Potpunost i njene posljedice

Tkalec, Kristina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Tkalec

POTPUNOST I NJENE POSLJEDICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, lipanj, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim bližnjima koji su sve ove godine bili uz mene!

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo potpunost polja realnih brojeva te neke važne posljedice koje ta potpunost ima na svojstva neprekidnih funkcija.

Realne brojeve smo uveli aksiomatski kao jedno netrivijalno potpuno uređeno polje. S tim u vezi smo razradili sve potrebne algebarske pojmove kao što su grupe, prsteni itd. i to je napravljeno u prvom poglavlju.

U drugom poglavlju proučavamo neprekidne funkcije. Dokazujemo da neprekidna funkcija na segmentu koja u krajnjim točkama segmenta poprima vrijednosti suprotnog predznaka ima nultočku.

Nadalje, proučavamo omeđenost funkcija te dokazujemo da je neprekidna funkcija na segmentu omeđena. Nakon toga dokazujemo još jači rezultat, da neprekidna funkcija na segmentu poprima minimum i maksimum. Iz toga zaključujemo da je slika neprekidne funkcije na segmentu segment.

Sve tvrdnje u ovom diplommskom radu su precizno dokazane, a pristup koji smo koristili nije zahtjevao uvođenje prirodnih brojeva (pa tako nismo koristili nizove).

Poglavlje 1

Potpuno uređeno polje

1.1 Osnovni pojmovi

Neka su S i T neprazni skupovi. Za bilo koji podskup od $S \times T$ kažemo da je relacija između S i T.
Ako je ρ relacija između S i S, onda kažemo da je ρ binarna relacija na S.
Dakle, ρ je binarna relacija na S ako i samo ako $\rho \subseteq S \times S$.

Umjesto $x, y \in \rho$ pišemo i $x\rho y$.

Neka je ρ binarna relacija na skupu S.

- Za ρ kažemo da je *refleksivna* na S ako je $x\rho x$ za svaki $x \in S$.
- Za ρ kažemo da je *simetrična* na S ako za sve $x, y \in S$ vrijedi $x\rho y$ slijedi $y\rho x$.
- Za relaciju ρ kažemo da je *tranzitivna* na skupu S ako za sve $x, y, z \in S$ vrijedi da ako je $x\rho y$ i $y\rho z$ onda je $x\rho z$.

Ako je ρ refleksivna, simetrična i tranzitivna na skupu S, onda za ρ kažemo da je *relacija ekvivalencije* na S.

Neka je ρ binarna relacija na S. Za ρ kažemo da je *antisimetrična* na S ako za sve $x, y \in S$ vrijedi $x\rho y$ i $y\rho x$ slijedi $x = y$.
Drugim riječima, ρ je antisimetrična na S ako ne postoje $x, y \in S$ takvi da je $x \neq y$ te takvi da je $x\rho y$ i $y\rho x$.

Primjer 1.1.1. *Neka je $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$. Očito je ρ binarna relacija na $\mathbb{R}$. Vrijedi:*

- ρ *je refleksivna jer je* $(x, x) \in \rho$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- ρ *nije simetrična jer je* $(1, 2) \in \rho$ *ali* $(2, 1) \notin \rho$,
- ρ *je antisimetrična jer iz* $x\rho y$ *i* $y\rho x$ *slijedi* $x \leq y$ *i* $y \leq x$ *što povlači* $x = y$,
- ρ *je tranzitivna jer iz* $x\rho y$ *i* $y\rho z$ *slijedi* $x\rho z$.

Primjer 1.1.2. *Neka je A skup te neka je S skup svih podskupova od A (tzv. partitivni skup od A, kojeg označavamo sa $\mathcal{P}(A)$). Definiramo binarnu relaciju ρ na S sa* $\rho = \{(B, C) \in S \times S \mid B \subseteq C\}$.

(1.) Je li ρ refleksivna na S?

Uzmemo $B \in S$. Je li $(B, B) \in \rho$)? Da, jer je $B \subseteq B$.

(2.) Je li ρ antisimetrična na S?

Ako je $B\rho C$ i $C\rho B$ onda je $B \subseteq C$ i $C \subseteq B$ pa je $C = B$. Dakle, ρ je antisimetrična.

(3.) Je li ρ tranzitivna na S?

Iz $B\rho C$ i $C\rho D$ slijedi $B \subseteq C$ i $C \subseteq D$ pa je $B \subseteq D$, tj. $B\rho D$. Dakle, ρ je tranzitivna.

Za relaciju ρ koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna na S kažemo da je *parcijalni uređaj* na S (ili relacija parcijalnog uređaja na S).
Očito je da su relacije iz Primjera 1.1.1 i 1.1.2 parcijalni uređaji (na $\mathbb{R}$ odnosno na S).

Definicija 1.1.1. *Neka je ρ parcijalni uređaj na skupu S. Kažemo da je ρ* linearni uređaj *(ili uređaj) na S ako za sve $x, y \in S$ vrijedi $x\rho y$ ili $y\rho x$.*

Uočimo da je relacija ρ iz Primjera 1.1.1 linearni uređaj na $\mathbb{R}$.

Primjer 1.1.3. *Neka je A skup te neka je S njegov partitivni skup. Neka je ρ relacija definirana kao u Primjeru 1.1.2. Znamo da je ρ parcijalni uređaj na S. Mora li ρ biti linearni uređaj na S?*

Neka je A skup koji ima barem dva elementa. Neka su to a_1, a_2. Dakle, $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Neka je $x = \{a_1\}$, $y = \{a_2\}$. Tada je $x, y \in S$. No, x nije podskup od y niti je y podskup od x. Stoga, $(x, y) \notin \rho$ i $(y, x) \notin \rho$. Zbog toga ρ nije linearni uređaj na S.

Definicija 1.1.2. *Neka je G skup. Svaku funkciju $G \times G \to G$ nazivamo* binarna operacija *na G.*

Ako je f binarna operacija na G, onda za $x, y \in G$ umjesto $f(x, y)$ pišemo i xfy.

Neka je $\cdot$ binarna operacija na skupu G. Kažemo da je binarna operacija $\cdot$ *asocijativna* ako za sve $x, y, z \in G$ vrijedi $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Ako je $\cdot$ binarna operacija na skupu G onda za uređeni par $(G, \cdot)$ kažemo da je *grupoid*.

Ako je $\cdot$ asocijativna binarna operacija na G onda za $(G, \cdot)$ kažemo da je *polugrupa*.

Neka je $(G, \cdot)$ grupoid. Neka je $e \in G$. Kažemo da je *e neutralni element* za $\cdot$ (ili neutralni element u $(G, \cdot)$) ako za svaki $x \in G$ vrijedi $e \cdot x = x \cdot e = x$.

Propozicija 1.1.1. *Neka je $(G, \cdot)$ grupoid te neka su e_1 i e_2 neutralni elementi u $(G, \cdot)$. Tada je $e_1 = e_2$.*

Dokaz. Budući da su e_1 i e_2 neutralni elementi za $\cdot$, vrijedi

$$e_1 \cdot x = x \text{ i } x \cdot e_2 = x$$

za svaki $x \in G$. Kad u prvu jednakost uvrstimo $x = e_2$, a u drugu $x = e_1$ dobivamo

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \text{ i } e_1 \cdot e_2 = e_1.$$

Stoga je $e_1 = e_2$. □

Neka je $(G, \cdot)$ polugrupa. Za $(G, \cdot)$ kažemo da je *monoid* ako postoji $e \in G$ takav da je e neutralni element za $\cdot$.

Uočimo da je prema prethodnoj propoziciji takav $e \in G$ jedinstven.

Neka je $(G, \cdot)$ monoid. Neka je $x \in G$. Za $y \in G$ kažemo da je *inverz* (ili inverzni element) od x ako $x \cdot y = y \cdot x = e$.

Propozicija 1.1.2. *Neka je $(G, \cdot)$ monoid, $x \in G$ te neka su y_1, y_2 inverzni elementi od x. Tada je $y_1 = y_2$.*

Dokaz. Iz $x \cdot y_1 = e$ slijedi $y_2 \cdot (x \cdot y_1) = y_2 \cdot e$. Koristeći asocijativnost od $\cdot$ i činjenicu da je e neutralni element dobivamo $(y_2 \cdot x) \cdot y_1 = y_2$ pa budući da je y_2 inverz od x imamo $e \cdot y_1 = y_2$. Stoga je $y_1 = y_2$. □

Prethodna propozicija kaže dakle da je inverz nekog elementa u monoidu, ako postoji, jedinstven.

Neka je $(G, \cdot)$ monoid u kojem svaki element ima inverz. Tada za $(G, \cdot)$ kažemo da je *grupa*.

