Bicentrički parovi točaka trokuta

Topalović, Bernarda

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Bernarda Topalović

BICENTRIČKI PAROVI TOČAKA TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof.dr.sc.Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U naslovu ovog diplomskog rada stoji pojam *trokut* s kojim je upoznata većina ljudi. No, pojam *bicentrički parovi* u hrvatskoj se literaturi gotovo i ne spominje. Uz pojam bicentričkih parova usko se veže i pojam *centar* trokuta. Ti pojmovi i njihova svojstva proučavaju se u ovom diplomskom radu.

Proučavanjem karakterističnih točaka trokuta bave se mnogi geometri. Clark Kimberling sustavno skuplja podatke o takvim točkama trokuta i do sada je opisao 7707 centara trokuta i 119 bicentričkih parova točaka. Kimberlingova lista centara trokuta, kao i bicentričkih parova točaka trokuta stalno se povećava. Iz tog razloga neki bicentrički parovi točaka trokuta nose imena cvijeća, kao npr. Acaccia, Hyacinth ...

U analitičkoj je geometriji uobičajeno koristiti Kartezijeve koordinate točke za smještaj u pogodni koordinatni sustav. Međutim, osim Kartezijevih postoje još i trilinearne i baricentričke koordinate koje opisuju smještaj točke u odnosu na dane elemente nekog trokuta (stranice, kutove). Trilinearne i baricentričke koordinate proučavaju se u početnom dijelu rada jer su izrazito važne u daljnjem proučavanju centara i bicentričkih parova točaka trokuta. Proučavaju se najpoznatiji centri trokuta: središte trokutu upisane kružnice, težište, središte trokutu opisane kružnice i ortocentar, a dani su i izvodi njihovih trilinearnih koordinata.

Najpoznatiji bicentrički par točaka trokuta su Brocardove točke o kojima se piše u središnjem dijelu rada. Proučavaju se najvažnija svojstva ovih točaka.

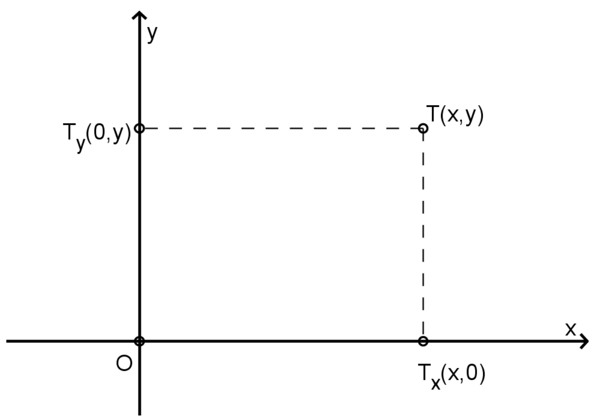
Posljednje poglavlje posvećeno je nešto manje poznatom, bicentričkom paru točaka, Yffovim točkama koje su jedna vrsta analogona Brocardovim točkama.

Poglavlje 1

Bicentrički parovi točaka

1.1 Trilinearne i baricentričke koordinate

U analitičkoj geometriji uobičajeno je točki ravnine pridružiti uređeni par brojeva koji opisuju poziciju te točke u odnosu na neki dani koordinatni sustav (O, x, y) gdje su x i y brojevni pravci sa zajedničkom ishodišnom točkom O. U proučavanju trokuta uobičajeno je



Slika 1.1: Koordinatni sustav u ravnini

upotrebljavati koordinate koje opisuju smještaj točke u odnosu na neke elemente danog trokuta. Rabe se dvije vrste takvih koordinata: trilinearne i baricentričke [4].

Definicija 1.1.1. *Neka je P točka koja se nalazi u ravnini trokuta ABC. Bilo koja tri broja x, y, z proporcionalna udaljenostima točke P do stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ (tim redom) nazivamo trilinearnim koordinatama točke P i označavamo*

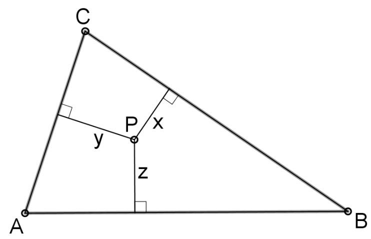
$$P = x : y : z = d(P, \overline{BC}) : d(P, \overline{CA}) : d(P, \overline{AB}).$$

Trilinearne koordinate vrhova trokuta ABC su:

$$A = 1 : 0 : 0, B = 0 : 1 : 0, C = 0 : 0 : 1.$$

Naime, $d(A, \overline{BC}) = v_a$, $d(A, \overline{CA}) = 0$ i $d(A, \overline{AB}) = 0$, pa su $v_a : 0 : 0$ tražene koordinate vrha A. No, brojevi v_a, 0, 0 su proporcionalni brojevima 1,0,0 pa je uobičajeno pisati

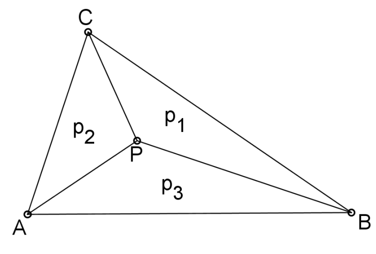
$$A = 1 : 0 : 0.$$



Slika 1.2: Trilinearne koordinate točke P.

Definicija 1.1.2. *Neka je točka P takva da pripada ravnini trokuta ABC. Baricentričke koordinate točke P su bilo koja tri broja p_1, p_2, p_3 proporcionalna površinama trokuta PBC, PAC i PAB. Pišemo $P(p_1, p_2, p_3)$ ili $P = p_1 : p_2 : p_3$.*
Baricentričke koordinate vrhova trokuta ABC su:

$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1).$$



Slika 1.3: Baricentričke koordinate točke P.

Baricentričke koordinate je 1827. godine uveo August Ferdinand Möbius.

Teorem 1.1.3. *Ako su $x : y : z$ trilinearne koordinate točke P, tada su $xsin\alpha : ysin\beta : zsin\gamma$ baricentričke koordinate točke P.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC i točka P čije su trilinearne koordinate $P = x : y : z$. Za površinu trokuta vrijedi

$$p = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Tada imamo

$$x : y : z = p_x : p_y : p_z$$
$$x : y : z = \left(x\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot bc\right) : \left(y\frac{1}{2}\sin\beta\cdot ac\right) : \left(z\frac{1}{2}\sin\gamma\cdot ab\right),$$

tj.

$$x : y : z = (x\sin\alpha\cdot bc) : (y\sin\beta\cdot ac) : (z\sin\gamma\cdot ab).$$

Dakle,

$$x : y = (x\sin\alpha\cdot bc) : (y\sin\beta\cdot ac).$$

S druge strane, za baricentričke koordinate točke P vrijedi

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{ax}{2} : \frac{by}{2} = \frac{cz}{2} = xa : yb : cz.$$

Želimo pokazati jednakost

$$xa : yb = x\sin\alpha : y\sin\beta.$$

Vrijedi

$$xa : yb = x\sin\alpha : y\sin\beta$$
$$\Leftrightarrow xay\sin\beta = xby\sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow a\sin\beta = b\sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

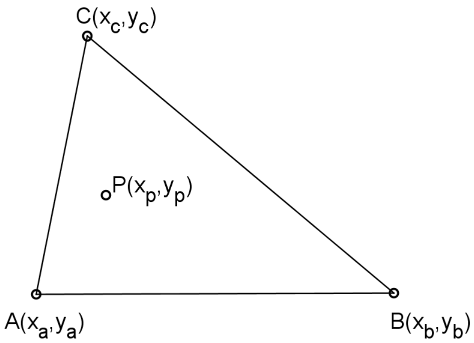
što je slijedi iz sinusova poučka u trokutu ABC. Na isti način, vrijedi

$$yb : cz = y\sin\beta : \sin\gamma$$
$$\Leftrightarrow ybz\sin\gamma = ycz\sin\beta$$
$$\Leftrightarrow b\sin\gamma = c\sin\beta$$
$$\Leftrightarrow b : c = \sin\beta : \sin\gamma.$$

Dakle,

$$p_1 : p_2 : p_3 = x\sin\alpha : y\sin\beta : z\sin\gamma.$$

□



Slika 1.4: Kartezijeve koordinate točke P.

Izrazimo trilinearne koordinate točke P pomoću Kartezijevih koordinata. Neka u Kartezijevom koordinatnom sustavu vrhovi trokuta ABC imaju koordinate

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C).$$

Izračunajmo implicitnu jednadžbu pravca BC.

$$y - y_B = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}(x - x_B)$$

$$(y - y_B)(x_C - x_B) = (y_C - y_B)(x - x_B)$$

$$x(y_C - y_B) - y(x_C - x_B) - x_B(y_C - y_B) + y_B(x_C - x_B)$$

$$x(y_C - y_B) - y(x_C - x_B) - x_B y_C + y_B x_C = 0.$$

Prema formuli za udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ od pravca $p...Ax + By + C = 0$

$$d(T, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

imamo

$$t_1 = d(P, \overline{BC}) = \frac{|x_P(y_C - y_B) - y_P(x_C - x_B) - x_B y_C + y_B x_C|}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}.$$

To je prva trilinearna koordinata točke P.
Analognim postupkom dobivamo

$$t_2 = d(P, \overline{CA}) = \frac{|x_P(y_A - y_C) - y_P(x_A - x_C) - x_C y_A + x_A y_C|}{\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}}$$

$$t_3 = d(P, \overline{AB}) = \frac{|x_P(y_B - y_A) - y_P(x_B - x_A) - x_A y_B + y_A x_B|}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Time su trilinearne koordinate točke $P = t_1 : t_2 : t_3$ izražene pomoću Kartezijevih koordinata.

1.2 Centar trokuta

Prisjetimo se definicija homogenosti i simetričnosti:
Funkcija $f(a, b, c)$ je pozitivno homogena reda n u a, b i c ako za svaku uređenu trojku (a, b, c) i $t > 0$ vrijedi

$$f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c).$$

Funkcija $f(a, b, c)$ je simetrična u b i c ako za svaku uređenu trojku (a, b, c) vrijedi

$$f(a, b, c) = f(a, c, b).$$

Definicija 1.2.1. *Centar trokuta ABC je točka s trilinearnim koordinatama $x : y : z$ za koje je*

$$x = f(a, b, c),$$
$$y = f(b, c, a),$$
$$z = f(c, a, b)$$

za neku pozitivno homogenu funkciju f sa svojstvom

$$|f(a, b, c)| = |f(a, c, b)|.$$

Regularan centar

Neka je p površina trokuta ABC.

Definicija 1.2.2. *Centar X je regularan centar ako postoji funkcija $f(a, b, c)$ koja ima oblik polinoma u varijablama a, b, c, p takva da vrijedi*

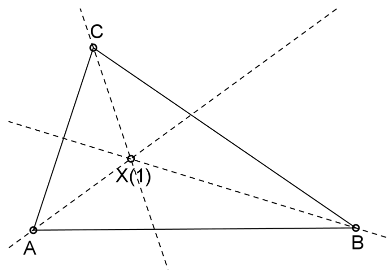
$$X = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b).$$

Centar trokuta se obično navodi oznakom X_i ili $X(i)$, $i \in \mathbb{N}$ i imenom ukoliko postoji. Jednadžba centra trokuta, iz koje možemo dobiti trilinearne koordinate cikličkom permutacijom a, b i c ili α, β i γ, je $x = f(a, b, c)$ ili $x = f_1(\alpha, \beta, \gamma)$. Svaka se jednadžba oblika $x = f_1(\alpha, \beta, \gamma)$ primjenom sinusovog ili kosinusovog poučka može transformirati u jednadžbu oblika $x = f(a, b, c)$.

Svojstva centara trokuta opsežno je proučavao i opisao Clark Kimberling. Kimberlingova lista [1] trenutno broji 7707 centara trokuta. Četiri nama najpoznatija centra trokuta su središte upisane kružnice, težište, središte opisane kružnice i ortocentar, čije ću trilinearne i baricentričke koordinate navesti u sljedećem odlomku.

$X(1)$ Središte upisane kružnice

Definicija 1.2.3. *Središte upisane kružnice je točka u kojoj se sijeku sve tri simetrale unutarnjih kutova trokuta.*



Slika 1.5: Centar $X(1)$ - središte trokutu upisane kružnice.

Definicija je dobra, tj. središte upisane kružnice je dobro definirano jer se pokazuje da se sve tri simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki.
Središte upisane kružnice jednako je udaljeno od svake stranice trokuta pa trilinearne koordinate centra $X(1)$ glase

$$X(1) = 1 : 1 : 1.$$

Prema teoremu 1.1.3 baricentričke koordinate središta upisane kružnice su

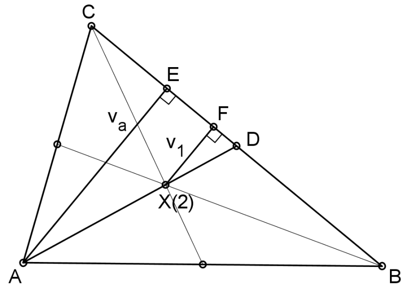
$$X(1) = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

$X(2)$ Težište

Definicija 1.2.4. *Težište trokuta je točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta.*

Neka je v_1 duljina visine iz $X(2)$ na stranicu $\overline{BC}$. Budući da težište trokuta dijeli težišnicu $\overline{AD}$ u omjeru $2 : 1$ računajući od vrha A, slijedi da su trokuti $DX(2)F$ i DAE slični (teorem K-K) s koeficijentom sličnosti

$$v_1 : v_a = 1 : 3.$$



Slika 1.6: Centar $X(2)$ - težište trokuta.

