$
$0, \infty$	$-\gamma = \delta$	Segment $[F_1F_2]$
	$-\gamma > \delta$	Šesterokut
± 1	$-\gamma = \delta$	Kvadrat s dijagonalom $[F_1F_2]$
	$-\gamma > \delta$	Osmerokut
$\neq \mp 1$	$-\gamma = \delta$	Pravokutnik s dijagonalom $[F_1F_2]$
$\neq 0, \infty$	$-\gamma > \delta$	Osmerokut
Ostali slučaji	$-\gamma < \delta$	Prazan skup

Fokus F se ne nalazi na direktrisi l za taxicab konike dane u tablicama 5.5 i 5.6. Fokus-direktrisa konike dane jednadžbom 5.3 zovu se degenerirane ako je fokus na direktrisi.

Dokaz. Teoremi 5.2.1 i 5.2.2 se mogu lako dokazati koristeći gornje tablice. Npr. pretpostavimo da $\alpha = 0, e > 1$ i $\lvert -\frac{a}{b}\rvert > e$. Tada se jednadžba 5.3 reducira na

$$|x - x_1| + |y - y_1| - e|x + ba^{-1}y + ca^{-1}| = 0$$

što predstavlja sljedeće četiri linearne jednadžbe:

$$l_1 \ldots a(1 - e)x + (a - eb)y = a(x_1 + y_1) + ec$$

ako $(x \leq x_1, ax + by + c < 0, y < y_1)$ ili $(x \geq x_1, ax + by + c > 0, y > y_1)$; i

$$l_2 \ldots a(e - 1)x + (a + eb)y = -a(x_1 - y_1) - ec$$

ako $(x \leq x_1, ax + by + c < 0, y < y_1)$ ili $(x \geq x_1, ax + by + c > 0, y < y_1)$; i

$$l_3 \ldots a(1 + e)x - (a - eb)y = a(x_1 - y_1) - ec$$

ako $(x > x_1, ax + by + c < 0, y \leq y_1)$ ili $(x < x_1, ax + by + c > 0, y \geq y_1)$; i

$$l_4 \ldots a(1 + e)x + (a + eb)y = a(x_1 + y_1) - ec$$

ako $(x > x_1, ax + by + c < 0, y \geq y_1)$ ili $(x < x_1, ax + by + c > 0, y \leq y_1)$. Sjecišta gornjih pravaca su:

Tablica 5.2: Dvofokusne t-hiperbole ($\alpha = -1$) - 1.dio

$\lvert x - x_1\rvert + \lvert y - y_1\rvert - (\lvert x - x_2\rvert + \lvert y - y_2\rvert) = \pm\gamma, \gamma \leq 0$		
Nagib od $F_1F_2 = m$	γ	Lokus
$0, \infty$	$\gamma = 0$	Simetrala dužine F_1F_2
$-1, 1$	$\gamma = 0$	Dijelovi ravnine spojeni dužinom $\{(x, y) : (x \leq x_1, y \geq y_2)$ ili $(x \geq x_2, y \leq y_1)\}$ i dužinom koja spaja vrhove tih dijelova ili $\{(x, y) : (x \leq x_1, y \leq y_2)$ ili $(x \geq x_2, y \geq y_1)\}$ i dužinom koja spaja vrhove vrhove tih dijelova, za $m = 1$ i $m = -1$.
$\neq \mp 1$ $\neq 0, \infty$	$\gamma = 0$	Degenerirani pravac koji se sastoji od dužine koja prolazi središtem $\overline{F_1F_2}$, te dvaju horizontalnih ili vertikalnih polupravca koji počinju na krajevima te dužine, za $\lvert m\rvert > 1$ ili $\lvert m\rvert < 1$.
$0, \infty$	$-\gamma = \delta$	Dio ravnine s dva dijela. $\mathbb{R} - \{(x, y) : (x_1 < x < x_2)\}$ ili $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : \min\{y_1, y_2\} < y < \max\{y_1, y_2\}\}$, za $x_1 < x_2$ ili $x_1 = x_2$.
	$-\gamma < \delta$	Dva vertikalna pravca ili dva horizontalna pravca, okomita na dužinu $\overline{F_1F_2}$ tako da udaljenost od središta dužine $\overline{F_1F_2}$ do tih pravaca je $\frac{-\gamma}{2}$, za $x_1 < x_2$ ili $x_1 = x_2$.
$-1, 1$	$-\gamma = \delta$	Dio ravnine s dva dijela. $\{(x, y) : (x \leq x_1, y \leq y_1)$ ili $(x \geq x_2, y \geq y_2)\}$ ili $\{(x, y) : (x \leq x_1, y \geq y_1)$ ili $(x \geq x_2, y \leq y_2)\}$ s vrhovima u F_1 i F_2, za $m = 1$ ili $m = -1$.
	$-\gamma < \delta$	Prava taxicab hiperbola, čija se svaka grana sastoji od dužine te horizontalnog i vertikalnog polupravca tako da su grane simetrične s obzirom na simetralu dužine $\overline{F_1F_2}$.

$$l_1 \cap l_2 = ((ax_1 + bey_1 + ec)(a - ae)^{-1}, y_1)$$

$$l_1 \cap l_3 = (x_1, (aex_1 + ay_1 + ec)(a - be)^{-1})$$

$$l_1 \cap l_4 = ((bx_1 + by_1 + c)(b - a)^{-1}, (ax_1 + ay_1 + c)(a - b)^{-1})$$

$$l_2 \cap l_3 = ((bx_1 - by_1 - c)(a + b)^{-1}, (ay_1 - ax_1 - c)(a + b)^{-1})$$