Ako je $(G, \cdot)$ grupa te $x \in G$, onda sa x^{-1} označavamo inverzni element od x u $(G, \cdot)$. Dakle, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ za svaki $x \in G$.

Propozicija 1.1.3 (Skraćivanje u grupi)**.** *Neka je $(G, \cdot)$ grupa te neka su $a, b, c \in G$ takvi da je $a \cdot b = a \cdot c$. Tada je $a = c$.*

Dokaz. Iz $a \cdot b = a \cdot c$ slijedi $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$, pa je $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$ što povlači $e \cdot b = e \cdot c$. Dakle, $b = c$. □

Neka je $\cdot$ binarna operacija na skupu G. Za $\cdot$ kažemo da je *komutativna* ako za sve $x, y \in G$ vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$.

Za grupu $(G, \cdot)$ kažemo da je *komutativna* ili Abelova ako je $\cdot$ komutativna binarna operacija na G.

1.2 Prsteni

Definicija 1.2.1. *Neka je P skup te $+$ i $\cdot$ binarne operacije na P takve da vrijedi:*

(1.) $(P, +)$ *je Abelova grupa*

(2.) $(P, \cdot)$ *je polugrupa*

(3.) za sve $x, y, z \in P$ *vrijedi* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *i* $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Tada za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je prsten.

Napomena 1.2.1. *Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten onda neutralni element za operaciju $+$ obično označavamo s 0.*

Propozicija 1.2.1. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Tada za svaki $x \in P$ vrijedi $x \cdot 0 = 0$ i $0 \cdot x = 0$.*

Dokaz. Neka je $x \in P$. Tada je $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, dakle, $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Općenito, ako je $a \in P$ takav da je $a = a + a$ onda je $a = 0$ (naime, iz $a = a + a$ slijedi $0 + a = a + a$, pa skraćivanje u grupi povlači $0 = a$). Stoga je $0 \cdot x = 0$. Analogno dobivamo $x \cdot 0 = 0$. □

Napomena 1.2.2. *Ako je $(G, +)$ Abelova grupa onda za $x \in G$ sa $-x$ označavamo inverzni element od x. Dakle, $x + (-x) = e$, gdje je e neutralni element u $(G, +)$.*
Dakle, ako je $(P, +, \cdot)$ prsten onda za svaki $x \in P$ vrijedi

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Propozicija 1.2.2. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Tada za sve $x, y \in P$ vrijedi:*

(1.) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

(2.) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

(3.) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Dokaz. (1.) Imamo

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y,$$

a po Propoziciji 1.2.1 $0 \cdot y = 0$. Dakle, $(-x) \cdot y + x \cdot y = 0$. Ovo upravo znači da je $(-x) \cdot y$ inverzni element od $x \cdot y$ u monoidu $(P, +)$. Prema tome $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

(2.) Tvrdnja slijedi analogno kao pod (1.).

(3.) Koristeći trvrdnje (1.) i (2.) imamo

$$(-x) \cdot (-y) \overset{1.}{=} -(x \cdot (-y)) \overset{2.}{=} -(-(x \cdot y)).$$

Općenito, ako je $(G, \cdot)$ grupa onda za $g \in G$ vrijedi $(g^{-1})^{-1} = g$, naime to slijedi iz $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$ i definicije inverznog elementa od g^{-1}. Stoga, za svaki $a \in P$ vrijedi $-(-a) = a$. Prema tome $-(-(x \cdot y)) = x \cdot y$. Dakle, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

□

Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je *komutativan prsten* ako je $\cdot$ komutativna binarna operacija na P.

Za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je *prsten s jedinicom* ako je $(P, \cdot)$ monoid.

Ako je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom onda obično neutralni element u monoidu $(P, \cdot)$ označavamo s 1 i nazivamo *jedinica u prstenu* $(P, +, \cdot)$.

Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom. Pretpostavimo da je $0 = 1$. Tada je $P = \{0\}$. Naime, ako je $x \in P$, onda je $x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0$, dakle, $x = 0$.

Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten s jedinicom takav da je $0 \neq 1$. Tada 0 nije invertibilan element u monoidu $(P, \cdot)$ pa stoga $(P, \cdot)$ nije grupa. Naime, kada bi 0 bila invertibilna u $(P, \cdot)$ postojao bi $x \in P$ tako da je $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 1$, što je nemoguće.

1.3 Polja

Neka je $(P, +, \cdot)$ komutativni prsten s jedinicom u kojem vrijedi sljedeće: ako je $x \in P$, $x \neq 0$ onda je x invertibilan element u monoidu $(P, \cdot)$. Tada za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je *polje*.

Ako je $(P, +, \cdot)$ polje onda za $x \in P$, $x \neq 0$, sa x^{-1} označavamo inverzni element od x u $(P, \cdot)$. Dakle, za svaki $x \in P \setminus \{0\}$ vrijedi $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Za $(P, +, \cdot)$ kažemo da je *integralna domena* ako za sve $x, y \in P$ takve da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ vrijedi $x \cdot y \neq 0$. Dakle, ako je $(P, +, \cdot)$ integralna domena te $x, y \in P$ takvi da je $x \cdot y = 0$ onda je $x = 0$ ili $y = 0$.

Propozicija 1.3.1. *Neka ja $(P, +, \cdot)$ polje. Tada je $(P, +, \cdot)$ integralna domena.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $x, y \in P$ takvi da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ te $x \cdot y = 0$. Iz $x \cdot y = 0$ slijedi $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$ pa je $(x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0$, tj. $1 \cdot y = 0$. Dakle, $y = 0$. Kontradikcija. □

Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Za $x, y \in P$ sa $x - y$ označavamo $x + (-y)$.

Propozicija 1.3.2. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Tada za sve $x, y, z \in P$ vrijedi*

$$(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z \ \text{ i } \ x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$$

(pri tome $a \cdot b - c \cdot d$ znači $(a \cdot b) - (c \cdot d)$ za $a, b, c, d \in P$).

Dokaz. Imamo

$$(x - y) \cdot z = (x + (-y)) \cdot z = x \cdot z + (-y) \cdot z = x \cdot z + (-y \cdot z) = x \cdot z - y \cdot z.$$

Dakle,

$$(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z.$$

Analogno dobivamo $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$. □

Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten te neka je $\leq$ linearni uređaj na P takav da vrijedi sljedeće:

(1.) Ako su $x, y \in P$ takvi da $x \leq y$ onda za svaki $z \in P$ vrijedi $x + z \leq y + z$

(2.) Ako su $x, y \in P$ takvi da $0 \leq x$ i $0 \leq y$ onda je $0 \leq x \cdot y$

Tada za uređenu četvorku $(P, +, \cdot, \leq)$ kažemo da je *uređeni prsten*.

Propozicija 1.3.3. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten.*

(1.) Ako su $a, b, c, d \in P$ takvi da je $a \leq b$ i $c \leq d$ onda je $a + c \leq b + d$.

(2.) Ako je $x \in P$ takav da je $0 \leq x$ onda je $-x \leq 0$, a ako je $x \leq 0$ onda je $0 \leq -x$.

(3.) Ako su $x, y \in P$ takvi da je $0 \leq x$ i $y \leq 0$ onda je $x \cdot y \leq 0$.

(4.) Ako su $x, y \in P$ takvi da je $x \leq 0$ i $0 \leq y$ onda je $x \cdot y \leq 0$.

(5.) Ako su $x, y \in P$ takvi da je $x \leq 0$ i $y \leq 0$ onda je $0 \leq x \cdot y$.

Dokaz. (1.) Iz $a \leq b$ slijedi $a + c \leq b + c$, a iz $c \leq d$ slijedi $c + b \leq d + b$. Dakle, $a + c \leq b + c = c + b \leq d + b$ pa iz tranzitivnosti relacije $\leq$ slijedi $a + c \leq d + b$, tj. $a + c \leq b + d$.

(2.) Pretpostavimo da je $0 \leq x$. Tada je $0 + (-x) \leq x + (-x)$, tj. $-x \leq 0$. Analogno dobivamo da $x \leq 0$ povlači $0 \leq -x$.

(3.) Iz $y \leq 0$ slijedi, prema tvrdnji 2.), da je $0 \leq -y$, a ovo zajedno sa $0 \leq x$ povlači $0 \leq x \cdot (-y)$. Stoga je $0 \leq -(x \cdot y)$, pa slijedi iz 2.) da je $-(-(x \cdot y)) \leq 0$, tj. $x \cdot y \leq 0$.

Tvrdnju (4.) dobivamo analogno.

(5.) Iz $x \leq 0$ i $y \leq 0$ slijedi $0 \leq -x$ i $0 \leq -y$ pa je $0 \leq (-x) \cdot (-y)$, tj. $0 \leq x \cdot y$ (prema Propoziciji 1.2.2).