Dakle,

$$v_1 = \frac{1}{3}v_a = \frac{1}{3}\cdot\frac{2p}{a} = \frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{a}.$$

Analogno se dobiju i druge udaljenosti točke $X(2)$ do stranica:

$$d(X(2),\overline{CA}) = \frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{b}$$

$$d(X(2),\overline{AB}) = \frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{c},$$

pa trilinearne koordinate težišta glase

$$X(2) = \left(\frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{a}\right) : \left(\frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{b}\right) : \left(\frac{2p}{3}\cdot\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ca : ab.$$

Vidimo da je težište regularni centar trokuta ABC.
Određivanje baricentričnih koordinata svodi se na izračunavanje površina trokuta. Vrijedi

$$p(BCX(2)) = \frac{1}{2}a\cdot v_1 = \frac{1}{2}a\frac{2p}{3}\frac{1}{a} = \frac{1}{3}p,$$

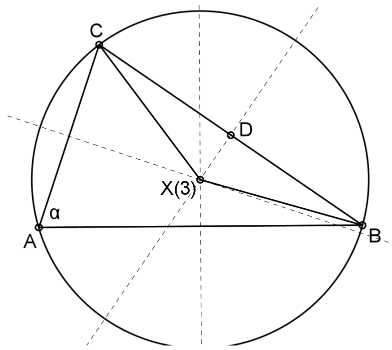
$$p(ABX(2)) = \frac{1}{3}p,\ p(CAX(2)) = \frac{1}{3}p,$$

pa su baricentričke koordinate težišta

$$X(2) = 1 : 1 : 1.$$

$X(3)$ Središte opisane kružnice

Definicija 1.2.5. *Središte trokutu opisane kružnice je sjecište simetrala stranica trokuta.*



Slika 1.7: Centar $X(3)$ - središte trokutu opisane kružnice.

Trilinearne koordinate središta opisane kružnice su

$$X(3) = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a(b^2 + c^2 - a^2) : b(a^2 + c^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2),$$

a baricentričke

$$X(3) = \sin\alpha\cos\alpha : \sin\beta\cos\beta : \sin\gamma\cos\gamma = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

Dokažimo te tvrdnje.
Opišemo li oko trokuta ABC kružnicu, tada je $\angle BAC = \alpha$ obodni kut nad tetivom $\overline{BC}$. Prema teoremu o obodnom i središnjem kutu vrijedi da je $\angle BX(3)C = 2\alpha$, a zbog jednakokračnosti trokuta $BX(3)C$ i činjenice da je simetrala stranice $\overline{BC}$ ujedno os simetrije trokuta $BX(3)C$, slijedi da je $\angle BX(3)D = \alpha$, gdje je D polovište stranice $\overline{BC}$. U pravokutnom trokutu $BX(3)D$ vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{|X(3)D|}{R},$$

tj.

$$d(X(3), \overline{BC}) = R\cos\alpha.$$

Analogno,

$$d(X(3), \overline{AC}) = R\cos\beta$$
$$d(X(3), \overline{AB}) = R\cos\gamma.$$

Dakle, točka $X(3)$ ima trilinearne koordinate

$$X(3) = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma.$$

Izrazimo kosinuse kutova kao funkcije stranica pomoću kosinusovog teorema:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Sad trilinearne koordinate točke $X(3)$ glase

$$X(3) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = a(b^2+c^2-a^2) : b(a^2+c^2-b^2) : c(a^2+b^2-c^2)$$

pri čemu smo posljednje koordinate dobili množenjem s $2abc$.
Funkcija centra za središte opisane kružnice glasi

$$f(a, b, c) = a(b^2 + c^2 - a^2).$$

Ova je funkcija homogena reda 3 jer vrijedi

$$f(ta, tb, tc) = ta(t^2b^2 + t^2c^2 - t^2a^2) = t^3a(b^2 + c^2 - a^2) = t^3 f(a, b, c).$$

Očito vrijedi i simetričnost u drugoj i trećoj varijabli, tj.

$$f(a, b, c) = f(a, c, b).$$

I f je polinom. Dakle, i $X(3)$ je regularni centar trokuta. Izračunajmo još i njegove baricentričke koordinate.
Prema teoremu 1.1.3 baricentričke koordinate od $X(3)$ su

$$X(3) = \cos\alpha\sin\alpha : \cos\beta\sin\beta : \cos\gamma\sin\gamma = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

$X(4)$ Ortocentar

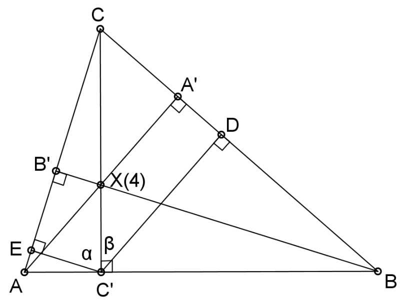
Definicija 1.2.6. *Ortocentar je točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta.*

U trokutu ABC povucimo visine iz vrhova A, B i C čija nožišta označimo s A', B' i C' redom. Iz točke C' povucimo okomice na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, te nožišta tih okomica označimo s D i E. Prema teoremu K-K o sličnosti trokuta trokuti $CA'X(4)$ i CDC' su slični, a isto tako i trokuti $B'CX(4)$ i ECC'. Iz prve sličnosti imamo:

$$\frac{t_1}{|C'D|} = \frac{|CX(4)|}{|CC'|},$$

a iz druge sličnosti imamo:

$$\frac{t_2}{|EC'|} = \frac{|CX(4)|}{|CC'|}.$$



Slika 1.8: Centar $X(4)$ - ortocentar trokuta.

Izjednačavanjem ta dva razmjera dobivamo:

$$\frac{t_1}{|C'D|} = \frac{t_2}{|EC'|}.$$

U trokutu $C'BD$ kut $\angle C'BD = \beta$, pa je $\angle DC'B = 90^\circ - \beta$. Budući da je $\angle CC'B = 90^\circ$, slijedi da je

$$\angle CC'D = \angle CC'B - \angle DC'B = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta.$$

Analogno dobivamo da je $\angle EC'C = \alpha$. U trokutu $CC'D$ vrijedi $|C'D| = v_c \cos\beta$, a u trokutu $EC'C$ vrijedi $|EC'| = v_c \cos\alpha$. Sad je

$$\frac{t_1}{v_c \cos\alpha} = \frac{t_2}{v_c \cos\beta},$$

tj.

$$t_1 : t_2 = \cos\beta : \cos\alpha.$$

Cikličkim pomicanjem indeksa dobivamo i ovu relaciju

$$t_2 : t_3 = \cos\gamma : \cos\beta.$$

Da bi brojeve t_1, t_2 i t_3 mogli staviti u produljeni omjer treba četvrti član prvog razmjera biti jednak trećem članu drugog razmjera, a to dobivamo zapisujući ovako:

$$t_1 : t_2 = \cos\beta : \cos\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta}$$

$$t_2 : t_3 = \cos\gamma : \cos\beta = \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Sada je

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Kad u taj razmjer uvrstimo formule kosinusovog poučka dobivamo

$$
\begin{aligned}
t_1 : t_2 : t_3 =& \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma} \\
=& \frac{1}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} : \frac{1}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} : \frac{1}{\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}} \\
=& \frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} : \frac{2ac}{a^2+c^2-b^2} : \frac{2ba}{b^2+a^2-c^2} \\
=& \frac{2abc}{a(b^2+c^2-a^2)} : \frac{2abc}{b(a^2+c^2-b^2)} : \frac{2abc}{c(b^2+a^2-c^2)} \\
=& \frac{1}{a(b^2+c^2-a^2)} : \frac{1}{b(a^2+c^2-b^2)} : \frac{1}{c(b^2+a^2-c^2)},
\end{aligned}
$$

i time smo dobili trilinearne koordinate ortocentra $X(4)$ u uobičajenom zapisu. Radi se o funkciji $f(a,b,c) = \frac{1}{a(b^2+c^2-a^2)}$ za koju se lako pokaže da je pozitivno homogena reda -3 i simetrična u varijablama b i c, te je $X(4)$ centar trokuta.

Dakle, trilinearne koordinate ortocentra su

$$X(4) = \frac{1}{a(b^2+c^2-a^2)} : \frac{1}{b(a^2+c^2-b^2)} : \frac{1}{c(a^2+b^2-c^2)},$$

dok su baricentričke jednake

$$X(4) = \frac{a}{2Ra(b^2+c^2-a^2)} : \frac{b}{2Rb(a^2+c^2-b^2)} : \frac{c}{2Rc(a^2+b^2-c^2)},$$

tj.

$$X(4) = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{a^2+c^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}.$$

1.3 Bicentrički parovi

Definicija 1.3.1. *Neka je P točka sa trilinearnim koordinatama*

$$\alpha : \beta : \gamma = f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$$

i U točka sa trilinearnim koordinatama

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = f(a,c,b) : f(b,a,c) : f(c,b,a)$$

gdje je f neka pozitivno homogena funkcija takva da vrijedi $|f(a,b,c)| \neq |f(a,c,b)|$, pri čemu su a,b,c duljine stranica čvrstog trokuta. Točke P i U nazivamo bicentričkim točkama ili bicentričkim parom točaka.

Bicentričke točke ne mogu biti centri trokuta jer ne zadovoljavaju svojstvo simetričnosti, tj.

$$|f(a,b,c)| \neq |f(a,c,b)|$$

za bilo koju uređenu trojku (a,b,c).

Najpoznatiji primjer bicentričkih parova točaka trokuta su prva i druga Brocardova točka Ω i Ω' čije su trilinearne koordinate

$$\Omega = \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$$

i

$$\Omega' = \frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b}.$$

Više o Brocardovim točkama slijedi u središnjem dijelu rada.

Slijede računske operacije koje možemo provesti među bicentričkim parovima s trilinearnim koordinatama

$$P = p : q : r = f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$$

i

$$U = u : v : w = f(a,c,b) : f(b,a,c) : f(c,b,a),$$

a koje generiraju nove centre trokuta. Navedena je jednadžba prvog bicentričkog para $p = f(a,b,c)$. Jednadžba drugog bicentričkog para dobije se kao $u = f(a,c,b)$, a ostale cikličkim permutacijama.

Trilinearni produkt:

$$pu : qv : rw;$$

baricentrični produkt:

$$apu : bqv : crw;$$

bicentrička suma:

$$(p+u) : (q+v) : (r+w);$$

bicentrička razlika:

$$(p-u) : (q-v) : (r-w);$$

unakrsna suma:

$$(qw+rv) : (ru+pw) : (pv+qu);$$

unakrsna razlika:

$$(qw-rv) : (ru-pw) : (pv-qu);$$

trilinearni pol pravca PU:

$$\frac{1}{qw-rv} : \frac{1}{ru-pw} : \frac{1}{pv-qu};$$

idealna točka pravca PU:

$$[p(bv+cw)-u(bq+cr)] : [q(cw+au)-v(cr+ap)] : [r(au+bv)-w(ap+bq)];$$

polovište:

$$(kp+hu) : (kq+hv) : (kr+hw),$$

gdje je $h = ap+bq+cr$ i $k = au+bv+cw$;
Cevina točka:

$$(pv+qu)(pw+ru) : (qw+rv)(qu+pv) : (ru+pw)(rv+qw);$$

križna točka:

$$pu(rv+qw) : qv(pw+ru) : rw(qu+pv)$$

i konjugirani vrh:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2qrvw-pu(br+cq)(bw+cv)} &: \frac{b}{b^2rpwu-qv(cp+ar)(cu+aw)} :\\ &: \frac{c}{c^2pquv-rw(aq+bp)(av+bu)}.\end{aligned}$$

Provjerimo da prva operacija, nazvana trilinearni produkt stvarno od dvije bicentričke točke P i U stvara centar. Ako je $f(a,b,c)$ jednadžba prve trilinearne koordinate za točku P, a $f(a,c,b)$ jednadžba prve trilinearne koordinate za točku U, tada trilinearni produkt za prvu trilinearnu koordinatu glasi ovako

$$g(a,b,c) := f(a,b,c) \cdot f(a,c,b).$$

Treba provjeriti homogenost i simetričnost funkcije g. Prema pretpostavkama f je pozitivno homogena reda n. Tada je

$$\begin{aligned} g(ta,tb,tc) =& f(ta,tb,tc) \cdot f(ta,tb,tc) = t^n f(a,b,c) \cdot t^n f(a,c,b) \\ =& t^{2n} f(a,b,c) \cdot f(a,c,b) = t^{2n} g(a,b,c), \end{aligned}$$

tj. g je pozitivno homogena reda $2n$. Osim toga vrijedi

$$g(a,c,b) = f(a,c,b) \cdot f(a,b,c) = g(a,b,c),$$

tj. g je simetrična u drugoj i trećoj varijabli. Dakle, g generira centar trokuta.