Tablica 5.3: Dvofokusne t-hiperbole ($\alpha = -1$) - 2.dio

$\neq \mp 1$ $\neq 0, \infty$	$-\gamma = \delta$	Dio ravnine s dva dijela. $\{(x, y) : (x \leq x_1, y \leq y_1)$ ili $(x \geq x_2, y \geq y_2)\}$ ili $\{(x, y) : (x \leq x_1, y \geq y_1)$ ili $(x \geq x_2, y \leq y_2)\}$ s vrhovima F_1, F_2 za $m > 0$ ili $m < 0$.
$(0, 1)$	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma = \frac{1-m}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Dva dijela ravnine, svaki sa repom. Dijelovi su: $\{(x, y) : x \leq x_1, y \geq y_2\}$ i $\{(x, y) : x \geq x_2, y \leq y_1\}$, a svaki rep sastoji od dužine i vertikalnog polupravca. Dijelovi lokusa su simetrični s obzirom na središte dužine $\overline{F_1F_2}$.
$(1, \infty)$	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma = \frac{m-1}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Dva dijela ravnine, svaki sa repom. Dijelovi su: $\{(x, y) : x \leq x_1, y \geq y_2\}$ i $\{(x, y) : x \geq x_2, y \leq y_1\}$, a svaki rep sastoji od dužine i horizontalnog polupravca. Dijelovi lokusa su simetrični s obzirom na središte dužine $\overline{F_1F_2}$.
$(-1, 0)$	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma = \frac{1+m}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Dva dijela ravnine, svaki sa repom. Dijelovi su: $\{(x, y) : x \leq x_1, y \leq y_2\}$ i $\{(x, y) : x \geq x_2, y \geq y_1\}$, a svaki rep sastoji od dužine i vertikalnog polupravca. Dijelovi lokusa su simetrični s obzirom na središte dužine $\overline{F_1F_2}$.
$(-\infty, -1)$	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma = \frac{1+m}{(x_1-x_2)^{-1}}$	Dva dijela ravnine, svaki sa repom. Dijelovi su: $\{(x, y) : x \leq x_1, y \leq y_2\}$ i $\{(x, y) : x \geq x_2, y \leq y_1\}$, a svaki rep sastoji od dužine i horizontalnog polupravca. Dijelovi lokusa su simetrični s obzirom na središte dužine $\overline{F_1F_2}$.

$l_2 \cap l_4 = (x_1, (ay_1 - aex_1 - ec)(a + be)^{-1})$

$l_3 \cap l_4 = ((ax_1 - bey_1 - ec)(a + ae)^{-1}, y_1)$.

Sada su moguća četiri podslučaja:
Ako je $-\frac{a}{b} > e$ i $ax_1 + by_1 + c > 0$ tada je jednostavno pokazati da dvije dužine na pravcima l_1 i l_2 u dijelu ravnine $ax_1 + bey_1 + ec)(a - ae)^{-1} \leq x \leq x_1$ i četiri zrake sadržane u l_3 i l_4 u dijelu ravnine $x \leq (ax_1 - bey_1 - ec)(a + ae)^{-1}$ ili $x \geq x_1$ pripadaju lokusu.

Tablica 5.4: Dvofokusne t-hiperbole ($\alpha = -1$) - 3.dio

$0, 1$	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma < \frac{1-m}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Par paralelnih degeneriranih pravaca, u kojima je nagib dužina -1 i polupravci su vertikalni.
	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma > \frac{1-m}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Prava taxicab hiperbola, čije se grane sastoje od dužine nagiba -1, vertikalnog i horizontalnog polupravca.
$1, \infty$	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma < \frac{m-1}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Par paralelnih degeneriranih pravaca, u kojima je nagib dužina -1 i polupravci su horizontalni.
	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma > \frac{m-1}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Prava taxicab hiperbola, čije se grane sastoje od dužine nagiba -1, vertikalnog i horizontalnog polupravca.
$-1, 0$	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma < \frac{1+m}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Par paralelnih degeneriranih pravaca, u kojima je nagib dužina 1 i polupravci su vertikalni.
	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma > \frac{1+m}{(x_2-x_1)^{-1}}$	Prava taxicab hiperbola, čije se grane sastoje od dužine nagiba 1, vertikalnog i horizontalnog polupravca.
$-\infty, -1$	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma < \frac{1+m}{(x_1-x_2)^{-1}}$	Par paralelnih degeneriranih pravaca, u kojima je nagib dužina 1 i polupravci su horizontalni.
	$-\gamma < \delta$ ili $-\gamma > \frac{1+m}{(x_1-x_2)^{-1}}$	Prava taxicab hiperbola, čije se grane sastoje od dužine nagiba 1, vertikalnog i horizontalnog polupravca.
$\forall m$	$-\gamma > \delta$	Prazan skup.

Ako je $-\frac{a}{b} > e$ i $ax_1 + by_1 + c < 0$ tada dvije dužine na pravcima l_1 i l_2 u dijelu ravnine $x_1 \leq x \leq (ax_1 + bey_1 + ec)(a - ae)^{-1}$ i četiri zrake na pravcima l_3 i l_4 u dijelu ravnine $x \leq x_1$ ili $x \geq (ax_1 - bey_1 - ec)(a + ae)^{-1}$ pripadaju lokusu.
Ako je $-\frac{a}{b} < -e$ i $ax_1 + by_1 + c < 0$ tada lokus sadrži dvije dužine na pravcima l_3 i l_4 u dijelu ravnine $x_1 \leq x \leq (ax_1 - bey_1 - ec)(a + ae)^{-1}$ i četiri zrake na pravcima l_1 i l_2 u dijelu ravnine $x \leq x_1$ ili $x \geq (ax_1 + bey_1 + ec)(a - ae)^{-1}$.
Konačno, ako je $-\frac{a}{b} < -e$ i $ax_1 + by_1 + c > 0$ tada lokus sadrži dvije dužine na pravcima l_3 i l_4 u dijelu ravnine $(ax_1 - bey_1 - ec)(a + ae)^{-1} \leq x \leq x_1$ i četiri zrake na pravcima l_1 i l_2 u dijelu ravnine $x \leq (ax_1 + bey_1 + ec)(a - ae)^{-1}$ ili $x \geq x_1$.
Štoviše, u svim slučajima su sjecišta $l_1 \cap l_4$ i $l_2 \cap l_3$ na direktrisi.

Tablica 5.5: Fokus - direktrisa taxicab konike ($\alpha = 0$) - 1.dio

$\lvert x - x_1\rvert + \lvert y - y_1\rvert + e(\max\{\lvert a\rvert, \lvert b\rvert\}^{-1}\lvert ax + by + c\rvert = 0)$		
e	$\frac{-a}{b}$	Lokus
$0 < e$ $e < 1$	$\forall \frac{-a}{b}$	Četverokut s vertikalnom i horizontalnom dijagonalom koje prolaze kroz F
$e = 1$	$\lvert\frac{-a}{b}\rvert = 1$	Prava taxicab parabola, koja se sastoji od dužine, vertikalnog i horizontalnog polupravca. A simetrala te dužine ujedno je os simetrije.
	$\lvert\frac{-a}{b}\rvert \neq 1$	Prava taxicab parabola, koja se sastoji od dviju dužina i dvaju horizontalnih ili dvaju vertikalnih polupravaca, za $\lvert\frac{-a}{b}\rvert > 1$ ili $\lvert\frac{-a}{b}\rvert < 1$
$e > 1$	$\frac{-a}{b} \in \{0, \infty\}$	Taxicab hiperbola s dvije grane. Jedna od grana sastoji se od dviju dužina i dva polupravca. Druga grana sastoji se samo od dva polupravca koji imaju suprotne orijentacije od prvih polupravaca. Tamo gdje pravac prolazi kroz F i okomit je na l je os simetrije. Četiri polupravca nalaze se na dva pravca koji se sijeku u točki koja se nalazi na osi simetrije. Ta točka je početna točka polupravcima iz druge grane.
	$\frac{-a}{b} \in \{-1, 1\}$	Taxicab hiperbola s dvije grane. Svaka grana sastoji se od dužine i dva polupravca. Tamo gdje pravac prolazi kroz F i okomit je na l je os simetrije. Sva četiri polupravca nalaze se na dva pravca čije je sjecište na osi simetrije.
	$1 \neq \lvert\frac{-a}{b}\rvert < e$ $a \neq 0$	Taxicab hiperbola s dvije grane. Svaka grana sastoji se od dužine i dva polupravca. Svi polupravci se nalaze na dva pravca čije se sjecište nalazi na direktrisi.