□

Općenito, ako je S skup te $\leq$ uređaj na S onda ćemo za $x, y \in S$ pisati $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$.

Uočimo sljedeće: ako je $\leq$ uređaj na skupu S te ako su $x, y, z \in S$ takvi da je $x \leq y$ i $y < z$ onda je $x < z$. Naime, $y < z$ povlači $y \leq z$ pa iz tranzitivnosti relacije $\leq$ dobivamo $x \leq z$.

Dokažimo da je $x \neq z$. Pretpostavimo suprotno, tada je $x = z$ pa imamo $x \leq y$ i $y < x$ što povlači $x \leq y$ i $y \leq x$ pa je $x = y$ (antisimetričnost relacije $\leq$). No ovo je u kontradikciji s $y < x$. Dakle, $x \neq z$ pa je $x < z$.

Analogno dobivamo da za sve $x, y, z \in S$ iz $x < y$ i $y \leq z$ slijedi $x < z$.

Uočimo da za $x, y \in S$ ne može vrijediti $x \leq y$ i $y < x$ (jer bismo prema dokazanom imali $x < x$).
Isto tako ne može vrijediti $x < y$ i $y \leq x$.

Propozicija 1.3.4. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten.*

(1.) Ako su $x, y, z \in P$ takvi da je $x < y$ onda je $x + z < y + z$.

(2.) Ako su $a, b, c, d \in P$ takvi da je $a < b$ i $c \leq d$ onda je $a + c < c + d$.

(3.) Ako je $x \in P$ i $0 < x$ onda je $-x < 0$. Ako je $x < 0$ onda je $0 < -x$.

Dokaz. (1.) Iz $x \leq y$ slijedi $x + z \leq y + z$. Pretpostavimo $x + z = y + z$. Tada je $x = y$ (skraćivanje u grupi $(P, +)$). No to je u kontradikciji s $x < y$. Dakle, $x + z \neq y + z$, pa je $x + z < y + z$.

(2.) Iz $a < b$ slijedi $a + c < b + c$, a iz $c \leq d$ slijedi $b + c \leq b + d$. Iz toga je $a + c < b + d$.

(3.) Iz $0 < x$, prema tvrdnji 1.), slijedi $0 + (-x) < x + (-x)$ što povlači $-x < 0$. Analogno, $x < 0$ povlači $0 < -x$.

□

Propozicija 1.3.5. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten takav da je $(P, +, \cdot)$ integralna domena. Neka su $x, y \in P$. Tada:*

(1.) $0 < x$, $0 < y \Rightarrow 0 < x \cdot y$

(2.) $0 < x$, $y < 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$

(3.) $x < 0$, $0 < y \Rightarrow x \cdot y < 0$

(4.) $x < 0$, $y < 0 \Rightarrow 0 < x \cdot y$

Dokaz. (1.) Iz $0 \leq x$ i $0 \leq y$ slijedi $0 \leq x \cdot y$. Nadalje, iz $x \neq 0$ i $y \neq 0$ slijedi $x \cdot y \neq 0$. Stoga je $0 < x \cdot y$.

Analogno, koristeći Propoziciju 1.3.3, dobivamo tvrdnje (2.), (3.) i (4.). □

Napomena 1.3.1. *Neka je $\leq$ uređaj na skupu S. Tada za sve $x, y \in S$, $x \neq y$, vrijedi $x < y$ ili $y < x$.*

Propozicija 1.3.6. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten pri čemu je $(P, +, \cdot)$ integralna domena i prsten s jedinicom te pri čemu je $0 \neq 1$. Tada je $0 < 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da to ne vrijedi. Tada je $1 < 0$. Dakle, $1 < 0$ i $1 < 0$ pa je $0 < 1 \cdot 1$ (Propozicija 1.3.5), tj. $0 < 1$, kontradikcija. Dakle, $0 < 1$. □

Propozicija 1.3.7. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten.*

(1.) Ako su $a, b, c \in P$ takvi da je $a \leq b$ i $0 \leq c$ onda je $a \cdot c \leq b \cdot c$ i $c \cdot a \leq c \cdot b$.

(2.) Ako je $(P, +, \cdot)$ integralna domena te $a, b, c \in P$ takvi da je $a < b$ i $0 < c$ onda je $a \cdot c < b \cdot c$ i $c \cdot a < c \cdot b$.

(3.) Ako je $(P, +, \cdot)$ polje onda za $x \in P$ takav da je $0 < x$ vrijedi $0 < x^{-1}$, a za $x \in P$ takav da je $x < 0$ vrijedi $x^{-1} < 0$.

Dokaz. (1.) Iz $a \leq b$ slijedi $0 \leq b - a$, pa iz $0 \leq c$ slijedi $0 \leq c(b - a)$. Dakle, $0 \leq cb - ca$ pa je $ca \leq cb$. Analogno dobivamo $ac \leq bc$.

(2.) Iz $a < b$ slijedi $0 < b - a$ (Propozicija 1.3.4). Sada iz Propozicije 1.3.5 slijedi $0 < c(b - a)$, pa je $0 < cb - ca$, odnosno $ca < cb$. Analogno dobivamo $ac < bc$.

(3.) Pretpostavimo da je $0 < x$. Sigurno je $x^{-1} \neq 0$ (u suprotnom bi iz $1 = x \cdot x^{-1}$ slijedilo $1 = 0$ što bi povlačilo da je $P = \{0\}$ što je nemoguće jer je $x \neq 0$). Stoga je $x^{-1} < 0$ ili $0 < x^{-1}$.
Pretpostavimo da je $x^{-1} < 0$. Iz Propozicije 1.3.5 i činjenice da je $0 < x$ slijedi $x \cdot x^{-1} < 0$, tj. $1 < 0$. No ovo je u kontradikciji sa Propozicijom 1.3.7. Dakle, $0 < x^{-1}$. Analogno dobivamo da $x < 0$ povlači $x^{-1} < 0$.

□

Neka je S skup te $\leq$ uređaj na S. Tada za $x, y \in S$ pišemo $x \geq y$ ako je $y \leq x$. Također pišemo $x > y$ ako je $y < x$.

Definicija 1.3.1. *Neka je S neprazan skup te neka je $\leq$ uređaj na S. Tada za uređeni par $(S, \leq)$ kažemo da je uređeni skup.*

Definicija 1.3.2. *Neka je $(S, \leq)$ uređeni skup, $A \subseteq S$ te $x \in S$.*

Za x kažemo da je gornja međa skupa A (u $(S, \leq)$) ako za svaki $a \in A$ vrijedi $a \leq x$.

Za x kažemo da je donja međa skupa A ako za svaki $a \in A$ vrijedi $x \leq a$.

Neka je $(S, \leq)$ uređen skup te $T \subseteq S$. Kažemo da je T *odozgo omeđen skup* u $(S, \leq)$ ako T ima gornju među u $(S, \leq)$. Kažemo da je T *odozdo omeđen skup* u $(S, \leq)$ ako T ima donju među u $(S, \leq)$.

Definicija 1.3.3. *Neka je $(S, \leq)$ uređeni skup te $A \subseteq S$.*

Za $a_0 \in A$ kažemo da je maksimum (ili najveći element) skupa A ako za svaki $a \in A$ vrijedi $a \leq a_0$.

Za $a_0 \in A$ kažemo da je minimum (ili najmanji element) skupa A ako za svaki $a \in A$ vrijedi $a_0 \leq a$.

Uočimo sljedeće: ako je $(S, \leq)$ uređen skup, $A \subseteq S$ te a_0 i a_1 maksimumi skupa A, onda je $a_0 = a_1$. Drugim riječima, maksimum skupa, ako postoji, je jedinstven.
Isto tako, minimum skupa, ako postoji, je jedinstven.

Uočimo sljedeće, ako je $(S, \leq)$ uređen skup, $A \subseteq S$ te a maksimum skupa A onda je a najmanja gornja međa skupa A, tj. a je gornja međa od A i $a \leq b$ za svaku gornju među b od A.

Definicija 1.3.4. *Neka je $(S, \leq)$ uređen skup te neka je $T \subseteq S$. Neka je $a \in S$. Kažemo da je a supremum skupa T u $(S, \leq)$ ako je a najmanja gornja međa skupa T, tj. ako vrijedi:*

(1.) a je gornja međa od T

(2.) $a \leq b$, za svaku gornju među b od T.

Uočimo sljedeće: ako su $a_1, a_2 \in S$ takvi da je a_1 supremum od T i a_2 supremum od T, tada je $a_1 = a_2$.

Također uočimo da ako je a maksimum skupa T onda je a supremum od T.