Provjerimo još da operacija trilinearni pol pravca PU od dvije bicentričke točke P i U stvara centar. Analognim postupkom provjerimo homogenost i simetričnost funkcije g definirane na sljedeći način:

$$g(a, b, c) := \frac{1}{f(b, c, a) \cdot f(c, b, a) - f(c, a, b) \cdot f(b, a, c)}.$$

Vrijedi,

$$\begin{aligned} g(ta, tb, tc) &= \frac{1}{f(tb, tc, ta) \cdot f(tc, tb, ta) - f(tc, ta, tb) \cdot f(tb, ta, tc)} \\ &= \frac{1}{t^n f(b, c, a) \cdot t^n f(c, b, a) - t^n f(c, a, b) \cdot t^n f(b, a, c)} \\ &= \frac{1}{t^{2n} \left[f(b, c, a) \cdot f(c, b, a) - f(c, a, b) \cdot f(b, a, c) \right]} \\ &= \frac{1}{t^{2n}} g(a, b, c), \end{aligned}$$

tj. g je pozitivno homogena reda $-2n$. Nadalje provjerimo simetričnost funkcije $|g|$:

$$\begin{aligned} |g(a, c, b)| &= \left| \frac{1}{f(b, a, c) \cdot f(c, a, b) - f(c, b, a) \cdot f(b, c, a)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{- \left[f(b, c, a) \cdot f(c, b, a) - f(c, a, b) \cdot f(b, a, c) \right]} \right| \\ &= | - g(a, b, c)| \\ &= |g(a, b, c)|. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija g je homogena reda i $|g|$ je simetrična u drugoj i trećoj varijabli, tj. g stvara centar trokuta. Na isti se način i za ostale operacije dokazuje da generiraju centar funkciju.

Očito je da bicentrički par točaka P i U leži na jednom pravcu. Na tom pravcu PU leže i bicentrička suma i bicentrička razlika ovih dviju točaka. Dokazat ćemo još općenitiju tvrdnju:

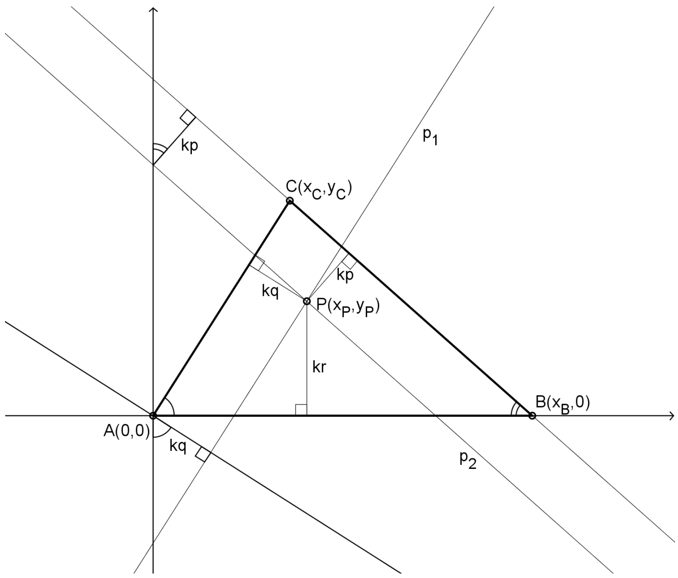
Neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Definiramo točku Q kao kombinaciju točaka P i U ovako:

$$Q = \lambda P + \mu U$$

s trilinearnim koordinatama

$$Q = (\lambda p + \mu u) : (\lambda q + \mu v) : (\lambda r + \mu w).$$

Tvrdimo da točka Q pripada pravcu PU.



Slika 1.9: Prelazak iz trilinearnih koordinata u Kartezijeve koordinate.

Za jednadžbu pravca PU trebaju nam Kartezijeve koordinate točaka P i U. Odredimo formulu za prelazak iz trilinearnih koordinata točke $P = p : q : r$ u Kartezijeve koordinate $P(x_P, y_P)$.

Neka je dani trokut ABC smješten u koordinatni sustav tako da su koordinate vrhova A, B i C su

$$A(0,0), B(x_B, 0), C(x_C, y_C).$$

Udaljenosti točke P do stranica trokuta jednake su

$$d(P, \overline{BC}) = kp, d(P, \overline{AC}) = kq, d(P, \overline{AB}) = kr.$$

Neka pravci p_1 i p_2 prolaze točkom P tako da je $p_1 \| AC$ i $p_2 \| BC$.

Jednadžbe tih pravaca su

$$p_1 ... y = \frac{y_C}{x_C} x - \frac{kq}{\cos\alpha}$$
$$p_2 ... y = \frac{y_C}{x_C - x_B} x - \frac{x_B y_C}{x_C - x_B} - \frac{kp}{\cos\beta}.$$

Točka P je presjek pravaca p_1 i p_2. Slijedi,

$$\frac{y_C}{x_C} x - \frac{kq}{\cos\alpha} = \frac{y_C}{x_C - x_B} x - \frac{x_B y_C}{x_C - x_B} - \frac{kp}{\cos\beta},$$

tj.

$$x\left[\frac{y_C}{x_C} - \frac{y_C}{x_C - y_C}\right] = k\left[\frac{q}{\cos\alpha} - \frac{p}{\cos\beta}\right] - \frac{x_B y_C}{x_C - x_B}.$$

U trokutu ABC stranica c je duljine $c = d(A, B) = x_B$, $\cos\alpha = \frac{x_C}{b}$ i $\cos\beta = \frac{x_B - x_C}{a} = \frac{c - x_C}{a}$. Duljine stranica a i b možemo dobiti kao udaljenost točaka B i C, odnosno A i C:

$$a = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + y_C^2}$$

$$b = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}.$$

Uvrštavajući navedeno u prethodnu jednakost dobivamo

$$x = k\left[\frac{bq}{x_C} - \frac{ap}{c - x_C}\right] \cdot \frac{x_C(c - x_C)}{c y_C} + x_C,$$

tj. x koordinata točke jednaka je

$$x_P = k \cdot \frac{bq(c - x_C) - ap x_C}{c y_C} + x_C.$$

Uvrstimo x_P u jednadžbu pravca p_1 kako bi izračunali koordinatu y_P točke P.

$$\begin{aligned}
y =& \frac{y_C}{x_C} x - \frac{kq}{\cos\alpha} \\
y =& \frac{y_C}{x_C}\left(k \cdot \frac{bq(c - x_C) - ap x_C}{c y_C} + x_C\right) - \frac{kqb}{x_C} \\
y_P =& k \cdot \frac{-ap - bq}{c} + y_C
\end{aligned}$$

Dakle, Kartezijeve koordinate točke P su

$$P\left(k \cdot \frac{bq(c - x_C) - ap x_C}{c y_C} + x_C, k \cdot \frac{-ap - bq}{c} + y_C\right).$$

Izrazimo još koeficijent k pomoću poznatih podataka. Koordinata y_P točke P je jednaka udaljenosti točke P do stranice $\overline{AB}$, tj.

$$y_P = kr.$$

Slijedi,

$$kr = k \cdot \frac{-ap - bq}{c} + y_C$$

$$k \cdot \frac{ap + bq + cr}{c} = y_C$$
$$k = \frac{cy_C}{ap + bq + cr}.$$

Uvrstimo k u Kartezijeve koordinate točke P iz čega dobivamo

$$P\left(\frac{c(bq + rx_C)}{ap + bq + cr}, \frac{cry_C}{ap + bq + cr}\right).$$

Pokažimo vrijedi li dobivena formula za centar $X(2)$ (težište) trokuta ABC. Kartezijeve koordinate težišta dobivamo kao

$$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Kako su koordinate vrhova trokuta ABC jednake $A(0, 0)$, $B(x_B, 0)$ i $C(x_C, y_C)$, koordinate težišta su $T(\frac{x_B+x_C}{3}, \frac{y_C}{3})$. Provjerimo!

Trilinearne koordinate težišta su $X(2) = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. Prema izvedenoj formuli Kartezijeve koordinate težišta su

$$T\left(\frac{c + x_C}{3}, \frac{y_C}{3}\right),$$

tj. jer je $c = x_B$ pišemo

$$T\left(\frac{x_B + x_C}{3}, \frac{y_C}{3}\right).$$

Dakle, izvedene formule se slažu s Kartezijevim koordinatama težišta.

Dakle, točke P i U s trilinearnim koordinatama $P = p : q : r$ i $U = u : v : w$ zapisujemo u obliku Kartezijevih koordinata na sljedeći način:

$$P\left(\frac{c(bq + rx_C)}{ap + bq + cr}, \frac{cry_C}{ap + bq + cr}\right)$$

$$U\left(\frac{c(bv + wx_C)}{au + bv + cw}, \frac{cwy_C}{au + bv + cw}\right).$$

Kartezijeve koordinate točke Q tada su

$$Q = \left(\frac{b(\lambda q + \mu v) + x_C(\lambda r + \mu w)}{a(\lambda p + \mu u) + b(\lambda q + \mu v) + c(\lambda r + \mu w)}c, \frac{c(\lambda r + \mu w)y_C}{a(\lambda p + \mu u) + b(\lambda q + \mu v) + c(\lambda r + \mu w)}\right).$$

Jednadžba pravca koji prolazi točkama P i U je

$$y - y_P = \frac{y_U - y_P}{x_U - x_P}(x - x_P).$$

Ako točka Q leži na pravcu PU tada vrijedi

$$y_Q - y_P = \frac{y_U - y_P}{x_U - x_P}(x_Q - x_P).$$

Kad uvrstimo sve izraze za koordinate točaka P, U i Q u tu jednakost, nakon kraćeg računanja dobivamo da je istinita, tj. točka Q pripada pravcu PU.

Prethodno navedene operacije stvaraju centar trokuta od dvije bicentričke točke. Nasuprot tome, ako imamo centar trokuta $X = x : y : z$, tada se bicentričke točke X_y i X_z tog centra definiraju ovako:

$$X_y = y : z : x$$

i

$$X_z = z : x : y.$$

Slijedi lista prvih deset bicentričkih parova točaka trokuta sa pripadnom funkcijom f za točku P:
$P(1)$ i $U(1)$ = prva i druga Brocardova točka,

$$f(a, b, c) = \frac{c}{b};$$

$P(2)$ i $U(2)$ = prva i druga Beltramijeva točka,

$$f = a(b^2 - a^2);$$

$P(3)$ i $U(3)$ = prva i druga Yffova točka,

$$f(a, b, c) = bc\sqrt[3]{\frac{c - u}{b - u}},$$

gdje je u realno rješenje jednadžbe $x^3 - (x - a)(x - b)(x - c) = 0$;
$P(4)$ i $U(4)$ = prvo i drugo Grinbergovo sjecište,

$$f = [\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma - 2\operatorname{ctg}\alpha + (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma)L^{\frac{1}{2}}]\sec\alpha,$$

gdje je $L = -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)$;
$P(5)$ i $U(5)$ = prvi i drugi Ehrmannov pivot,

$$f = \sin(\beta - \gamma - \frac{\pi}{3});$$

$P(6)$ i $U(6)$ = bicentrički par centra $X(6)$ tj. Lemoineove točke,

$$f = b : c : a;$$

$P(7)$ i $U(7)$ = prva i druga Evan-Yffova točka,

$$f = bc(b^4 - b^2c^2 + 2c^2a^2 - 3a^2b^2);$$

$P(8)$ i $U(8)$ = bicentrički par centra $X(2)$,

$$f(a, b, c) = \frac{1}{b};$$

$P(9)$ i $U(9)$ = trilinearni produkt $X(6) \cdot P(8)$,

$$f(a, b, c) = \frac{a}{b};$$

$P(10)$ i $U(10)$ = trilinearni produkt $X(2) \cdot P(8)$,

$$f(a, b, c) = \frac{b}{a}.$$

Lista bicentričkih parova točaka stalno se povećava, pa su imena bicentričkih parova posuđena iz drugih područja. Preciznije, izabrana su imena cvijeća za imena određenih bicentričkih parova, kao npr. točke Acacia, $P(43)$ i $U(43)$ (hrvatski: akacija, mimoza). Centar $X(6)$ naziva se simedijalna točka ili u čast Emile Michel Hyacinthe Lemoine-a, Lemoineova točka. Jer je jedan dio Lemoineova imena i Hyacinthe (hrvatski: zumbul), bicentrički par točaka $P(6)$ i $U(6)$ centra $X(6)$ (tj. Lemoineove točke) naziva se još i Hyacinthovim točkama.