Slično se dokazuju i preostali slučaji.

□

Tablica 5.6: Fokus - direktrisa taxicab konike ($\alpha = 0$) - 2.dio

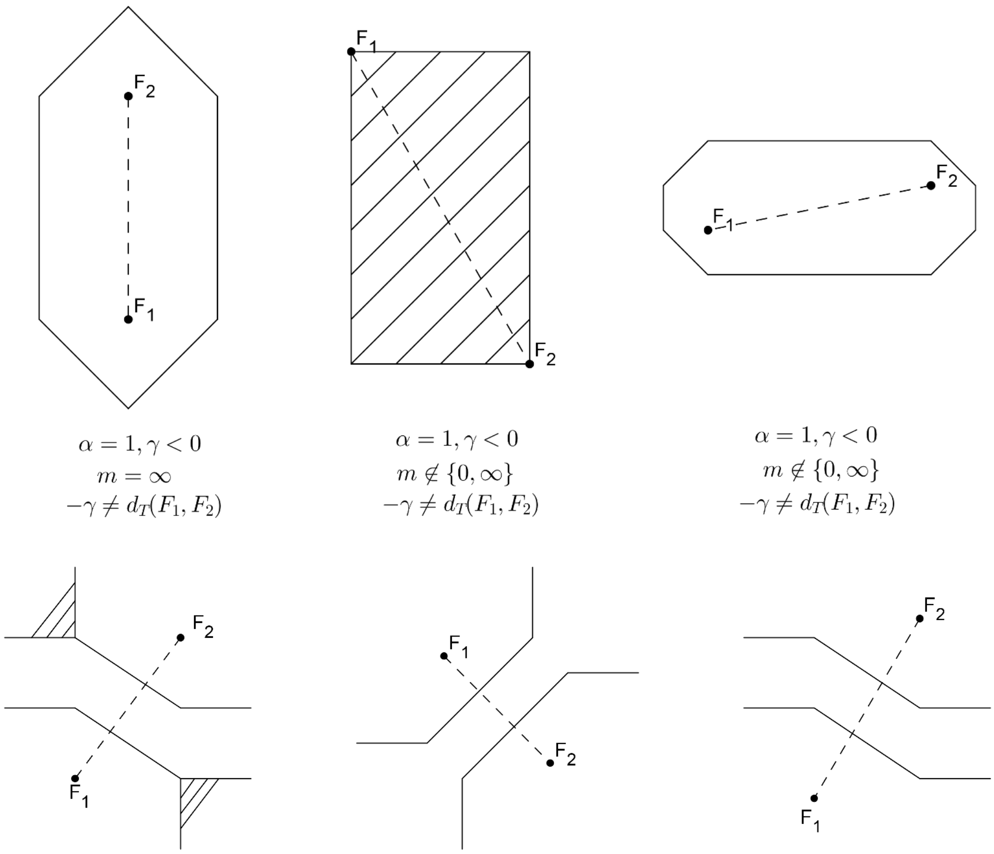
$e > 1$	$\lvert\frac{-a}{b}\rvert = e$	Taxicab hiperbola s dvije grane. Jedna od grana sastoji se od dužine i dva polupravca od kojih je jedan vertikalan. Druga grana sastoji se samo od dva polupravca od kojih je jedan vertikalan. Dva polupravca koja nisu vertikalna, nalaze se na pravcu.
	$\lvert\frac{-a}{b}\rvert > e$ $b \neq 0$	Taxicab hiperbola s dvije grane. Jedna od grana sastoji se od dviju dužina i dva polupravca. Druga grana sastoji se samo od dva polupravca koji imaju suprotnu orijentaciju od prvih polupravaca. Sva četiri polupravca nalaze se na dva pravca. Svaki od ta dva pravca, direktrisa i pravac koji sadrži jednu od dužina se podudaraju.

Tablica 5.7: Degenerirane fokus - direktrisa taxicab konike ($\alpha = 0$)

$\lvert x - x_1\rvert + \lvert y - y_1\rvert + e(\max\{\lvert a\rvert, \lvert b\rvert\}^{-1}\lvert ax + by + c\rvert = 0)$		
e	$\frac{-a}{b}$	Lokus
$0 < e < 1$	$\forall(a, b)$	Točka $F = (x_1, y_1)$
$e = 1$	$\frac{-a}{b} \in \{-1, 1\}$	Dijelovi ravnine: $\{(x, y) : (x \leq x_1, y \geq y_1)$ ili $(x \geq x_1, y \leq y_1)\}$ ili $\{(x, y) : (x \leq x_1, y \leq y_1)$ ili $(x \geq x_1, y \geq y_1)\}$
	$\frac{-a}{b} \notin \{-1, 1\}$	Jedan od pravaca $x = x_1$ ili $y = y_1$, ovisno je li $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$ ili $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$.
$e > 1$	$\frac{-a}{b} = -e$	Pravac $y = (\frac{1-e}{2})x + \frac{(e+1)by_1 + c(1-e)}{2be}$ koji prolazi točkom F.
	$\frac{-a}{b} > 1$ i $b \neq 0$	Točka $F = (x_1, y_1)$
	$b = 0$ ili $(-\frac{-a}{b} \leq 1$ i $\frac{-a}{b} \neq -e)$	Dva pravca koja prolaze točkom F.

5.3 Primjena: Grafovi taxicab konika

Grafovi taxicab konika lako se crtaju ako su dani jednadžbom 5.3. Na Slikama 5.2 i 5.3 su dani grafovi nekih taxicab konika.