Definicija 1.3.5. *Neka je $(S, \leq)$ uređen skup, $T \subseteq S$ te $a \in S$. Kažemo da je a infimum od T u $(S, \leq)$ ako je a najveća donja međa skupa T, tj. ako vrijedi:*

(1.) a je donja međa od T

(2.) $b \leq a$, za svaku donju među b od T.

Kao i u slučaju supremuma imamo da je infimum skupa, ako postoji, jedinstven.

Nadalje, ako je a minimum skupa T onda je a infimum skupa T.

Napomena 1.3.2. *Ako je $(S, \leq)$ uređeni skup te $a, b \in S$ takvi da ne vrijedi $a \leq b$, onda je $b < a$. Naime, iz $a \nleq b$ odmah slijedi $a \neq b$. Nadalje, budući da je $\leq$ uređaj na S vrijedi $a \leq b$ ili $b \leq a$. No $a \nleq b$ pa imamo $b \leq a$. Iz $a \neq b$ slijedi $b < a$.*

Propozicija 1.3.8. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređen prsten. Neka je $S \subseteq P$ te $a \in P$. Tada je a supremum skupa S (u uređenom skupu $(P, \leq)$) ako i samo ako je a gornja međa od S te za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $a - \epsilon < x$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je a supremum od S. Tada je a očito gornja međa od S. Neka je $\epsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $x \in S$ takav da je $a - \epsilon < x$.

Pretpostavimo da takav x ne postoji. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi

$$a - \epsilon \geq x.$$

Ovo znači da je $a - \epsilon$ gornja međa skupa S. Budući da je a supremum, imamo $a \leq a - \epsilon$ što povlači $0 \leq -\epsilon$, tj. $\epsilon \leq 0$, a ovo je u kontradikciji s $\epsilon > 0$. Dakle, postoji $x \in S$ takav da je $a - \epsilon < x$.

($\Leftarrow$) Uzmimo da je a gornja međa od S te da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $a - \epsilon < x$. Dokažimo da je a supremum od S.

Neka je b gornja međa od S. Tvrdimo da je $a \leq b$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $b < a$. Iz Propozicije 1.3.4 slijedi da je $0 < a + (-b)$, tj. $0 < a - b$. Definirajmo

$$\epsilon = a - b.$$

Tada je $\epsilon > 0$ i $b = a - \epsilon$. Prema pretpostavci postoji $x \in S$ takav da je $a - \epsilon < x$. Ovo znači da je $b < x$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je b gornja međa od S. Prema tome $a \leq b$. Zaključak a je supremum od S. □

Definicija 1.3.6. *Neka je $(S, \leq)$ uređen skup. Za $(S, \leq)$ kažemo da je potpuno uređen skup ako vrijedi sljedeće (aksiom potpunosti): kad god su $A, B \subseteq S$ takvi da $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ te takvi da je $x \leq y$, za svaki $x \in A$ i za svaki $y \in B$ onda postoji $z \in S$ takav da je $x \leq z \leq y$ za sve $x \in A$ i $y \in B$.*

Teorem 1.3.1. *Neka je $(S, \leq)$ potpuno uređen skup. Neka je T neprazan odozgo omeđen skup u $(S, \leq)$. Tada T ima supremum, tj. postoji $a \in S$ takav da je a supremum od T.*

Dokaz. Neka je G skup svih gornjih međa od T. Tada je $G \neq \emptyset$ jer je T odozgo omeđen. Za svaki $x \in T$ i svaki $y \in G$ očito vrijedi $x \leq y$. Iz aksioma potpunosti slijedi da postoji $z \in S$ takav da je $x \leq z \leq y$ za sve $x \in T$ i $y \in G$. Iz toga slijedi da je z gornja međa od T te da je najmanja gornja međa od T. Stoga je z supremum skupa T. □

Teorem 1.3.2. *Neka je $(S, \leq)$ potpuno uređen skup. Neka je T neprazan odozdo omeđen skup u $(S, \leq)$. Tada T ima infimum.*

Dokaz. Neka je D skup svih donjih međa od T. Tada je $D \neq \emptyset$ jer je T odozdo omeđen. Za svaki $x \in T$ i svaki $y \in D$ očito vrijedi $y \leq x$. Iz ovoga slijedi da postoji $z \in S$ takav da vrijedi $y \leq z \leq x$ za sve $x \in T$ i $y \in D$. Iz toga slijedi da je z infimum od T. □

Definicija 1.3.7. *Za uređenu četvorku $(P, +, \cdot, \leq)$ kažemo da je potpuno uređeno polje ako je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeni prsten, $(P, +, \cdot)$ polje te $(P, \leq)$ potpuno uređen skup.*

Za potpuno uređeno polje $(P, +, \cdot, \leq)$ koje je netrivijalno (tj. takvo da je $0 \neq 1$) kažemo da je *polje realnih brojeva*.

Od sada ćemo uzimati da je $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ jedno fiksirano polje realnih brojeva.

Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Očito je $|x| \geq 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Nadalje za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leq |x|$. Naime, ovo je jasno ako je $x \geq 0$, a ako je $x < 0$ onda je $0 < -x$ pa je $x < -x$, tj. $x < |x|$.

Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|-x| = |x|$. Naime, ako je $x \geq 0$, onda je $-x \leq 0$, pa je $|-x| = -(-x) = x = |x|$, a ako je $x < 0$, onda je $-x > 0$, pa je $|-x| = -x = |x|$.

Napomena 1.3.3. *Ako je $(G, \cdot)$ monoid te ako su $x, y \in G$ invertibilni elementi u monoidu $(G, \cdot)$, onda je i $x \cdot y$ invertibilni element u $(G, \cdot)$ i $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.*
Dokažimo to.
Imamo

$$(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = ((y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot x) \cdot y = (y^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot x)) \cdot y = (y^{-1} \cdot e) \cdot y = y^{-1} \cdot y = e$$

te

$$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = ((x \cdot y) \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = (x \cdot (y \cdot y^{-1})) \cdot x^{-1} = (x \cdot e) \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = e$$

pa tvrdnja slijedi.

Posebno ako je $(G, +)$ Abelova grupa onda za sve $x, y \in G$ vrijedi $-(x+y) = -y+(-x) = -x + (-y)$.

Propozicija 1.3.9. *Neka je $(P, +, \cdot, \leq)$ uređeno polje te neka su $x, y \in P$ takvi da je $0 < x < y$. Tada je $y^{-1} < x^{-1}$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 1.3.7 vrijedi

$$0 < x^{-1} \text{ i } 0 < y^{-1}.$$

Iz $x < y$ (Propozicija 1.3.7) slijedi da je $x^{-1}x < x^{-1}y$, tj. $1 < x^{-1}y$ pa iz iste propozicije slijedi

$$y^{-1} < (x^{-1}y)y^{-1}, \text{ tj. } y^{-1} < x^{-1}.$$

□

Označimo sa 2 broj 1 + 1.

Prema Propoziciji 1.3.6 vrijedi $0 < 1$ pa iz Propozicije 1.3.4 slijedi da je $0 + 1 < 1 + 1$, tj. $1 < 2$.

Lema 1.3.1. *Neka je* $\epsilon \in \mathbb{R}$ *tako da je* $\epsilon > 0$. *Tada postoji* $\epsilon' \in \mathbb{R}$ *tako da je* $0 < \epsilon' < \epsilon$.

Dokaz. Znamo da je $0 < 2$. Stoga je $0 < 2^{-1}$. Definiramo $\epsilon' = 2^{-1} \cdot \epsilon$. Iz Propozicije 1.3.5 slijedi $0 < \epsilon'$. S druge strane iz $0 < 1 < 2$ i Propozicije 1.3.9 slijedi da je $2^{-1} < 1$ pa iz Propozicije 1.3.7 slijedi $2^{-1} \cdot \epsilon < 1 \cdot \epsilon$, tj. $\epsilon' < \epsilon$. Dakle, $0 < \epsilon' < \epsilon$. □

Propozicija 1.3.10. *Neka su* $x, y \in \mathbb{R}$ *tako da je* $x < y$. *Tada postoji* $z \in \mathbb{R}$ *takav da je* $x < z < y$.

Dokaz. Imamo $0 < y - x$. Prema Lemi 1.3.1 postoji $\epsilon \in \mathbb{R}$ tako da je $0 < \epsilon < y - x$. Iz $\epsilon < y - x$ slijedi $x + \epsilon < y$, a iz $0 < \epsilon$ slijedi $x < x + \epsilon$. Dakle, $x < x + \epsilon < y$ i time je propozicija dokazana. □

Propozicija 1.3.11. *Neka su* $x, y \in \mathbb{R}$. *Tada je* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Dokaz. Prema definiciji apsolutne vrijednosti vrijedi $|x + y| = x + y$ ili $|x + y| = -(x + y)$. Stoga je dovoljno dokazati da je:

1. $x + y \leq |x| + |y|$
2. $-(x + y) \leq |x| + |y|$.