Poglavlje 2

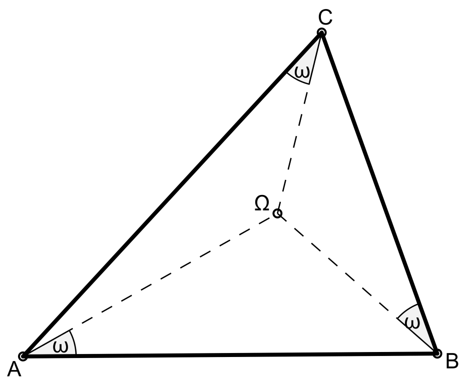
Brocardove točke

2.1 Prva Brocardova točka i Brocardov kut

Definicija 2.1.1. *Točku Ω trokuta ABC, takvu da vrijedi*

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA = \omega$$

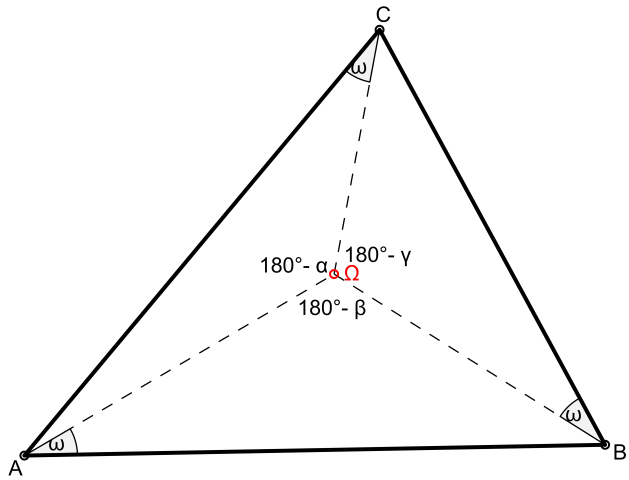
zovemo prvom Brocardovom točkom. Kut ω zovemo Brocardov kut.



Slika 2.1: Prva Brocardova točka

Brocardova točka je dobila ime po Henriju Brocardu koji je postavio zadatak kako odrediti takvu točku i riješio ga. Međutim, on nije bio prvi koji je riješio taj problem. Prije njega to je učinio August Leopold Crelle 1816. godine. Konstruirajući točku Ω dokazat ćemo postojanje i jedinstvenost prve Brocardove točke. Neka je dana Brocardova točka Ω trokuta ABC. U trokutu $AB\Omega$ tada vrijedi

$$\angle A\Omega B = 180^\circ - \omega - (\beta - \omega) = 180^\circ - \beta.$$



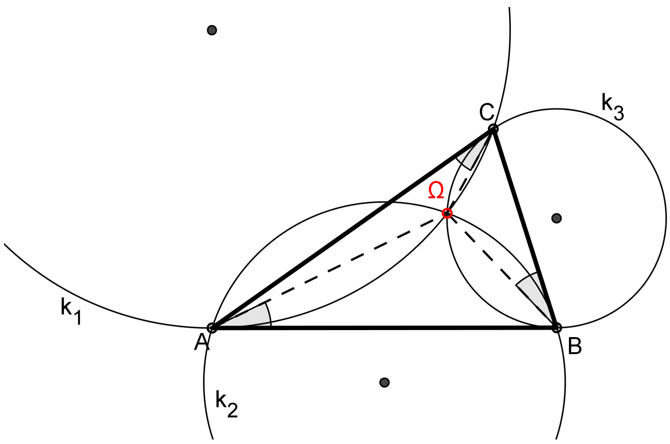
Slika 2.2: Konstrukcija prve Brocardove točke

Analogno, u trokutu $BC\Omega$ vrijedi

$$\angle B\Omega C = 180^\circ - \omega - (\gamma - \omega) = 180^\circ - \gamma$$

i u trokutu $CA\Omega$ vrijedi

$$\angle C\Omega A = 180^\circ - \omega - (\alpha - \omega) = 180^\circ - \alpha.$$



Slika 2.3: Konstrukcija prve Brocardove točke

Prema teoremu o središnjem i obodnom kutu, konstruiramo kružnicu k_1 sa središnjim kutom veličine 2α nad tetivom $\overline{AC}$, kružnicu k_2 sa središnjim kutom veličine 2β nad tetivom $\overline{AB}$ i kružnicu k_3 sa središnjim kutom veličine 2γ nad tetivom $\overline{BC}$. Obodni kut kružnice k_1 nad tetivom $\overline{AC}$ je veličine $180^\circ - \alpha$, obodni kut kružnice k_2 nad tetivom $\overline{BA}$ je veličine $180^\circ - \beta$ i obodni kut kružnice k_3 nad tetivom $\overline{BC}$ je veličine $180^\circ - \gamma$. Sjecište kružnica k_1, k_2 i k_3 je točka Ω. Tako konstruirajući prvu Brocardovu točku dokazali smo njeno postojanje i jedinstvenost. U nastavku slijedi još jedna definicija prve Brocardove točke [2].

Definicija 2.1.2. *Neka je dan trokut ABC. Kružnica k_1 koja prolazi vrhom A i dira stranicu $\overline{BC}$ u vrhu C, kružnica k_2 koja prolazi vrhom B i dira stranicu $\overline{AC}$ u vrhu A i kružnica k_3 koja prolazi vrhom C i dira stranicu $\overline{AB}$ u vrhu B sijeku se u jednoj točki Ω koju nazivamo prvom Brocardovom točkom.*

Postojanje i jedinstvenost prve Brocardove točke možemo dokazati na još jedan način. Konstruiramo kružnicu k koja prolazi vrhom B i dira stranicu $\overline{AC}$ u vrhu C. Pravac koji prolazi vrhom C i paralelan je sa stranicom $\overline{AB}$ siječe kružnicu k u točki D. Sjecište dužine $\overline{AD}$ i kružnica k je točka Ω. Neka je $\angle \Omega AB = \omega$. Tada vrijedi

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega DC = \omega$$

jer su $\angle \Omega AB$ i $\angle \Omega DC$ kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca AB i CD. Kutovi $\angle \Omega DC$ i $\angle \Omega BC$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{C\Omega}$ pa vrijedi

$$\angle \Omega BC = \angle \Omega DC = \omega.$$

Također je i $\angle \Omega AB = \omega$ jer je kut tetive i tangente jednak obodnom kutu nad tetivom.

Teorem 2.1.3. *Neka su α, β i γ unutarnji kutovi trokuta ABC i ω Brocardov kut. Vrijedi*

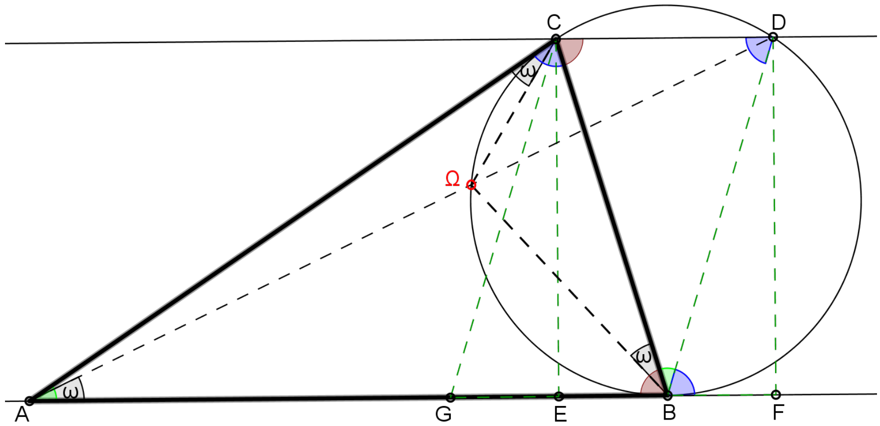
$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

Dokaz. Neka je dan trokut ABC i prva Brocardova točka Ω. Kružnica k prolazi točkama B i C, a pravac na kojem leži stranica $\overline{AB}$ joj je tangenta. Točka D je presjek kružnice k i pravca paralelnog sa stranicom $\overline{AB}$ koji prolazi točkom C. Neka je točka E nožište visine spuštene iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, a točka F nožište okomice spuštene iz točke D na pravac na kojem leži stranica $\overline{AB}$. Nadalje, odredimo točku G takvu da vrijedi $|BF| = |EG|$. Prema teoremu o kutovima uz transverzalu vrijedi

$$\angle ABC = \angle BCD = \beta.$$

Kutovi $\angle B\Omega C$ i $\angle BDC$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{BC}$ i $\angle B\Omega C = 180^\circ - \gamma$, iz čega slijedi

$$\angle BDC = \gamma.$$



Slika 2.4: Brocardov kut ω.

Tada je

$$\angle CBD = 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha.$$

Prema teoremu K-K o sličnosti trokuta, slijedi trokuti ABC i BCD su slični. Tada je

$$\angle DBF = \angle CGE = \gamma.$$

U trokutu AFD vrijedi:

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{|AF|}{|DF|},$$

u trokutu AEC

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|AE|}{|DF|},$$

u trokutu BEC

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|BE|}{|DF|}$$

i u trokutu DFB

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{|BF|}{|DF|}.$$

Točke A, E, B i F leže na istom pravcu zbog čega vrijedi

$$|AE| + |EB| + |BF| = |AF|.$$

Podijelimo li gornju jednakost s $|DF|$ dobivamo

$$\frac{|AE|}{|DF|} + \frac{|EB|}{|DF|} + \frac{|BF|}{|DF|} = \frac{|AF|}{|DF|},$$

tj.

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\omega$$

čime je teorem dokazan. □

Propozicija 2.1.4. *Za Brocardov kut ω vrijedi*

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}.$$

Dokaz. Prvo dokažimo da je funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ konveksna za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Deriviramo li ju prvi put dobivamo

$$f'(x) = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Druga derivacija glasi

$$\begin{aligned} f''(x) =& \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)(-\sin^{-2} x)' = -(-2)\sin^{-3} x \cos x \\ =& 2\frac{\cos x}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

Za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ vrijedi da je $f''(x) > 0$, pa je f konveksna. Za konveksnu funkciju vrijedi Jensenova nejednakost

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$$

pri čemu su $x, y, z > 0$. Primijenimo li ovu nejednakost na $f(x) = \operatorname{ctg} x$ i na brojeve $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ uz primjenu teorema 2.1.3 dobivamo

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \leq& \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}{3} \\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} \leq& \frac{\operatorname{ctg}\omega}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \leq& \frac{1}{3\operatorname{tg}\omega} \\ 3\operatorname{tg}\omega \leq& \sqrt{3} \\ \operatorname{tg}\omega \leq& \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Rješenje te nejednadžbe u intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}$$

što je upravo trebalo dokazati. □

U nastavku slijedi račun za trilinearne koordinate prve Brocardove točke. Iz prve Brocardove točke Ω povučemo okomice na stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ i nožišta označimo s D, E i F.
Prema definiciji trilinearnih koordinata

$$\begin{aligned} t_1 &= d(\Omega, \overline{BC}) = |\Omega D|, \\ t_2 &= d(\Omega, \overline{CA}) = |\Omega E|, \\ t_3 &= d(\Omega, \overline{AB}) = |\Omega F|. \end{aligned}$$

U trima pravokutnim trokutima $AF\Omega$, $BD\Omega$ i $CE\Omega$ vrijedi

$$\cos\omega = \frac{t_3}{|A\Omega|}, \cos\omega = \frac{t_1}{|B\Omega|}, \cos\omega = \frac{t_2}{|C\Omega|},$$

tj.

$$\begin{aligned} \frac{|B\Omega|}{|C\Omega|} &= \frac{t_1}{t_2}, \\ \frac{|C\Omega|}{|A\Omega|} &= \frac{t_2}{t_3}. \end{aligned}$$

U trokutu $BC\Omega$, kut $\angle B\Omega C$ jednak je $180^\circ - \gamma$. Izrazimo površinu trokuta $BC\Omega$ na dva načina:

$$P(\triangle BC\Omega) = \frac{1}{2}|B\Omega| \cdot |C\Omega| \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}at_1.$$

Odatle dobivamo

$$|B\Omega| \cdot |C\Omega| \sin\gamma = at_1. \tag{1}$$

U trokutu $AB\Omega$ imamo

$$P(\triangle AB\Omega) = \frac{1}{2}|A\Omega| \cdot |B\Omega| \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2}ct_3,$$

tj.

$$|A\Omega| \cdot |B\Omega| \sin\beta = ct_3. \tag{2}$$

U trokutu $AB\Omega$ imamo

$$P(\triangle AC\Omega) = \frac{1}{2}|A\Omega| \cdot |C\Omega| \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}bt_2,$$

tj.

$$|A\Omega| \cdot |C\Omega| \sin\alpha = bt_2. \tag{3}$$

Dijeljenjem obiju strana u 2 i 3 dobivamo

$$\frac{|B\Omega|\sin\beta}{|C\Omega|\sin\alpha} = \frac{ct_3}{bt_2}.$$

Prema sinusovom teoremu vrijedi $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$ što zajedno s $\frac{|B\Omega|}{|C\Omega|} = \frac{t_1}{t_2}$ daje:

$$\frac{t_1}{t_2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ct_3}{bt_2},$$

tj.

$$t_3 = \frac{b^2}{ac} t_1.$$

Dijeljenjem obiju strana u 1 i 2, te primjenom sinusovog teorema dobivamo:

$$\frac{|C\Omega|}{|A\Omega|} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{at_1}{ct_3}$$

$$\frac{t_2}{t_3} \cdot \frac{c}{b} = \frac{at_1}{ct_3}$$

$$t_2 = \frac{ab}{c^2} t_1.$$

Sad je

$$\begin{aligned} t_1 : t_2 : t_3 =& t_1 : \frac{ab}{c^2} t_1 : \frac{b^2}{ac} t_1 \\ =& 1 : \frac{ab}{c^2} : \frac{b^2}{ac} = c : \frac{ab}{c} : \frac{b^2}{a} \\ =& \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a} \end{aligned}$$

čime smo dobili trilinearne koordinate prve Brocardove točke.