$\alpha = 1, \gamma < 0$
$m = \infty$
$-\gamma \neq d_T(F_1, F_2)$

$\alpha = 1, \gamma < 0$
$m \notin \{0, \infty\}$
$-\gamma \neq d_T(F_1, F_2)$

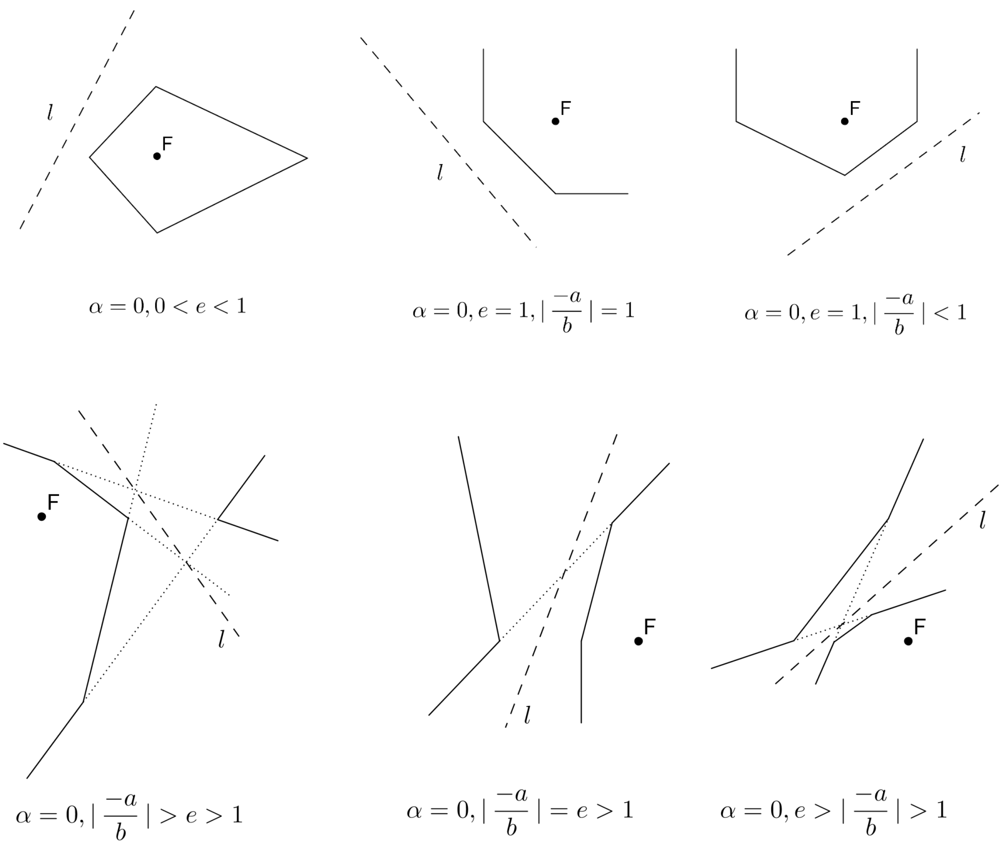
$\alpha = 1, \gamma < 0$
$m \notin \{0, \infty\}$
$-\gamma \neq d_T(F_1, F_2)$

$\alpha = -1, \gamma < 0$
$1 < m \neq \infty$
$-\gamma = x_1 - x_2 + y_2 - y_1$

$\alpha = -1, \gamma < 0$
$0 < m \neq \infty$
$-\gamma > |x_2 - x_1 + y_1 - y_2|$
$-\gamma < d_T(F_1, F_2)$

$\alpha = -1, \gamma < 0$
$1 < m \neq \infty$
$-\gamma < |x_2 - x_1 + y_1 - y_2|$
$-\gamma < d_T(F_1, F_2)$

Slika 5.2: Grafovi nekih t-konika - 1.dio



Slika 5.3: Grafovi nekih t-konika - 2.dio

Poglavlje 6

Taxicab geometrija u srednjoj školi

Nastava matematike učenicima omogućuje primjenu matematike i matematičko sporazumijevanje u različitim životnim situacijama, gdje će aktivnim pristupom svladavati nove matematičke koncepte i rješavati različite probleme. I nastavnicima je korisno proširivati vlastito matematičko znanje kako bi mogli iz dana u dan uključivati nove sadržaje ili pokazati stare sadržaje na nov način. Iz obrazovnih dokumenata je vidljivo da je korisno učenike poticati na kreativno i apstraktno razmišljanje. S obzirom da je taxicab geometrija slična euklidskoj geometriji, s kojom su učenici veoma dobro upoznati, lako je možemo uvesti na nastavu. U prvom razredu srednje škole u nastavi matematike pojavljuje se cjelina „Koordinatni sustav u ravnini" te bi po završetku te cjeline mogli uvesti jedan do dva sata kako bi se učenici, vođeni nastavnikom i heurističkom metodom upoznali s taxicab geometrijom.

6.1 Plan aktivnosti

Učenici će istražiti taxicab geometriju, otkriti formulu za udaljenost te pokazati sličnost između taxicab i euklidske geometrije.

Ciljevi

Učenici će:

- prepoznati i razumjeti različite geometrije i njima pridružene matematičke sustave, te apstraktno razmišljati i rješavati jednostavne probleme u novim apstraktnim situacijama

Ishodi učenja – Matematički koncepti

Učenici će:

- razlikovati načine određivanja udaljenosti u euklidskoj i taxicab geometriji
- računati i usporediti udaljenosti između točaka u euklidskoj i taxicab geometriji
- izvesti jednadžbu kružnice u taxicab geometriji sa zadanim središtem i polumjerom te je nacrtati

Ishodi učenja – Matematički procesi

Učenici će:

- uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim idejama, objektima i pojmovima u euklidskoj i taxicab geometriji
- primjenjivati analogiju, generalizaciju i specijalizaciju za uvođenje pojmova i obrazlaganje rezultata u taxicab geometriji
- istraživati i analizirati matematičke ideje i eksperimentirati s njima pomoću programa dinamične geometrije
- izraziti ideje i rezultate jasnim i preciznim matematičkim jezikom, razmijeniti ih s drugim učenicima te sučeliti mišljenja i stavove

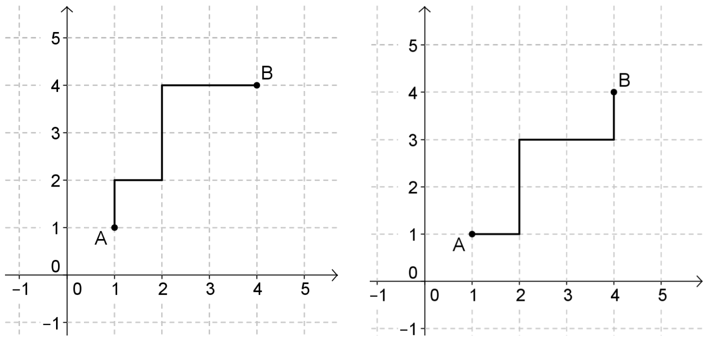
Potreban materijal: Nastavni listić, kalkulator.