Znamo da je $x \leq |x|$ te $y \leq |y|$ pa po Propoziciji 1.3.3 slijedi 1.). Nadalje koristeći i Napomenu 1.3.3 dobivamo

$$-(x + y) = -x + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|,$$

dakle 2.) vrijedi. □

Poglavlje 2

Potpunost i neprekidnost

2.1 Neprekidne funkcije

Definicija 2.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeće:*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Definicija 2.1.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definiramo sljedeće skupove:*

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \quad [a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$\langle a, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \quad \langle -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}.$$

Analogno definiramo skupove $\langle a, b]$, $[a, \infty\rangle$, $\langle -\infty, b\rangle$, $\langle -\infty, b]$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Skup $[a, b]$ definiramo na sljedeći način:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Uočimo sljedeće: ako su $x, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, onda je $x - r < x + r$. Naime, prema Propoziciji 1.3.4 iz $0 < r$ slijedi $-r < 0$ pa je stoga $-r < r$, što povlači $x + (-r) < x + r$.

Propozicija 2.1.1. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Tada je*

$$|y - x| < r \Leftrightarrow y \in \langle x - r, x + r\rangle.$$

Dokaz. $\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $|y - x| < r$. Znamo da je

$$y - x \leq |y - x| \text{ pa slijedi } y - x < r$$

što povlači $y < x + r$. S druge strane imamo

$$-(y - x) \leq |-(y - x)| = |y - x| \text{ pa je } -(y - x) < r,$$

tj. $-y + x < r$ odakle dobivamo $x - r < y$. Dakle,

$$x - r < y < x + r \text{ pa je } y \in \langle x - r, x + r\rangle.$$

$\Leftarrow$) Obratno, ako je $y \in \langle x - r, x + r\rangle$, onda je $y < x + r$ i $x - r < y$ pa je

$$y - x < r \text{ i } -y + x < r,$$

tj. $-(y - x) < r$. Prema tome je $|y - x| < r$. $\square$

Napomena 2.1.1. *Iz prethodne propozicije slijedi ovo: ako je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in S$, onda je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ takav da je*

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$$

vrijedi

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle.$$

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna ako je f neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in S$.

Primjer 2.1.1. *Neka je $c \in \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = c$ za svaki $x \in S$. Neka je $x_0 \in S$. Tvrdimo da je f neprekidna u x_0.*
Neka je $\epsilon > 0$. Neka je δ bilo koji pozitivan realan broj, tj. $\delta \in \mathbb{R}$ takav da je $\delta > 0$. Za svaki $x \in S$ očito vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$ pa posebno to vrijedi i za svaki $x \in S$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.
Prema tome f je neprekidna u x_0. Dakle, f je neprekidna.

Primjer 2.1.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x$ za svaki $x \in S$. Neka je $x_0 \in S$. Dokažimo da je f neprekidna u x_0.*
Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo bilo koji $\delta \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \delta \leq \epsilon$. Tada za svaki $x \in S$ takav da je $|x - x_0| < \delta$ vrijedi $|x - x_0| < \epsilon$, tj. $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Prema tome f je neprekidna u x_0. Dakle, funkcija f je neprekidna.

Lema 2.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0.*

1.) Ako je $f(x_0) > 0$ onda postoji $\delta > 0$ takav da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in S \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.

2.) *Ako je* $f(x_0) < 0$ *onda postoji* $\delta > 0$ *takav da je* $f(x) < 0$ *za svaki* $x \in S \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.

Dokaz. 1.) Pretpostavimo da je $f(x_0) > 0$. Uzmimo $\epsilon = f(x_0)$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$, tj. $f(x) \in \langle 0, 2f(x_0)\rangle$. Time je tvrdnja 1.) dokazana.

2.) Pretpostavimo da je $f(x_0) < 0$. Uzmimo $\epsilon = -f(x_0)$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$, tj. $f(x) \in \langle 2f(x_0), 0\rangle$ pa slijedi tvrdnja.

□

2.2 Egzistencija nultočke

Teorem 2.2.1. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *te neka je* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija takva da je* $f(a) < 0$ *i* $f(b) < 0$. *Tada postoji* $x \in [a, b]$ *takav da je* $f(x) = 0$.

Dokaz. Neka je

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}.$$

Očito je $a \in S$, dakle S je neprazan skup. Nadalje, b je gornja međa skupa S, dakle S je odozgo omeđen skup.
Znamo da je $(\mathbb{R}, \leq)$ potpuno uređen skup pa prema Teoremu 1.3.1 skup S ima supremum. Označimo taj supremum sa c.
Budući da je c (kao supremum) gornja međa od S te da je $a \in S$ imamo $a \leq c$. Znamo da je b gornja međa od S, a c je najmanja gornja međa od S pa je $c \leq b$. Dakle, $c \in [a, b]$.
Tvrdimo da je $f(c) = 0$.
Pretpostavimo da je $f(c) > 0$. Prema Lemi 2.1.1 postoji $\delta > 0$ takva da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in [a, b]$ takav da je $x \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle$. Po Propoziciji 1.3.8 postoji $x \in S$ takav da je $c - \delta < x$. Budući da je c supremum od S vrijedi $x \leq c$ pa je $x < c + \delta$. Dakle

$$c - \delta < x < c + \delta \text{ pa je } x \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle.$$

Također vrijedi $x \in [a, b]$ (jer je $x \in S$). Prema tome $f(x) > 0$. S druge strane zbog

$$x \in S \text{ imamo } f(x) \leq 0.$$

Došli smo do kontradikcije, pa zaključujemo da ne može vrijediti $f(c) > 0$.
Pretpostavimo sada da je $f(c) < 0$. Tada po Lemi 2.1.1 postoji $\delta > 0$ takva da je $f(x) < 0$ za svaki $x \in [a, b]$ takav da je $x \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle$. Budući da je $f(c) < 0$, a $f(b) > 0$ imamo

$c \neq b$. Stoga je $c < b$. Očito vrijedi $c < x < \min\{c + \delta, b\}$ pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $c < x < \min\{c + \delta, b\}$. Slijedi

$$a \leq c < x, x < c + \delta \text{ i } x < b$$

pa je

$$x \in [a, b] \text{ i } x \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle$$

što povlači $f(x) < 0$ pa prema definiciji skupa S vrijedi $x \in S$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $c < x$ (c je supremum skupa S).
Pretpostavke $f(c) < 0$ i $f(c) > 0$ vode na kontradikciju pa zaključujemo da je $f(c) = 0$. □

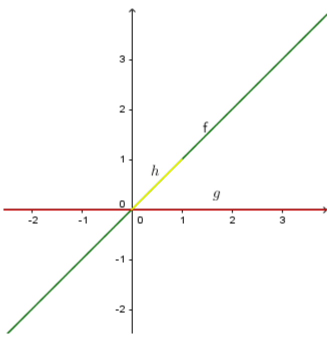
2.3 Omeđenost neprekidne funkcije

Definicija 2.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S omeđen skup ako je S omeđen odozgo i omeđen odozdo (u uređenom skupu $(\mathbb{R}, \leq)$).*

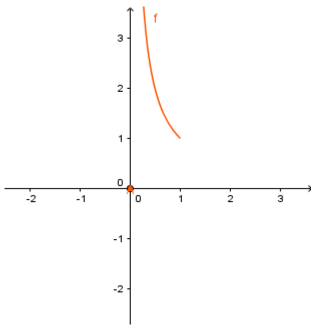
Definicija 2.3.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f omeđena funkcija ako je skup $\{f(x) \mid x \in S\}$ omeđen.*

Dakle, ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija onda je f omeđena ako i samo ako postoje $N, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $N \leq f(x) \leq M$ za svaki $x \in S$.

Primjer 2.3.1. *Neka su $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije definirane sa $f(x) = x$, $g(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x$ za svaki $x \in [0, 1]$.*



Imamo $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, $\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{0\}$, $\{h(x) \mid x \in [0, 1]\} = [0, 1]$ pa je jasno da su funkcije g i h omeđene te da funkcija f nije omeđena.