Propozicija 2.1.5. *Ako u trokutu ABC vrijedi $\alpha \le \beta \le \gamma$, tada je*

$$\alpha \le 2\omega.$$

Dokaz. Vrijedi:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right).$$

Budući da je $\frac{\beta+\gamma}{2} \leq \gamma$ i da je kotangens padajuća funkcija na $\langle 0, \pi \rangle$ slijedi da je

$$\operatorname{ctg} \frac{\beta + \gamma}{2} \geq \operatorname{ctg} \gamma,$$

tj.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq \operatorname{ctg} \gamma. \tag{4}$$

Nadalje iz relacije $\alpha \leq \beta$ slijedi

$$\operatorname{ctg} \alpha \geq \operatorname{ctg} \beta. \tag{5}$$

Zbrojimo nejednakosti 4 i 5:

$$\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \leq \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Iskoristimo li teorem 2.1.3 imamo

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \leq \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

tj.

$$\operatorname{ctg} \omega \leq \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Budući da je kotangens padajuća na $\langle 0, \pi \rangle$, slijedi da vrijedi

$$\omega \geq \frac{\alpha}{2},$$

tj.

$$2\omega \geq \alpha$$

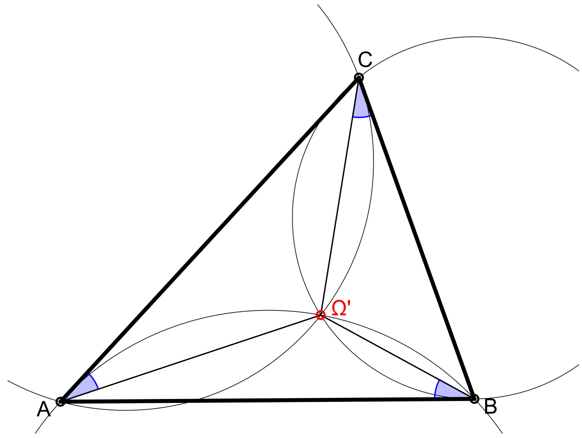
što je i trebalo dokazati. □

Drugi naziv za prvu Brocardovu točku je pozitivna Brocardova točka.

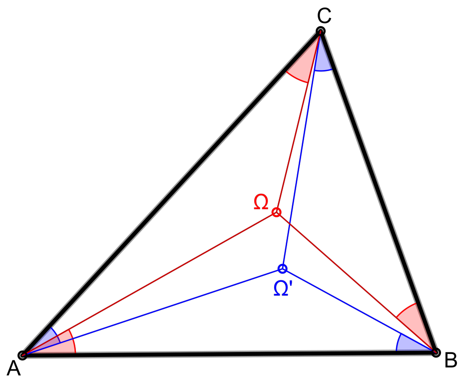
2.2 Druga Brocardova točka

Definicija 2.2.1. *Druga Brocardova točka trokuta ABC je točka Ω' takva da vrijedi*

$$\angle \Omega' BA = \angle \Omega' CB = \angle \Omega' AC = \omega'.$$



Slika 2.5: Druga Brocardova točka



Slika 2.6: Prva i druga Brocardova točka

Drugu Brocardovu točku nazivamo još i negativnom Brocardovom točkom, a konstruira se na jednak način kao i prva Brocardova točka. Zbog toga za nju vrijede ista svojstva kao i za prvu Brocardovu točku. Veličinu drugog Brocardovog kuta ω' tada također možemo izračunati prema teoremu 2.1.3. Zaključujemo da su prvi i drugi Brocardov kut jednakih veličina, tj. $\omega' = \omega$.

Opišimo trokutu ABC s prvom Brocardovom točkom Ω kružnicu k_o. Vrhove trokuta ABC spojimo s točkom Ω i te spojnice produžimo tako da sijeku kružnicu k_o redom u točkama A', B' i C'. Tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.2.2. *Trokut $A'B'C'$ je sukladan trokutu ABC, a prva Brocardova točka trokuta ABC je druga Brocardova točka trokuta $A'B'C'$.*

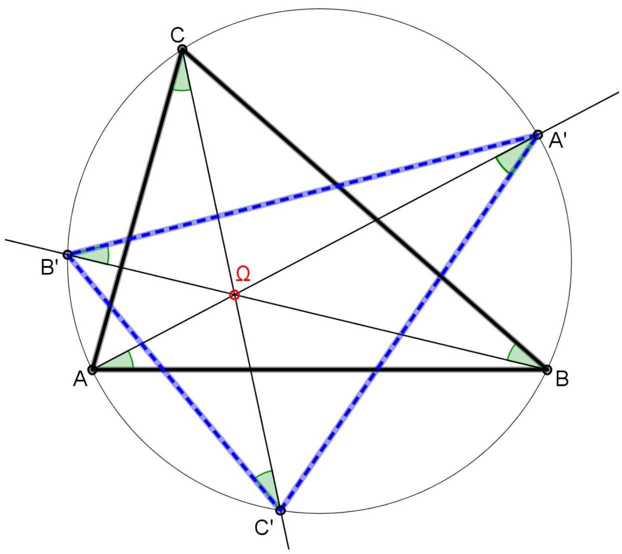
Dokaz. Točka Ω je prva Brocardova točka trokuta ABC pa vrijedi

$$\angle\Omega CA = \angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \omega.$$

Kutovi ΩCA i $C'A'A$ su sukladni jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AC'}$. Na isti način zaključujemo, $\angle\Omega AB = \angle A'B'B$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{A'C'}$) i $\angle\Omega BC = \angle B'C'C$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{B'C}$). Dakle,

$$\angle\Omega B'C' = \angle\Omega A'C' = \angle\Omega C'B' = \omega,$$

tj. Ω je druga Brocardova točka trokuta $A'B'C'$.



Slika 2.7: Točka Ω kao točka trokuta ABC i točka trokuta $A'B'C'$

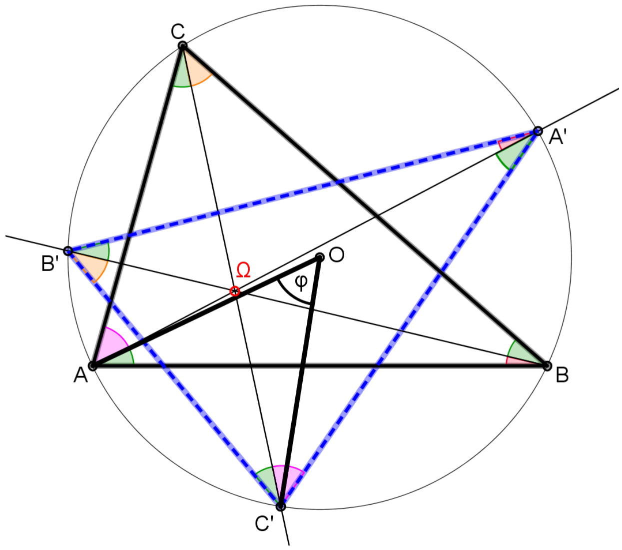
Kutovi $\angle B'BA$ i $\angle B'A'A$ su sukladni jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AB'}$. Slijedi, $\beta = \alpha'$. Na isti način zaključujemo, $\angle A'C'C = \angle A'AC$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{A'C}$) i $\angle C'B'B = \angle C'CB$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{BC'}$) iz čega slijedi $\alpha = \gamma'$ i $\gamma = \beta'$.

Neka je točka O središte kružnice k_o. Tada je $\angle AOC' = \varphi$ središnji kut nad tetivom $\overline{AC'}$. Kut $\angle AA'C' = \omega$ je obodni kut nad tetivom $\overline{AC'}$. Prema teoremu o središnjem i obodnom kutu slijedi

$$\varphi = 2\omega.$$

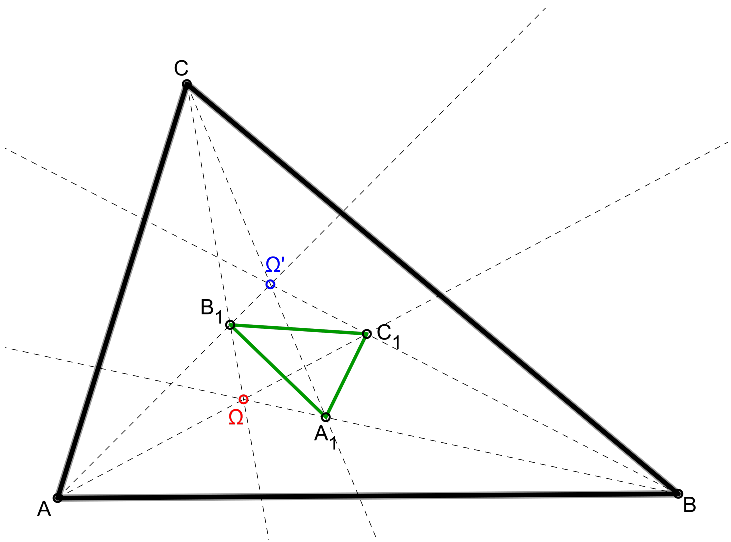
Slijedi, trokut $A'B'C'$ možemo dobiti rotacijom trokuta ABC oko točke O za kut veličine 2ω.

Dakle, trokuti ABC i $A'B'C'$ su sukladni, čime je teorem dokazan. □



Slika 2.8: Trokut $A'B'C'$ je rotirani trokut ABC oko točke O za kut 2ω.

Neka je dan trokut ABC i Brocardove točke Ω i Ω' trokuta ABC. Povučemo polupravce $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$, $A\Omega'$, $B\Omega'$ i $C\Omega'$. Polupravci $A\Omega$ i $B\Omega'$ sijeku se u točki C_1, $B\Omega$ i $C\Omega'$ sijeku se u točki A_1, a polupravci $C\Omega$ i $A\Omega'$ u točki B_1. Dobiveni trokut $A_1B_1C_1$ nazivamo prvim Brocardovim trokutom.



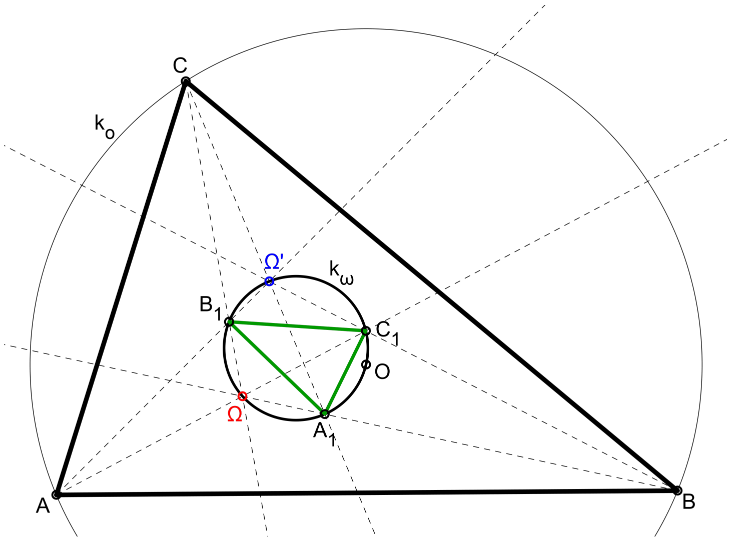
Slika 2.9: Prvi Brocardov trokut $A_1B_1C_1$.

Definicija 2.2.3. *Neka su točke A_1, B_1 i C_1 točke unutrašnjosti trokuta ABC takve da čine vrhove jednakokračnih trokuta s osnovicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom i Brocardovim kutom ω uz osnovice. Takav trokut $A_1B_1C_1$ nazivamo prvim Brocardovim trokutom.*

Uočimo da se prema definiciji 2.2.3 točke A_1, B_1 i C_1 nalaze na simetralama stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC.