Aktivnost 1: Taxicab geometrija - t-udaljenosti

Tijek aktivnosti: Učenici su u grupama po troje do četvero. Potrebno im je objasniti da će proučavati drukčiji geometrijski sustav koji se zove Taxicab geometrija. Motivirati ih uvođenjem u tu geometriju i definiciju taxicab udaljenosti. Nakon toga potrebno je provjeriti razumijevanje te definicije kroz prvo pitanje. A potom uz nastavnikovo vođenje učenici bi trebali riješiti i ostatak aktivnosti u svojim grupama. Nakon što su gotovi, svaka grupa bi trebala iznijeti svoje rezultate, a potom treba rezultate objediniti.

Aktivnost:

Pretpostavimo da imamo definiranu geometriju za čije predočavanje koristimo koordinatni sustav u ravnini. Zamislimo grad čije su ulice mreža koordinatnog sustava i to su jedini putevi koji se mogu prelaziti, kao na slici. Da bismo došli iz točke A u točku B, npr. taksi nas može odvesti jednim od dva puta ucrtanim na slikama.



U taxicab geometriji definiramo udaljenost između dviju točaka kao najmanji broj horizontalnih ili vertikalnih jedinica između tih točaka.

1. **Kolika je taxicab udaljenost između dviju točaka na gornjoj slici?**

   S obzirom da slike prikazuju dva različita puta između istih zadanih točaka, učenici bi trebali zaključiti da oba puta između tih točaka daju taxicab udaljenost 6.

2. **Imajući na umu da taksi ne može voziti dijagonalno (kroz zgrade), postoji li još neki put čija je duljina jednaka prethodnoj između točaka A i B?**

   Postoji nekoliko takvih puteva. Grupe mogu ucrtati te putove kako bi lakše izbrojili koliko ih ima. Očekujemo da će se učenici osloniti na logičko razmišljanje te neće birati bilo koje puteve.

3. **Postoje li neki dulji ili kraći putevi?**

   Očekujemo da će učenici primjetiti da kraći putevi ne postoje, no da ima duljih puteva.

4. **U taxicab geometriji, udaljenost između dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ možemo izračunati a da ne brojimo jedinice u koordinatnom sustavu. Objasnite kako biste to izračunali. Provjerite svoju metodu na 1. zadatku.**

   Učenici bi trebali objasniti svoju metodu opisno riječima, ali i simbolički. Jednostavan odgovor može biti: Pronaći apsolutnu razliku x-koordinata te y-koordinata, a zatim ih zbrojiti.

$$\begin{aligned} |AB| &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\ &= |4 - 1| + |4 - 1| \\ &= |3| + |3| \\ &= 6 \end{aligned} \tag{6.1}$$

5. **Objasnite kako biste izračunali udaljenost između točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u euklidskoj geometriji. Koristeći tu metodu izračunajte euklidsku udaljenost između točaka A i B u 1. zadatku.**

   Učenici bi trebali objasniti svoju metodu opisno riječima, ali i simbolički. Može se koristiti formula za udaljenost dviju točaka ili Pitagorin teorem (možemo napraviti i poveznicu između ta dva načina). Odgovor je:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{18} \approx 4.24 \end{aligned} \tag{6.2}$$

6. **Što možete zaključiti o taxicab i euklidskoj udaljenosti na temelju prethodna dva zadatka?**

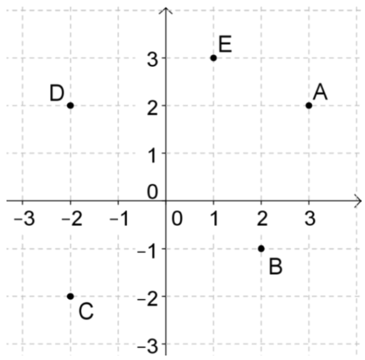
   U ovom slučaju euklidska udaljenost je manja od taxicab udaljenosti.

7. **Vrijedi li uvijek opažanje iz prethodnog zadatka? Zašto?**

   Da, osim kad su točke smještene horizontalno ili vertikalno jedna do druge. Tada su euklidska i taxicab udaljenost jednake.

8. **Upišite koordinate točaka sa donje slike u tablicu te izračunajte euklidsku i taxicab udaljenost.**

	Euklidska udaljenost	Taxicab udaljenost
$A(3,2)D(-2,2)$	5	5
$A(3,2)E(1,3)$	$\sqrt{5} \approx 2.24$	3
$B(2,-1)D(-2,2)$	5	7
$B(2,-1)E(1,3)$	$\sqrt{17} \approx 4.12$	5
$C(-2,-2)D(-2,2)$	4	4



9. **Što zaključujete o odnosu dviju točaka kad je euklidska udaljenost manja od taxicab udaljenosti?**

   Odgovori mogu biti različiti, no očekujemo odgovor poput: Ako je euklidska udaljenost manja od taxicab udaljenosti tada su x-koordinate točaka različite te y-koordinate tih točaka različite.

10. **Što zaključujete o odnosu dviju točaka kad je euklidska udaljenost jednaka taxicab udaljenosti?**

    Odgovori se mogu razlikovati. Očekujemo odgovor: Ako je euklidska udaljenost jednaka taxicab udaljenosti tada su x-koordinate točaka jednake ili y-koordinate točaka jednake.

11. **Dokažite da zaključci iz prethodna dva pitanja uvijek vrijede.**

    Taxicab udaljenost veća je ili jednaka euklidskoj udaljenosti. Dokaz se može temeljiti na nejednakosti trokuta ili činjenici da je najkraća udaljenost između dviju točaka ravna linija ili jednostavno dokazujući da je formula za euklidsku udaljenost manja ili jednaka formuli za taxicab udaljenost.
    Učenici će razmišljati na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &\leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\
\sqrt{a^2 + b^2} &\leq |a| + |b| \\
\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 &\leq (|a| + |b|)^2 \\
a^2 + b^2 &= a^2 + 2|ab| + b^2 \\
0 &\leq 2|ab|.
\end{aligned}
$$

Potrebno je objasniti učenicima razliku između analize i sinteze kod dokazivanja. Treba im objasniti kako je dio koji su oni napravili zapravo analiza te to što su dobili je istinita tvrdnja od koje treba krenuti dokaz kako bi dobili traženo:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq 2|ab| \\
a^2 + b^2 &= a^2 + 2|ab| + b^2 \\
\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 &\leq (|a| + |b|)^2 \\
\sqrt{a^2 + b^2} &\leq |a| + |b|
\end{aligned}
$$

odnosno, koordinatno zapisano:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Aktivnost 2: Kružnice u taxicab geometriji

Tijek aktivnosti: Krenemo usmeno s pitanjima: Što je kružnica, polumjer kružnice, promjer kružnice (u euklidskoj geometriji)? Ukratko se prisjetimo taxicab geometrije s prethodne aktivnosti te ustanovimo definicije prethodno navedenih pojmova u toj geometriji. Nakon toga podijelimo nastavne listiće grupama koje se sastoje po troje ili četvero učenika.