Primjer 2.3.2. *Neka je $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \in \langle 0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Tvrdimo da f nije omeđena funkcija.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \leq M$ za svaki $x \in [0,1]$. Posebno za svaki $x \in \langle 0,1]$ vrijedi $x^{-1} \leq M$. Slijedi (za $x = 1$) da je $1 \leq M$. Prema tome $0 < M$ pa je $0 < M^{-1}$.
Neka je $x \in \langle 0,1]$. Iz $x^{-1} \leq M$ i Propozicije 1.3.7 slijedi $x \cdot x^{-1} \leq x \cdot M$. Nadalje, iz iste propozicije slijedi $M^{-1} \leq x$. Dakle, $M^{-1} \leq x$ za svaki $x \in \langle 0,1]$. Također iz $1 \leq M$ slijedi $M^{-1} \leq 1$. Prema Propoziciji 1.3.10 postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < x < M^{-1}$ pa je $x \in \langle 0,1]$ (jer je $x < M^{-1} \leq 1$). Dakle, $x < M^{-1}$ i $x \in \langle 0,1]$, no to je u kontradikciji sa $M^{-1} \leq x$ za svaki $x \in \langle 0,1]$. Zaključujemo da funkcija f nije omeđena.

Propozicija 2.3.1. *Neka su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$.*

(1.) Ako je S omeđen i $T \subseteq S$ onda je i T omeđen.

(2.) Ako su S i T odozgo omeđeni onda je i $S \cup T$ odozgo omeđen skup.

(3.) Ako su S i T odozdo omeđeni onda je i $S \cup T$ odozdo omeđen skup.

(4.) Ako su S i T omeđeni onda je i $S \cup T$ omeđen skup.

Dokaz. Tvrdnja (1.) je očita. Pretpostavimo da su S i T omeđeni. Tada postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq M$ te postoji $R \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in T$ vrijedi $x \leq R$. Neka je

$$L = \max\{M, R\}.$$

Tada je $x \leq L$ za svaki $x \in S \cup T$. Dakle, $S \cup T$ je odozgo omeđen skup.
Tvrdnju (3.) dokazujemo analogno.
Tvrdnja (4.) slijedi iz (2.) i (3.). $\square$

Definicija 2.3.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Neka je $T \subseteq S$. Kažemo da je funkcija omeđena na skupu T ako je $\{f(x) \mid x \in T\}$ omeđen skup.*

Propozicija 2.3.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Neka su $T_1, T_2 \subseteq S$.*

1.) Ako je $T_1 \subseteq T_2$ i f omeđena na T_2 onda je f omeđena na T_1.

2.) Ako je f omeđena na T_1 i T_2 onda je f omeđena na $T_1 \cup T_2$.

Dokaz. 1.) Imamo $\{f(x) \mid x \in T_1\} \subseteq \{f(x) \mid x \in T_2\}$ pa tvrdnja slijedi iz Propozicije 2.3.1 (1.).

2.) Imamo $\{f(x) \mid x \in T_1 \cup T_2\} = \{f(x) \mid x \in T_1\} \cup \{f(x) \mid x \in T_2\}$ pa tvrdnja slijedi iz Propozicije 2.3.1 (4.).

□

Lema 2.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ i $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Tada postoji $r > 0$ takav da je f omeđena na $[x_0 - r, x_0 + r] \cap S$.*

Dokaz. Odaberimo proizvoljan $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takva da ako je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap S$ onda je $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$.
Odaberimo bilo koji $r \in \langle 0, \delta\rangle$. Tada je

$$[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle. \tag{2.1}$$

Naime iz $r < \delta$ slijedi $x_0 + r < x_0 + \delta$ te također $-\delta < -r$ što povlači $x_0 - \delta < x_0 - r$ pa ako je $y \in [x_0 - r, x_0 + r]$ onda imamo

$$x_0 - \delta < x_0 - r \leq y \leq x_0 + r < x_0 + \delta,$$

tj. $x_0 - \delta < y < x_0 + \delta$, dakle $y \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.

Prema odabiru broja δ vrijedi

$$\{f(x) \mid x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap S\} \subseteq \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle,$$

a $\langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$ je očito omeđen skup pa slijedi da je $\{f(x) \mid \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap S\}$ omeđen skup, tj. f je omeđena na $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap S$. Iz (2.1) slijedi

$$[x_0 - r, x_0 + r] \cap S \subseteq \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap S$$

pa iz Propozicije 2.3.2 (1.) slijedi da je f omeđena na $[x_0 - r, x_0 + r] \cap S$. □

Teorem 2.3.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f omeđena funkcija.*

Dokaz. Neka je

$$S = \{x \in [a, b] \mid f \text{ omeđena na } [a, x]\}.$$

Vrijedi $[a, a] = \{a\}$ pa je f očito omeđena na $[a, a]$. Dakle $a \in S$.
Nadalje, iz definicije skupa S je očito da je $S \subseteq [a, b]$. Stoga je b gornja međa skupa S.
Dakle, S je neprazan odozgo omeđen skup pa stoga ima supremum (Teorem 1.3.1). Označimo taj supremum sa c.
Budući da je b gornja međa od S vrijedi da je $c \leq b$. S druge strane c je gornja međa od S i $a \in S$ pa je $a \leq c$. Prema tome $c \in [a, b]$.
Budući da je f neprekidna u c prema Lemi 2.3.1 postoji $r > 0$ takav da je funkcija f omeđena na $[c - r, c + r] \cap [a, b]$. Prema Propoziciji 1.3.8 postoji $x \in S$ takav da je $c - r < x$. Tvrdimo da je

$$[a, c] = [a, x] \cup ([c - r, c] \cap [a, b]). \tag{2.2}$$

Neka je $y \in [a, c]$. Tada je $a \leq y \leq c$. Imamo dva slučaja:

1.) $y \leq x$. Tada je očito $y \in [a, x]$ pa je $y \in [a, x] \cup ([c - r, c] \cap [a, b])$.

2.) $x < y$. Iz $c - r < x$ slijedi $c - r < y$ pa zbog $y \leq c$ imamo $y \in [c - r, c]$. Očito je $y \in [a, b]$, dakle $y \in [c - r, c] \cap [a, b]$ pa je $y \in [a, x] \cup ([c - r, c] \cap [a, b])$.

Time smo dokazali da je

$$[a, c] \subseteq [a, x] \cup ([c - r, c] \cap [a, b]).$$

Iz $x \in S$ slijedi da je $x \leq c$ (jer je c supremum od S).
Nadalje, očito je $a \leq x$. Dakle, $x \in [a, c]$ pa je

$$[a, x] \subseteq [a, c]. \tag{2.3}$$

Pretpostavimo da je $y \in [c - r, c] \cap [a, b]$. Tada je $y \in [c - r, c]$ i $y \in [a, b]$ pa slijedi $a \leq y$ i $y \leq c$, dakle $y \in [a, c]$. Time smo dokazali da je

$$[c - r, c] \cap [a, b] \subseteq [a, c].$$

Iz ovoga i (2.3) slijedi da je $[a, x] \cup ([c - r, c] \cap [a, b]) \subseteq [a, c]$. Time smo dokazali da vrijedi (2.2).
Budući da je $x \in S$ funkcija f je omeđena na $[a, x]$. Nadalje, funkcija f je omeđena na

$$[c - r, c + r] \cap [a, b],$$

a $[c-r, c] \cap [a, b] \subseteq [c-r, c+r] \cap [a, b]$ pa je f omeđena na

$$[c-r, c] \cap [a, b]$$

prema Propoziciji 2.3.2 (1.). Iz Propozicije 2.3.2 (2.) slijedi da je f omeđena na

$$[a, x] \cup ([c-r, c] \cap [a, b]),$$

tj. prema (2.2) f je omeđena na

$$[a, c].$$

Tvrdimo da je $c = b$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $c < b$. Imamo $c < z <$ min $\{c + r, b\}$ pa stoga postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je

$$c < z < \min\{c + r\}$$

(Propozicija 1.3.10). Dakle, $c < z$, $z < c + r$ i $z < b$. Iz $c \in [a, z]$ slijedi $[a, z] = [a, c] \cup [c, z]$. Iz $c < z < c + r$ slijedi $[c, z] \subseteq [c-r, c+r]$. Također zbog $z < b$, imamo

$$[c, z] \subseteq [a, b].$$

Stoga je $[c, z] \subseteq [c-r, c+r] \cap [a, b]$. Funkcija f je omeđena na $[c-r, c+r] \cap [a, b]$, pa je omeđena i na $[c, z]$. Znamo da je f omeđena na $[a, c]$ pa slijedi da je f omeđena na $[a, c] \cup [c, z]$, tj. f je omeđena na $[a, z]$. Stoga je $z \in S$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $c < z$ te da je c supremum skupa S.
Prema tome $c = b$ pa je f omeđena na $[a, b]$.
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