2.3 Brocardova kružnica (Kružnica sedam točaka)

Definicija 2.3.1. *Brocardova kružnica je kružnica k_ω opisana prvom Brocardovom trokutu $A_1B_1C_1$.*

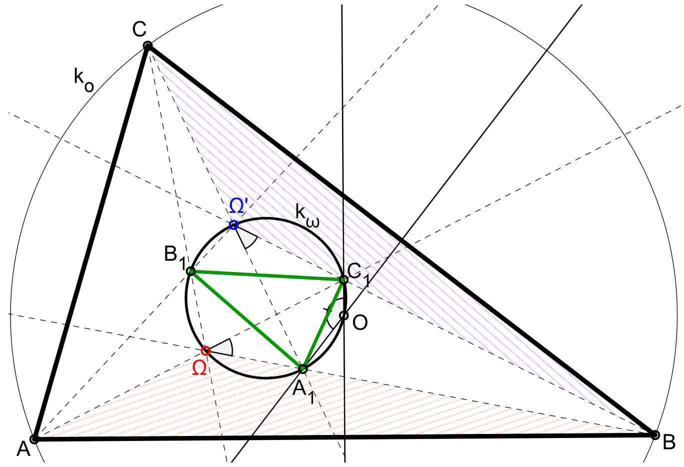


Slika 2.10: Brocardova kružnica

Teorem 2.3.2. *Brocardova kružnica prolazi vrhovima trokuta $A_1B_1C_1$, prvom i drugom Brocardovom točkom (Ω i Ω') i središtem O opisane kružnice k_o trokuta ABC.*

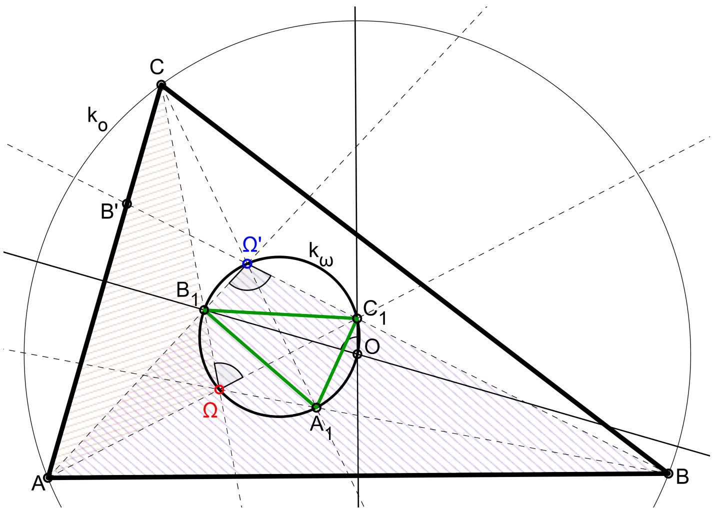
Dokaz. U trokutu $AB\Omega$ znamo da je kut $\angle A\Omega B = 180° - \beta$. Tada je njegov suplementarni kut $\angle C_1\Omega A_1 = \beta$. Isto tako, u trokutu $BC\Omega$, kut $\angle B\Omega' C = 180° - \beta$. Njegov suplementarni kut je $\angle A_1\Omega' C_1 = \beta$. Kut $\angle A_1OC_1 = 180° - \beta$ jer su krakovi kuta $\angle A_1OC_1$ okomiti na krakove kuta $\angle ABC$.

Kutovi $\angle C_1\Omega A_1$, $\angle A_1\Omega' C_1$ i $\angle A_1OC_1$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{A_1C_1}$ jedne kružnice. Označimo ju s k_ω. Prema tome, točke A_1, Ω, Ω', C_1 i O leže na kružnici k_ω.



Slika 2.11: Obodni kutovi nad tetivom $\overline{A_1C_1}$.

Analogno, promatrajući trokut $A\Omega C$ zaključujemo da je $\angle A\Omega C = 180^\circ - \alpha$, pa je njegov suplementarni kut $\angle C_1\Omega B_1 = \alpha$. U trokutu $A\Omega' B$, kut $\angle A\Omega' B = 180^\circ - \alpha$ možemo zapisati kao $\angle B_1\Omega' C_1 = 180^\circ - \alpha$ jer točka B_1 pripada polupravcu $A\Omega'$, a točka C_1 polupravcu $B\Omega'$. Kut $\angle B_1OC_1 = \alpha$ jer su krakovi tog kuta okomiti na krakove kuta $\angle BAC$.



Slika 2.12: Obodni kutovi nad tetivom $\overline{B_1C_1}$.

Zaključujemo, kutovi $\angle C_1\Omega B_1$, $\angle B_1\Omega' C_1$ i $\angle B_1OC_1$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{B_1C_1}$ jedne kružnice. Označimo tu kružnicu s k'_ω. Tada točke B_1, C_1, Ω, Ω' i O leže na toj kružnici k'_ω.

Točke C_1, Ω, Ω' i O pripadaju i kružnici k_ω i k'_ω, iz čega slijedi kružnice k_ω i k'_ω se podudaraju. □

Teorem 2.3.3. *Trokut ABC i prvi Brocardov trokut $A_1B_1C_1$ su slični trokuti.*

Dokaz. Prema dokazu prethodnog teorema $\angle B_1\Omega C_1$ i $\angle B_1A_1C_1$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{B_1C_1}$, pa slijedi

$$\angle B_1\Omega C_1 = \alpha = \angle B_1A_1C_1.$$

Na isti način,

$$\angle A_1\Omega C_1 = \beta = \angle A_1B_1C_1$$

jer su $\angle A_1\Omega C_1$ i $\angle A_1B_1C_1$ obodni kutovi nad tetivom $\overline{A_1C_1}$. Tada je i

$$\angle A_1C_1B_1 = \gamma$$

čime je teorem dokazan. □

Slijede definicije i teoremi koji su nam potrebni u sljedećim razmatranjima.

Definicija 2.3.4. *Neka je dan trokut ABC i točke $\bar{A} \in \overline{BC}$ i $\bar{B} \in \overline{AC}$ takve da vrijedi*

$$\angle C\bar{A}\bar{B} = \angle CAB = \alpha.$$

Dužinu $\overline{\bar{A}\bar{B}}$ zovemo antiparalela stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC.

Jer je kut

$$\angle ACB = \angle \bar{B}C\bar{A} = \gamma$$

tada je i

$$\angle \bar{A}\bar{B}C = \angle CBA = \beta.$$

Na isti način definiramo antiparalele za druge dvije stranice danog trokuta.

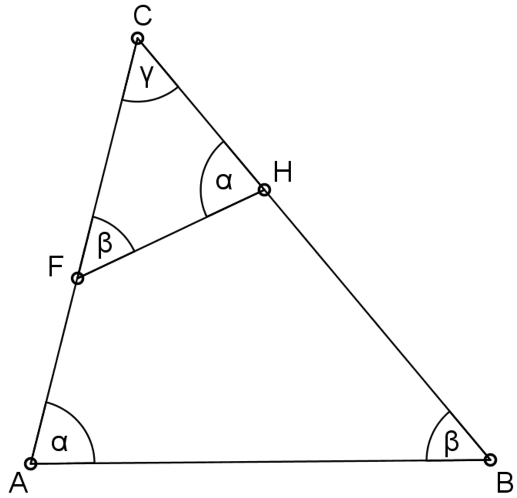
Definicija 2.3.5. *Polovišta svih antiparalela jedne stranice danog trokuta pripadaju pravcu koji prolazi trećim vrhom trokuta i naziva se simedijana danog trokuta.*

Teorem 2.3.6. *Simedijane danog trokuta ABC sijeku se u tzv. Lemoineovoj točki koju označavamo s K.*

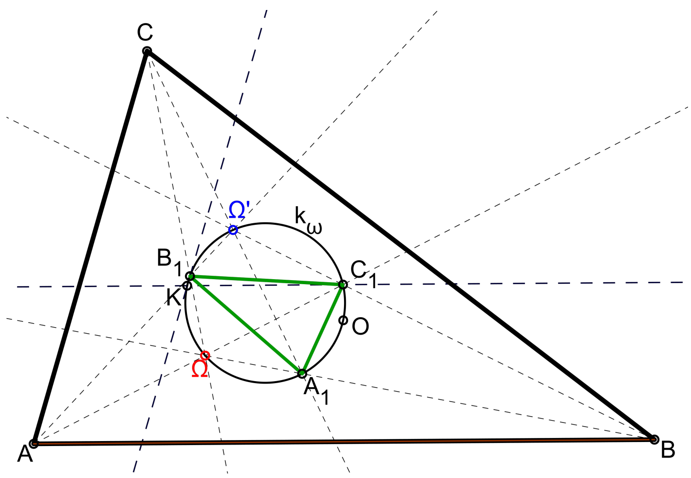
Trilinearne koordinate Lemoineove točke K su

$$K = a : b : c.$$

Lemoineova točka je drugi naziv centra trokuta $X(6)$.



Slika 2.13: Antiparalela stranice $\overline{AB}$.



Slika 2.14: Lemoineova točka K trokuta ABC.

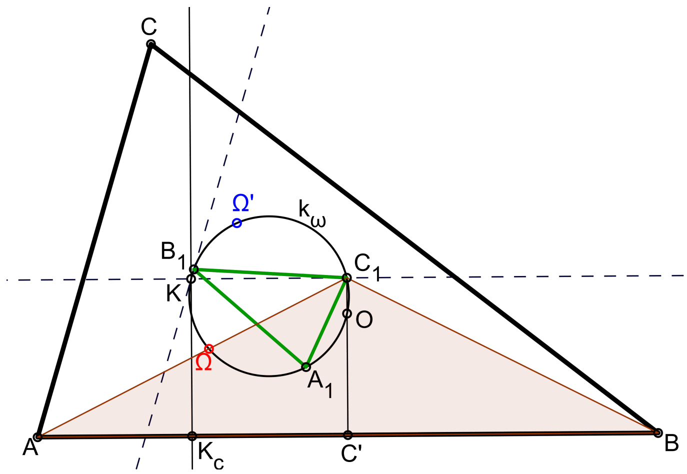
Teorem 2.3.7. *Paralele sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ povučene redom točkama A_1, B_1 i C_1 sijeku se u točki K trokuta ABC koju nazivamo Lemoineova točka. Lemoinova točka K leži na Brocardovoj kružnici k_ω.*

Dokaz. Neka je p pravac paralelan sa stranicom $\overline{AB}$ i prolazi točkom C_1, a q pravac paralelan sa stranicom $\overline{AC}$ i prolazi točkom B_1. Neka je točka K sjecište tih dvaju pravaca.

Krakovi kuta $\angle C_1KB_1$ su paralelni s krakovima kuta $\angle B_1A_1C_1 = \alpha$, pa je i $\angle C_1KB_1 = \alpha$. Iz dokaza teorema 2.3.3 gdje smo uočili da su obodni kutovi nad tetivom $\overline{B_1C_1}$ veličine α slijedi da točka K pripada kružnici k_ω.

Neka je s pravac takav da prolazi točkom C_1 i paralelan sa stranicom $\overline{AB}$. Sjecište pravaca p i s je točka K_1. Zbog paralelnosti krakova kutova $\angle A_1K_1C_1$ i $\angle ABC$ vrijedi $\angle A_1K_1C_1 = \beta$. Također iz dokaza teorema 2.3.3 slijedi da točka K_1 pripada kružnici k_ω jer su obodni kutovi nad tetivom $\overline{A_1C_1}$ veličine β. Isto tako, točka K_1 mora ležati na sjecištu kružnice k_ω s dužinom $\overline{C_1K_1}$ koja je sukladna dužini $\overline{C_1K}$. Slijedi, $K_1 = K$.

Još moramo pokazati da je K Lemoineova točka. Znamo da je $C_1K \| AB$. Neka je C' nožište okomice spuštene iz točke C_1 na stranicu $\overline{AB}$, a K_c nožište okomice spuštene iz K na stranicu $\overline{AB}$. Slijedi $|C_1C'| = |KK_c|$. Prema definiciji prvog Brocardovog trokuta, trokut ABC_1 je jednakokračan, s kutovima uz osnovicu $\angle ABC_1 = \angle BAC_1 = \omega$.



Slika 2.15: Jednakokračan trokut ABC_1.

Tada vrijedi

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2|C_1C'|}{|AB|} = \frac{2|KK_c|}{c}.$$

Prema definiciji prvog Brocardovog trokuta, jednakokračni su i trokuti A_1BC i AB_1C pa analognim promatranjem slijedi

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2|A_1A'|}{|BC|} = \frac{2|KK_a|}{a}$$

i

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2|B_1B'|}{|AC|} = \frac{2|KK_b|}{b}.$$

Slijedi
$$|KK_a| : |KK_b| : |KK_c| = \frac{\operatorname{tg}\omega \cdot a}{2} : \frac{\operatorname{tg}\omega \cdot b}{2} : \frac{\operatorname{tg}\omega \cdot c}{2} = a : b : c,$$
čime je dokazano da je točka K upravo Lemoineova točka trokuta ABC. □

Uočimo da Brocardova kružnica k_ω prolazi kroz sedam točaka zbog čega se još naziva i kružnica sedam točaka. Te točke su vrhovi prvog Brocardovog trokuta A_1, B_1 i C_1, prva i druga Brocardova točka Ω i Ω', središte O opisane kružnice trokuta ABC i Lemoineova točka K trokuta ABC.

Jedno od svojstava Brocardove kružnice je da je $\overline{OK}$ promjer Brocardove kružnice. Dokaz slijedi iz činjenice da su dužine $\overline{OA_1}$ i $\overline{A_1K}$ okomite jer $\overline{OA_1}$ leži na simetrali stranice $\overline{BC}$, a $\overline{A_1K}$ na pravcu r paralelnom sa stranicom $\overline{BC}$.

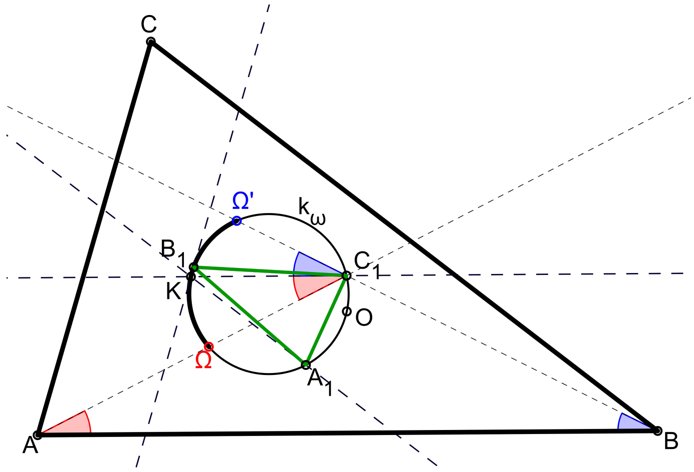
Drugo svojstvo Brocardove kružnice je da su prva i druga Brocardova točka međusobno simetrične s obzirom na promjer $\overline{OK}$.