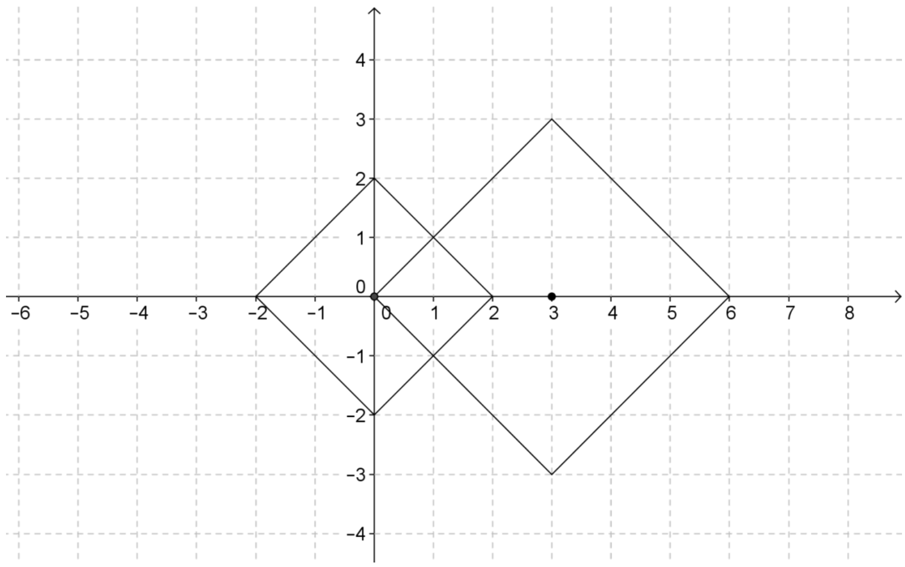
Aktivnost:

U euklidskoj geometriji kružnica je definirana kao skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Radijus (polumjer) kružnice je dužina koja spaja središte s bilo kojom točkom kružnice. Dijametar (promjer) je dužina koja prolazi središtem kružnice i spaja neke dvije točke kružnice. Jednadžba kružnice, u euklidskoj geometriji, radijusa r sa središtem u točki (p, q) je

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Tu formulu dobivamo iz formule za udaljenost.
U taxicab geometriji vrijede iste definicije za pojmove kružnice, središta, radijusa i promjera. Jedina razlika je formula za udaljenost. Stoga taxicab kružnice izgledaju drugačije no u euklidskoj geometriji.

1. **T-kružnica sa središtem u $(0, 0)$ i polumjera 2 skup je svih točaka čija t-udaljenost do središta iznosi 2. Izvedite jednadžbu za tu t-kružnicu, a zatim je nacrtajte.**



Kakav je oblik t-kružnice? Što mislite, imaju li sve t-kružnice takav oblik?

Tražimo sve točke (x, y) čija udaljenost do točke $(0, 0)$ iznosi 2. Uvrštavajući te podatke u formulu za t-udaljenost dobivamo:

$$|x - 0| + |y - 0| = 2.$$

Time smo dobili da je jednadžba t-kružnice: $|x| + |y| = 2$, a takvu jednadžbu učenici znaju riješiti.

Postoje četiri slučaja:

a) $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y = 2$

b) $x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 2$

c) $x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = 2$

d) $x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 2.$

Točke presjeka ovih pravaca su: $(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)$.

T-kružnica ima oblik kvadrata. Sve t-kružnice su oblika kvadrata.

2. **U istoj mreži nacrtajte t-kružnicu sa središtem u** $(3, 0)$ **radijusa** 3**.**

   Učenici rješavaju ovaj zadatak analogno prethodnom. Uvrštavajući zadane podatke u jednadžbu za t-udaljenost moraju riješiti:

$$|x - 3| + |y - 0| = 3.$$

3. **Kako biste napisali opću jednadžbu t-kružnice sa središtem u točki** (p, q) **i polumjera** r**?**

   Analogno kao i prije, učenici dobivaju opću jednadžbu:

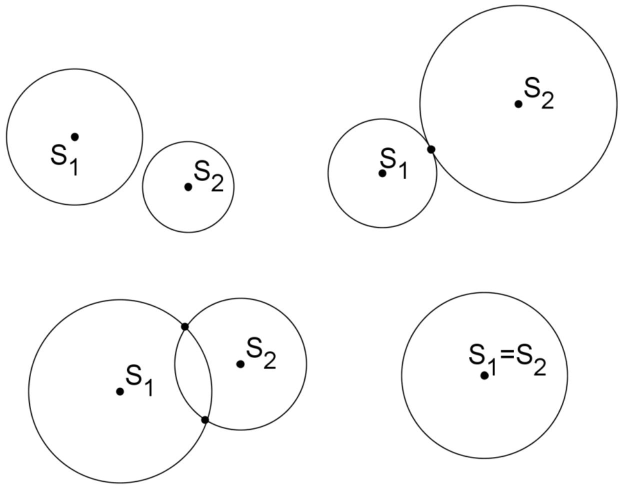
$$|x - p| + |x - q| = r.$$

4. **Pronađite koordinate sjecišta t-kružnica iz prva dva zadatka.**

   Dva su sjecišta i njihove koordinate su $(1, 1)$ i $(1, -1)$.

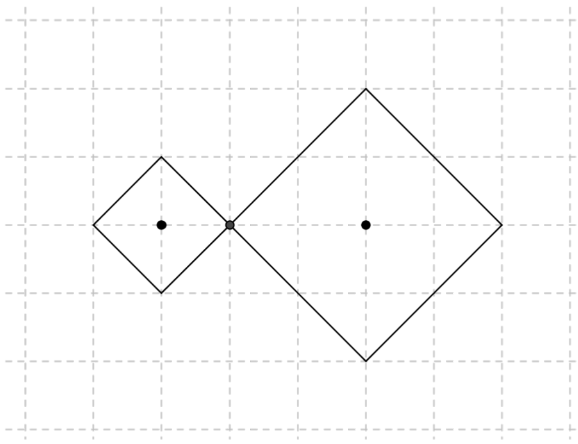
5. **U koliko točaka se sijeku kružnice u euklidskoj geometriji? Predočite crtežom.**

   Kružnice se sijeku u $0, 1, 2$ ili beskonačno mnogo točaka.