2.4 Točke maksimuma i minimuma

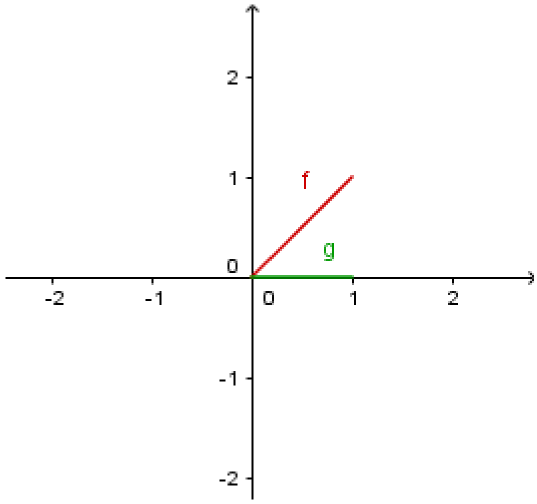
Definicija 2.4.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ i $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Kažemo da funkcija f poprima maksimum u točki x_0 ako za svaki $x \in S$ vrijedi $f(x) \leq f(x_0)$.*

Primjer 2.4.1. *Neka su $f, g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $h : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije definirane sa $f(x) = x$, $g(x) = 0$ za svaki $x \in [0, 1]$ i $h(x) = x$ za svaki $x \in \langle 0, 1\rangle$.*

Funkcija f očito poprima maksimum u točki $x_0 = 1$. No to je jedina točka u kojoj f poprima maksimum. Naime kad bi postojao $x_0 \in [0, 1\rangle$ takav da f poprima maksimum u x_0, onda bi vrijedilo $f(x) \leq f(x_0)$ za svaki $x \in [0, 1]$ pa bi posebno vrijedilo $f(1) \leq f(x_0)$, tj. $1 \leq x_0$, što je očito nemoguće.

Funkcija g poprima maksimum u x_0 za svaki $x_0 \in [0, 1]$.

Tvrdimo da funkcija h ne poprima maksimum u niti jednoj točki iz $\langle 0, 1\rangle$.



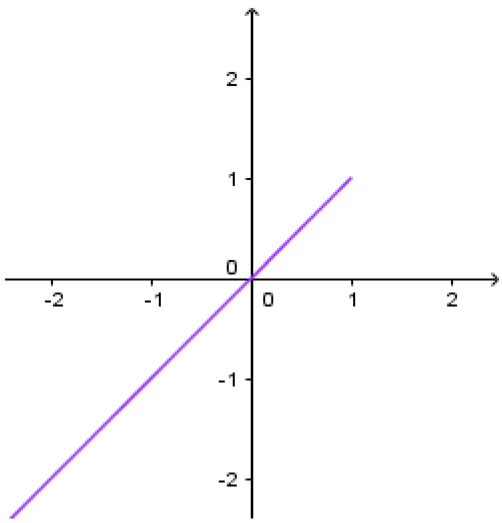
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ *takav da je* $f(x) \leq f(x_0)$ *za svaki* $x \in \langle 0, 1\rangle$. *Imamo* $x_0 < 1$ *pa postoji* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $x_0 < x < 1$. *Očito je* $x \in \langle 0, 1\rangle$ *pa je stoga* $f(x) \leq f(x_0)$, *tj.* $x \leq x_0$. *Kontradikcija.*

Uočimo da su prema Primjeru 2.1.1 i Primjeru 2.1.2 funkcije f, g, h neprekidne.

Primjer 2.4.2. *Neka je* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Vrijedi $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\} = [0, 1\rangle$ *pa je očito da je funkcija omeđena.*



Pretpostavimo da postoji $x_0 \in [0,1]$ *takav da* f *poprima maksimum u točki* x_0. *Očito je* $x_0 < 1$ *pa postoji* $x \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_0 < x < 1$. *Tada je* $x \in [0,1\rangle$ *te je* $f(x_0) < f(x)$, *no to je nemoguće jer je* x_0 *točka u kojoj* f *poprima maksimum. Prema tome* f *ne poprima maksimum u niti jednoj točki.*

Uočimo da funkcija f *nije neprekidna u točki 1. Naime kad bi funkcija bila neprekidna u točki 1, onda bi za* $\epsilon = 2^{-1}$ *postojao* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in [0,1]$ *takav da je* $x \in \langle 1-\delta, 1+\delta\rangle$ *vrijedilo* $f(x) \in \langle f(1)-\epsilon, f(1)+\epsilon\rangle$, *tj.* $f(x) \in \langle -\epsilon, \epsilon\rangle$.

Znamo da je $2^{-1} < 1$ *pa je stoga max* $\{1-\delta, 2^{-1}\} < 1$. *Zato postoji* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je max*$\{1-\delta, 2^{-1}\} < x < 1$. *Slijedi* $2^{-1} < x < 1$ *pa zaključujemo da je* $x \in [0,1]$.

Nadalje imamo da je $1-\delta < x < 1$ *pa je* $x \in \langle 1-\delta, 1+\delta\rangle$. *Slijedi da je* $f(x) \in \langle -\epsilon, \epsilon\rangle$. *Budući da je* $x < 1$ *imamo* $f(x) = x$ *pa je* $2^{-1} < f(x)$, *tj.* $\epsilon < f(x)$. *Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je* $f(x) \in \langle -\epsilon, \epsilon\rangle$.

Lema 2.4.1. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ *te* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija neprekidna u točki* x_0. *Pretpostavimo da je* $\mu \in \mathbb{R}$ *takav da je* $f(x_0) < \mu$. *Tada postoje* $M < \mu$ *i* $r > 0$ *takvi da je* $f(x) \leq M$ *za svaki* $x \in < x_0 - r, x_0 + r > \cap S$.

Dokaz. Odaberimo $M \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) < M < \mu$. Neka je

$$\epsilon = M - f(x_0).$$

Očito je $\epsilon > 0$ pa stoga postoji $\delta > 0$ takva da za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap S$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0 + \epsilon\rangle$. Dakle za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap S$ vrijedi $f(x) < f(x_0) + \epsilon$, tj. $f(x) < M$ (jer je $M = f(x_0) + \epsilon$). □

Teorem 2.4.1. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Neka je* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada postoji* $x_0 \in [a,b]$ *takav da* f *poprima maksimum u točki* x_0.

Dokaz. Prema Teoremu 2.3.2 funkcija f je omeđena, dakle skup $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ je omeđen. Očito je taj skup neprazan pa stoga ima supremum. Označimo supremum skupa $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ sa μ. Pretpostavimo da funkcija f ne poprima maksimum u niti jednoj točki. Tada za svaki $x \in [a,b]$ vrijedi $f(x) < \mu$. Neka je

$$S = \{x \in [a,b] \mid \exists M < \mu \text{ takvi da je } f(y) \leq M, \forall y \in [a,x]\}.$$

Vrijedi da je $a \in S$, naime ako stavimo $M = f(a)$, onda je $M < \mu$ te za svaki $y \in [a,a]$ očito vrijedi $f(y) \leq M$. Nadalje b je gornja međa skupa S. Budući da je skup S neprazan i odozgo omeđen postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je c supremum skupa S. Imamo $a \leq c$ (jer je $a \in S$) i $c \leq b$ (jer je b gornja međa od S). Dakle, $c \in [a,b]$. Funkcija f je neprekidna u c i $f(c) < \mu$ pa prema Lemi 2.4.1 postoje $M < \mu$ i $r > 0$ takvi da je $f(y) \leq M$ za svaki $y \in \langle c - r, c + r\rangle \cap [a,b]$. Prema Propoziciji 1.3.8 postoji $x \in S$ takav da je $c - r < x$.

Budući da je $x \in S$, postoji $N < \mu$ takav da je $f(y) \leq N$ za svaki $y \in [a, x]$. Neka je $K = \max\{M, N\}$. Očito je $K < \eta$. Tvrdimo da je

$$f(y) \leq K \text{ za svaki } y \in [a, c + r\rangle \cap [a, b]. \tag{2.4}$$

Neka je $y \in [a, c + r\rangle \cap [a, b]$. Tada je $y \in [a, c + r\rangle$ i $y \in [a, b]$. Imamo dva slučaja:

1.) $y \leq x$. Tada je $y \in [a, x]$ pa je $f(y) \leq N$, što povlači $f(y) \leq K$.

2.) $x < y$. Tada imamo $c - r < x < y < c + r$ pa je $y \in \langle c - r, c + r\rangle$. Dakle $y \in \langle c - r, c + r\rangle \cap [a, b]$ pa je $f(y) \leq M$, dakle $f(y) \leq K$.