Dokaz. Prema teoremu o kutovima uz transverzalu,
$$\angle \Omega C_1 K = \angle BA\Omega' = \omega.$$
Također
$$\angle KC_1\Omega = \angle AB\Omega' = \omega$$
jer su to kutovi s paralelnim kracima. Slijedi
$$\angle \Omega C_1 K = \angle KC_1\Omega.$$
Tada su jednaki i lukovi $\widehat{\Omega K}$ i $\widehat{K\Omega'}$. □

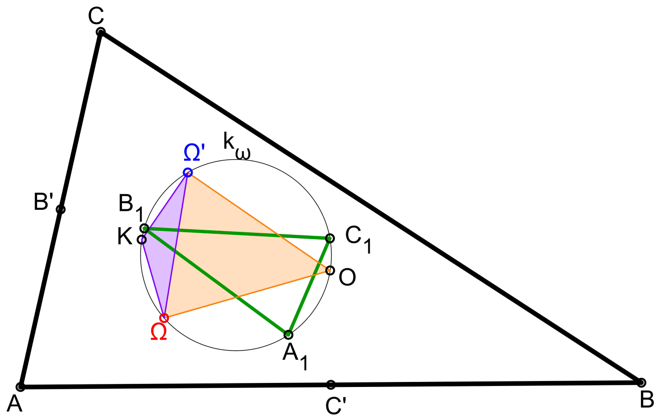
Zbog simetričnosti točaka Ω i Ω' obzirom na promjer $\overline{OK}$ Brocardove kružnice slijedi da su trokuti $O\Omega\Omega'$ i $K\Omega\Omega'$ jednakokračni.

Teorem 2.3.8. *Težište trokuta ABC ujedno je i težište prvog Brocardovog trokuta $A_1B_1C_1$.*

Dokaz. Neka je točka C_2' na simetrali stranice $\overline{AB}$ takva da vrijedi $|C_1C'| = |C'C_2'|$. Točka C' je tada polovište dužine $\overline{C_1C_2'}$. Trokuti $AC'C_1$ i $AB'B_1$ su slični prema teoremu K-K o sličnosti trokuta. Oba trokuta su pravokutna, a s druge strane vrijedi
$$\angle C'AC_1 = \angle B'AB_1 = \omega.$$
Zbog odabira točke C_2' trokuti $AC'C_2'$ i $AC'C_1$ su sukladni prema S-K-S teoremu o sukladnosti trokuta. Ta dva trokuta imaju zajedničku stranicu $\overline{AC'}$, $|C_1C'| = |C'C_2'|$ i kutovi između odgovarajućih stranica su veličine 90°. Prema tome, vrijedi
$$\frac{|AC_2'|}{|AB_1|} = \frac{\frac{|AB|}{2}}{\frac{|AC|}{2}} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



Slika 2.16: Kružni lukovi $\widehat{\Omega K}$ i $\widehat{K\Omega'}$ su jednaki.



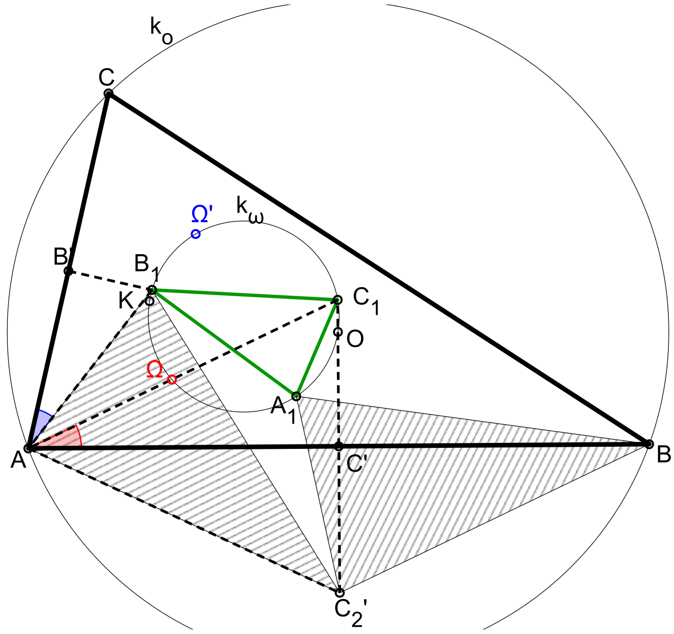
Slika 2.17: Trokuti $O\Omega\Omega'$ i $K\Omega\Omega'$ su jednakokračni.

Također $\angle B_1AC' = \alpha - \omega$ i $\angle C'AC_2' = \angle C_1AC' = \omega$, iz čega slijedi

$$\angle B_1AC_2' = \alpha - \omega + \omega = \alpha.$$

Prema S-K-S teoremu o sličnosti trokuta, trokuti ABC i B_1AC_2' su slični. Na isti se način pokazuje da su trokuti A_1BC_2' i ABC slični. Točka C_2' pripada simetrali stranice $\overline{AB}$, pa vrijedi $|AC_2'| = |C_2'B|$ što povlači da su trokuti B_1AC_2' i A_1BC_2' sukladni. Tada vrijedi $|AB_1| = |B_1C|$ i $|AB_1| = |C_2'A_1|$, tj.

$$|B_1C| = |C_2'A_1|. \qquad (*)$$



Slika 2.18: Trokuti B_1AC_2' i A_1BC_2' su sukladni.

Također $|A_1B| = |A_1C|$ i $|B_1C_2'| = |A_1B|$, tj.

$$|A_1C| = |B_1C_2'|. \tag{**}$$

Jer vrijede * i ** četverokut $A_1CB_1C_2'$ je paralelogram. Sjecište dijagonala $\overline{CC_2'}$ i $\overline{A_1C_1}$ tog paralelograma je točka C_1' koja je polovište dijagonale $\overline{CC_2'}$. Odatle slijedi da je $\overline{C_1C_1'}$ težišnica prvog Brocardovog trokuta $A_1B_1C_1$.

Dužina $\overline{C_1C_1'}$ je također i težišnica trokuta CC_1C_2' (C_1' je polovište dijagonale $\overline{CC_2'}$). Dužina $\overline{CC'}$ je druga težišnica trokuta $CC'C_2'$ jer je točka C_2' odabrana tako da vrijedi $|C_1C'| = |C'C_2'|$. Težište T trokuta CC_1C_2' je sjecište težišnica $\overline{CC'}$ i $\overline{C_1C_1'}$, iz čega slijedi $|CT| = 2|C'T|$ i $|C_1T| = 2|C_1'T|$, tj. točka T je i težište danog trokuta ABC i prvog Brocardovog trokuta $A_1B_1C_1$. □

Konstruirajmo u danom trokutu ABC dvije kružnice; kružnicu k takvu da prolazi točkom C i dira stranicu $\overline{AB}$ u točki B i kružnicu k' takvu da prolazi točkom A i dira stranicu $\overline{BC}$ u B. Te se kružnice sijeku u vrhu B i točki B_2. U sljedećim su lemama navedena neka svojstva koja vrijede za takvu točku B_2.

Lema 2.3.9. *Točka B_2 pripada semidijani vrha B trokuta ABC.*

Lema 2.3.10. *Točka B_2 je nožište okomice spuštene iz središta trokutu ABC opisane kružnice O na simedijanu tog trokuta koja prolazi vrhom B. Odnosno,*

$$\angle OB_2B = \angle OB_2K = 90^\circ.$$

Lema 2.3.11. *Točka B_2 leži na Brocardovoj kružnici k_ω.*

Dokaz. Jedno od svojstava Brocardove kružnice k_ω je da je dužina OK promjer Brocardove kružnice. Prema lemi 2.3.10 vrijedi $\angle OB_2K = 90^\circ$ što znači da točka B_2 leži na kružnici k_ω. □

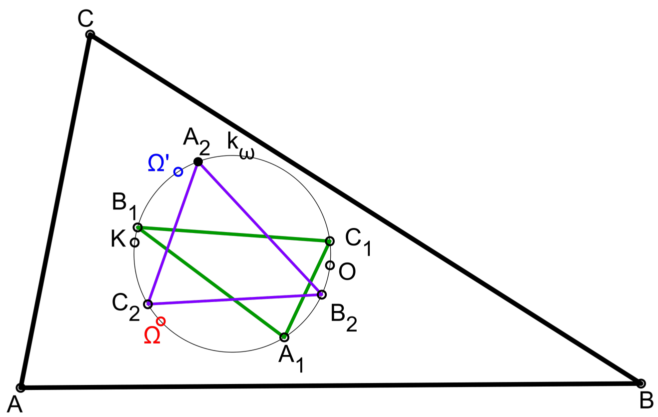
Lema 2.3.12. *Točka B_2 leži na kružnici koja je određena vrhovima A i B i središtem opisane kružnice O.*

Na isti način možemo odrediti i točke A_2 i C_2 za koja vrijede analogna svojstva dana u prethodne četiri leme. Promatrajući te tri točke A_2, B_2 i C_2 s njihovim svojstvima možemo definirati sljedeći pojam.

Definicija 2.3.13. *Drugi Brocardov trokut je trokut $A_2B_2C_2$ pri čemu točke A_2, B_2 i C_2 zadovoljavaju svojstva prethodnih lema.*

Teorem 2.3.14. *Vrhovi drugog Brocardovog trokuta $A_2B_2C_2$ leže na Brocardovoj kružnici.*

Dokaz. Slijedi iz 2.3.12. □



Slika 2.19: Prvi i drugi Brocardov trokut.

Kako svaka simedijana trokuta ABC siječe Brocardovu kružnicu k_ω u Lemoineovoj točki K i u još jednom vrhu trokuta, vrhove drugog Brocardovog trokuta A_2, B_2 i C_2 možemo definirati na sljedeća dva načina:

Definicija 2.3.15. *Vrhovi drugog Brocardovog trokuta A_2, B_2 i C_2 su nožišta okomica spuštenih iz središta opisane kružnice O danog trokuta ABC na simedijane tog trokuta.*

ili

Definicija 2.3.16. *Vrhovi drugog Brocardovog trokuta A_2, B_2 i C_2 su sjecišta Brocardove kružnice k_ω i simedijana danog trokuta.*

Poglavlje 3

Yffove točke

3.1 Yffove točke

Neka su točke A', B' i C' na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ udaljene od vrhova B, C i A za čvrstu udaljenost u. Prema Cevainom teoremu dužine $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ sijeku se u jednoj točki ako i samo ako je

$$\frac{d(A,C')}{d(C',B)} \cdot \frac{d(B,A')}{A',C} \cdot \frac{d(C,B')}{d(B',A)} = 1,$$

tj. ako i samo ako je

$$\frac{u}{c-u} \cdot \frac{u}{a-u} \cdot \frac{u}{b-u} = 1,$$

tj.

$$u^3 = (a-u)(b-u)(c-u).$$

Tu točku nazivamo prvom Yffovom točkom i označavamo $P(3)$.

Ako su A', B' i C' jednako udaljene od C, A i B, tada točku u kojoj se sijeku $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ nazivamo druga Yffova točka. Ove točke je prvi opisao Peter Yff u članku [3]

Broj u je rješenje jednadžbe $x^3 = (a-x)(b-x)(c-x)$ koju zapisujemo i ovako

$$f(x) = 2x^3 - px^2 + qx - r = 0,$$

gdje je

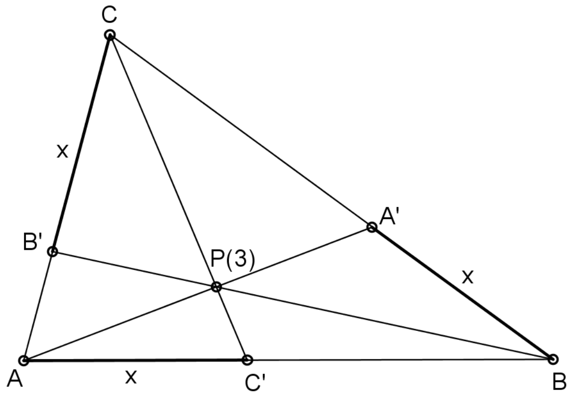
$$p = a + b + c,$$

$$q = ab + ac + bc,$$

$$r = abc.$$

Pokažimo da ova jednadžba ima samo jedno realno rješenje. Očito $f(x) = 0$ nema negativnih rješenja, što znači da se točka nalazi u unutrašnjosti trokuta. Vrijedi

$$a < b + c$$



Slika 3.1: Prva Yffova točka P_3.

$$b < c + a$$
$$c < a + b.$$

Jer su $a, b > 0$ vrijedi

$$a^2 < a(b + c)$$
$$b^2 < b(c + a)$$
$$c^2 < c(a + b).$$

Zbrojimo li te nejednakosti dobivamo

$$a^2 + b^2 + c^2 < a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) = 2(ab + bc + ac) = 2q.$$

Pribrojimo li s obje strane $2q$ dobivamo

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q < 4q,$$

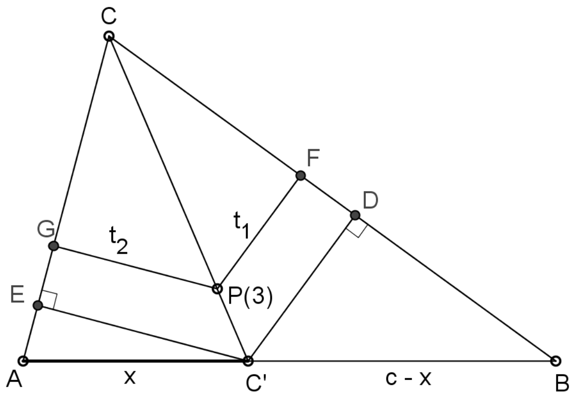
tj.

$$(a + b + c)^2 < 4q$$
$$p^2 < 4q$$
$$p^2 - 4q < 0$$

a tada je i

$$p^2 - 6q < 0.$$

Funkcija f je oblika $f(x) = 2x^3 - px^2 + qx - r$. Prva derivacija od f je $f'(x) = 6x^2 - 2px + q$. Diskriminanta je jednaka $D = 4p^2 - 24q = 4(p^2 - 6q) < 0$. Dakle, $f'(x)$ ima negativnu diskriminantu i $6 > 0$ iz čega slijedi $f'(x) > 0$ za svaki realni broj x. Funkcija f raste za svaki realni broj x, pa samo na jednom mjestu siječe x-os, tj. ima jednu realnu nultočku. Ta realna nultočka naziva se Yffov broj i u ovom radu označavat ćemo je s u.