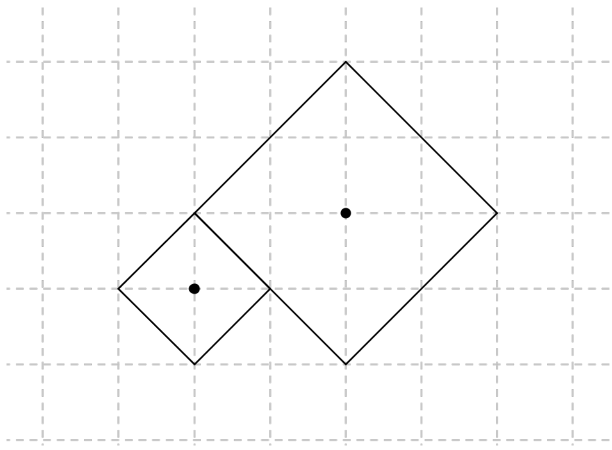
6. **Nacrtajte bilo koje dvije t-kružnice tako da imaju točno jednu zajedničku točku.**

Npr.



7. **Nacrtajte dvije različite t-kružnice tako da imaju beskonačno mnogo zajedničkih točaka.**

   Npr.



8. **Kako računamo opseg kružnice u euklidskoj geometriji? Kako definiramo konstantu π?**

   U euklidskoj geometriji koristimo formulu $o_e = 2r\pi$. Stoga definiramo

$$\pi = \frac{o_e}{2r} = \frac{opseg}{promjer} \approx 3.14.$$

9. **Kako biste izračunali opseg kružnice u taxicab geometriji?**

   Učenici bi mogli primjetiti da kružnica ima oblik kvadrata te računati opseg po formuli za opseg kvadrata, pri čemu je duljina stranice jednaka promjeru kružnice, tj. $o_t = 4 \cdot 2r$. Ili mogu računati t-udaljenosti između svih sjecišta jednadžbi pravaca, koje dobiju iz jednadžbe s apsolutnim vrijednostima, pa ih zbrojiti.

10. **Koliko iznosi π u taxicab geometriji?**

    Učenici mogu nacrtati proizvoljnu kružnicu, izračunati njen opseg i podijeliti ga promjerom te kružnice. Npr. za kružnicu sa središtem u $(0, 0)$ polumjera 2:

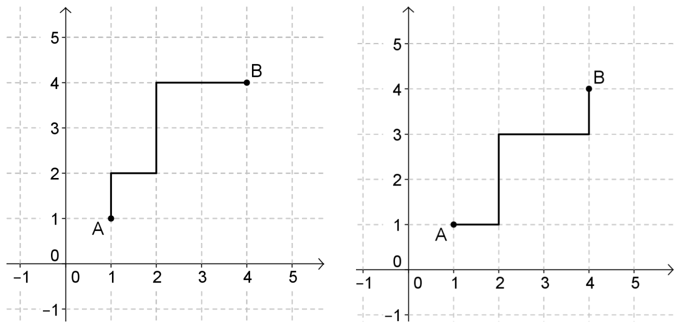
$$o_t = 4 \cdot 4 = 16 \qquad \text{i} \qquad 2r = 4$$

$$\pi_t = \frac{o_t}{2r} = \frac{16}{4} = 4$$

6.2 Nastavni listići

Aktivnost 1: Taxicab geometrija - t-udaljenosti

Pretpostavimo da imamo definiranu geometriju za čije predočavanje koristimo koordinatni sustav u ravnini. Zamislimo grad čije su ulice mreža koordinatnog sustava i to su jedini putevi koji se mogu prelaziti, kao na slici. Da bismo došli iz točke A u točku B, npr. taksi nas može odvesti jednim od dva puta ucrtanim na slikama.



U taxicab geometriji definiramo udaljenost između dviju točaka kao najmanji broj horizontalnih ili vertikalnih jedinica između tih točaka.

1. Kolika je taxicab udaljenost između dviju točaka na gornjoj slici?

2. Imajući na umu da taksi ne može voziti dijagonalno (kroz zgrade), postoji li još neki put čija je duljina jednaka prethodnoj između točaka A i B?

3. Postoje li neki dulji ili kraći putevi?

4. U taxicab geometriji, udaljenost između dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ možemo izračunati a da ne brojimo jedinice u koordinatnom sustavu. Objasnite kako biste to

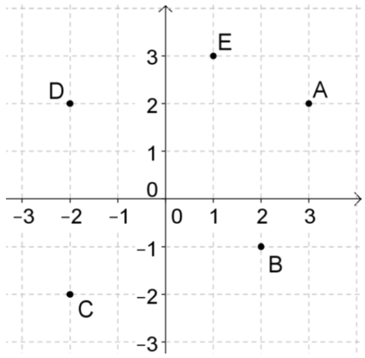
izračunali. Provjerite svoju metodu na 1. zadatku.

5. Objasnite kako biste izračunali udaljenost između točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u euklidskoj geometriji. Koristeći tu metodu izračunajte euklidsku udaljenost između točaka A i B u 1. zadatku.

6. Što možete zaključiti o taxicab i euklidskoj udaljenosti na temelju prethodna dva zadatka?

7. Vrijedi li uvijek opažanje iz prethodnog zadatka? Zašto?

8. Upišite koordinate točaka sa donje slike u tablicu te izračunajte euklidsku i taxicab udaljenost.



	Euklidska udaljenost	Taxicab udaljenost
$A(\; , \;)D(\; , \;)$		
$A(\; , \;)E(\; , \;)$		
$B(\; , \;)D(\; , \;)$		
$B(\; , \;)E(\; , \;)$		
$C(\; , \;)D(\; , \;)$		

9. Što zaključujete o odnosu dviju točaka kad je euklidska udaljenost manja od taxicab udaljenosti?

10. Što zaključujete o odnosu dviju točaka kad je euklidska udaljenost jednaka taxicab udaljenosti?

11. Dokažite da zaključci iz prethodna dva pitanja uvijek vrijede.

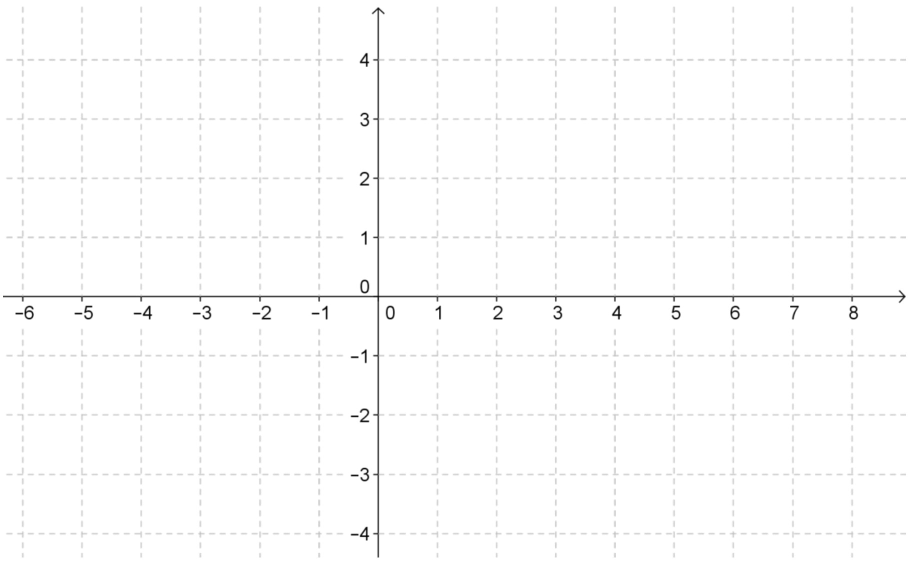
Aktivnost 2: Kružnice u taxicab geometriji

Aktivnost:
U euklidskoj geometriji kružnica je definirana kao skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Radijus (polumjer) kružnice je dužina koja spaja središte s bilo kojom točkom kružnice. Dijametar (promjer) je dužina koja prolazi središtem kružnice i spaja neke dvije točke kružnice. Jednadžba kružnice, u euklidskoj geometriji, radijusa r sa središtem u točki (p, q) je

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Tu formulu dobivamo iz formule za udaljenost.
U taxicab geometriji vrijede iste definicije za pojmove kružnice, središta, radijusa i promjera. Jedina razlika je formula za udaljenost. Stoga taxicab kružnice izgledaju drugačije no u euklidskoj geometriji.

1. **T-kružnica sa središtem u $(0, 0)$ i polumjera 2 skup je svih točaka čija t-udaljenost do središta iznosi 2. Izvedite jednadžbu za tu t-kružnicu, a zatim je nacrtajte.**



Kakav je oblik t-kružnice? Što mislite, imaju li sve t-kružnice takav oblik?

2. **U istoj mreži nacrtajte t-kružnicu sa središtem u** $(3, 0)$ **radijusa** 3**.**

3. **Kako biste napisali opću jednadžbu t-kružnice sa središtem u točki** (p, q) **i polumjera** r**?**

4. **Pronađite koordinate sjecišta t-kružnica iz prva dva zadatka.**

5. **U koliko točaka se sijeku kružnice u euklidskoj geometriji? Predočite crtežom.**

6. **Nacrtajte bilo koje dvije t-kružnice tako da imaju točno jednu zajedničku točku.**

7. **Nacrtajte dvije različite t-kružnice tako da imaju beskonačno mnogo zajedničkih točaka.**

8. **Kako računamo opseg kružnice u euklidskoj geometriji? Kako definiramo konstantu π?**

9. **Kako biste izračunali opseg kružnice u taxicab geometriji?**

10. **Koliko iznosi π u taxicab geometriji?**

Bibliografija

[1] B. Divjak, *Notes on Taxicab Geometry*, KoG 5, 5-9, 2001.

[2] C. Reinhardt, *Taxi Cab Geometry: History and Applications*, The Montana Mathematics Enthusiast, TMME, Vol2, br. 1, 38-64, 2005.

[3] B. E. Reynolds, *Taxicab Geometry*, The Pi Mu Epsilon Journal, Worcester, MA. Vol7, br. 2, 77-88, 1980.

[4] J. M. Moser, F. Kramer, *Lines and parabolas in taxicab geometry*, The Pi Mu Epsilon Journal, Worcester, MA. Vol7, br. 7, 441-448, 1982.

[5] R. Kaya i sur., *General equation for taxicab conics and their classification*, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19, pp. 135-148, 2000.

[6] Taxicab Geometry, dostupno na `http://www.taxicabgeometry.net/` (listopad, 2013.).

[7] J. Köller, Taxicab Geometry, dostupno na `http://www.mathematische-basteleien.de/taxicabgeometry.htm` (listopad, 2013.).

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo taxicab geometriju kao jednu od neeuklidskih geometrija. Ta geometrija ima veoma kratku povijest koju smo izložili u prvom poglavlju zajedno sa nekoliko riješenih zadataka koji ukazuju na njezinu jednostavnost, ali i moguće primjene.

U sljedećim poglavljima podsjećamo čitatelja na definiciju metrike te uvodimo osnovne objekte kao što su krug, elipsa, hiperbola i parabola. U radu su prikazani njihovi oblici u taxicab ravnini i izvedene njihove jednadžbe. No definicija parabole nameće pitanje kako mjeriti udaljenost od točke do pravca. Odgovor na to pitanje dan je u obliku teorema koji govori o dva različita slučaja za najkraću udaljenost te smo isti i dokazali. Nakon toga smo proučili t-analogon simetrale dužine koji se u taxicab geometriji javlja čak u četiri različita oblika.
Dalje nastavljamo sa proučavanjem t-kutova i njihove mjere koja ovisi o položaju kuta. Također pokazujemo i diobu kuta koristeći samo taxicab konstrukcije.
Prije samog kraja malo detaljnije se osvrćemo na t-konike iznoseći njihove opće jednadžbe te detaljnu klasifikaciju.

S obzirom da je ovaj rad nastao u svrhu završetka nastavničkog smjera diplomskog studija matematike, zadnje poglavlje posvećeno je približavanju osnovnih sadržaja taxicab geometrije učenicima srednjih škola.

Summary

In this graduate thesis we study Taxicab geometry as one of non-Euclidean geometry. In the first chapter we expose short history of this geometry along with few solved problems which indicate it's simplicity and possible applications.

In next chapters we remind a reader on definition of metric of this geometry and we introduce the basic objects like circle, ellipse, hyperbola and parabola. We analyse their shapes in taxicab geometry and we obtain their equations. But definition of parabola impose the question how to measure the distance from a point to a line. The answer to this question is given in proved theorem that tells us about two different cases for the shortest path. Then we study bisector t-analogue which in taxicab geometry has even four forms. Afterwards we continue with studying t-angles and their measures which depend on position of angle. We also analyse sectioning of an angle using only taxicab constructs.
Before the end we look back to get some more information about t-conics giving their general equations as well as detailed classification.

Considering that this thesis was created for the purpose of finishing graduate program in mathematics education, last chapter is dedicated to implementing the basics of taxicab geometry for the students in high school.

Životopis

Rođena sam 8. svibnja 1990. u Varaždinu. Osnovnu školu pohađala sam u Beletincu u razdoblju od 1996-2004. Potom, zbog interesa za matematiku, upisujem prirodoslovno-matematički smjer u Prvoj Gimnaziji Varaždin. Godine 2008. na temelju odličnog uspjeha oslobođena sam polaganja mature. Iste godine upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet, Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija matematike 2011. na istom odsjeku upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički, a dvije godine kasnije i diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika. U travnju 2014. stekla sam akademski naziv magistra edukacije matematike.