Očito je $[a, c] \subseteq [a, c+r] \cap [a, b]$ pa iz (2.4) slijedi da je $f(y) \leq K$ za svaki $y \in [a, c]$. Stoga je $c \in S$. Dokažimo da je $c = b$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $c < b$. Kao u dokazu Teorema 2.3.2 zaključujemo da postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $c < x$, $x < c + r$ i $x < b$. Slijedi $x \in [a, b]$. Neka je $y \in [a, x]$. Tada je

$$a \leq y \leq x < c + r$$

pa je

$$y \in [a, c + r\rangle.$$

Također imamo da je $y \in [a, b]$. Stoga je

$$y \in [a, c + r\rangle \cap [a, b].$$

Iz (2.4) slijedi $f(y) \leq K$. Dakle, $f(y) \leq K$ za svaki $y \in [a, x]$. Prema tome $x \in S$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $c < x$ te da je c supremum skupa S. Dakle, $c = b$. Prema tome $b \in S$, a to znači da postoji $M < \mu$ takav da je $f(y) \leq M$ za svaki $y \in [a, b]$. Slijedi da je M gornja međa skupa $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, a supremum ovog skupa je μ pa je $\mu \leq M$, što je u kontradikciji s $M < \mu$. Zaključak: funkcija f poprima maksimum u nekoj točki $x_0 \in [a, b]$. □

Definicija 2.4.2. *Neka je X skup te $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiramo funkciju $-f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sa $(-f)(x) = -f(x)$ za svaki $x \in X$.*

Propozicija 2.4.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u x_0. Tada je funkcija $-f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u točki x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$|\, x_0 - x \,| < \delta \Rightarrow |\, f(x_0) - f(x) \,| < \epsilon.$$

No za svaki $x \in S$ vrijedi $|\, f(x_0) - f(x)\,| = |\,(-f)(x_0) - (-f)(x)\,|$. Stoga za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$|\, x_0 - x\,| < \delta \Rightarrow |\,(-f)(x_0) - (-f)(x)\,| < \epsilon.$$

Iz ovoga zaključujemo da je funkcija $-f$ neprekidna u x_0. □

Korolar 2.4.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je i funkcija $-f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna.*

Definicija 2.4.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in S$. Kažemo da funkcija f poprima minimum u točki x_0 ako za svaki $x \in S$ vrijedi $f(x_0) \leq f(x)$.*

Korolar 2.4.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da f poprima minimum u točki x_0*

Dokaz. Prema prethodnom korolaru funkcija $-f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna pa prema Teoremu 2.4.1 postoji točka $x_0 \in [a, b]$ takva da $-f$ poprima maksimum u x_0. To znači da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $(-f)(x) \leq (-f)(x_0)$. Iz ovoga slijedi da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $f(x_0) \leq f(x)$. Prema tome f poprima minimum u točki x_0. □

Propozicija 2.4.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, x_0 te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki $x_0 \in S$. Neka je $c \in \mathbb{R}$ te neka je $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $g(x) = f(x) + c$. Tada je funkcija g neprekidna u točki x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takva da za svaki $x \in S$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$|x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(x_0)\,| < \epsilon.$$

Za svaki $x \in S$ vrijedi

$$|\, g(x) - g(x_0)\,| = |\, f(x) + c - (f(x_0) + c)\,| = |\, f(x) - f(x_0)\,|.$$

Stoga za svaki $x \in S$ vrijedi

$$|\, x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\, g(x) - g(x_0)\,| < \epsilon.$$

Prema tome funkcija g je neprekidna u točki x_0. □

Korolar 2.4.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.*

(i) Pretpostavimo da je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) < y < f(b)$. Tada postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = y$.

(ii) Pretpostavimo da je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) > y > f(b)$. Tada postoji $c \in [a,b]$ takav da je $f(c) = y$.

Dokaz. (i) Definirajmo funkciju $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = f(x) - y$ za svaki $x \in [a,b]$. Prema Propoziciji 2.4.2 funkcija g je neprekidna. Imamo

$$g(a) = f(a) - y < 0 \text{ i } g(b) = f(b) - y > 0.$$

Prema Teoremu 2.2.1 postoji $c \in [a,b]$ takav da je $g(c) = 0$. Dakle, $f(c) - y = 0$ pa je $f(c) = y$.

(ii) Definirajmo funkciju $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - y$ za svaki $x \in [a,b]$. Tada je g neprekidna funkcija te je $g(a) > 0$ i $g(b) < 0$. Definirajmo funkciju $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ sa $h(x) = -g(x)$. Prema Korolaru 2.4.2 funkcija h je neprekidna. Kako je $h(a) < 0$ i $h(b) > 0$ prema Teoremu 2.2.1 postoji $c \in [a,b]$ takav da je $h(c) = 0$. Dakle, $-g(c) = 0$ pa je $g(c) = 0$. Prema tome $f(c) = y$.

□

Napomena 2.4.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$, te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Neka je $T \subseteq S$ takav da je $x_0 \in T$. Tada je funkcija $f|_T : T \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0. Posebno ako je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te $T \subseteq S$, $T \neq \emptyset$, onda je $f|_T : T \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.*

Teorem 2.4.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoje $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$, takvi da je $f([a,b]) = [c,d]$.*

Dokaz. Prema Teoremu 2.4.1 i Korolaru 2.4.3 postoje $x_0, x_1 \in [a,b]$ takvi da f poprima minimum u x_0, a maksimum u x_1. Neka je $c = f(x_0)$ i $d = f(x_1)$. Očito je $c \leq d$. Tvrdimo da je

$$f([a,b]) = [c,d]. \tag{2.5}$$

Neka je $y \in f([a,b])$. Tada postoji $x \in [a,b]$ takav da je $y = f(x)$. Vrijedi $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, tj. $c \leq y \leq d$. Prema tome $y \in [c,d]$. Time smo dokazali da je $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. Neka je $y \in f([c,d])$. Želimo dokazati da je $y \in f([a,b])$. To je jasno ako je $y = c$ ili $y = d$ (jer je u tom slučaju $y = f(x_0)$ ili $y = f(x_1)$). Pretpostavimo stoga da je $y \neq c$ i $y \neq d$. Tada je $c < y < d$, tj.

$$f(x_0) < y < f(x_1). \tag{2.6}$$

Uočimo da je $x_0 \neq x_1$ (jer je $f(x_0) \neq f(x_1)$). Stoga imamo dva slučaja:

1.) $x_0 < x_1$. Očito je $[x_0, x_1] \subseteq [a,b]$. Funkcija $f|_{[x_0,x_1]} : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ je neprekidna prema Napomeni 2.4.1, a prema (2.6) vrijedi $f|_{[x_0,x_1]}(x_0) < y < f|_{[x_0,x_1]}(x_1)$. Prema Korolaru 2.4.4 i) postoji $c \in [x_0, x_1]$ takav da je $f|_{[x_0,x_1]}(c) = y$. Slijedi $c \in [a,b]$ (i) $f(c) = y$. Dakle, $y \in f([a,b])$.

2.) $x_1 < x_0$. Funkcija $f|_{[x_1,x_0]} : [x_1, x_0] \to \mathbb{R}$ je neprekidna, a prema (2.6) vrijedi

$$f|_{[x_1,x_0]}(x_1) > y > f|_{[x_1,x_0]}(x_0).$$

Prema Korolaru 2.4.4 (ii) postoji $c \in [x_1, x_0]$ takav da je $y = f(c)$. Stoga je $y \in f([a, b])$. Zaključak: $[c, d] \subseteq f([a, b])$. Time smo dokazali da vrijedi 2.5.

$\square$

Bibliografija

[1] S. Kurepa, Matematička analiza 2, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Mardešić, Matematička analiza 1, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[3] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, Tehnička kniga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo potpunost polja realnih brojeva te posljedice koje ta potpunost ima na svojstva neprekidnih funkcija. U prvom poglavlju uvodimo realne brojeve te potrebne algebarske pojmove kao što su grupe i prsteni. U drugom poglavlju proučavamo neprekidne funkcije. Dokazujući potrebne teoreme i propozicije, na posljetku dolazimo do konačnog zaključka: slika neprekidne funkcije na segmentu je segment. Pristup koji smo koristili nije zahtjevao uvođenje prirodnih brojeva.

Summary

In this diploma thesis we study the completeness of the field of real numbers and the consequences of this completeness on properties of continuous functions. In the first chapter we introduce the real numbers and necessary algebraic notions such as the notion of a group and the notion of a field. In the second chapter we study continuous functions. By proving necessary theorems and propositions we come to the final conclusion: the image of a continuous function on a segment is a segment. The approach the we used did not require the introduction of natural numbers.

Životopis

Moje ime je Kristina Tkalec. Rođena sam 16.07.1986. u Zagrebu. Svoje obrazovanje započela sam u Osnovnoj školi Mladost, Lekenik 1993. godine. Po završetku osnovne škole godine 2001. upisujem X. gimnaziju u Zagrebu; prirodoslovno matematički smjer.

Nakon završetka srednje škole, 2005. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2007. upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike; smjer nastavnički koji završavam 2012. godine. Iste godine upisujem Diplomski studij matematike; smjer nastavnički kojeg upravo završavam.