Slika 3.2: Prva Yffova točka P_3.

Trilinearne koordinate

Izračunajmo trilinearne koordinate $t_1 : t_2 : t_3$ Yffove točke.
Iz trokuta $C'BD$ vrijedi

$$d(C', BC) = (c - x)\sin\beta.$$

Iz trokuta $AC'E$ vrijedi

$$d(C', AC) = x\sin\alpha.$$

Trokuti $C'DC$ i $P(3)FC$ su slični prema K-K teoremu, pa vrijedi

$$\frac{|C'D|}{|P(3)F|} = \frac{|DC|}{|FC|} = \frac{|C'C|}{|P(3)C|}.$$

Na isti način su slični i trokuti $C'EC$ i $P(3)GC$. Vrijedi

$$\frac{|C'E|}{|P(3)G|} = \frac{|EC|}{|GC|} = \frac{|C'C|}{|P(3)C|}.$$

Slijedi

$$t_1 : t_2 = d(C', BC) : d(C', AC) = (c - x)\sin\beta : x\sin\alpha.$$

Primjenom sinusovog poučka na trokut ABC imamo $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$, pa je

$$t_1 : t_2 = (c - x)b : xa = \frac{c - x}{ax} : \frac{1}{b}.$$

Analogno
$$t_2 : t_3 = (a - x)c : xb = \frac{1}{b} : \frac{x}{(a - x)c}.$$
Slijedi
$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{c - x}{ax} : \frac{1}{b} : \frac{x}{(a - x)c}.$$
Za daljnji izračun trilinearnih koordinata Yffove točke potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 3.1.1. *Ako vrijedi*
$$\begin{aligned} t_1 : t_2 : t_3 =& A : B : C \\ t_1 : t_2 : t_3 =& D : E : F \\ t_1 : t_2 : t_3 =& G : H : I \end{aligned}$$
tada
$$t_1 : t_2 : t_3 = \sqrt[3]{ADG} : \sqrt[3]{BEH} : \sqrt[3]{CFI}.$$

Dokaz. Vrijedi $t_1 = kA = lD = mG$ iz čega ako pomnožimo sve jednakosti i izvadimo treći korijen dobivamo
$$t_1 = \sqrt[3]{klm}\sqrt[3]{ADG}.$$
Analogno
$$t_2 = \sqrt[3]{klm}\sqrt[3]{BEH}$$
$$t_3 = \sqrt[3]{klm}\sqrt[3]{CFI}.$$
Dakle,
$$t_1 : t_2 : t_3 = \sqrt[3]{ADG} : \sqrt[3]{BEH} : \sqrt[3]{CFI}.$$
□

Imamo
$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{c - x}{ax} : \frac{1}{b} : \frac{x}{(a - x)c}.$$
Ciklički permutiramo jednom
$$t_2 : t_3 : t_1 = \frac{a - x}{bx} : \frac{1}{c} : \frac{x}{(b - x)a}$$
i drugi put
$$t_3 : t_1 : t_2 = \frac{b - x}{cx} : \frac{1}{a} : \frac{x}{(c - x)b}.$$

Primjenom leme 3.1.1 na

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{c-x}{ax} : \frac{1}{b} : \frac{x}{(a-x)c}$$
$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{x}{(b-x)a} : \frac{a-x}{bx} : \frac{1}{c}$$
$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{a} : \frac{x}{(c-x)b} : \frac{b-x}{cx}$$

dobivamo

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{c-x}{b-x}} : \frac{1}{b}\sqrt[3]{\frac{a-x}{c-x}} : \frac{1}{c}\sqrt[3]{\frac{b-x}{a-x}}$$

što su trilinearne koordinate prve Yffove točke.

3.2 Analogija s Brocardovim točkama

Yffove točke su slične Brocardovim točkama po mnogim svojstvima.

Za Brocardov kut ω vrijedi $\alpha \leq 2\omega$ gdje je α najmanji kut trokuta ABC. Ako postavimo analogiju s Yffovom točkom (kutovi su analogoni stranicama) tada postavljamo hipotezu da je $a \leq 2u$, gdje je $a = min\{a, b, c\}$. Dokažimo tu hipotezu.

Dokaz. Opet promatramo funkciju $f(x) = 2x^3 - px^2 + qx - r$ gdje su $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$ i $r = abc$. Broj u je jedino rješenje jednadžbe $f(x) = 0$ i za brojeve x manje od u je $f(x) < 0$ i to vrijedi samo za takve x. Dakle, dovoljno će biti dokazati da je $f\left(\frac{a}{2}\right) \leq 0$ jer će to značiti da je $x = \frac{a}{2}$ manji od u što trebamo dokazati.

Uzmimo da je $a \leq b \leq c$. Tada je

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{a^3}{8} - p \cdot \frac{a^2}{4} + q \cdot \frac{a}{2} - r = \frac{a^3}{4} - \frac{pa^2}{4} + q\frac{a}{2} - r \\
&= \frac{a^3}{4} - \frac{pa^2}{4} + \frac{qa}{2} - abc = \frac{a}{4}\left[a^2 - pa + 2q - 4bc\right] \\
&= \frac{a}{4}\left[a^2 - (a+b+c)a + 2(ab+ac+bc) - 4bc\right] \\
&= \frac{a}{4}\left[a^2 - a^2 - ab - ac + 2ab + 2ac + 2bc - 4bc\right] \\
&= \frac{a}{4}\left[ab + ac - 2bc\right] \\
&= \frac{a}{4}\left[b(a-c) + c(a-b)\right].
\end{aligned}$$

Budući da je $a \leq b$ i $a \leq c$ slijedi da je $a - b \leq 0$ i $a - c \leq 0$, pa je $f\left(\frac{a}{2}\right) \leq 0$ što smo i trebali dokazati jer sad iz toga slijedi da je $\frac{a}{2} \leq u$. □

Za Brocardov kut ω vrijedi $\omega \leq \frac{\pi}{6}$, što možemo zapisati ovako:

$$\omega \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}.$$

Ako postavimo analogiju sa Yffovom točkom (kutovi su analogoni stranicama) tada imamo ovu hipotezu:

$$u \leq \frac{a+b+c}{6}.$$

Dokažimo ju.
Opet promatramo funkciju $f(x) = 2x^3 - px^2 + qx - r$, gdje su p, q i r definirani ovako: $p = a+b+c$, $q = ab+ac+bc$ i $r = abc$. Broj u je jedino realno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$ i za svaki (i samo za takve) x veći od u je $f(x) > 0$. Ako dokažemo da je $f\left(\frac{p}{6}\right)$ pozitivan broj to će značiti da je broj $\frac{p}{6}$ veći od u, tj. $u \leq \frac{p}{6}$, a to upravo trebamo dokazati.
Dakle, dokazujemo da je $f\left(\frac{p}{6}\right) \geq 0$. Uvrstimo $x = \frac{p}{6}$ u izraz za f:

$$f\left(\frac{p}{6}\right) = 2 \cdot \frac{p^3}{6^3} - p \cdot \frac{p^2}{36} + q \cdot \frac{p}{6} - r = \frac{-1}{54}p^3 + \frac{qp}{6} - r,$$

tj.

$$f\left(\frac{a+b+c}{6}\right) = \frac{-1}{54}(a+b+c)^3 + \frac{(ab+bc+ac)(a+b+c)}{6} - abc,$$

tj.

$$f\left(\frac{a+b+c}{6}\right) = \frac{1}{54}\left(-(a+b+c)^3 + 9(ab+bc+ac)(a+b+c) - 54abc\right).$$

Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $a \leq b \leq c$ i uvedimo oznake:

$$\begin{aligned} x =& b - a \geq 0 \\ y =& c - a \geq 0 \\ y - x =& m \geq 0. \end{aligned}$$

Izrazimo funkciju f pomoću x, y i m. Elementarni račun nam daje ovo: $b = a+x$, $c = a+y$ i

$$\begin{aligned} f(x,y,a) =& \frac{1}{54}\left(-(x+y+3a)^3 + 9(xy+2ax+2ay+3a^2)(x+y+3a) - 54a(a+y)(a+x)\right) \\ =& \frac{1}{54}(-x^3 + 3x^2(2y+3a) + 3xy(2y-3a) - y^2(y-9a)). \end{aligned}$$

Ako još uvrstimo $y = x+m$ dobivamo

$$f(x,m,a) = \frac{1}{54}(10x^3 + 3(3a+5m)x^2 + 3(3a+m)mx + (9a-m)m^2).$$

Iz nejednakosti trokuta $c < a + b$ imamo

$$y + a < a + (x + a),$$

$$y < x + a,$$

$$y - x < a.$$

Dakle, $m < a$, pa je i $9a - m < 0$. Svi ostali pribrojnici u f su nenegativni pa je $f\left(\frac{p}{6}\right)$ nenegativan broj odakle slijedi da je $u \leq \frac{p}{6}$ što smo i trebali dokazati.

Bibliografija

[1] C. Kimberling, Encyclopedia of triangle centers - ETC, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html (lipanj, 2015.)

[2] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[3] P. Yff, *An Analog of the Brocard Points*, American Mathematical Monthly 70 (1963) 495-501.

[4] Wolfram MathWorld, http://mathworld.wolfram.com/ (lipanj, 2015.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavani su bicentrički parovi točaka trokuta. Listu, koja trenutno sadrži 119 bicentričkih parova, navodi Clark Kimberling.

U prvom dijelu rada definirane su trilinearne i baricentričke koordinate, centar trokuta i bicentrički parovi točaka trokuta. Dana je poveznica između trilinearnih i baricentričkih, kao i trilinearnih i Kartezijevih koordinata. Navedeni su najpoznatiji centri trokuta i njihove trilinearne koordinate te nekoliko bicentričkih parova točaka trokuta.

Središnji dio rada čine definicije, teoremi i dokazi vezani uz najpoznatiji bicentrički par točaka trokuta, prvu i drugu Brocardovu točku. Izvedene su trilinearne koordinate Brocardovih točaka i dana neka svojstva Brocardovog kuta. Navedene su definicije i teoremi vezani uz Brocardovu kružnicu te prvi i drugi Brocardov trokut.

U završnom dijelu rada obrađen je još jedan poznatiji bicentrički par točaka, Yffove točke i neka njihova svojstva.

Summary

In this master's thesis bicentric pairs of triangle points have been analysed. A table which currently contains 119 bicentric pairs is guided by Clark Kimberling.

In the first part of the thesis, trilinear and barycentric coordinates, center of triangle, bicentric pairs of points have been defined. Connections between trilinear and barycentric as well as trilinear and Cartesian coordinates have been given. Best known centers of triangle and their trilinear coordinates and some bicentric pairs of triangle points are given.

Central part of the thesis contains definitions, theorems, and proofs linked to the best known bicentric pair of triangle points as well as the first and the second Brocard points. Trilinear coordinates of the Brocard points are derived and some characteristics are given to the Brocard angle. Definitions and theorems connected to the Brocard circle as well as the first and the second Brocard triangle are given.

In the closing part ot this thesis we describe another bicentric pair of points, the so-called Yff's points and prove some of its properties.

Životopis

Rođena sam 13. lipnja 1990. godine u Varaždinu. Godine 1997. započinjem osnovnoškolsko obrazovanje u Osnovnoj školi Svibovec u Svibovcu nedaleko Varaždinskih Toplica. Godine 2005. upisujem Prvu gimnaziju Varaždin, opći smjer, u Varaždinu gdje sam 2009. godine maturirala s odličnim uspjehom. Iste godine upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet, Matematički odsjek u Zagrebu. Godine 2013. završavam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički i upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički.