Konvergencija cikličke Jacobijeve metode za hermitsku matricu reda 4

Valentić, Grgur

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Grgur Valentić

Konvergencija cikličke Jacobijeve metode za hermitsku matricu reda 4

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Vjeran Hari

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ________________________________ , predsjednik

2. ________________________________ , član

3. ________________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ________________________________

2. ________________________________

3. ________________________________

Sadržaj

Uvod

Jacobijeva metoda je iterativna metoda koja transformacijama sličnosti s ravninskim rotacijama danu hermitsku matricu postepeno svodi na dijagonalni oblik. Cilj ovog rada je pokazati globalnu konvergenciju Jacobijeve metode za proizvoljnu cikličku strategiju za u slučaju kad je red matrice $n = 4$. Ako je matrica reda 4 tada postoji ukupno 6 elemenata u strogo gornjem trokutu matrice, pa stoga ima $6! = 720$ različitih cikličkih pivotnih strategija. U radu će se pokazati da je Jacobijeva metoda pod svakom od tih 720 strategija globalno konvergentna. Kako ne bismo za svaku strategiju morali posebno dokazivati konvergenciju metode, uvode se relacije ekvivalencije na skupu svih cikličkih strategija, te je dovoljno samo za predstavnike klasa pokazati konvergenciju metode. Dokaz konevrgencije svih 720 strategija je glavni sadržaj ovog rada.

Rad je podjeljen u 5 poglavlja. U prvom poglavlju izvodi se algoritam Jacobijeve metode za hermitske matrice proizvoljnog reda n. U drugom poglavlju definiraju se cikličke pivotne strategije i relacije ekvivalencije na skupu tih strategija. Pokazuje se kako konvergencija metode pod nekom strategijom implicira konvergenciju metode pod njoj ekvivalentnom strategijom. To je načinjeno za hermitske matrice reda n. U trećem poglavlju dokazuje se globalna konvergencija metode pod strategijama iz jedne posebne familije $\mathcal{C}_1$, na matricama reda n. U četvrtom poglavlju proučava se jedna konkretna "paralelna" strategija za matrice reda 4, koja ne spada u familiju $\mathcal{C}_1$ i dokazuje se globalna konvergencija za tu strategiju. U petom poglavlju prikazan je dokaz konvergencije metode za proizvoljnu strategiju iz skupa svih 720 cikličkih strategija, na matricama reda 4. Pokazano je da je svaka strategija ekvivalentna nekoj od strategija za koju smo prethodno pokazali konvergenciju. Ovaj dio napravljen je pomoću programa napisanog u jeziku C++ te je na samom kraju priložen kôd koji za svaku strategiju pronalazi njoj ekvivalentnu konvergentu strategiju.

Za kraj, zahvaljujem svojem mentoru, prof. dr. sc. Vjeranu Hariju na poticanju mog interesa za ovu temu, njegovoj upornosti i svakoj pomoći koju mi je pružio za vrijeme pisanja ovog rada.

1 Jacobijeva metoda za hermitske matrice

Jacobijeva metoda je iterativna metoda za dijagonalizaciju hermitske matrice A, odnosno matrice koja zadovoljava uvjet $A = A^*$. Operacija hermitskog adjungiranja jednaka je trasponiranju i konjugiranju, drugim riječima $A^* = \overline{A}^T$. Metoda se temelji na sličnosti s ravninskim rotacijama koje se biraju na način da reduciraju izvandijagonalne elemente matrice u nekoj mjeri s ciljem da matrica postane više dijagonalna. Jedan korak metode za hermitsku matricu A je oblika

$$A^{(k+1)} = U_k^* A^{(k)} U_k, \quad k \geq 0, \quad A^{(0)} = A,$$

gdje su $U_k = R(i(k), j(k), \phi(k), \alpha(k))$ kompleksne ravninske rotacije. Za fiksni k, matrica U_k ima oblik

$$R(i,j,\phi,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \cos\phi & & & -e^{i\alpha}\sin\phi & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & e^{-i\alpha}\sin\phi & & & \cos\phi & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

gdje se četiri elementa koji nisu nule ni jedinice javljaju upravo na presjeku i-tog i j-tog retka s i-tim i j-tim stupcem, a i u eksponentu je $\imath = \sqrt{-1}$. Direktnim računom izlazi da je $U_k^* U_k = I$, odnosno matrica U_k je unitarna. Obzirom da posebno matrica U_k mijenja samo i-tu i j-tu komponentu vektora na kojeg djeluje, ne mijenjaući mu normu, s pravom ju katkad nazivamo ravninskom rotacijom.

Svrha k-tog koraka je učiniti matricu $A^{(k)}$ "više dijagonalnom" nego što je $A^{(k-1)}$. Stoga, uvodimo mjeru za odstupanje matrice od dijagonalne forme s

$$\text{off}(A) = ||A - \text{diag}(A)||_F,$$

gdje je $||\cdot||_F$ Frobeniusova norma, a diag : $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ funckija koja za danu matricu $A = (a_{ij})$ vraća $B = (b_{ij})$, pri čemu je $b_{ij} = 0$ za $i \neq j$, te $b_{ii} = a_{ii}$, za $1 \leq i \leq n$. Kako unitarna sličnost čuva hermitičnost matrice, dovoljno je gledati elemente iz gornjeg trokuta matrice pa kao mjeru odstupanja od dijagonalne forme definiramo

$$S(A) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{off}(A) = \frac{\sqrt{2}}{2}||A - \mathrm{diag}(A)||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|^2}.$$

Funkcija off : $M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ naziva se *izvandijagonalna norma* ili *offnorma* matrice. Ipak, jasno je da ta funckija nije norma jer $\mathrm{off}(A) = 0$ ne povlači nužno $A = 0$. Funkcije off i S će biti norme ukoliko kao domenu uzmemo skup hermitskih matrica koje su nula na dijagonali, odnosno skup

$$\mathcal{H}_0 = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | A = A^*, \mathrm{diag}(A) = 0\}.$$

U k-tom koraku potrebno je izračunati $R(i(k), j(k), \phi(k), \alpha(k))$, matricu rotacije, koja ovisi o *pivotnoj poziciji* $(i(k), j(k))$, te parametrima rotacije $(\phi(k), \alpha(k))$. Prvo ćemo opisati kako odabrati parametre rotacije ϕ i α. Za ilustraciju, pogledajmo kako izgleda jedan korak Jacobijevog algoritma za hermitsku matricu reda dva. Promatrane matrice su

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \cos\phi & -e^{i\alpha}\sin\phi \\ e^{-i\alpha}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix},$$

pri čemu je $a_{21} = \overline{a_{12}}$, $a'_{21} = \overline{a'_{12}}$. Vrijedi $A' = U^*AU$, odnosno

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -e^{i\alpha}\sin\phi \\ e^{-i\alpha}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -e^{i\alpha}\sin\phi \\ e^{-i\alpha}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Najveća redukcija izvandijagonalne norme dobit će se za $a'_{12} = a'_{21} = 0$. Nakon množenja gornje jednakosti slijeva s U, zbog $UU^* = I$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -e^{i\alpha}\sin\phi \\ e^{-i\alpha}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -e^{i\alpha}\sin\phi \\ e^{-i\alpha}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a'_{11}\cos\phi & -a'_{22}e^{i\alpha}\sin\phi \\ a'_{11}e^{-i\alpha}\sin\phi & a'_{22}\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\cos\phi + a_{12}e^{-i\alpha}\sin\phi & -a_{11}e^{i\alpha}\sin\phi + a_{12}\cos\phi \\ a_{21}\cos\phi + a_{22}e^{-i\alpha}\sin\phi & -a_{21}e^{i\alpha}\sin\phi + a_{22}\cos\phi \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanje elemenata na pozicijama $(1,1)$ i $(2,2)$ daje

$$a'_{11}\cos\phi = a_{11}\cos\phi + a_{12}e^{-i\alpha}\sin\phi,$$

$$a'_{22} \cos\phi = -a_{21} e^{i\alpha} \sin\phi + a_{22} \cos\phi$$

odnosno, nakon dijeljenja s $\cos\phi$,

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} + a_{12} e^{-i\alpha} \operatorname{tg}\phi, \\ a'_{22} &= a_{22} - a_{21} e^{i\alpha} \operatorname{tg}\phi. \end{aligned}$$

Kako bismo odredili α, sjetimo se da transformacije unitarne sličnosti čuvaju trag matrice. To je jednostavna posljedica toga što je za kvadratne matrice istog reda A i B, $\operatorname{trag}(AB) = \operatorname{trag}(BA)$, pa dobivamo da je trag ciklički invarijantan, što u našem slučaju daje $\operatorname{trag}(U^*AU) = \operatorname{trag}(AUU^*) = \operatorname{trag}(A)$. Ako je $a_{12} = 0$, ne možemo postići redukciju izvandijagonalne norme, pa u tom slučaju definiramo $\phi = \alpha = 0$, odnosno $U = I$. Dalje radimo pod pretpostavkom $a_{12} \neq 0$ pa dobivamo

$$a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{12} e^{-i\alpha} \operatorname{tg}\phi + a_{22} - a_{21} e^{i\alpha} \operatorname{tg}\phi,$$

odnosno, nakon kraćenja $a_{11} + a_{22}$, uz pretpostavku $\operatorname{tg}\phi \neq 0$,

$$a_{12} e^{-i\alpha} = a_{21} e^{i\alpha}.$$

Neka je $a_{12} = |a_{12}| e^{i\alpha_{12}}$. Tad je, zbog toga što je matrica A hermitska, $a_{21} = \overline{a_{12}} = |a_{12}| e^{-i\alpha_{12}}$, pa je

$$e^{2i(\alpha_{12} - \alpha)} = 1,$$

što daje

$$\alpha = \alpha_{12} = \arg(a_{12}).$$

Pokazat će se uskoro da je uvjet $\operatorname{tg}\phi \neq 0$ ekvivalentan uvjetu $a_{12} \neq 0$, pa pretpostavka $\operatorname{tg}\phi \neq 0$ nije smanjenje općenitosti, jer u suprotnom rotaciju uopće ne radimo. Također, mogli smo odabrati i $\alpha = \alpha_{12} + \pi$, ali ovaj izbor je prirodniji. Preostaje odrediti ϕ. Vratimo se u početnu jednadžbu i postavimo formulu za a'_{12}. Imajući na umu $a_{21} = \overline{a_{12}} = a_{12} e^{-2i\alpha}$, vrijedi

$$\begin{aligned} a'_{12} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & e^{i\alpha} \sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{i\alpha} \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= -a_{11} e^{i\alpha} \sin\phi \cos\phi - a_{21} e^{2i\alpha} \sin^2\phi + a_{12} \cos^2\phi + a_{22} e^{i\alpha} \sin\phi \cos\phi \\ &= e^{i\alpha} (\sin\phi \cos\phi (a_{22} - a_{11}) + a_{12} e^{-i\alpha} (\cos^2\phi - \sin^2\phi)) \\ &= e^{i\alpha} (\frac{1}{2} \sin(2\phi)(a_{22} - a_{11}) + a_{12} e^{-i\alpha} \cos(2\phi)). \end{aligned}$$

Obzirom da je $\alpha = \arg(a_{12})$ i da zahtijevamo $a'_{12} = 0$, imamo

$$\frac{1}{2} \sin(2\phi)(a_{11} - a_{22}) = a_{12} e^{-i\alpha} \cos(2\phi) = |a_{12}| \cos(2\phi),$$

pa je

$$\operatorname{tg}(2\phi) = \frac{2|a_{12}|}{a_{11} - a_{22}}.$$

Ukoliko je $a_{11} = a_{22}$, ovaj izraz treba uzeti formalno, odnosno možemo uzeti ili $\phi = \frac{\pi}{4}$ ili $\phi = -\frac{\pi}{4}$, pa zbog konzistencije s formulama uzimamo pozitivan kut, kao što ćemo uskoro vidjeti.

Ovime smo dobili formulu za $\operatorname{tg}(2\phi)$, no postavlja se pitanje kako na jednostavan i numerički točan način odrediti $\sin\phi$ i $\cos\phi$, koji će nam kasnije biti potrebni. U tu svrhu, označimo

$$t = \operatorname{tg}\phi, \quad \lambda = 2|a_{12}|\operatorname{sign}(a_{11} - a_{22}), \quad \mu = |a_{11} - a_{22}|,$$

te iskoristimo formulu za tangens dvostrukog kuta, $\operatorname{tg}(2\phi) = \frac{2t}{1-t^2}$. Dobivamo

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\lambda}{\mu},$$

odnosno, nakon sređivanja

$$\lambda t^2 + 2\mu t - \lambda = 0,$$

s rješenjima

$$t_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}{\lambda}.$$

Kut rotacije ϕ biramo iz intervala $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ tako da t i $\operatorname{tg}(2\phi)$ imaju isti predznak. Odnosno, kako je μ nenegativan, t i λ imaju isti predznak. Stoga dobivamo

$$t = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}{\lambda}.$$

Za mali λ ovaj izraz postaje numerički nestabilan zbog kraćenja u brojniku. Numerički stabilna formula dobije se nakon množenja brojnika i nazivnika izrazom $\mu + \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$. Tako dolazimo do formule

$$t = \frac{\lambda}{\mu + \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}.$$

Slučaj $a_{11} = a_{22}$ vodi na $\mu = 0$, pa je $t = 1$, odnosno $\phi = \frac{\pi}{4}$. Do sinusa i kosinusa sada se dolazi jednostavnim trigonometrijskim formulama

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin\phi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = t\cos\phi.$$

Promotrimo sada hermitsku matricu A općeg reda n i fiksni par indeksa (i,j) na kojem radimo korak Jacobijeve metode s matricom rotacije $U = R(i,j,\phi,\alpha)$. Analogno kao u slučaju matrica reda dva, dobije se

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_{ij} = \arg(a_{ij}),\\
\operatorname{tg}(2\phi) &= \frac{2|a_{ij}|}{a_{ii} - a_{jj}},\\
a'_{ii} &= a_{ii} + |a_{ij}| \operatorname{tg}\phi,\\
a'_{jj} &= a_{jj} - |a_{21}| \operatorname{tg}\phi,\\
a'_{ij} &= 0,\\
a'_{ji} &= 0.
\end{aligned}$$

Direktan račun daje da se elementi izvan i-tog i j-tog retka i stupca ne mijenjanju, odnosno vrijedi

$$a'_{ts} = a_{ts}, \quad t \neq i,j, \quad s \neq i,j,$$

dok se elementi i-tog i j-tog stupca i retka mijenjaju po pravilima

$$\begin{aligned}
a'_{it} &= a_{it}\cos\phi + a_{jt}e^{i\alpha}\sin\phi, \quad t \neq i,j,\\
a'_{jt} &= -a_{it}e^{-i\alpha}\sin\phi + a_{jt}\cos\phi, \quad t \neq i,j,\\
a'_{ti} &= a_{ti}\cos\phi + a_{tj}e^{-i\alpha}\sin\phi, \quad t \neq i,j,\\
a'_{tj} &= -a_{ti}e^{i\alpha}\sin\phi + a_{tj}\cos\phi, \quad t \neq i,j,
\end{aligned}$$

pa vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
|a'_{it}|^2 + |a'_{jt}|^2 =& |a_{it}|^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + |a_{jt}|^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) +\\
& \cos\phi\sin\phi(a_{it}\overline{a_{jt}}e^{i\alpha} + \overline{a_{it}}a_{jt}e^{-i\alpha} - a_{it}\overline{a_{jt}}e^{i\alpha} - \overline{a_{it}}a_{jt}e^{-i\alpha})\\
=& |a_{it}|^2 + |a_{jt}|^2, \quad t \neq i,j.
\end{aligned}$$

Slično dobivamo i

$$|a'_{ti}|^2 + |a'_{tj}|^2 = |a_{ti}|^2 + |a_{tj}|^2, \quad t \neq i,j.$$

Drugim riječima, promjene na pozicijama različitim od (i,j) i (j,i) uopće ne mijenjanju izvandijagonalnu normu. Stoga dobivamo da se najveća redukcija izvandijagonalne norme dobiva za $a'_{ij} = a'_{ji} = 0$, te vrijedi

$$S(A')^2 = S(A)^2 - |a_{ij}|^2.$$

Tako dolazimo do algoritma za jedan korak Jacobijeve metode na hermitskoj matrici A reda n. Algoritam koristi činjenicu da je A hermitska, pa je dovoljno promatrati samo transormacije na elementima gornjeg trokuta.

Algoritam 1 Jedan korak Jacobijevog algoritma. Pivotni par je (i, j).

if $a_{ij} \neq 0$ **then**
  $\lambda = 2|a_{ij}| \operatorname{sign}(a_{ii} - a_{jj})$
  $\mu = |a_{ii} - a_{jj}|$
  $\nu = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$
  $t = \frac{\lambda}{\mu + \nu}$
  $c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
  $s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
  $a_{ii} = a_{ii} + t|a_{ij}|$
  $a_{jj} = a_{jj} - t|a_{ij}|$
  $a_{ij} = 0$
  $a_{ji} = 0$
  $s^+ = e^{i\alpha} s$
  $s^- = e^{-i\alpha} s$
  for $r = 1, \ldots, i-1$ **do**
    $x = ca_{ri} + s^- a_{rj}$
    $a_{rj} = -s^+ a_{ri} + ca_{rj}$
    $a_{ri} = x$
  for $r = i+1, \ldots, j-1$ **do**
    $x = ca_{ir} + s^+ \overline{a_{rj}}$
    $a_{rj} = -s^+ \overline{a_{ir}} + ca_{rj}$
    $a_{ir} = x$
  for $r = j+1, \ldots, n$ **do**
    $x = ca_{ir} + s^+ a_{jr}$
    $a_{jr} = -s^- a_{ir} + ca_{jr}$
    $a_{ir} = x$

Iz gornjeg algoritma vidimo da nije svejedno kako biramo pivotne elemente (i, j) jer matrica $A^{(k+1)}$ ovisi o tome koji je element poništen u k-tom koraku. Stoga je redoslijed izbora pivotnih parova važan dio Jacobijeve metode. Više o pravilu izbora pivotne pozicije (i, j) reći ćemo u sljedećem odjeljku.

2 Pivotne strategije

Definicija 2.1. *Pravilo izbora pivotnih parova $(i(k), j(k))$ u ovisnosti o koraku k naziva se pivotna strategija. Pivotna strategija je svaka funkcija*

$$I : \mathbb{N}_0 \to \boldsymbol{P}_n,$$

gdje je $\boldsymbol{P}_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Povijesno gledano, važna je *klasična pivotna strategija* koju je koristio i sam Jacobi, kako je opisano u [6]. To je strategija koja u k-tom koraku poništava onaj izvandijagonalni element matrice $A^{(k)}$ koji je najveći po apsolutnoj vrijednosti, odnosno bira par (i,j) za koji je

$$|a_{ij}^{(k)}| = \max_{p<q} |a_{pq}^{(k)}|, \quad k \geq 0.$$

Jasno je da je ova metoda daje konvergenciju niza $S(A^{(k)})$ nuli. Označimo li $N = \frac{n(n-1)}{2}$, broj elemenata strogo gornjeg trokuta, jasno je da je $S^2(A^{(k+1)}) \leq \frac{N-1}{N} S^2(A^{(k)}), k \geq 0$, upravo zato jer poništavamo element najveći po apsolutnoj vrijednosti. Problem ove metode je što mora pretražiti svih N elemenata gornjeg trokuta kako bi ustanovila koji je najveći element, a to može biti presporo za matrice velikog reda pa se u praksi ne koristi.

Definicija 2.2. *Neka je I pivotna strategija. Ako za neki $T \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$I(k+T) = I(k), \quad k \geq 0,$$

onda se T naziva period, a I periodička pivotna strategija. Ako je još $T = N = \frac{n(n-1)}{2}$, te $\{I(k) \in \boldsymbol{P}_n \mid 1 \leq k \leq T\} = \boldsymbol{P}_n$, strategiju I nazivamo cikličkom.

U ovom radu proučavamo samo cikličke periodičke pivotne strategije, te ćemo u buduće cikličnost i periodičnost podrazumijevati, te ćemo reći naprosto strategija. Također, n će redovito biti red matrice, a $N = \frac{n(n-1)}{2}$ duljina ciklusa, odnosno broj elemenata gornjeg trokuta matrice.

Cikličke strategije su u prirodnoj bijekciji s *cikličkim nizovima*, odnosno permutacijama skupa $\mathbf{P}_n$ kojeg ćemo označavati s $\mathcal{O}(\mathbf{P}_n)$. Nadalje, ciklički nizovi su u prirodnoj bijekciji sa simetričnim matricama $M_{\mathcal{O}} \in M_n(\mathbb{Z})$, $M_{\mathcal{O}} = M_{\mathcal{O}}^T$ kojima na izvandijagonalnim mjestima pišu u nekom poretku svi cijeli brojevi od 0 do $N-1$, a na dijagonali brojevi -1. Za sva razmatranja ćemo matrice $M_{\mathcal{O}}$ zapisivati sa znakom $*$ na dijagonali da ilustriramo kako nije bitno što tamo piše -1.

Umjesto formalnog dokaza bijekcije ovih triju objekata, najjednostavnije i najpoučnije bit će pogledati jedan primjer.

Primjer 2.3. *Za $n = 4$ i ciklički niz*

$$\mathcal{O} = (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),$$

odgovarajuća strategija $I_{\mathcal{O}}$ dana je s

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{O}}(6k) =& (1,2), \quad k \geq 0, \\ I_{\mathcal{O}}(6k+1) =& (1,3), \quad k \geq 0, \\ I_{\mathcal{O}}(6k+2) =& (1,4), \quad k \geq 0, \\ I_{\mathcal{O}}(6k+3) =& (2,3), \quad k \geq 0, \\ I_{\mathcal{O}}(6k+4) =& (2,4), \quad k \geq 0, \\ I_{\mathcal{O}}(6k+5) =& (3,4), \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

a odgovarajuća matrica

$$M_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} * & 0 & 1 & 2 \\ 0 & * & 3 & 4 \\ 1 & 3 & * & 5 \\ 2 & 4 & 5 & * \end{bmatrix}.$$

Često ćemo ove pojmove slobodno zamijenjivati te ćemo neke nove pojmove koje ćemo vrlo brzo definirati za cikličke nizove automatski prebacivati na cikličke strategije i obratno.

Ovo je konkretno bio primjer *strategije po redcima.* Strategija koja često dolazi u paru s njom je *strategija po stupcima* dana matricom

$$M_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} * & 0 & 1 & 3 \\ 0 & * & 2 & 4 \\ 1 & 2 & * & 5 \\ 3 & 4 & 5 & * \end{bmatrix}.$$

Ove dvije strategije su jedne od najranije promatranih nakon klasične Jacobijeve metode. Prirodno se proširuju na matricu proizvoljnog reda n, a dokaz konvergencije dan je u [5]. Mi još nismo ni definirali značenje konvergentnosti strategije, a dokaz konvergencije ove dvije metode dat ćemo u narednim poglavljima.

Cilj radnje će biti pokazati konvergenciju Jacobijeve metode za određene strategije. Kako ne bismo morali za svaku strategiju posebno pokazivati, logično je definirati neke ekvivalencije na skupu strategija te pokazati da ako jedna od ekvivalentnih strategija konvergira, da tada konvergira i druga. To motivira sljedeće definicije.

Definicija 2.4. Dopuštena transpozicija *na nizu* $\mathcal{O} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{P}_n)$ *je svaka transpozicija dva susjedna člana*

$$(i_r, j_r) \leftrightarrow (i_{r+1}, j_{r+1}),$$

uz uvjet da su skupovi $\{i_r, j_r\}$ *i* $\{i_{r+1}, j_{r+1}\}$ *disjunktni. Za takve parove* (i_r, j_r) *i* (i_{r+1}, j_{r+1}) *kažemo da su* disjunktni *ili da* komutiraju.

Definicija 2.5. *Dva niza* $\mathcal{O}$ *i* $\mathcal{O}'$ *iz* $\mathcal{O}(\boldsymbol{P}_n)$ *su*

(i) ekvivalentna ako se jedan može dobiti iz drugog konačnim nizom dopuštenih transpozicija. U tom slučaju pišemo $\mathcal{O} \sim \mathcal{O}'$.

(ii) šift-ekvivalentna ako je $\mathcal{O} = [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ *i* $\mathcal{O}' = [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1]$, *gdje* [,] *označava konkatenaciju nizova. U tom slučaju pišemo* $\mathcal{O} \overset{s}{\sim} \mathcal{O}'$, *a duljinu niza* $\mathcal{O}_2$ *zovemo duljinom šifta.*

(iii) slabo ekvivalentna ako postoji umetnuti niz $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r = \mathcal{O}'$ *takav da je* $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}(\boldsymbol{P}_n)$ *za* $0 \le i \le r$, *te su* $\mathcal{O}_i$ *i* $\mathcal{O}_{i+1}$ *ekvivalentni ili šift-ekvivalentni za* $0 \le i \le r-1$. *U tom slučaju pišemo* $\mathcal{O} \overset{w}{\sim} \mathcal{O}'$.

(iv) permutacijski ekvivalentna, ako postoji matrica permutacije P *takva da je* $M_{\mathcal{O}'} = P^T M_{\mathcal{O}} P$. *U tom slučaju pišemo* $\mathcal{O} \overset{p}{\sim} \mathcal{O}'$.

Primjer 2.6. *Za* $\mathcal{O}, \mathcal{O}_e, \mathcal{O}_s, \mathcal{O}_p \in \mathcal{O}(\boldsymbol{P}_4)$, *dane sa*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= (1,2), (1,4), (1,3), (2,4), (3,4), (2,3), \\
\mathcal{O}_e &= (1,2), (1,4), (2,4), (1,3), (3,4), (2,3), \\
\mathcal{O}_s &= (1,3), (2,4), (3,4), (2,3), (1,2), (1,4), \\
\mathcal{O}_p &= (1,4), (3,4), (2,4), (1,3), (2,3), (1,2),
\end{aligned}$$

pripadne matrice su

$$M_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} * & 0 & 2 & 1 \\ 0 & * & 5 & 3 \\ 2 & 5 & * & 4 \\ 1 & 3 & 4 & * \end{bmatrix}, \qquad M_{\mathcal{O}_e} = \begin{bmatrix} * & 0 & 3 & 1 \\ 0 & * & 5 & 2 \\ 3 & 5 & * & 4 \\ 1 & 2 & 4 & * \end{bmatrix},$$

$$M_{\mathcal{O}_s} = \begin{bmatrix} * & 4 & 0 & 5 \\ 4 & * & 3 & 1 \\ 0 & 3 & * & 2 \\ 5 & 1 & 2 & * \end{bmatrix}, \qquad M_{\mathcal{O}_p} = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 0 \\ 5 & * & 4 & 2 \\ 3 & 4 & * & 1 \\ 0 & 2 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $\mathcal{O} \sim \mathcal{O}_e$, *uz zamjenu pozicija* $(1,3)$ *i* $(2,4)$. *Nadalje,* $\mathcal{O} \overset{s}{\sim} \mathcal{O}_s$ *uz šift* 4 *te* $\mathcal{O} \overset{p}{\sim} \mathcal{O}_p$ *jer* $M_{\mathcal{O}_p} = P^T M_{\mathcal{O}} P$ *za matricu*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz definicije ja jasno da su $\sim$, $\overset{s}{\sim}$, $\overset{w}{\sim}$ i $\overset{p}{\sim}$ relacije ekvivalencije na $\mathcal{O}(\mathbf{P}_n)$. Također, ako je $\mathcal{O} \overset{w}{\sim} \mathcal{O}'$ onda posebno postoji umetnuti niz $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r = \mathcal{O}'$ takav da je ili $\mathcal{O}_0 \sim \mathcal{O}_1 \overset{s}{\sim} \mathcal{O}_2 \sim \mathcal{O}_3 \overset{s}{\sim} \mathcal{O}_4 \ldots$ ili $\mathcal{O}_0 \overset{s}{\sim} \mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2 \overset{s}{\sim} \mathcal{O}_3 \sim \mathcal{O}_4 \ldots$ Jer, ako bi tri ili više nizova bila povezana istom relacijom $\sim$ ili $\overset{s}{\sim}$, zbog tranzitivnosti relacija bismo mogli ispustiti sve međučlanove.

Pokazat će se da Jacobijeva metoda pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$ konvergenta ako i samo ako je konvergenta za bilo koju strategiju $I'_{\mathcal{O}}$ slabo ili permutacijski ekvivalentu strategiji $\mathcal{O}$. To će nam biti od velike pomoći za dokaz konvergencija svih strategija na matricama reda četiri, jer ćemo samo za neke predstavnike svake klase morati pokazati konvergenciju. Za to, moramo prvo definirati konvergenciju.

Definicija 2.7. *Jacobijeva metoda pod strategijom* $I_{\mathcal{O}}$ *konvergira za hermitsku matricu* A *ako niz matrica*

$$A = A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$$

generiran tom metodom konvergira prema dijagonalnoj matrici Λ. *Jacobijeva metoda konvergira globalno ako konvergira za svaku polaznu hermitsku matricu* A.

Često ćemo ispuštati prilog *globalno*, te ćemo pod konvergencijom Jacobijeve metode pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$ podrazumijevati globalnu konvergenciju. Također, nekad ćemo reći naprosto konvergentna strategija, pri tome misleći na to kako je Jacobijeva metoda pod tom strategijom konvergentna.

Za pretpostaviti je da ako niz izvandijagonalnih normi $S(A^{(k)})$ teži k nuli, da u tom slučaju niz $A^{(k)}$ teži prema dijagonalnoj matrici Λ. To ipak nije sasvim trivijalno, jer konvergencija niza matrica znači konvergenciju po komponentama, a nije a priori jasno da u nizu $A^{(k)}$ dijagonalni elementi neće međusobno zamjenjivati mjesta. Da tome ipak nije tako, reći će nam propozicija koju ćemo dokazati nakon pomoćnog teorema.

Teorem 2.8. (Geršgorin). *Neka je* A *matrica reda* n *i neka je* R_i *suma apsolutnih vrijednosti izvandijagonalnih elemenata u* i*-tom retku,*

$$R_i(A) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots n,$$

tada se svojstvene vrijednosti matrice A nalaze u uniji krugova $\cup_{i=1}^n K_i$, gdje je K_i i-ti Geršgorinov krug definiran s

$$K_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| < R_i(A)\}, \quad i = 1, \ldots n.$$

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A. Tada je $Ax = \lambda x$, za neki $x \neq 0$. Neka je

$$|x_i| = \max\{|x_j| \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

Vrijedi $|x_i| > 0$, jer bi u suprotnom bilo $x = 0$. Na i-toj komponenti jednadžbe $Ax = \lambda x$ imamo

$$\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j = \lambda x_i.$$

Iz ovoga lako izlazi

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i.$$

Uzimajući apsolutnu vrijednost i nakon djeljenja s $|x_i| > 0$ imamo

$$|\lambda - a_{ii}| = \frac{1}{|x_i|} |\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j|.$$

Primjenjujući nejednakost trokuta na sumu i činjenicu $|x_i| \geq |x_j|$, $1 \leq j \leq n$, imamo

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \frac{|x_i|}{|x_j|} \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = R_i(A).$$

Drugim riječima, $\lambda \in K_i$, pa je zbog proizvoljnosti svojstvene vrijednosti λ teorem dokazan. □

Propozicija 2.9. *Neka je $A = A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ niz matrica generiran Jacobijevom metodom. Ako*

$$S(A^{(k)}) \to 0, \quad \textit{kada } k \to \infty,$$

tada i

$$A^{(k)} \to \Lambda, \quad \textit{kada } k \to \infty,$$

gdje je Λ dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima na dijagonali.

Dokaz. Neka su $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$, svojstvene vrijednosti matrice A, ne nužno različite. Neka je

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \min_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j|$$

Obzirom da $S(A^{(k)}) \to 0$, vrijedi $R_i(A^{(k)}) \to 0, 1 \leq i \leq n$. Posebno to znači da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ vrijedi $R_i(A^{(k)}) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$. Označimo elemente matrice $A^{(k)}$ s $(a_{rs}^{(k)})$. Prema Geršgorinovom teoremu je zato, za neki fiksni $k \geq k_0$

$$|\lambda_i^{(k)} - a_{ii}^{(k)}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

za neki poredak svojstvenih vrijedonsti $\lambda_i^{(k)}$, ovisan o k.

Sjetimo se sada izraza za nove dijagonalne elemente u Jacobijevoj metodi, s pivotnim parom (s, t),

$$\begin{aligned} a_{ss}^{(k+1)} &= a_{ss}^{(k)} + |a_{st}^{(k)}| \operatorname{tg} \phi_k, \\ a_{tt}^{(k+1)} &= a_{tt}^{(k)} - |a_{ts}^{(k)}| \operatorname{tg} \phi_k, \end{aligned}$$

gdje je ϕ_k parametar rotacije. Obzirom da je $\phi_k \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, vrijedi $|\operatorname{tg} \phi_k| \leq 1$, pa dobivamo

$$\max\{|a_{ss}^{(k+1)} - a_{ss}^{(k)}|, |a_{tt}^{(k+1)} - a_{tt}^{(k)}|\} \leq |a_{st}^{(k)}| \leq R_s(A^{(k)}) < \varepsilon.$$

Iz ovoga izlazi

$$|\lambda_s^{(k)} - a_{ss}^{(k+1)}| \leq |\lambda_s^{(k)} - a_{ss}^{(k)}| + |a_{ss}^{(k)} - a_{ss}^{(k+1)}| < 2\varepsilon,$$

S druge strane, ponovo po Geršgorinovom teoremu vrijedi

$$|\lambda_i^{(k+1)} - a_{ii}^{(k+1)}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

za neki poredak svojstvenih vrijedonsti $\lambda_i^{(k+1)}$, ovisan o $k+1$. Zbrajajući predposljednju ocjenu s posljednjom za $i = s$ i primjenjujući nejednakost trokuta imamo

$$|\lambda_s^{(k)} - \lambda_s^{(k+1)}| < 3\varepsilon,$$

pa je po definiciji broja ε, $\lambda_s^{(k)} = \lambda_s^{(k+1)}$. Isto naravno isto vrijedi i za dijagonalni element na t-toj poziciji, odnosno $\lambda_t^{(k)} = \lambda_t^{(k+1)}$. Kako su ostali dijagonalni elementi netaknuti zaključujemo da se poredak svojstvenih vrijednosti nakon k_0 ne mijenja. Zato vrijedi

$$|\lambda_i^{(k_0)} - a_{ii}^{(k)}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

za proizvoljan $k \geq k_0$. Obzirom da radijusi Geršgorinovih krugova teže k nuli sad zaključujemo da

$$a_{ii}^{(k)} \to \lambda_i^{(k_0)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

pa time i $A^{(k)} \to \Lambda$ čime je dokaz gotov. $\square$

Sada je lako dobiti i svojstvene vektore matrice A. Ako smo nakon provedenih m koraka Jacobijeve metode dobili matricu $\widetilde{\Lambda}$ "dovoljno blizu" dijagonalne koristeći matrice rotacije $U_1, \ldots, U_m$, definiramo $U = U_1 \ldots U_m$, pa stoga vrijedi

$$\widetilde{\Lambda} = U^* A U,$$

odnosno

$$AU = U\widetilde{\Lambda}.$$

Sad je jasno da ako danu jednakost pomnožimo zdesna s kanonskim vektorima e_i, da su upravo stupci matrice U aproksimacije svojstvenih vektora matrice A.

Zbog dokazanog, u ovom radu ćemo konvergenciju Jacobijeve metode pod danom strategijom promatrati kroz konvergenciju izvandijagonalne norme $S(A^{(k)})$. Idealno bi bilo naći konstantu $0 \leq \gamma_n < 1$ za koju bi vrijedilo

$$S(A^{(N)})^2 \leq \gamma_n S(A)^2,$$

za sve hermitske matrice A reda n. Iz tog bi konvergenicija strategije trivijalno sljedila. No, to ipak neće biti moguće za sve strategije kao što ćemo vidjeti.

Sjetimo se još kako smo izračunali da nakon rotacije na mjestu (i, j) vrijedi $S(A')^2 = S(A)^2 - |a_{ij}|^2$. Dakle, niz $S(A^{(k)})$ je strogo padajuć i nenegativan, pa je i konvergentan. Ovo motivira slutnju da je Jacobijeva metoda konvergentna za sve strategije na matricama određenog reda, no to je u potpunosti dokazano samo za matrice reda četiri.

Vratimo se sada konvergenciji ekvivalentnih strategija.

Propozicija 2.10. *Neka su $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{O}(\boldsymbol{P}_n)$ te $\mathcal{O} \sim \mathcal{O}'$. Ako Jacobijeva metoda na hermitskoj matrici A konvergira pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$, onda konvergira i pod strategijom $I_{\mathcal{O}'}$.*

Dokaz. Obzirom da je $\mathcal{O}'$ dobivena iz $\mathcal{O}$ konačnim nizom dopuštenih transpozicija, principom matematičke dovoljno je pokazati da je tvrdnja istinita u slučaju kada je $\mathcal{O}'$ dobivena iz $\mathcal{O}$ jednom dopuštenom transpozicijom. Neka je zato

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= (i_1, j_1), \ldots, (i_{r-1}, j_{r-1}), (i_r, j_r), (i_{r+1}, j_{r+1}), (i_{r+2}, j_{r+2}), \ldots, (i_N, j_N), \\
\mathcal{O}' &= (i_1, j_1), \ldots, (i_{r-1}, j_{r-1}), (i_{r+1}, j_{r+1}), (i_r, j_r), (i_{r+2}, j_{r+2}), \ldots, (i_N, j_N),
\end{aligned}$$

gdje parovi (i_r, j_r) i (i_{r+1}, j_{r+1}) komutiraju.

Dovoljno će dakle biti pokazati da za proizvoljnu matricu A vrijedi

$$U_{r+1}^* U_r^* A U_r U_{r+1} = U_r^* U_{r+1}^* A U_{r+1} U,$$

gdje su matrice U_r i U_{r+1} rotacije u r-tom odnosno $r+1$-vom koraku.

Precizan dokaz ove propozicije dokazao je Hansen u [4]. Mi ćemo ovdje iznijeti dokaz u slučaju $n = 4$, te za pivotne parove $(1,3)$ i $(2,4)$. Ovo će u principu biti vrlo slično strogom dokazu. Obzirom da se A mijenja samo u recima i stupcima $i_r, j_r, i_{r+1}, j_{r+1}$, slučaj $n = 4$ nije bitno smanjenje općenitosti a daje jednostavniji zapis. Isto vrijedi i za konkretizaciju pivotnih parova.

Za $U_r = R(1,3,\phi,\alpha)$ i $U_{r+1} = R(2,4,\psi,\beta)$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
a'_{12} &= a_{12}\cos\phi + a_{32}e^{i\alpha}\sin\phi, & a'_{12} &= a_{12}\cos\psi + a_{14}e^{-i\beta}\sin\psi,\\
a'_{32} &= a_{32}\cos\phi - a_{12}e^{-i\alpha}\sin\phi, & a'_{14} &= a_{14}\cos\psi - a_{12}e^{i\beta}\sin\psi,\\
a'_{14} &= a_{14}\cos\phi + a_{34}e^{i\alpha}\sin\phi, & a'_{32} &= a_{32}\cos\psi + a_{34}e^{-i\beta}\sin\psi,\\
a'_{34} &= a_{34}\cos\phi - a_{14}e^{-i\alpha}\sin\phi, & a'_{34} &= a_{34}\cos\psi - a_{32}e^{i\beta}\sin\psi.
\end{aligned}
$$

Direktnim računom se pokaže da neovisno o tome koju rotaciju napravimo prvo, nakon obje imamo

$$
\begin{aligned}
a''_{12} =& a_{12}\cos\phi\cos\psi + a_{32}e^{i\alpha}\sin\phi\cos\psi +\\
& a_{14}\cos\phi e^{-i\beta}\sin\psi + a_{34}e^{i\alpha}\sin\phi e^{-i\beta}\sin\psi,\\
a''_{14} =& a_{14}\cos\phi\cos\psi + a_{34}e^{i\alpha}\sin\phi\cos\psi -\\
& - a_{12}\cos\phi e^{i\beta}\sin\psi - a_{32}e^{i\alpha}\sin\phi e^{i\beta}\sin\psi,\\
a''_{32} =& a_{32}\cos\phi\cos\psi - a_{12}e^{-i\alpha}\sin\phi\cos\psi +\\
& a_{34}\cos\phi e^{-i\beta}\sin\psi - a_{14}e^{-i\alpha}\sin\phi e^{-i\beta}\sin\psi,\\
a''_{34} =& a_{34}\cos\phi\cos\psi - a_{14}e^{-i\alpha}\sin\phi\cos\psi -\\
& - a_{32}\cos\phi e^{i\beta}\sin\psi + a_{12}e^{-i\alpha}\sin\phi e^{i\beta}\sin\psi.
\end{aligned}
$$

Također, jasno je da su parametri rotacije isti bez obzira koju rotaciju učinimo prvu baš zato jer pivotni parovi komutiraju. Dijagonalni elementi su isti bez obzira na redoslijed rotacija jer U_r mijenja samo elemente a_{11} i a_{33}, a U_{r+1} samo a_{22} i a_{44}. Pivotni elementi su naravno isti bez obzira na redoslijed rotacija jer su nakon rotacija oba jednaka nuli.

Sad je jasno da ekvivalentne strategije nakon ciklusa duljine N generiraju istu matricu pa i konvergencija jedne povlači konvergenciju druge, i obratno. $\square$

Propozicija 2.11. *Neka su $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{O}(\boldsymbol{P}_n)$ te $\mathcal{O} \overset{s}{\sim} \mathcal{O}'$. Ako Jacobijeva metoda na hermitskoj matrici A konvergira pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$, onda konvergira i pod strategijom $I_{\mathcal{O}'}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{O} = [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ i $\mathcal{O}' = [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1]$ pri čemu duljina od $\mathcal{O}_2$ iznosi l i neka je $I_{\mathcal{O}}$ konvergentna. Uzmimo proizvolju hermitsku matricu A te pokažimo da je $I'_{\mathcal{O}}$ konvergentna za nju. Primijenimo prvo l rotacija iz $I_{\mathcal{O}'}$ da dobijemo neku matricu B. Nakon primjene $I_{\mathcal{O}}$ na B dobije se podniz $A^{(l+N)}, A^{(l+2N)}, \ldots$ takav da je

$$\lim_{r\to\infty} S(A^{(l+rN)}) = 0.$$

Kako je $S(A^{(k)})$ nerastući, dokazali smo $S(A^{(k)} \to 0$, pa zbog proizvoljnosti matrice A slijedi konvergencija strategije $I_{\mathcal{O}'}$. □

Ovime smo dokazali sljedeći važan teorem.

Teorem 2.12. (Shroff, Schreiber). *Neka su $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{O}(\boldsymbol{P}_n)$ te $\mathcal{O} \stackrel{w}{\sim} \mathcal{O}'$. Ako Jacobijeva metoda na hermitskoj matrici A konvergira pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$, onda konvergira i pod strategijom $I_{\mathcal{O}'}$.* □

Propozicija 2.13. *Neka su $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{O}(\boldsymbol{P}_n)$ te $\mathcal{O} \stackrel{p}{\sim} \mathcal{O}'$. Ako Jacobijeva metoda na hermitskoj matrici A konvergira pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$, onda konvergira i pod strategijom $I_{\mathcal{O}'}$.*

Dokaz. Neka je

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= (i_0, j_0), \ldots, (i_{N-1}, j_{N-1}),\\ \mathcal{O}' &= (i'_0, j'_0), \ldots, (i'_{N-1}, j'_{N-1}),\end{aligned}$$

te neka su odgovarajuće matrice dane s $M_{\mathcal{O}} = (m_{ij})$, $M_{\mathcal{O}'} = (m'_{ij})$ i neka za njih vrijedi $M_{\mathcal{O}'} = P^T M_{\mathcal{O}} P$. Neka je $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijekcija takva da je $Pe_i = e_{p(i)}, 1 \leq i \leq n$. Tada je

$$\begin{aligned}m'_{ij} &= e_i^T M_{\mathcal{O}'} e_j = e_i^T P^T M_{\mathcal{O}} P e_j\\ &= (Pe_i)^T M_{\mathcal{O}} (Pe_j) = e_{p(i)}^T M_{\mathcal{O}} e_{p(j)}\\ &= m_{p(i)p(j)}.\end{aligned}$$

Označimo $Q = P^T$, tada je jasno da za $q : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, $q = p^{-1}$, vrijedi $Q(e_i) = e_{q(i)}$. Iz relacije $m'_{ij} = m_{p(i)p(j)}$ vidimo da ako se par (i, j) u nizu $\mathcal{O}$ nalazi na mjestu k, tada se u nizu $\mathcal{O}'$ na mjestu k nalazi par $(p(i), p(j))$. Drugim rječima, vrijedi

$$(i'_k, j'_k) = (q(i_k), q(j_k)), \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

Primjetimo samo da ako je $q(i_k) > q(j_k)$, par $(q(i_k), q(j_k))$ će biti u obrnutom poretku, no to ne igra nikakvu ulogu obzirom da rotacija s pivotnim parom (i, j) istovremeno poništava elemente na pozicijama (i, j) i (j, i).

Neka je $A^{(N)}$ dobivena nakon jednog ciklusa duljine N pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$, te neka su $U_k, 0 \leq k \leq N-1$ rotacije iz pripadnog ciklusa. Vrijedi

$$\begin{aligned}
P^T A^{(N)} P &= P^T (U_{N-1}^* \cdots U_0^*) A (U_0 \cdots U_{N-1}) P \\
&= (P^T U_{N-1}^* P) \cdots (P^T U_0^* P) P^T A P (P^T U_0 P) \cdots (P^T U_{N-1} P) \\
&= \widetilde{U}_{N-1}^* \cdots \widetilde{U}_0^* (P^T A P) \widetilde{U}_0 \cdots \widetilde{U}_{N-1},
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\widetilde{U}_k = P^T U_k P, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Neka je $U_k = (u_{st}), \widetilde{U}_k = (\widetilde{u}_{st})$, tada iz analognog računa kao za matricu $M_{\mathcal{O}'}$, imamo

$$\widetilde{u}_{st} = u_{p(s)p(t)}.$$

Prema tome, ako je $U_k = R(i, j, \phi, \alpha)$, onda je $\widetilde{U}_k = R(q(i), q(j), \widetilde{\phi}, \widetilde{\alpha})$, uz

$$\widetilde{\phi} = \begin{cases} \phi, & \text{za } q(i) < q(j) \\ -\phi, & \text{za } q(i) > q(j) \end{cases}, \quad \widetilde{\alpha} = \begin{cases} \alpha, & \text{za } q(i) < q(j) \\ -\alpha, & \text{za } q(i) > q(j) \end{cases}.$$

Neka je još $B = P^T A P$. Uvjerimo se sada da su $\widetilde{U}_k$ upravo rotacije iz strategije $I_{\mathcal{O}'}$ za matricu B. Naime, već smo komentirali da je pivotni par iz $\mathcal{O}'$ u koraku k upravo $(q(i), q(j))$ koji odgovara pivotnom paru rotacije $\widetilde{U}_k$. Nadalje, uz $B = (b_{rs})$ vrijedi $b_{q(r)q(s)} = a_{rs}$. Ako je $q(i) < q(j)$, tada će parametri rotacije u k-tom koraku primjene strategije $I_{\mathcal{O}'}$ na B biti određeni relacijama

$$\mathrm{tg}(2\phi') = \frac{2|a_{ij}|}{a_{ii} - a_{jj}} = \mathrm{tg}(2\phi), \quad \alpha' = \arg(a_{ij}) = \alpha,$$

a ako je $q(i) > q(j)$, pivotni par će biti $(q(j), q(i))$, pa će vrijediti

$$\mathrm{tg}(2\phi') = \frac{2|a_{ji}|}{a_{jj} - a_{ii}} = \mathrm{tg}(-2\phi), \quad \alpha' = \arg(a_{ji}) = -\alpha.$$

Vidimo da u oba slučaja imamo $\phi' = \widetilde{\phi}$ i $\alpha' = \widetilde{\alpha}$. Zato su $\widetilde{U}_k$ uistinu rotacije iz strategije $I_{\mathcal{O}'}$ za matricu B, pa imamo

$$P^T A^{(N)} P = B^{(N)},$$

gdje je $B^{(N)}$ dobivena iz B nakon primjene ciklusa duljine N pod strategijom $I_{\mathcal{O}'}$. Zbog proizvoljnosti matrice A, sada je jasno da konvergencija strategije $I_{\mathcal{O}}$ povlači konvergenciju strategije $I_{\mathcal{O}'}$. $\square$

Ovime smo pokazali da konvergentnost strategije $I_{\mathcal{O}}$ povlači konvergentnost svake straregije $I_{\mathcal{O}'}$ za koju postoji umetnuti niz $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r = \mathcal{O}'$ takav da su su $\mathcal{O}_i$ i $\mathcal{O}_{i+1}$ slabo ili permutacijski ekvivalentni za $0 \leq i \leq r-1$.

Postavlja se pitanje zašto u definiciji slabo ekvivalentnih nizova nismo dopustili da neki od dva umetnuta člana $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_{i+1}$ budu vezani relacijom permutacijske ekvivalencije. Razlog je taj što ako je $\mathcal{O} \overset{w}{\sim} \mathcal{O}_1 \overset{p}{\sim} \mathcal{O}'$, tada postoji $\mathcal{O}_2$ takav da je $\mathcal{O} \overset{p}{\sim} \mathcal{O}_2 \overset{w}{\sim} \mathcal{O}'$. Dokaz se može naći u [3].

Prema tome, ako u umetnutom nizu $(\mathcal{O}_i)$, imamo

$$\mathcal{O}_k \overset{p}{\sim} \mathcal{O}_{k+1} \overset{w}{\sim} \mathcal{O}_{k+2} \overset{p}{\sim} \mathcal{O}_{k+3} \overset{w}{\sim} \mathcal{O}_{k+4},$$

tu relaciju možemo zapisati kao

$$\mathcal{O}_k \overset{p}{\sim} \mathcal{O}_{k+1} \overset{p}{\sim} \mathcal{O}^{(1)} \overset{w}{\sim} \mathcal{O}_{k+3} \overset{w}{\sim} \mathcal{O}_{k+4},$$

za neki $\mathcal{O}^{(1)} \in \mathbf{P}_n$. Obzirom da su $\overset{p}{\sim}$ i $\overset{w}{\sim}$ relacije ekvivalencije, ovo pak dalje možemo sažeti u

$$\mathcal{O}_k \overset{p}{\sim} \mathcal{O}^{(1)} \overset{w}{\sim} \mathcal{O}_{k+4},$$

Drugim riječima, ako znamo da je neka strategija $I_{\mathcal{O}}$ konvergentna, tada znamo da su konvergentne sve strategije $I_{\mathcal{O}'}$ za koje postoji ciklički niz $\mathcal{O}_1 \in \mathbf{P}_n$ takav da je $\mathcal{O} \overset{p}{\sim} \mathcal{O}_1 \overset{w}{\sim} \mathcal{O}'$.

Poopćavanje definicije slabe ekvivalencije s permutacijskom ekvivalencijom nam zbog spomenutog rezultata ne bi generiralo nikoju novu strategiju $I'_{\mathcal{O}}$ za koju bismo znali da je konvergentna, pa zbog toga niti ne poopćujemo definiciju slabe ekvivalencije.

3 Strategije iz familije $\mathcal{C}_1$

U ovom poglavlju dokazat ćemo konvergenciju Jacobijeve metode za jednu široku familiju strategija na matricama općeg reda n. Kasnije ćemo to primjeniti na matrice reda četiri. Konkretno, pokazat ćemo postojanje konstante γ_n, $0 \leq \gamma_n < 1$ za koju je $S(A^{(N)})^2 \leq \gamma_n S(A)^2$, a odavdje je uz propoziciju (2.9) konvergencija jasna.

Familija strategija konstruira se poopćavanjem strategije po stupcima. Gibamo se progresivno po stupcima a unutar stupca elemente poništavamo proizvoljnim redom. Prije formalne definicije, zbog ilustracije navodimo jedan primjer te kasnije dokazujemo glavni teorem ovog dijela.

Primjer 3.1. *Jedan niz $\mathcal{O} \in \mathcal{C}_1$, za $n = 6$, dana je matricom*

$$M_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} * & 0 & 1 & 3 & 9 & 10 \\ 0 & * & 2 & 5 & 6 & 11 \\ 1 & 2 & * & 4 & 8 & 13 \\ 3 & 5 & 4 & * & 7 & 14 \\ 9 & 6 & 8 & 7 & * & 12 \\ 10 & 11 & 13 & 14 & 12 & * \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.2.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = \{\mathcal{O} \in \boldsymbol{P}_n \mid \mathcal{O} =& (\pi_2(1), 2), (\pi_3(1), 3), (\pi_3(2), 3), \ldots, (\pi_n(1), n), \ldots, \\ & (\pi_n(n-1), n), \quad \pi_j \in \Pi_{j-1},\ 2 \leq j \leq n\}, \end{aligned}$$

pri čemu je Π_{j-1} skup permutacija $\pi_j : \{1, 2, \ldots, j-1\} \to \{1, 2, \ldots, j-1\}$, za $2 \leq j \leq n$.

Teorem 3.3. *Neka je A hermitska matrica reda n. Neka je $\mathcal{O} \in \mathcal{C}_1$, a $A^{(N)}$ matrica dobivena iz A nakon jednog ciklusa Jacobijeve metode pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$. Tada postoji konstanta γ_n, ovisna samo o n za koju je*

$$S(A^{(N)})^2 \leq \gamma_n S(A)^2, \quad 0 \leq \gamma_n < 1.$$

Dokaz. Za simetrične matrice dokaz se može naći u [1]. Ovdje pratimo taj dokaz uz modifikacije za hermitske matrice.

Tvrdnju dokazujemo matematičkom inudkcijom. Za $n = 2$, nakon jednog ciklusa koji se sastoji od jednog poništavanja imamo $S(A^{(1)}) = 0$, pa tvrdnja vrijedi uz $\gamma_2 = 0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve hermistke matrice reda $n - 1 \geq 2$ s konstantom $0 \leq \gamma_{n-1} < 1$, te pokažimo tvrdnju za n.

Neka je A proizvoljna hermitska matrica reda n, te $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ dobivena iz A nakon prvih $\widetilde{N} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ koraka, odnosno nakon poništavanja svih elemenata osim onih iz zadnjeg stupca.

Prisjetimo se formula za elemente po stupcima nakon primjene rotacije $U = R(i, j, \phi, \alpha)$,

$$\begin{aligned} a'_{ti} &= a_{ti}\cos\phi + a_{tj}e^{-i\alpha}\sin\phi, && t \neq i, j, \\ a'_{tj} &= -a_{ti}e^{i\alpha}\sin\phi + a_{tj}\cos\phi, && t \neq i, j, \\ |a'_{ti}|^2 + |a'_{tj}|^2 &= |a_{ti}|^2 + |a_{tj}|^2, && t \neq i, j. \end{aligned}$$

Sad je jasno da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n-1} |a_{in}|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{in}|^2,$$

jer u prvih $\widetilde{N}$ koraka ne poništavamo elemente iz zadnjeg stupca.

Neka je $0 \leq \varepsilon \leq 1$ takav da je

$$(1-\varepsilon)S(A)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |a_{in}|^2.$$

Neka su A_{n-1}, odnosno $\widetilde{A}_{n-1}$ vodeće podmatrice reda $n-1$ redom matrica A, odnosno $\widetilde{A}$. Po pretpostavci indukcije imamo

$$S(\widetilde{A}_{n-1})^2 \leq \gamma_{n-1} S(A_{n-1})^2.$$

Ideja je promotriti izvandijagonalnu normu nakon prvih $\widetilde{N}$ rotacija, te u zadnjih $n-1$ rotacija. Nakon prvih $\widetilde{N}$ rotacija, imamo

$$\begin{aligned} S(\widetilde{A})^2 &= S(\widetilde{A}_{n-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{in}|^2 \\ &\leq \gamma_{n-1} S(A_{n-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |a_{in}|^2 \\ &= \gamma_{n-1}(S(A)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} |a_{in}|^2) + \sum_{i=1}^{n-1} |a_{in}|^2 \\ &= \gamma_{n-1}(S(A)^2 - (1-\varepsilon)S(A)^2) + (1-\varepsilon)S(A)^2 \\ &= (1 - \varepsilon(1-\gamma_{n-1}))S(A)^2. \end{aligned}$$

Kako je $0 \leq \gamma_{n-1} < 1$ i $0 \leq \varepsilon \leq 1$, vidimo da se očekivano nakon prvih $\widetilde{N}$ rotacija izvandijagonalna norma matrice A nije povećala. Ipak, ne možemo još sa sigurnošću tvrditi da se smanjila za fiksan faktor jer je ε varijabla koja ovisi o matrici A. Može se dogoditi da je $\varepsilon = 0$, ili po volji mali broj, ako je matrica A takva da ima nule, ili male brojeve kao elemente izvan zadnjeg retka i stupca.

Analizirajmo sad posljednjih $n-1$ rotacija. Označimo $\widetilde{A}^{(k)} = (\widetilde{a}_{ij}^{(k)})$ matricu dobivenu iz $\widetilde{A}$ nakon k rotacija. Drugim riječima, $\widetilde{a}_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(\widetilde{N}+k)}$, za $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq k \leq n-1$.

U posljednjih $n-1$ rotacija poništavat ćemo dakle redom pivotne elemente $|\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|$, za $1 \leq i \leq n-1$, a obzirom da se nakon svake rotacije kvadrat izvandijagonalne norme smanji za kvadrat apsolutne vrijednosti pivotnog elementa, imamo

$$S(A^{(N)})^2 = S(\widetilde{A})^2 - \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|^2$$

Iz formula za elemente po stupcima nakon rotacije u koraku k s pivotnim elementom $(\pi_n(k), n)$, dobivamo, za element u retku $\pi_n(i)$, $i \geq k$,

$$\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(k)} = -\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}^{(k-1)} e^{i\alpha_k} \sin\phi_k + \widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(k-1)} \cos\phi_k, \quad 1 \leq k \leq i.$$

Elementi na pozicijama $(\pi_n(i), s)$, za $1 \leq s \leq n-1$ se u prvih $i-1$ od posljednjih $n-1$ koraka ne mijenjaju ili se mijenjaju točno jednom, i to u koraku k, element na poziciji $(\pi_n(i), \pi_n(k))$. Drugim riječima, imamo $\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}^{(k-1)} = \widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}$. Označimo još $c_k = \cos\phi_k$, $s_k = e^{i\alpha_k} \sin\phi_k$, te napišimo gornju jednakost za uzastopne vrijednosti parametra k.

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(1)} &= c_1 \widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(0)} - s_1 \widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(1)} \\
\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(2)} &= c_2 \widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(1)} - s_2 \widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(2)} \\
&\vdots \\
\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-2)} &= c_{i-2} \widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)} - s_{i-2} \widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(i-2)} \\
\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)} &= c_{i-1} \widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-2)} - s_{i-1} \widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(i-1)} \\
\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i)} &= 0.
\end{aligned}$$

Naravno, u zadnjem redu stoji nula, jer je u koraku $k = i$, pivotna pozicija upravo $(\pi_n(i), n)$. Nas zapravo zanima vrijednost $|\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|^2$, jer se taj element javlja u sumaciji u ocjeni za $S(A^{(N)})^2$.

Zato, pomnožimo $(i-2)$. jednakost sa c_{i-1}, $(i-3)$. jednakost sa $c_{i-1}c_{i-2}$, te redom sve do prve jednakosti sa $c_{i-1}c_{i-2}\ldots c_2$. Tako dobivene jednakosti zbrojimo te primijetimo da nam se izrazi s lijeve i desne strane skraćuju. Ostaje

$$\widetilde{a}^{(i-1)}_{\pi_n(i),n} = c_1 \dots c_{i-1}\widetilde{a}_{\pi_n(i),n} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{k+1} \dots c_{i-1} s_k \widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)},$$

gdje je $\widetilde{a}_{\pi_n(i),n} = \widetilde{a}^{(0)}_{\pi_n(i),n}$.

Općenito, za kompleksne brojeve $z, w \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|\frac{1}{\sqrt{2}}z - \sqrt{2}w|^2 \geq 0.$$

Zato vrijedi niz implikacija

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{\sqrt{2}}z - \sqrt{2}w)(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{z} - \sqrt{2}\overline{w}) &\geq 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{2}z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + 2w\overline{w} &\geq 0 \Rightarrow \\
z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w} &\geq \frac{1}{2}z\overline{z} - w\overline{w} \Rightarrow \\
|z-w|^2 &\geq \frac{1}{2}|z|^2 - |w|^2.
\end{aligned}$$

U našem slučaju to daje, obzirom da su kutovi rotacije $\phi_k \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, te $|e^{i\alpha_k}| = 1$, pa je $\frac{1}{2} \leq |c_k|^2 \leq 1,\ 0 \leq |s_k|^2 \leq \frac{1}{2},\ 1 \leq k \leq i-1$,

$$\begin{aligned}
|\widetilde{a}^{(i-1)}_{\pi_n(i),n}|^2 &= \left| c_1 \dots c_{i-1}\widetilde{a}_{\pi_n(i),n} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{k+1} \dots c_{i-1} s_k \widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)} \right|^2 \\
&\geq \frac{1}{2}|c_1 \dots c_{i-1}\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}|^2 - \left| \sum_{k=1}^{i-1} c_{k+1} \dots c_{i-1} s_k \widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)} \right|^2 \\
&\geq 2^{-i}|\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}|^2 - \left(\sum_{k=1}^{i-1} |s_k||\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}| \right)^2 \\
&\geq 2^{-i}|\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}|^2 - \left(\sum_{k=1}^{i-1} |s_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{i-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}|^2 \right) \\
&\geq 2^{-i}|\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}|^2 - \frac{1}{2}(i-1) \left(\sum_{k=1}^{i-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}|^2 \right) \\
&\geq 2^{-i}|\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}|^2 - \frac{1}{2}(n-2) \left(\sum_{k=1}^{i-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}|^2 \right), \quad 1 \leq i \leq n-1,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugom redu iskoristili gornju ocjenu za kompleksne brojeve, a u četvrtom Cauchy-Schwarzovu nejednakost.

Obzirom da je $S(A^{(N)})^2 = S(\widetilde{A})^2 - \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|^2$, promotrimo elemente koji će nam se pojavljivati u sumi. Jasno, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{in}|^2$$

jer je π_n permutacija skupa $\{1, \dots, n-1\}$. Također je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}|^2 = S(\widetilde{A}_{n-1})^2,$$

jer za svaki $(s,t) \in \mathbf{P}_{n-1}$, postoji točno jedan par (i,k) iz gornje sumacije takav da je $(\pi_n(i), \pi_n(k)) = (s,t)$, ili $(\pi_n(i), \pi_n(k)) = (t,s)$, no obzirom da je matrica hermitska, vrijedi $|\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}| = |\widetilde{a}_{\pi_n(k),\pi_n(i)}|$, pa slučaj $(\pi_n(i), \pi_n(k)) = (t,s)$ ne predstavlja problem. Dobivamo dakle,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|^2 &\geq \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}|^2 - \frac{1}{2}(n-2) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),\pi_n(k)}|^2 \right) \\
&\geq 2^{-n+1} \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{in}|^2 - \frac{1}{2}(n-2) S(\widetilde{A}_{n-1})^2.
\end{aligned}$$

Sjetimo se sada pretpostavke inudkcije, $S(\widetilde{A}_{n-1})^2 \leq \gamma_{n-1} S(A_{n-1})^2$ i definicije broja ε, $(1-\varepsilon) S(A)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |a_{in}|^2$. Dobijemo

$$S(\widetilde{A}_{n-1})^2 \leq \gamma_{n-1} \varepsilon S(A)^2.$$

Kako je $\sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{in}|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |a_{in}|^2$, dobijemo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|^2 &\geq 2^{-n+1} (1-\varepsilon) S(A)^2 - \frac{1}{2}(n-2) \gamma_{n-1} \varepsilon S(A)^2 \\
&\geq f_n(\varepsilon) S(A)^2,
\end{aligned}$$

uz $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(2^{2-n} - (2^{2-n} + (n-2)\gamma_{n-1}) \varepsilon \right).$$

Sjetimo se relacije koju smo dobili za prvih $\widetilde{N}$ koraka,

$$S(\widetilde{A})^2 \leq g_n(\varepsilon) S(A)^2,$$

uz $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g_n(\varepsilon) = 1 - \varepsilon(1 - \gamma_n).$$

Sada smo spremni napraviti završnu ocjenu na $S(A^{(N)})^2$, dano formulom

$$S(A^{(N)})^2 = S(\widetilde{A})^2 - \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|^2,$$

ali direktno uvrštavanje funkcija f_n i g_n može dovesti do negativne konstante γ_n pa je potrebna malo veća analiza. Obje funkcije su linearne u ε, te vrijedi

$$f_n(0) = 2^{1-n}, \quad f_n(\varepsilon_n) = 0, \quad \text{uz } \varepsilon_n = \frac{1}{1 + 2^{2-n}(n-2)\gamma_{n-1}}.$$

Zbog linearnosti od f_n je zato

$$f_n(\frac{\varepsilon_n}{2}) = 2^{-n}.$$

Ako je sada $\varepsilon \geq \frac{\varepsilon_n}{2}$, imamo

$$\begin{aligned} S(A^{(N)})^2 &= S(\widetilde{A})^2 - \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|^2 \\ &\leq S(\widetilde{A})^2 \leq g_n(\varepsilon) S(A)^2 \leq g_n(\frac{\varepsilon_n}{2}) S(A)^2, \end{aligned}$$

jer je g_n padajuća.

Ako je pak $\varepsilon < \frac{\varepsilon_n}{2}$, dobivamo

$$\begin{aligned} S(A^{(N)})^2 &= S(\widetilde{A})^2 - \sum_{i=1}^{n-1} |\widetilde{a}_{\pi_n(i),n}^{(i-1)}|^2 \\ &\leq (g_n(\varepsilon) - f_n(\varepsilon)) S(A)^2 \leq (g_n(0) - f_n(\frac{\varepsilon_n}{2})) S(A)^2 \\ &= (1 - 2^{-n}) S(A)^2, \end{aligned}$$

jer su f_n i g_n padajuće.

Jasno,

$$g_n(\frac{\varepsilon_n}{2}) = 1 - \frac{1}{1 + 2^{2-n}(n-2)\gamma_{n-1}}(1 - \gamma_{n-1}) \in [0, 1\rangle,$$

pa uz

$$\gamma_n = \max\{g_n(\frac{\varepsilon_n}{2}), 1 - 2^{-n})\} \in [0, 1\rangle,$$

vrijedi

$$S(A^{(N)})^2 \leq \gamma_n S(A)^2.$$

$\square$

U ovom trenu pomalo je neprirodno što smo koristili oznaku $\mathcal{C}_1$, umjesto naprosto oznake $\mathcal{C}$. Razlog tome je taj što je familija $\mathcal{C}_1$ usko vezana za familije $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ i $\mathcal{C}_4$ koje redom poništavaju elemente, $\mathcal{C}_2$ po redcima od zadnjeg ka prvom, a unutar redaka u proizvoljnom poretku, $\mathcal{C}_3$ po stupcima od zadnjeg ka prvom, a unutar stupaca u proizvoljnom poretku, te na kraju $\mathcal{C}_4$ po redcima od prvog ka zadnjem, a unutar redaka u proizvoljnom poretku.

Dokaz konvergencije strategija koje odgovaraju nizovima iz tih triju familija može se naći u [1], za simetrične matrice, i donekle prati dokaz konvergencije koji smo iznijeli za familiju $\mathcal{C}_1$.

Štoviše, nije se tešto uvjeriti sa su nizovi iz familije $\mathcal{C}_4$ permutacijski ekvivalentni onima iz $\mathcal{C}_1$ uz matricu permutacije

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Isto vrijedi za familije $\mathcal{C}_2$ i $\mathcal{C}_3$. Ipak, nije istina da se svi nizovi iz $\mathcal{C}_2$ mogu dobiti relacijom permutacijske ekvivalencije nizova iz $\mathcal{C}_1$. Štoviše, to čak nije istina ako dopustimo još i relaciju slabe ekvivalencije. Ipak, neki nizovi iz $\mathcal{C}_2$ mogu se dobiti kao permutacijski i slabo ekvivalentni nizovima iz $\mathcal{C}_1$, što se najbolje vidi na primjeru matrica reda 5 kako je opisano u posljednjem poglavlju.

U ovom radu neće biti potrebno proučavati familije $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ i $\mathcal{C}_4$, jer će se pokazati da su na matricama reda 4 svi nizovi iz tih familija slabo ili permutacijski ekvivalentne nekom od nizova iz $\mathcal{C}_1$.

Ipak, postoje nizovi $\mathcal{O} \in \mathcal{O}(\mathbf{P}_4)$ koji nisu nikako ekvivalentni nikojem nizu iz $\mathcal{C}_1$ a dokazom konvergencije strategije koja odgavara jednom takvom nizu bavimo se u sljedećem poglavlju.

4 Paralelne strategije

Jedna posebno zanimljiva strategija na matricama reda četiri dana je cikličkim nizom

$$\mathcal{O} = (1,3), (2,4), (1,4), (2,3), (1,2), (3,4),$$

odnosno matricom

$$M_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} * & 4 & 0 & 2 \\ 0 & * & 3 & 1 \\ 2 & 5 & * & 5 \\ 4 & 3 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

Razlog je taj što se po dva koraka ove metode mogu na računalu vršiti paralelno, obzirom da po dva susjedna pivotna elementa komutiraju.

S teorijske strane, ova strategija je zanimljiva je nije istina da postoji $0 \leq \gamma_n < 1$ takva da je

$$S(A^{(N)})^2 \leq \gamma_n S(A)^2.$$

Za bolje razumijevanje strukture "loših" matrica, navodimo primjer matrice čija se izvandijagonalna norma nakon jednog ciklusa duljine N smanji za faktor proizvoljno blizu broju 1.

Propozicija 4.1. *Neka je $0 < \varepsilon \leq 10^{-5}$, te neka je*

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon + \varepsilon^{1.5} & 0 & 2\varepsilon & -1+\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^{1.5} & 1 & -\varepsilon \\ 2\varepsilon & 1 & \varepsilon & 0 \\ -1+\varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je $A^{(N)}$ dobivena iz A nakon jednog ciklusa duljine N Jacobijeve metode pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$. Tada je

$$S(A^{(N)})^2 > (1 - 17\varepsilon) S(A)^2.$$

Dokaz se može naći u [2]. Ova propozicija je ujedno i dokaz da strategija $I_{\mathcal{O}}$ ne može biti slabo ni permutacijski ekvivalentna nijednoj strategiji iz $\mathcal{C}_1$, obzirom da navedene vrste ekvivalencije čuvaju svojstvo pada izvandijagonalne norme nakon jednog ciklusa duljine N.

Prije samog dokaza konvergencije strategije $I_{\mathcal{O}}$, uvest ćemo pojmove koji će nam skratiti zapisivanje dokaza teorema. Neka je

$$Q = \begin{bmatrix} e_1 & e_3 & e_4 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za matricu $A = (a_{ij})$, lagani račun daje

$$Q^T AQ = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Definicija 4.2. *Neka je* $\mathcal{T} : H_4 \to H_4$,

$$\mathcal{T}(A) = (R(1,3,\phi,\alpha)R(2,4,\psi,\beta)Q)^* AR(1,3,\phi,\alpha)R(2,4,\psi,\beta)Q, \quad A \in H_4,$$

gdje je H_4 *vektorski prostor hermitskih matrica reda četiri, a* $R(1,3,\phi,\alpha)$ *i* $R(2,4,\psi,\beta)$ *matrice rotacije koje poništavaju pivotne elemente* $(1,3)$*, odnosno* $(2,4)$*.*

$\mathcal{T}^k(A)$ *označavat će* k*-struku primjenu preslikavanja* $\mathcal{T}$ *na matricu* A*.*

Na početku svakog ciklusa pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$, osim eventualno prvog, elementi na pozicijima $(1,2)$ i $(3,4)$ su jednaki nuli. Obzirom da promatramo konvergenciju možemo pretpostaviti da je ulazna matrica A oblika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Preslikavanje $\mathcal{T}$ je dano s

$$\mathcal{T}(A) = \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & 0 \\ a'_{41} & a'_{42} & 0 & a'_{44} \end{bmatrix},$$

gdje su novi elementi, izračunati kao u propoziciji (2.10), dani s

$$\begin{aligned} a'_{13} =& a_{14}\cos\phi\cos\psi - a_{32}e^{i\alpha}\sin\phi e^{i\beta}\sin\psi, \\ a'_{14} =& a_{14}\cos\phi e^{-i\beta}\sin\psi + a_{32}e^{i\alpha}\sin\phi\cos\psi, \\ a'_{23} =& -a_{14}e^{-i\alpha}\sin\phi\cos\psi - a_{32}\cos\phi e^{i\beta}\sin\psi, \\ a'_{24} =& -a_{14}e^{-i\alpha}\sin\phi e^{-i\beta}\sin\psi + a_{32}\cos\phi\cos\psi. \end{aligned} \tag{1}$$

Za parametre rotacije i dijagonalne elemente vrijedi

$$\alpha = \arg(a_{13}), \quad \beta = \arg(a_{24}),$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}(2\phi) &= \frac{2|a_{13}|}{a_{11}-a_{33}}, \quad \operatorname{tg}(2\psi) = \frac{2|a_{24}|}{a_{22}-a_{44}}, \\
a'_{11} &= a_{11} + |a_{13}| \operatorname{tg}\phi, \quad a'_{22} = a_{33} - |a_{13}| \operatorname{tg}\phi, \\
a'_{33} &= a_{44} - |a_{24}| \operatorname{tg}\psi, \quad a'_{44} = a_{22} + |a_{24}| \operatorname{tg}\psi.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Uzastopno primjenjivanje preslikavanja $\mathcal{T}$ jako je blisko Jacobijevom algoritmu za strategiju $I_{\mathcal{O}}$. Služi nam samo tome kako bismo pivotne elemente $(1,3)$ i $(2,4)$ držali fiksnima što nam olakšava notaciju u dokazu konvergencije. Očekivano je stoga da je konvergencija niza $\mathcal{T}^k(A)$ ekvivalnetna konvergenciji strategije $I_{\mathcal{O}}$, a upravo to nam jamči nam sljedeća propozicija.

Propozicija 4.3. *Neka je A hermitska matrica reda četiri, te $A^{(2k)}$ matrica dobivena nakon $2k$ rotacija Jacobijeve metode pod strategijom $I_{\mathcal{O}}$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{T}^k(A) = (Q^k)^T A^{(2k)} Q^k \quad k \geq 0.$$

Dokaz. Lako se provjeri da je $Q^3 = I$, pa je dokaz dovoljno provesti za $k = 0, 1, 2, 3$.

Dokaz je vrlo sličan dokazu za ekvivalentnost konvergencije permutacijski ekvivalentnih strategija, iako se na njega ne možemo direktno pozvati. Za $k = 0$ tvrdnja je trivijalna, a za $k = 1$ dobivamo upravo definiciju operatora $\mathcal{T}$. Za $k = 2$ imamo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^2(A) &= \mathcal{T}(\mathcal{T}(A)) = \mathcal{T}(Q^T A^{(2)} Q) \\
&= Q^T (R'_{13} R'_{24})^* Q^T A^{(2)} Q (R'_{13} R'_{24}) Q \\
&= Q^T (R'_{13} R'_{24})^* \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & 0 & a_{14}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{32}^{(2)} \\ a_{41}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & 0 \\ a_{21}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & 0 & a_{22}^{(2)} \end{bmatrix} (R'_{13} R'_{24}) Q,
\end{aligned}
$$

uz

$$R'_{13} = R(1,3,\phi',\alpha'), \quad R'_{24} = R(2,4,\psi',\beta').$$

S druge strane, imamo

$$
\begin{aligned}
(Q^2)^T A^{(4)} Q^2 &= Q^T Q^T (R_{14} R_{23})^* A^{(2)} R_{14} R_{23} Q Q \\
&= Q^T Q^T (R_{14} R_{23})^* \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & 0 & a_{14}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ a_{41}^{(2)} & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix} R_{14} R_{23} Q Q,
\end{aligned}
$$

uz

$$R_{14} = R(1,4,\phi,\alpha), \quad R_{23} = R(2,3,\psi,\beta).$$

Primjetimo sada da za parametre rotacije vrijedi $\phi' = \phi$, $\alpha' = \alpha$, $\psi' = -\psi$, $\beta' = -\beta$. Kako bismo sada pokazali

$$\mathcal{T}^2(A) = (Q^2)^T A^{(4)} Q^2,$$

bit će dovoljno pokazati

$$Q^T (R'_{13} R'_{24})^* Q^T A^{(2)} Q (R'_{13} R'_{24}) Q = Q^T Q^T (R_{14} R_{23})^* A^{(2)} R_{14} R_{23} Q Q,$$

a ovo će slijediti iz

$$Q R'_{13} R'_{24} = R_{14} R_{23} Q,$$

što je ekvivalentno relaciji

$$R'_{13} R'_{24} = (Q^T R_{14} Q)(Q^T R_{23} Q).$$

Za pokazati ovo će biti dovoljno pokazati

$$R'_{13} = Q^T R_{14} Q \quad \text{i} \quad R'_{24} = Q^T R_{23} Q,$$

što se lako provjerava iz definicije matrice Q i veze izračunate za parametre rotacije. Zaista, lijeva jednakost glasi

$$\begin{bmatrix} \cos\phi' & 0 & -e^{i\alpha'}\sin\phi' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\alpha'}\sin\phi' & 0 & \cos\phi' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -e^{i\alpha}\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\alpha}\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a desna

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi' & 0 & -e^{i\beta'}\sin\psi' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta'}\sin\psi' & 0 & \cos\psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & 0 & e^{-i\beta}\sin\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{i\beta}\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix},$$

pa obje jednakosti vrijedi jer je $\phi' = \phi$, $\alpha' = \alpha$, $\psi' = -\psi$, $\beta' = -\beta$.

Za $k = 3$, situacija je praktički identična.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^3(A) &= \mathcal{T}(\mathcal{T}^2(A)) = \mathcal{T}((Q^T)^2 A^{(4)} Q^2) \\ &= Q^T (R'_{13} R'_{24})^* (Q^T)^2 A^{(4)} Q^2 (R'_{13} R'_{24}) Q \end{aligned}$$

$$= Q^T (R'_{13} R'_{24})^* \begin{bmatrix} a_{11}^{(4)} & 0 & a_{12}^{(4)} & a_{13}^{(4)} \\ 0 & a_{44}^{(4)} & a_{42}^{(4)} & a_{43}^{(4)} \\ a_{21}^{(4)} & a_{24}^{(4)} & a_{22}^{(4)} & 0 \\ a_{31}^{(4)} & a_{34}^{(4)} & 0 & a_{33}^{(4)} \end{bmatrix} (R'_{13} R'_{24}) Q,$$

uz

$$R'_{13} = R(1, 3, \phi', \alpha'), \quad R'_{24} = R(2, 4, \psi', \beta').$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} (Q^3)^T A^{(6)} Q^3 &= Q^T (Q^T)^2 (R_{12} R_{34})^* A^{(4)} R_{12} R_{34} Q^2 Q \\ &= Q^T (Q^T)^2 (R_{12} R_{34})^* \begin{bmatrix} a_{11}^{(4)} & a_{12}^{(4)} & a_{13}^{(4)} & 0 \\ a_{21}^{(4)} & a_{22}^{(4)} & 0 & a_{24}^{(4)} \\ a_{31}^{(4)} & 0 & a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} \\ 0 & a_{42}^{(4)} & a_{43}^{(4)} & a_{44}^{(4)} \end{bmatrix} R_{12} R_{34} Q^2 Q, \end{aligned}$$

uz

$$R_{12} = R(1, 2, \phi, \alpha), \quad R_{34} = R(3, 4, \psi, \beta).$$

Primjetimo sada da za parametre rotacije vrijedi $\phi' = \phi$, $\alpha' = \alpha$, $\psi' = -\psi$, $\beta' = -\beta$. Kako bismo sada pokazali

$$\mathcal{T}^3(A) = (Q^3)^T A^{(6)} Q^3,$$

slično kao ranije, bit će dovoljno pokazati

$$Q^T (R'_{13} R'_{24})^* (Q^T)^2 A^{(4)} Q^2 (R'_{13} R'_{24}) Q = Q^T (Q^T)^2 (R_{12} R_{34})^* A^{(4)} R_{12} R_{34} Q^2 Q,$$

a ovo će slijediti iz

$$Q^2 R'_{13} R'_{24} = R_{12} R_{34} Q^2,$$

što je ekvivalentno relaciji

$$R'_{13} R'_{24} = ((Q^T)^2 R_{12} Q^2)((Q^T)^2 R_{34} Q^2).$$

Za pokazati ovo će biti dovoljno pokazati

$$R'_{13} = (Q^T)^2 R_{12} Q^2 \quad \text{i} \quad R'_{24} = (Q^T)^2 R_{34} Q^2,$$

što se ponovo na identičan način lako provjerava iz definicije matrice Q i veze izračunate za parametre rotacije. □

Sada smo spremni dokazati teorem o konvergenciji strategije $I_{\mathcal{O}}$. Dokaz je pomalo tehničiki pa stoga neke stvari nisu raspisane formalno do kraja u svrhu veće čitljivosti.

Teorem 4.4. *Neka je A proizvoljna hermitska matrica reda četiri za koji je $a_{12} = a_{34} = 0$. Tada vrijedi*

$$\lim_{k\to\infty} S(\mathcal{T}^k(A)) = 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji hermitska matrica H reda 4 za koju niz $S(\mathcal{T}^k(H))$ ne teži k nuli. Obzirom da je taj niz nerastući i odozdo omeđen nulom, on je konvergentan. Stoga vrijedi $S(\mathcal{T}^k(B)) \to \delta > 0$.

Za svako $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \geq 0$ takav da je

$$S(\mathcal{T}^k(H)) - \delta < \varepsilon, \quad k \geq k_0.$$

Time smo pokazali da za svako $\varepsilon > 0$ postoji hermitska matrica A, primjerice $A = \mathcal{T}^{k_0}(H)$, za koju vrijedi

$$S(A)^2 \geq S(\mathcal{T}^k(A))^2 > (1-\varepsilon)S(A)^2, \quad k \geq 0. \tag{3}$$

Pojednostavimo oznake. Neka je $B^{(k)} = \mathcal{T}^k(A)$ i $B^{(k)} = (b_{rs}^{(k)})$. Parametre rotacije u k-tom koraku, pri prijelazu s $B^{(k)}$ na $B^{(k+1)} = \mathcal{T}(B^{(k)})$, označit ćemo s (ϕ_k, α_k) za rotaciju $R(1,3,\phi_k,\alpha_k)$ i (ψ_k,β_k) za rotaciju $R(2,4,\psi_k,\beta_k)$.

Obzirom da se u k-tom koraku poništavaju elementi na pozicijiama $(1,3)$ i $(2,4)$, vrijedi

$$|b_{13}^{(k)}|^2 + |b_{24}^{(k)}|^2 = S(B^{(k)})^2 - S(B^{(k+1)})^2 < \varepsilon S(A)^2, \tag{4}$$

pri čemu smo koristili relaciju (3).

Kako je $S(B^{(k)})^2 = |b_{13}^{(k)}|^2 + |b_{24}^{(k)}|^2 + |b_{14}^{(k)}|^2 + |b_{23}^{(k)}|^2$, relacije (3) i (4) povlače

$$\begin{aligned} |b_{14}^{(k)}|^2 + |b_{23}^{(k)}|^2 &= S(B^{(k)})^2 - |b_{13}^{(k)}|^2 - |b_{24}^{(k)}|^2 \\ &> (1-\varepsilon)S(A)^2 - \varepsilon S(A)^2 \\ &= (1-2\varepsilon)S(A)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Pogledajmo kako ocijeniti parametre rotacije. Iz jednadžbi (1) izlazi

$$\begin{aligned} |b_{14}^{(k+1)}|^2 \leq &|b_{23}^{(k)}|^2(\sin^2\phi_k\cos^2\psi_k) + |b_{14}^{(k)}|^2(\cos^2\phi_k\sin^2\psi_k) + \\ &2|b_{14}^{(k)}||b_{23}^{(k)}||\sin\phi_k\cos\phi_k\sin\psi_k\cos\psi_k|, \\ |b_{23}^{(k+1)}|^2 \leq &|b_{23}^{(k)}|^2(\cos^2\phi_k\sin^2\psi_k) + |b_{14}^{(k)}|^2(\sin^2\phi_k\cos^2\psi_k) + \\ &2|b_{14}^{(k)}||b_{23}^{(k)}||\sin\phi_k\cos\phi_k\sin\psi_k\cos\psi_k|. \end{aligned}$$

Zbrajanjem tih dviju nejednakosti, te korištenjem nejednakosti $2xy \leq x^2+y^2$, $x,y \in \mathbb{R}$ i trigonometrijskog identiteta $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$, dobivamo

$$|b_{14}^{(k+1)}|^2 + |b_{23}^{(k+1)}|^2 \leq (|b_{32}^{(k)}|^2 + |b_{14}^{(k)}|^2)$$
$$(\sin^2\phi_k \cos^2\psi_k + \cos^2\phi_k \sin^2\psi_k + \frac{1}{2}|\sin(2\phi_k)\sin(2\psi_k)|). \quad (6)$$

Da bi ocijenili odozgo $\sin^2\phi_k \cos^2\psi_k + \cos^2\phi_k \sin^2\psi_k$, stavimo $x = \sin^2\phi_k$, $y = \sin^2\psi_k$. Tada je

$$\sin^2\phi_k \cos^2\psi_k + \cos^2\phi_k \sin^2\psi_k \leq x + y - 2xy.$$

Kako su $\phi_k, \psi_k \in\in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, imamo $x, y \in [0, \frac{1}{2}]$. Funkcija $f(x,y) = x+y-2xy$ ima gradijent $\nabla f = [1-2y, 1-2x]^T$, a maksimalnu vrijednost na kvadratu $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ ima duž dvije stranice, $\{\frac{1}{2}\} \times [0, \frac{1}{2}]$ i $[0, \frac{1}{2}] \times \{\frac{1}{2}\}$, s vrijednošću $\frac{1}{2}$. Dakle vrijedi

$$\sin^2\phi_k \cos^2\psi_k + \cos^2\phi_k \sin^2\psi_k \leq \frac{1}{2}.$$

Kako je $|b_{14}^{(k)}|^2 + |b_{23}^{(k)}|^2 \leq S(B^{(k)})^2 \leq S(A)^2$, a zbog relacije (5) je $|b_{14}^{(k+1)}|^2 + |b_{23}^{(k+1)}|^2 > (1-2\varepsilon)S(A)^2$, relacija (6) daje

$$(1-2\varepsilon)S(A)^2 < S(A)^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\sin(2\phi_k)\sin(2\psi_k)|).$$

Nakon kraćenja sa $S(A)^2$ dobivamo

$$\frac{1}{2} - 2\varepsilon < \frac{1}{2}|\sin(2\phi_k)\sin(2\psi_k)|,$$

odnosno

$$|\sin(2\phi_k)\sin(2\psi_k)| > 1 - 4\varepsilon.$$

Kako su $|\sin(2\phi_k)|$ i $|\sin(2\psi_k)|$ omeđeni odozgo s 1, mora vrijediti

$$|\sin(2\phi_k)| > 1 - 4\varepsilon, \quad |\sin(2\psi_k)| > 1 - 4\varepsilon, \quad (7)$$

pa obzirom da su kutovi rotacije iz $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, vidimo da su oba kuta "blizu" $\frac{\pi}{4}$ ili $-\frac{\pi}{4}$. Treba nam ipak malo preciznija ocjena.

Označimo $t = \operatorname{tg}\phi_k$. Pretpostavimo prvo $t \geq 0$, slučaj $t \leq 0$ tretira se analogno. Također, obzirom da je $\phi_k \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, imamo $t \leq 1$. Trigonometrijski identitet $\sin(2\phi_k) = \frac{2t}{1+t^2}$ i relacija (9) daju

$$\sin(2\phi_k) = \frac{2t}{1+t^2} > 1 - 4\varepsilon,$$

pa je

$$t^2(1-4\varepsilon) - 2t + (1-4\varepsilon) < 0.$$

Za $\varepsilon < \frac{1}{4}$, ova kvadratna nejednadžba ima nultočke,

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8\varepsilon - 16\varepsilon^2}}{1 - 4\varepsilon}.$$

Zato vrijedi

$$t > \frac{1 - \sqrt{8\varepsilon - 16\varepsilon^2}}{1 - 4\varepsilon} > 1 - \sqrt{8\varepsilon - 16\varepsilon^2} > 1 - \sqrt{8\varepsilon}.$$

Ocjena za $\operatorname{tg} \psi_k$ je analogna pa dobivamo

$$\operatorname{tg} \phi_k, \operatorname{tg} \psi_k \in [-1, -1 + \sqrt{8\varepsilon}\rangle \cup \langle 1 - \sqrt{8\varepsilon}, 1], \quad k \geq 0. \tag{8}$$

Trik je u ocjeni razlike dijagonalnih elemenata. Označimo li $t = \operatorname{tg} \phi_k$, po trigonometrijskoj formuli $\operatorname{tg}(2\phi_k) = \frac{2t}{1-t^2}$ i jednadžbi (2) imamo

$$\frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2|b_{13}^{(k)}|}{b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}},$$

što postaje

$$t(b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}) = (1 - t^2)|b_{13}^{(k)}|.$$

Iz relacije (8) sad imamo

$$(1 - \sqrt{8\varepsilon})|b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}| < (1 - (1 - \sqrt{8\varepsilon})^2)|b_{13}^{(k)}|,$$

odnosno,

$$|b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}| < \frac{1 - (1 - \sqrt{8\varepsilon})^2}{1 - \sqrt{8\varepsilon}} |b_{13}^{(k)}|. \tag{9}$$

Gornju ocjenu želimo zapisati malo lijepše. Kratak račun daje da nejednakost

$$\frac{1 - (1 - \sqrt{8\varepsilon})^2}{1 - \sqrt{8\varepsilon}} < 8\sqrt{\varepsilon}$$

vrijedi onda i samo onda kad je

$$\sqrt{\varepsilon} < \frac{8 - 2\sqrt{8}}{8\sqrt{8} - 8}.$$

Kako je $0.1 < \frac{8-2\sqrt{8}}{8\sqrt{8}-8}$, za $\sqrt{\varepsilon} < 0.1$, relacija (9) prelazi u

$$|b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}| < 8\sqrt{\varepsilon}|b_{13}^{(k)}|, \quad \varepsilon < 0.01. \tag{10}$$

Uz oznaku $x^{(k)} = |b_{13}^{(k)}| \operatorname{tg} \phi_k$ i iz relacija (8) i (10), te činjenice $1 - \sqrt{8\varepsilon} > \frac{1}{2}$, dobivamo

$$|b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}| < \frac{8\sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{8\varepsilon}} |x^{(k)}| < 16\sqrt{\varepsilon}|x^{(k)}|.$$

Analgonu ocjenu dobivamo i kad promatramo pivotni par $(2,4)$ i kut ψ_k. Uz oznake

$$x^{(k)} = |b_{13}^{(k)}| \operatorname{tg} \phi_k, \quad y^{(k)} = |b_{24}^{(k)}| \operatorname{tg} \psi_k, \quad k \geq 0, \tag{11}$$

dobili smo ocjene

$$|b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}| \leq 16\sqrt{\varepsilon}|x^{(k)}|, \quad |b_{22}^{(k)} - b_{44}^{(k)}| \leq 16\sqrt{\varepsilon}|y^{(k)}|. \tag{12}$$

Jednadžbe (2) uz nove oznake prelaze u

$$\begin{aligned} b_{11}^{(k+1)} &= b_{11}^{(k)} + x^{(k)}, \quad & b_{22}^{(k+1)} &= b_{33}^{(k)} - x^{(k)}, \\ b_{33}^{(k+1)} &= b_{44}^{(k)} - y^{(k)}, \quad & b_{44}^{(k+1)} &= b_{22}^{(k)} + y^{(k)}, \end{aligned}$$

za sve $k \geq 0$. Iz ovoga dobijemo da za sve $k \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} b_{11}^{(k+2)} &= b_{11}^{(k)} + x^{(k)} + x^{(k+1)}, \\ b_{22}^{(k+2)} &= b_{44}^{(k)} - y^{(k)} - x^{(k+1)}, \\ b_{33}^{(k+2)} &= b_{22}^{(k)} + y^{(k)} - y^{(k+1)}, \\ b_{44}^{(k+2)} &= b_{33}^{(k)} - x^{(k)} + y^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Iz (4) i (8) znamo $|x^{(k)}|, |y^{(k)}| < \sqrt{\varepsilon} S(A)$. Koristeći ocjenu (12) za k, $k+1$ i $k+2$ dobivamo da za svaki $k \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} &|b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}| \leq 16\sqrt{\varepsilon}|x^{(k)}| < 16\varepsilon S(A), \\ &|b_{22}^{(k)} - b_{44}^{(k)}| \leq 16\sqrt{\varepsilon}|y^{(k)}| < 16\varepsilon S(A), \\ &|b_{11}^{(k)} - b_{44}^{(k)} + x^{(k)} + y^{(k)}| \leq 16\sqrt{\varepsilon}|x^{(k+1)}| < 16\varepsilon S(A), \\ &|b_{33}^{(k)} - b_{22}^{(k)} - x^{(k)} - y^{(k)}| \leq 16\sqrt{\varepsilon}|y^{(k+1)}| < 16\varepsilon S(A), \\ &|b_{11}^{(k)} - b_{22}^{(k)} + x^{(k)} - y^{(k)} + x^{(k+1)} + y^{(k+1)}| \leq 16\sqrt{\varepsilon}|x^{(k+2)}| < 16\varepsilon S(A), \\ &|b_{44}^{(k)} - b_{33}^{(k)} + x^{(k)} - y^{(k)} - x^{(k+1)} - y^{(k+1)}| \leq 16\sqrt{\varepsilon}|y^{(k+2)}| < 16\varepsilon S(A). \end{aligned} \tag{13}$$

Zbrajajući prve dvije nejednadžbe iz (13), imamo

$$|b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)}| + |b_{22}^{(k)} - b_{44}^{(k)}| < 32\varepsilon S(A),$$

odnosno primjenom nejednakosti trokuta,

$$\max\{|b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)} + b_{22}^{(k)} - b_{44}^{(k)}|, |b_{11}^{(k)} - b_{33}^{(k)} - b_{22}^{(k)} + b_{44}^{(k)}|\} < 32\varepsilon S(A). \tag{14}$$

Zbrajajući srednje dvije nejednadžbe iz (13) i primjenom nejednakosti trokuta imamo

$$|b_{11}^{(k)} - b_{44}^{(k)} - b_{33}^{(k)} + b_{22}^{(k)} + 2x^{(k)} + 2y^{(k)}| < 32\varepsilon S(A),$$

što nakon još jedne primjene nejednakosti trokuta, sada u obliku $||a| - |b|| \leq |a - b|$ daje

$$\Big||2x^{(k)} + 2y^{(k)}| - |b_{11}^{(k)} - b_{44}^{(k)} - b_{33}^{(k)} + b_{22}^{(k)}|\Big| < 32\varepsilon S(A). \tag{15}$$

Relacije (14) i (15) povlače

$$|x^{(k)} + y^{(k)}| < 32\varepsilon S(A).$$

Zbrajajući zadnje dvije nejednadžbe iz (13) istom manipulacijom kao maloprije dobivamo i

$$|x^{(k)} - y^{(k)}| < 32\varepsilon S(A).$$

Konačno, zbrajajući posljednje dvije izračunate ocjene i primjenom nejednakosti trokuta, vrijedi

$$\max\{|x^{(k)}|, |y^{(k)}|\} < 32\varepsilon S(A), \quad k \geq 0.$$

Sada možemo ponovo postaviti jednadžbe (13) s pojačanim ocjenama, odnosno na desnoj strani će umjesto $16\varepsilon S(A)$ pisati $512\varepsilon^{1.5}S(A)$. Ponavljajući račun dobit ćemo $\max\{|x^{(k)}|, |y^{(k)}|\} < 1024\varepsilon^{1.5}S(A)$.

Principom matematičke indukcije, za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\max\{|x^{(k)}|, |y^{(k)}|\} < \sqrt{\varepsilon}(32\sqrt{\varepsilon})^m S(A), \quad k \geq 0. \tag{16}$$

Zaista, za $m = 0, 1, 2$ smo tvrdnju pokazali. Ako relacija vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}_0$, uvrstimo ju u (13), pa će desno stajati $16\varepsilon(32\sqrt{\varepsilon})^m S(A)$. U računu će se ocjena još pomožniti s 2 pa ćemo imati $\max\{|x^{(k)}|, |y^{(k)}|\} < \sqrt{\varepsilon}(32\sqrt{\varepsilon})^{m+1}S(A)$, odnosno relacija vrijedi i za $m + 1$.

Za $\varepsilon < \frac{1}{1024}$ će desna strana u nejednakosti (16) biti po volji mala, pa mora biti

$$|x^{(k)}| = |y^{(k)}| = 0, \quad k \geq 0,$$

a obzirom na definiciju (11) od $x^{(k)}$ i $y^{(k)}$ i zbog relacije (8) mora biti

$$b_{13}^{(k)} = b_{24}^{(k)} = 0, \quad k \geq 0.$$

Ali, sada posebno vrijedi $b_{13}^{(0)} = b_{24}^{(0)} = 0$, pa $\mathcal{T}(A)$ ne radi nikakve rotacije nego samo permutira elemente. Stoga u drugom koraku $\mathcal{T}$ poništava jedina dva ne-nul elementa, pa je već $\mathcal{T}^2(A)$ dijagonalna, odnosno $S(T^2(A)) = 0$, što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom (3), čime je teorem dokazan. $\square$

5 Matrice reda 4

Na matricama reda četiri postoji ukupno 6 elemenata strogo gornjeg trokuta, pa time i $6! = 720$ različitih cikličkih pivotnih strategija. Dosad smo pokazali samo konvergenciju strategija iz familije C_1, a njih ima ukupno $1! \cdot 2! \cdot 3! = 12$, te jedne paralelne strategije. Pokazat će se da je svih 720 strategija slabo i permutacijski ekvivalento nekoj od ovih 13 strategija. Štoviše, pokazat će se da se svih 720 strategija raspada na svega 5 klasa po navedenoj relaciji ekvivalencije!

U ovom odjeljku ćemo pod klasama ekvivalencije strategije $I_{\mathcal{O}}$ smatrati sve strategije $I_{\mathcal{O}'}$ za koje postoji niz $\mathcal{O}_1$ takav da je $\mathcal{O} \overset{p}{\sim} \mathcal{O}_1 \overset{w}{\sim} \mathcal{O}'$. To zaista i jesu prave klase ekvivalencije obzirom na kombinaciju relacije slabe i permutacijske ekvivalencije, kako je opisano na kraju 2. odjeljka.

4 od 5 klasa će imati po nekog predstavnika iz klase $\mathcal{C}_1$, dok će jedna klasa imati za predstavnika paralelnu strategiju. Ovo će biti dovoljno za dokaz konvergencije svih cikličkih pivotnih strategija za matrice reda 4. Prije nego krenemo na izlistavanje strategija po klasama, osvrnimo se na matrice reda tri i pet.

Na matricama reda tri postoji svega $3! = 6$ strategija i jedna klasa ekvivalencije. Za

$$M_{\mathcal{O}_1} = \begin{bmatrix} * & 0 & 1 \\ 0 & * & 2 \\ 1 & 2 & * \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad M_{\mathcal{O}_2} = \begin{bmatrix} * & 0 & 2 \\ 0 & * & 1 \\ 2 & 1 & * \end{bmatrix},$$

vrijedi $I_{\mathcal{O}_1}, I_{\mathcal{O}_2} \in \mathcal{C}_1$. Preostale četiri strategije su šift-ekvivalentne strategijama $I_{\mathcal{O}_1}$ ili $I_{\mathcal{O}_2}$, pa zaključujemo da su sve cikličke pivotne strategije na matricama reda 3 knovergentne.

Na matricama reda pet situacija je bitno složenija. Još nije dokazano da su sve cikličke pivotne strategije konvergentne, iako se vjeruje da jesu. Postoji $N = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ elemenata strogo gornjeg trokuta, pa time i $10! = 3628800$ različitih strategija. Kôd sličan onome koji je naveden na kraju ovog dijela pokazao je da postoji 356 klasa ekvivalencije. Od toga 121 klasa ima predstavnika u familiji $\mathcal{C}_1$, a 165 klasa ima predstavnika u $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$. Sada je jasno da će za matrice viših redova biti potrebno naći još familija strategija pod kojim Jacobijeva metoda konvergira kako bi se dokazala konvergencija za sve strategije.

Vratimo se sada matricama reda 4 i podjeli strategija na klase. Klase su generirane algoritomom napisanog u jeziku C++, a kôd navodimo na kraju ovog odjeljka. Prvo dajemo uputu kako čitati kratko zapisane relacije ekvivalencije, zatim kratko objašnjenje kôda pa onda podjelu na klase.

Strategije ćemo promatrati kroz njima pridružene matrice $M_{\mathcal{O}}$, a matricama ćemo zapisivati samo strogo gornji trokut. Pisat ćemo dakle, za matrice iz primjera (2.6)

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 2 & 1 \\ 0 & * & 5 & 3 \\ 2 & 5 & * & 4 \\ 1 & 3 & 4 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

Za relaciju ekvivalencije uz jednu dopuštenu traspoziciju pisat ćemo

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

gdje je napravljena transpozicija na parovima $(1,3)$ i $(2,4)$, što odgovara brojevima 2 i 3 u matricama.

Za relaciju šift ekvivalencije pisat ćemo

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ & 3 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je šift duljine 4. Lijevi ciklički niz glasi $(1,2)$, $(1,4)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(2,3)$, a desni $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(2,3)$, $(1,2)$, $(1,3)$. U matricama se to najlakše vidi tako da se po elementima lijevoj matrici doda duljina šifta te uzme ostatak pri djeljenju sa 6 da se dobije desna matrica.

Za permutacijsku ekvivalenciju pisat ćemo

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(2,3,4,1)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

gdje je matrica permutacija P dana s $Pe_i = e_{p(i)}$. Za ovo ne postoji neka lakša provjera od permutiranja redaka i stupaca lijeve matrice i dobivanja desne matrice.

Algoritam koji je generirao klase ekvivalencije radi po sljedećem pseudokodu.

Algoritam 2 Generiranje klasa ekvivalencije

$\mathcal{S}$ = skup svih 720 cikličih nizova
while $\mathcal{S} \neq \emptyset$ **do**
    $\mathcal{O}$ = alfabetski najniži niz iz $\mathcal{S}$
    $\mathcal{N} = \{\mathcal{O}' \in \mathcal{S} \mid \mathcal{O}' \overset{p}{\sim} \mathcal{O}\}$
    $\mathcal{M} = \emptyset$
    while $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$ **do**
        $\mathcal{M} = \mathcal{N}$
        for $\mathcal{O} \in \mathcal{M}$ **do**

$\mathcal{R} = \{\mathcal{O}' \in \mathcal{S} \mid \mathcal{O}' \sim \mathcal{O}$ ili $\mathcal{O}' \overset{s}{\sim} \mathcal{O}\}$, gdje u ekvivalenciji dopuštamo samo jednu transpoziciju
$\mathcal{N} = \mathcal{N} \cup \mathcal{R}$
$\triangleright\ \mathcal{M} =$ klasa ekvivalencije s reprezentantom $\mathcal{O}$
$\mathcal{S} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{M}$

Napomenimo samo još kako algoritam pazi na to da ne doda neki niz više puta u skup, te pamti kojom relacijom ekvivalencije i iz kojeg niza je novi niz dobiven. Kao reprezentante klasa odabran je alfabetski najniži niz u klasi, te su unutar klase nizovi sortirani alfabetski. Zato je kod opisa svake klase ručno izdvojena i ona strategija za koju je konvergencija dokazana. Navedimo sada svih pet klasa.

Klasa 1, sadrži 144 elementa među kojima i $\begin{bmatrix} 0&1&3\\ &2&4\\ &&5 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_1$.

$\begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix}$ reprezentant, $\quad \begin{bmatrix} 0&1&3\\ &2&4\\ &&5 \end{bmatrix} \underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&1&4\\ &5&2\\ &&3 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4&5&2\\ &3&0\\ &&1 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0&1&5\\ &4&2\\ &&3 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&2&0\\ &5&3\\ &&4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&2&1\\ &4&3\\ &&5 \end{bmatrix} \underset{(1,2,4,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&2&3\\ &4&5\\ &&1 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2&4&5\\ &0&1\\ &&3 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0&2&4\\ &1&3\\ &&5 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&3&4\\ &1&2\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&2&4\\ &3&5\\ &&1 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5&1&3\\ &2&4\\ &&0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&2&4\\ &5&1\\ &&3 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&3&5\\ &0&2\\ &&4 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0&2&5\\ &4&1\\ &&3 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4&0&3\\ &2&5\\ &&1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&3&1\\ &4&2\\ &&5 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&2&1\\ &4&3\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&3&2\\ &5&4\\ &&1 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2&5&4\\ &1&0\\ &&3 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0&3&4\\ &1&2\\ &&5 \end{bmatrix} \underset{(2,1,3,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&3&5\\ &2&4\\ &&1 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5&2&4\\ &1&3\\ &&0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&4&1\\ &2&5\\ &&3 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4&2&5\\ &0&3\\ &&1 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0&4&2\\ &1&5\\ &&3 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&5&3\\ &2&0\\ &&4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&4&2\\ &3&1\\ &&5 \end{bmatrix} \underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&4&3\\ &2&1\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&4&2\\ &5&3\\ &&1 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5&3&1\\ &4&2\\ &&0 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0&4&3\\ &2&1\\ &&5 \end{bmatrix} \underset{(2,1,4,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&4&5\\ &2&3\\ &&1 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2&0&1\\ &4&5\\ &&3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&5&1\\ &2&4\\ &&3 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&0&2\\ &3&5\\ &&4 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 0&5&2\\ &1&4\\ &&3 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4&3&0\\ &5&2\\ &&1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&5&3\\ &4&2\\ &&1 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5&4&2\\ &3&1\\ &&0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&5&4\\ &3&2\\ &&1 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2&1&0\\ &5&4\\ &&3 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 1&0&2\\ &3&5\\ &&4 \end{bmatrix} \underset{(1,3,2,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&0&3\\ &2&5\\ &&4 \end{bmatrix} \underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&0&2\\ &3&5\\ &&4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&0&4\\ &5&3\\ &&2 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5&4&2\\ &3&1\\ &&0 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 1&0&5\\ &4&3\\ &&2 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2&1&0\\ &5&4\\ &&3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&2&0\\ &5&3\\ &&4 \end{bmatrix} \underset{(1,4,2,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&2&3\\ &4&5\\ &&0 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 1&2&4\\ &3&5\\ &&0 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3&4&0\\ &5&1\\ &&2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&2&5\\ &0&3\\ &&4 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&3&5\\ &0&2\\ &&4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&3&0\\ &5&2\\ &&4 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1&2&0\\ &5&3\\ &&4 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 1&3&2\\ &5&4\\ &&0 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&2&1\\ &4&3\\ &&5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&3&4\\ &5&0\\ &&2 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2&4&5\\ &0&1\\ &&3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&3&5\\ &0&2\\ &&4 \end{bmatrix} \underset{(2,3,1,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0&1&2\\ &3&4\\ &&5 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 1&3&5\\ &2&4\\ &&0 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3&5&1\\ &4&0\\ &&2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&3&5\\ &4&0\\ &&2 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5&1&3\\ &2&4\\ &&0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&4&0\\ &3&5\\ &&2 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5&2&4\\ &1&3\\ &&0 \end{bmatrix},$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ & 5 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 2 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ & 3 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ & 4 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(2,4,1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ & 3 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(1,3,4,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ & 4 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ & 3 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ & 5 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ & 4 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(1,4,3,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 4 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ & 1 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ & 0 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ & 5 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ & 4 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ & 1 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ & 3 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ & 0 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ & 0 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(2,3,4,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ & 3 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(2,4,3,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ & 4 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ & 5 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,1,2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ & 2 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ & 5 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,2,1,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ & 4 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 4 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ & 1 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 0 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ & 5 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ & 4 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,1,2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ & 1 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 2 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,2,1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ & 1 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ & 5 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,1,4,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ & 3 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ & 5 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ & 2 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ & 1 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ & 4 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 0 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ & 0 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,2,4,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,1,3,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 2 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 1 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ & 0 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ & 0 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,2,3,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ & 3 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ & 3 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,4,1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ & 4 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ & 0 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,4,2,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ & 4 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,3,1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ & 1 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ & 1 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,3,2,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

Klasa 2, sadrži 288 elemenata među kojima i $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & 2 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \text{reprezentant}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & 3 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 5 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & 2 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & 3 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ & 3 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ & 4 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ & 0 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(1,2,4,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 5 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 0 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 5 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ & 3 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ & 3 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ & 3 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ & 1 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ & 1 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ & 4 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ & 2 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ & 2 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ & 5 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(2,1,3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ & 3 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ & 3 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 4 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ & 5 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ & 3 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ & 3 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ & 3 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ & 4 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ & 4 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(2,1,4,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ & 2 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ & 3 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(1,3,2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ & 5 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ & 2 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ & 3 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ & 5 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ & 3 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ & 4 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ & 5 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(1,4,2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 5 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 5 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 0 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 0 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 5 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ & 4 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ & 3 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ & 4 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & 2 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & 4 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ & 4 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ & 0 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 0 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(2,3,1,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ & 2 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ & 2 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&4&0\\&5&2\\&&3\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&3\\&2&5\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&4&2\\&0&3\\&&5\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&3&1\\&5&2\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&4&2\\&0&5\\&&3\end{bmatrix}\underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&5&2\\&0&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&4&2\\&3&0\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&3\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&4&3\\&2&0\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,4,1,3)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&4&3\\&5&0\\&&2\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&4\\&0&1\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&4&3\\&5&2\\&&0\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&5\\&1&4\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&4&5\\&0&2\\&&3\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&2\\&3&5\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&4&5\\&3&0\\&&2\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&4&5\\&3&0\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&4&5\\&3&2\\&&0\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&5\\&3&2\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&5&0\\&2&4\\&&3\end{bmatrix}\underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&0\\&2&5\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&5&0\\&4&3\\&&2\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&5&2\\&0&4\\&&3\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&3&0\\&4&2\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&5&2\\&4&0\\&&3\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&2&5\\&1&3\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&5&2\\&4&3\\&&0\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&5&4\\&0&3\\&&2\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&5\\&1&4\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&5&4\\&2&0\\&&3\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&2&1\\&5&3\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&5&4\\&2&3\\&&0\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&4\\&2&3\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&0&1\\&3&5\\&&4\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&3&4\\&0&2\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix}\underset{(1,3,4,2)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&0&3\\&1&5\\&&4\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&3&0\\&4&2\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&0&3\\&5&1\\&&4\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&2&5\\&1&3\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&0&3\\&5&4\\&&1\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&0&5\\&1&4\\&&3\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&5\\&1&4\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&0&5\\&3&1\\&&4\end{bmatrix}\underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&5\\&3&0\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&0&5\\&3&4\\&&1\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&5\\&3&4\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&1&0\\&4&5\\&&3\end{bmatrix}\underset{(1,4,3,2)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\&5&3\\&&4\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&4&3\\&2&0\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&1&3\\&4&5\\&&0\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\&3&4\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&1&3\\&5&0\\&&4\end{bmatrix}\underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&3\\&5&1\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&1&4\\&0&5\\&&3\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&1&4\\&3&5\\&&0\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&3\\&2&4\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&1&4\\&5&3\\&&0\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&2\\&3&1\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&1&5\\&0&3\\&&4\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&4&2\\&3&0\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&1&5\\&3&0\\&&4\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&3&1\\&5&2\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&1&5\\&4&3\\&&0\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&3\\&2&1\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&3&0\\&1&5\\&&4\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&5&2\\&3&1\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&3&0\\&4&5\\&&1\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}3&4&1\\&5&0\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&3&0\\&5&1\\&&4\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&0&3\\&2&4\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&3&1\\&0&5\\&&4\end{bmatrix}\underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&3&0\\&1&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&3&1\\&5&4\\&&0\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0\\&4&3\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&3&4\\&0&5\\&&1\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&4\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\&5&1\\&&0\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&3&5\\&0&1\\&&4\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&0&2\\&3&4\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&3&5\\&1&4\\&&0\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&4\\&0&3\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&3&5\\&4&1\\&&0\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&2&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&4&1\\&3&5\\&&0\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&5\\&1&3\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&4&1\\&5&0\\&&3\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&4&1\\&5&0\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&4&1\\&5&3\\&&0\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&0\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&4&3\\&1&5\\&&0\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&1\\&5&3\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&4&3\\&5&0\\&&1\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&3\\&5&0\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&4&5\\&1&0\\&&3\end{bmatrix}\underset{(2,4,3,1)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&4&5\\&1&3\\&&0\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&4\\&0&2\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&4&5\\&3&0\\&&1\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}3&5&0\\&4&1\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&5&0\\&1&3\\&&4\end{bmatrix}\underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&1\\&0&3\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&5&0\\&4&1\\&&3\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&5&0\\&4&1\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&5&0\\&4&3\\&&1\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&5&0\\&4&3\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&5&1\\&0&3\\&&4\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&3\\&2&5\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&5&1\\&3&0\\&&4\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&2&4\\&0&3\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&5&1\\&3&4\\&&0\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&3&5\\&1&2\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&5&3\\&1&0\\&&4\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&2&0\\&4&3\\&&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&5&3\\&1&4\\&&0\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&3&1\\&5&2\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&5&3\\&4&1\\&&0\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&2\\&3&0\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&5&4\\&0&1\\&&3\end{bmatrix}\underset{(2,3,4,1)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&5&4\\&0&3\\&&1\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&5\\&1&4\\&&2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&5&4\\&3&1\\&&0\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&3\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&0&1\\&2&4\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&2\\&1&4\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&0&1\\&5&2\\&&4\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&0\\&4&1\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&0&1\\&5&4\\&&2\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&0&2\\&1&4\\&&5\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&3\\&2&5\\&&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&0&2\\&4&1\\&&5\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&2&4\\&0&3\\&&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&0&2\\&4&5\\&&1\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&3&5\\&1&2\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&0&4\\&2&1\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&0&4\\&2&5\\&&1\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&3&1\\&5&2\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&0&4\\&5&2\\&&1\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&2\\&3&0\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&0&5\\&1&2\\&&4\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&4\\&0&1\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&0&5\\&1&4\\&&2\end{bmatrix}\underset{(3,1,2,4)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&0&5\\&4&2\\&&1\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&3\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&1&0\\&2&5\\&&4\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&5\\&1&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&1&0\\&4&2\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&2&0\\&4&1\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&1&0\\&4&5\\&&2\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&0\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&1&2\\&0&5\\&&4\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&1&2\\&4&0\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&2\\&4&1\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&1&4\\&0&2\\&&5\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&2&5\\&1&3\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&1&4\\&0&5\\&&2\end{bmatrix}\underset{(3,2,1,4)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&1&4\\&2&0\\&&5\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&3&0\\&4&2\\&&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&0\\&1&4\\&&5\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&4&2\\&3&0\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&2&0\\&4&1\\&&5\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&3&1\\&5&2\\&&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&0\\&5&4\\&&1\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&3\\&2&1\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&1\\&0&4\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&2&0\\&1&4\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&2&1\\&5&0\\&&4\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&0\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&4\\&0&1\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&0&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&4\\&5&0\\&&1\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\&3&4\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&2&5\\&0&4\\&&1\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&2\\&3&1\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&5\\&1&0\\&&4\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&4\\&0&5\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&5\\&4&0\\&&1\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&3\\&2&4\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&4&0\\&1&2\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&4&1\\&0&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&4&0\\&2&5\\&&1\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&4\\&0&3\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&4&0\\&5&2\\&&1\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&2&5\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&4&1\\&0&2\\&&5\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}5&0&3\\&2&4\\&&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&4&1\\&2&0\\&&5\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}4&5&2\\&3&1\\&&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&4&1\\&5&0\\&&2\end{bmatrix}\underset{(4,2,1,3)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&4&2\\&0&5\\&&1\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0\\&4&3\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&4&2\\&1&0\\&&5\end{bmatrix}\underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}3&4&1\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&4&5\\&0&2\\&&1\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&4&5\\&1&0\\&&2\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&4&5\\&1&0\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&5&0\\&2&1\\&&4\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&4&5\\&1&0\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&5&0\\&2&4\\&&1\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&4\\&0&2\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&5&0\\&4&1\\&&2\end{bmatrix}\underset{(4,1,2,3)}{\overset{p}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&5&2\\&0&1\\&&4\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&4&1\\&5&0\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&5&2\\&0&4\\&&1\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&0\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&5&2\\&4&0\\&&1\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&5\\&1&3\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&5&4\\&0&1\\&&2\end{bmatrix}\underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&4\\&0&1\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&5&4\\&2&0\\&&1\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&1\\&5&3\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}4&0&1\\&3&2\\&&5\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&4&5\\&1&0\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&0&1\\&3&5\\&&2\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&4\\&0&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&0&1\\&5&2\\&&3\end{bmatrix}\underset{5}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}3&5&0\\&4&1\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}4&0&3\\&1&2\\&&5\end{bmatrix}\underset{4}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}2&4&1\\&5&0\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&0&3\\&1&5\\&&2\end{bmatrix}\underset{3}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&0\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&0&3\\&5&1\\&&2\end{bmatrix}\underset{2}{\overset{s}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&5\\&1&3\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{\underset{(3,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ & 3 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ & 2 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ & 2 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ & 0 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ & 4 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ & 0 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,4,1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ & 3 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 3 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ & 1 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 5 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 4 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ & 1 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ & 5 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,4,2,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ & 0 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,3,1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 0 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 1 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ & 1 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 0 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,3,2,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ & 2 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ & 3 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ & 1 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ & 4 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 0 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,1,4,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ & 3 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{5}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ & 2 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ & 0 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ & 4 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & 0 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{4}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & 4 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 0 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & 4 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ & 0 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ & 2 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ & 2 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{3}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ & 5 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ & 1 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ & 4 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ & 4 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&2&1\\&0&4\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&3\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&2&1\\&3&0\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&5\\&1&4\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&2&1\\&3&4\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&4\\&0&1\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&2&3\\&1&0\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&1\\&5&4\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&2&3\\&1&4\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&0\\&4&1\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&2&3\\&4&0\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&2\\&3&5\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&2&4\\&0&1\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}0&3&5\\&1&2\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&2&4\\&0&3\\&&1\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,2,4,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&2&4\\&3&0\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&3\\&2&5\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&3&0\\&2&1\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&3&0\\&2&4\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}4&2&5\\&1&3\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&3&0\\&4&2\\&&1\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,1,3,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&3&2\\&0&1\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&0\\&4&5\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&3&2\\&0&4\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}4&2&1\\&5&3\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&3&2\\&4&1\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&5\\&1&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&3&4\\&0&2\\&&1\end{bmatrix}\overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}5&2&4\\&0&3\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&3&4\\&2&1\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&4&0\\&1&2\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\&3&4\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&4&0\\&2&3\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}4&3&5\\&1&2\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&4&1\\&0&2\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&3\\&2&4\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&4&1\\&2&0\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&2\\&3&1\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&4&1\\&3&2\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&4\\&0&5\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&4&2\\&0&3\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}4&3&1\\&5&2\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&4&2\\&1&0\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&3\\&2&1\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&4&2\\&3&0\\&&1\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,2,3,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&4&3\\&1&2\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&0\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}5&4&3\\&2&0\\&&1\end{bmatrix}\overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}5&4&2\\&3&0\\&&1\end{bmatrix}.$$

Klasa 3, sadrži 144 elementa među kojima i $\begin{bmatrix}0&1&4\\&2&5\\&&3\end{bmatrix}\in\mathcal{C}_1$.

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix}\text{ reprezentant},\quad\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&3\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}4&5&0\\&3&1\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&3\\&5&4\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}2&3&5\\&1&0\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&1&4\\&2&5\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}3&4&1\\&5&2\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&5\\&2&3\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0\\&3&4\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&5\\&3&4\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}5&0&4\\&2&3\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&2&1\\&3&5\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}4&0&5\\&1&3\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&2&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,2,4,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&2&3\\&1&5\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&4\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&2&5\\&1&4\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}3&5&2\\&4&1\\&&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&3&1\\&4&5\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&3\\&0&1\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&3&2\\&5&1\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&3\\&0&2\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&3&4\\&1&5\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}5&2&3\\&0&4\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&3&5\\&2&1\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&3\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&4&1\\&5&2\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&2&5\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&4&3\\&5&1\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}5&3&2\\&4&0\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&4&5\\&1&2\\&&3\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,1,3,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&4&5\\&3&1\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&3\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&5&1\\&3&2\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\&4&3\\&&5\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&5&1\\&4&3\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}5&4&0\\&3&2\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&5&2\\&4&1\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}3&2&5\\&1&4\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&5&3\\&1&2\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}4&3&1\\&5&0\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&5&4\\&1&3\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&0\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&5&4\\&2&1\\&&3\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,1,4,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\&4&3\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,3,2,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}5&4&0\\&3&2\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&3\\&5&2\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}3&2&5\\&1&4\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&4\\&2&3\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}4&3&1\\&5&0\\&&2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&5\\&2&4\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&0\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&5\\&3&2\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&4\\&2&1\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\&3&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,4,2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&2&0\\&4&5\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}5&0&4\\&2&3\\&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\&0&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}4&5&0\\&3&1\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\&5&0\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&2&4\\&0&5\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}2&3&5\\&1&0\\&&4\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&2&5\\&3&0\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}3&4&1\\&5&2\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\&2&5\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}3&5&2\\&4&1\\&&0\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&3&2\\&0&5\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&3&2\\&4&0\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}4&0&5\\&1&3\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&3&4\\&2&0\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,4,1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&4&0\\&3&2\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&3\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&4&2\\&5&0\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&3\\&0&1\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&4&3\\&0&2\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,3,1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&4&5\\&2&0\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}5&2&3\\&0&4\\&&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&5&0\\&2&3\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&5\\&1&2\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&5&0\\&4&2\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&3\\&&4\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&5&2\\&0&3\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&2&5\\&&0\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&5&4\\&0&2\\&&3\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}5&3&2\\&4&0\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&0&1\\&3&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&5\\&1&2\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&3\\&&4\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,3,4,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&0&3\\&1&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&4\\&2&5\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&0&5\\&1&3\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}5&3&2\\&4&0\\&&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&1&0\\&3&5\\&&4\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,4,3,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&1&0\\&4&3\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&4\\&2&1\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&1&3\\&0&5\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}5&4&0\\&3&2\\&&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&1&3\\&5&4\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\&4&3\\&&5\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&1&4\\&0&3\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}3&2&5\\&1&4\\&&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&1&5\\&3&4\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}4&3&1\\&5&0\\&&2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&3&0\\&4&1\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}3&4&1\\&5&2\\&&0\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&3&1\\&4&5\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0\\&3&4\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&3&1\\&5&0\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}5&0&4\\&2&3\\&&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&3&4\\&0&1\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&3&4\\&1&5\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}4&5&0\\&3&1\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&3&5\\&1&0\\&&4\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,4,3,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&4&1\\&3&0\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}3&5&2\\&4&1\\&&0\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&4&3\\&1&0\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&4&3\\&5&1\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}4&0&5\\&1&3\\&&2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&4&5\\&3&1\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&4\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&5&0\\&3&1\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}5&2&3\\&0&4\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&5&1\\&4&3\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&3\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&5&3\\&0&1\\&&4\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,3,4,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}2&5&4\\&1&3\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&3\\&0&2\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&0&1\\&4&2\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}5&2&3\\&0&4\\&&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&0&2\\&5&4\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}4&1&3\\&0&5\\&&2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&0&4\\&1&2\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}2&5&3\\&0&1\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&0&5\\&2&4\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&3\\&0&2\\&&5\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&1&0\\&2&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}5&3&2\\&4&0\\&&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&1&2\\&0&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&1\\&5&3\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&1&2\\&4&5\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&5\\&1&2\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&1&4\\&2&5\\&&0\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,4,1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&2&0\\&4&5\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}4&3&1\\&5&0\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&2&1\\&4&0\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&0\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&2&1\\&5&4\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&4\\&2&1\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&2&4\\&0&5\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\&4&3\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&2&4\\&1&0\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}5&4&0\\&3&2\\&&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&2&5\\&1&4\\&&0\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,4,2,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&4&0\\&2&1\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}2&3&5\\&1&0\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&4&1\\&5&2\\&&0\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,3,1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&4&2\\&0&1\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{2}{\sim}}\begin{bmatrix}5&0&4\\&2&3\\&&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&4&2\\&5&0\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0\\&3&4\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&4&5\\&1&2\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&4&5\\&2&0\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}4&5&0\\&3&1\\&&2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&5&0\\&4&2\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{4}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&4\\&2&0\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&5&2\\&4&1\\&&0\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,3,2,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&5&4\\&0&2\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}4&0&5\\&1&3\\&&2\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}3&5&4\\&2&1\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&1\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 2 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ & 5 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ & 4 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(3,1,2,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ & 3 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ & 3 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ & 5 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(3,2,1,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ & 2 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ & 0 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 3 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ & 4 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ & 1 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ & 5 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 2 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ & 1 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(4,2,1,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 0 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 5 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ & 2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ & 3 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ & 2 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(4,1,2,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ & 3 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ & 0 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ & 2 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ & 3 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ & 4 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ & 4 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ & 1 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 3 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ & 2 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(3,1,4,2)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ & 2 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ & 4 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & 0 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 2 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ & 4 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ & 3 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ & 0 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(3,2,4,1)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ & 4 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(4,2,3,1)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ & 0 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ & 2 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{2}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 4 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ & 3 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(4,1,3,2)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{4}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ & 1 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

Klasa 4, sadrži 48 elemenata među kojima i $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ & 2 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \text{reprezentant}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ & 2 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ & 4 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(1,2,4,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ & 5 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(2,1,4,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ & 4 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(2,1,3,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 5 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(1,3,2,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ & 2 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 3 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(1,4,2,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 0 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 5 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&3&2\\&5&0\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&1\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&3&5\\&2&0\\&&4\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,4,1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&5&0\\&3&2\\&&4\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&5\\&2&1\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&5&3\\&0&2\\&&4\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,3,1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&0&1\\&4&3\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,3,4,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&0&4\\&1&3\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}1&5&3\\&0&2\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\&3&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,4,3,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&1&3\\&0&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\&5&3\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&3&1\\&4&0\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\&1&0\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,4,3,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&4&0\\&3&1\\&&5\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&5\\&2&0\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&4&3\\&0&1\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,3,4,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&1&2\\&5&4\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&5\\&2&1\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&1&5\\&2&4\\&&0\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,4,1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&1\\&4&5\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&4\\&1&2\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&2&4\\&1&5\\&&0\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,4,2,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&4&2\\&5&1\\&&0\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,3,2,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&4&5\\&2&1\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&5&1\\&4&2\\&&0\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,3,1,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&5&4\\&1&2\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&1\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&0&2\\&5&3\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&5\\&2&0\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}4&0&5\\&2&3\\&&1\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,1,4,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&2&0\\&3&5\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&5&3\\&0&2\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&2&3\\&0&5\\&&1\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,2,4,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}4&3&2\\&5&0\\&&1\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,2,3,1)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&3&5\\&2&0\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2\\&5&3\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&5&0\\&3&2\\&&1\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,1,3,2)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}4&5&3\\&0&2\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0\\&3&5\\&&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&0&1\\&4&3\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&0&4\\&1&3\\&&2\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,1,2,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&1&0\\&3&4\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&1\\&4&5\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&1&3\\&0&4\\&&2\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(3,2,1,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&3&1\\&4&0\\&&2\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,2,1,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&3&4\\&1&0\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&5\\&2&1\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&4&0\\&3&1\\&&2\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(4,1,2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&2\\&5&4\\&&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&4&3\\&0&1\\&&2\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}0&5&4\\&1&2\\&&3\end{bmatrix}.$$

Klasa 5, sadrži 96 elemenata među kojima i $\begin{bmatrix}4&0&2\\&3&1\\&&5\end{bmatrix}$, paralelnu strategiju.

$$\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix}\text{reprezentant},\quad \begin{bmatrix}0&1&4\\&3&2\\&&5\end{bmatrix}\overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&2&3\\&4&1\\&&5\end{bmatrix}\overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&2&4\\&3&1\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,1,4,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&2&4\\&5&3\\&&1\end{bmatrix}\overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&5\\&4&3\\&&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&2&5\\&4&3\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&0\\&5&4\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&3&1\\&2&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,2,4,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&3&2\\&1&4\\&&5\end{bmatrix}\overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&3&1\\&2&4\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&3&4\\&5&2\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&4&5\\&0&3\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&3&5\\&4&2\\&&1\end{bmatrix}\overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&2&5\\&4&3\\&&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&4&1\\&2&3\\&&5\end{bmatrix}\overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&3&1\\&2&4\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&4&2\\&1&3\\&&5\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(2,1,3,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&4&2\\&3&5\\&&1\end{bmatrix}\overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&3\\&2&5\\&&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&4&3\\&2&5\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&5&4\\&3&0\\&&2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&5&2\\&3&4\\&&1\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&3\\&4&5\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&5&3\\&2&4\\&&1\end{bmatrix}\overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&4&3\\&2&5\\&&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&3\\&4&5\\&&2\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,3,2,4)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&4\\&3&5\\&&2\end{bmatrix}\overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&3\\&4&5\\&&2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&2&4\\&5&3\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&2&5\\&4&3\\&&0\end{bmatrix}\overset{s}{\underset{5}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&4\\&3&2\\&&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&3&0\\&5&4\\&&2\end{bmatrix}\overset{p}{\underset{(1,4,2,3)}{\sim}}\begin{bmatrix}0&1&3\\&4&2\\&&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ & 5 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 4 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 4 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ & 3 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ & 3 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 2 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ & 2 & 5 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ & 1 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(2,3,1,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ & 3 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 2 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{(2,4,1,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ & 3 & 5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(3,1,4,2)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ & 5 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ & 4 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ & 5 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ & 4 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ & 3 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(3,2,4,1)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ & 1 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(4,1,3,2)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ & 0 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ & 1 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ & 0 & 4 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{5}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ & 4 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(4,2,3,1)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(1,3,4,2)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ & 1 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ & 5 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 2 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ & 1 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(1,4,3,2)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(2,4)}{\overset{(1,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(2,3,4,1)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ & 1 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & 3 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 4 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ & 3 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(2,3)}{\overset{(1,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ & 1 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ & 1 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{(2,4,3,1)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ & 2 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ & 1 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(3,1,2,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 0 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & 5 & 4 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 5 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ & 5 & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ & 0 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(3,2,1,4)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ & 1 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 4 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(4,1,2,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 0 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ & 3 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ & 0 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ & 0 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} \underset{3}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ & 3 & 5 \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ & 2 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(4,2,1,3)}{\overset{p}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ & 1 & 0 \\ & & 3 \end{bmatrix} \underset{(3,4)}{\overset{(1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ & 1 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \underset{1}{\overset{s}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ & 2 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & 3 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 4 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ & 2 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ & 3 & 1 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ & 3 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ & 3 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,4,1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ & 1 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ & 2 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ & 0 & 3 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ & 1 & 4 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ & 4 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,3,2,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ & 3 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ & 3 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ & 0 & 2 \\ & & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\underset{1}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ & 2 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,4)}{\underset{(2,3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ & 1 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ & 1 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(3,4,2,1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{p}{\underset{(4,3,1,2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 0 \end{bmatrix} \overset{(1,3)}{\underset{(2,4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ & 1 & 4 \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

Za kraj je priložen kôd koji je izgenerirao gornje klase strategija.

```
// compile: g++ klase.cpp -o klase -std=c++11

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <set>
#include <vector>
#include <string>
#include <algorithm>

using namespace std;

// glavni objekt, predstavlja ciklicki niz, odnosno njemu pridruzenu
// strategiju
//
// vec sadrzi 6 bojeva, redoslijed kojim ponistavamo elemente. primjerice,
// ako je vec = 2, 3, 0, 5, 1, 4, tada je matrica pridruzena strategiji,
//      * 2 3 0
// M =  2 * 5 1
//      3 5 * 4
//      0 1 4 *
//
// str sadrzi string u kojem pise iz koje je strategije i kojom relacijom
// ekvivalencije dobivena ova strategija
//
// operatori usporedivanja su overloadani da gledaju samo vec kod usporedbe,
// a ne i str jer bi u suprotnom u skupove strategija dodavali iste
// strategije koje su dobivene razlicitim relacijama ekvivalencije iz
// razlicitih strategija
class strat{
  public:
    vector < int > vec;
    string str;
    friend bool operator==(const strat &s1, const strat &s2){
      return (s1.vec == s2.vec);
    }
    friend bool operator!=(const strat &s1, const strat &s2){
      return !(s1 == s2);
    }
    friend bool operator<(const strat &s1, const strat &s2){
      return (s1.vec < s2.vec);
    }
};

// pretvara strategiju u string u formatu kompatibilnom LaTeX-u
string stratToStr(strat a){
```

```
  return "\\begin{bsmallmatrix}\n" +
    to_string(a.vec[0]) + "␣&␣" + to_string(a.vec[1]) + "␣&␣" +
    to_string(a.vec[2]) + "␣\\\\\n" + "␣␣&␣" + to_string(a.vec[3]) + "␣&␣" +
    to_string(a.vec[4]) + "␣\\\\\n" + "␣␣&␣␣␣&␣" + to_string(a.vec[5]) + "\n
        " +
    "\\end{bsmallmatrix}\n";
}

// ispisuje strategiju u formatu kompatibilnu LaTeX-u
// int k sluzi tome da se po tri strategije ispisu u isti red
void ispis(FILE *f, strat s, int k){
  fprintf(f, "&␣%s%s", stratToStr(s).c_str(), s.str.c_str());
  if (k != 2) fprintf(f, ",␣&␣");
  else fprintf(f, ",␣\\\\␣\n");
  return;
}

// ispisuje skup strategija u formatu kompatibilan LaTeX-u
void ispisSet(FILE *f, set < strat > s){
  set < strat >::iterator i;
  int k = 0;
  fprintf(f, "\\begin{align*}\n");
  for (i = s.begin(); i != s.end(); ++i){
    ispis(f, *i, k);
    k = (k+1)%3;
  }
  fprintf(f, "\\end{align*}\n");
  return;
}

// za danu strategiju generira sve shift ekvivalentne strategije
set < strat > shift(strat a){
  set < strat > s;  // skup koji ce sadrzavati sve shift ekvivalentne
  strat *b;         // pomocna strategija
  int i, j;
  s.insert(a);      // odmah ubacimo pocetnu strategiju u skup
  for (i = 1; i < 6; i++){ // stvaramo 5 shift ekvivalentnih strategija
    b = new strat;
    (*b).vec.resize(6);
    for (j = 0; j < 6; j++){
      (*b).vec[j] = (a.vec[j]+i)%6; // pravilo shift ekvivalencije
    }
    (*b).str = "\\overset{s}{\\underset{" + to_string(6-i) + "}{\\ee}}\n" +
      stratToStr(a); // zapisujemo kako smo dobili novu strategiju
    s.insert(*b); // novu strategiju ubacujemo u skup
    delete b;
  }
  return s;
}

// vraca redom 0, 1, 2, 3, 4, 5 za elemente matrice strogo gornjeg trokuta,
// po redcima, odnosno strogo donjeg po stupcima
int poz (int i, int j){
  if (i < j){
    if (i == 1) return j-2;
    if (i == 2) return j;
    if (i == 3) return 5;
  }
  return poz(j, i);
  printf("greska\n");
  return -1;
}
```

```
// za danu strategiju generira sve permutacijski ekvivalentne strategije
set < strat > perm(strat a){
  set < strat > s;  // skup koji ce sadrzavati sve permutacijski
      ekvivalentne
  strat *b;         // pomocna strategija
  int cetiri[4] = {1, 2, 3, 4}; // niz permutacija
  int i, j;
  s.insert(a);      // odmah ubacimo pocetnu strategiju u skup
  while (next_permutation(cetiri, cetiri + 4)){ // za svaku novu permutaciju
    b = new strat;                              // stvaramo novu strategiju
    (*b).vec.resize(6);
    for (i = 1; i <= 3; i++){
      for (j = i+1; j <= 4; j++){
          // pravilo permutacijske ekvivalencije
        (*b).vec[poz(cetiri[i-1],cetiri[j-1])] = a.vec[poz(i, j)];
      }
    }
    (*b).str = "\\overset{p}{\\underset{(" + to_string(cetiri[0]) + "," +
      to_string(cetiri[1]) + "," + to_string(cetiri[2]) + "," +
      to_string(cetiri[3]) + ")}{\\ee}}\n" + stratToStr(a);
        // zapisujemo kako smo dobili novu strategiju
    s.insert(*b); // novu strategiju ubacujemo u skup
  }
  return s;
}

// za danu strategiju generira sve ekvivalentne strategije, dobivene samo
// pomocu jedne dopustene transpozicije
set < strat > ekvi(strat a){
  set < strat > s;  // skup koji ce sadrzavati sve ekvivalentne
  strat *b;         // pomocna strategija
  s.insert(a);      // odmah ubacujemo pocetnu strategiju u skup
  if ((abs(a.vec[5]-a.vec[0])) == 1){ // provjera jesu li pivotni parovi (1,
      2)
    b = new strat;                    // i (3, 4) uzastopni
    (*b) = a;
    (*b).vec[0] = a.vec[5];
    (*b).vec[5] = a.vec[0];
    (*b).str = "\\overset{(1,2)}{\\underset{(3,4)}{\\ee}}\n" + stratToStr(a)
      ;
        // zapisujemo kako smo dobili novu strategiju
    s.insert(*b); // novu strategiju ubacujemo u skup
    delete b;
  }
  if ((abs(a.vec[1]-a.vec[4])) == 1){ // provjera jesu li pivotni parovi (1,
      3)
    b = new strat;                    // i (2, 4) uzastopni
    (*b) = a;
    (*b).vec[1] = a.vec[4];
    (*b).vec[4] = a.vec[1];
    (*b).str = "\\overset{(1,3)}{\\underset{(2,4)}{\\ee}}\n" + stratToStr(a)
      ;
        // zapisujemo kako smo dobili novu strategiju
    s.insert(*b); // novu strategiju ubacujemo u skup
    delete b;
  }
  if ((abs(a.vec[2]-a.vec[3])) == 1){ // provjera jesu li pivotni parovi (1,
      4)
    b = new strat;                    // i (2, 3) uzastopni
    (*b) = a;
    (*b).vec[2] = a.vec[3];
```

```
    (*b).vec[3] = a.vec[2];
    (*b).str = "\\overset{(1,4)}{\\underset{(2,3)}{\\ee}}\n" + stratToStr(a)
        ;
        // zapisujemo kako smo dobili novu strategiju
    s.insert(*b); // novu strategiju ubacujemo u skup
    delete b;
  }
  return s;
}

// za skup strategija generira sve strategije slabo ekvivalentne nekoj iz
// skupa ali dobivene samo pomocu jedne shift ekvivalencije ili jedne
// dopustene transpozicije
set < strat > weakSet(set < strat > s){
  set < strat > p, t;
  set < strat >::iterator i;
  p = s;
  for (i = s.begin(); i != s.end(); ++i){
    t = shift(*i);
    p.insert(t.begin(), t.end());
    t = ekvi(*i);
    p.insert(t.begin(), t.end());
  }
  return p;
}

// vraca svih 6! = 720 strategija
set < strat > sve (void){
  set < strat > s;
  int sest[6] = {0, 1, 2, 3, 4, 5};
  strat w;
  w.vec.resize(6);
  do {
    w.vec[0] = sest[0];
    w.vec[1] = sest[1];
    w.vec[2] = sest[2];
    w.vec[3] = sest[3];
    w.vec[4] = sest[4];
    w.vec[5] = sest[5];
    w.str = "\\text{reprezentant}\n";
    s.insert(w);
  } while (next_permutation(sest, sest + 6));
  return s;
}

// za dani skup strategija generira sve slabo ekvivalentne strategije
set < strat > expand (set < strat > s){
  set < strat > p;
  while (p.size() != s.size()){ // radi po jednu shift ekvivalenciju ili
    p = s;                      // dopustenu traspoziciju dok god time
    s = weakSet(p);             // dobiva bar jednu novu strategiju
  }
  return s;
}

int main (void){
  set < strat > s, p, t;  // s sadrzi sve strategije, p sve iz dane klase
                          // a t je pomocni
  set < strat > :: iterator it;
  int k = 0, n = 0; // k = broj klasa, n je varijabla za provjeru
  strat w;
  FILE *f;
```

```
  f = fopen("klase_ekvivalencije.txt", "w");
  s = sve();  // stavi u s sve strategije
  while (!s.empty()){
    w = *(s.begin()); // uzmi w iz s, koji ce biti reprezentant klase
    t.clear();
    t = perm(w);
    p = expand(t);  // u p stavi sve permutacijski ili slabo ekvivalentne w
    for (it = p.begin(); it != p.end(); ++it){ // iz s izbrisi p
      s.erase(*it);
    }
    k++;  // povecaj broj klasa
    fprintf(f, "\\noindent\\rule[0.5ex]{\\linewidth}{1pt}\nKlasa $%d$,"
      "sadrzi $%lu$ elementa medu kojima i\n$\\begin{bsmallmatrix}\n0 & 0 & 
          0"
      "\\\\\n  & 0 & 0 \\\\\n  &   & 0\n\\end{bsmallmatrix} \\in \\C_1$.\n",
      k, p.size());
      // ispisi header za pocetak klase kompatibilan LaTeX-u
    ispisSet(f, p); // ispisi klasu
    n += p.size();
  }
  printf("n = %d, klasa = %d\n", n, k); // ispisi provjeru na ekran
  return 1;
}
```

Bibliografija

[1] E. Begović, *Konvergencija blok Jacobijevih metoda*, doktorski rad, 2014.

[2] E. Begović Kovač, V. Hari, *On the Global Convergence of the Jacobi Method for Symmetric Matrices of order 4 under Parallel Strategies*, 2015.

[3] V. Hari, E. Begović Kovač, *Convergence of the Cyclic and Quasi - cyclic Block Jacobi method*, preprint, Sveučilište u Zagrebu, 2016.

[4] E. R. Hansen, *On Cyclic Jacobi Methods*, SIAM J. Appl. Math. 11, 1963.

[5] G. E. Forsythe, P. Henrici, *The Cyclic Jacobi Method for Computing the Principal Values of a Complex Matrix*, Trans. Amer. Math. Soc. 94, 1960.

[6] C. G. J. Jacobi, *Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen*, Crelles Journal, 1846.

Sažetak

U ovom radu prikazali smo Jacobijevu metodu za hermitske matrice reda 4 definiranu općom cikličkom pivotnom strategijom. Uveli smo relacije ekvivalencije $\sim$, $\overset{s}{\sim}$, $\overset{w}{\sim}$, $\overset{p}{\sim}$ na skupu svih cikličkih strategija te pokazali da konvergenost metode pod nekom strategijom povlači konvergentnost metode pod njoj ekvivalentnom strategijom. Zatim smo pokazali globalnu konvergenciju metode pod strategijama iz specijalne familije $\mathcal{C}_1$ te pod jednom paralelnom strategijom. Pomoću računalnog programa podjelili smo 720 cikličkih strategija u 5 klasa ekvivalencije, te u svakoj klasi pronašli strategiju za koju smo pokazali globalnu konvergenciju. To je bilo dovoljno da se pokaže globalna konvergencija metode pod svih 720 cikličkih strategija.

Summary

In this work we have presented the Jacobi method for Hermitian matrices of order 4 defined by a general cyclic pivot strategy. We have introduced equivalence relations $\sim$, $\overset{s}{\sim}$, $\overset{w}{\sim}$, $\overset{p}{\sim}$ on the set of cyclic strategies and shown that convergence of the method under some strategy implies convergence of the method under an equivalent strategy. Then we have shown the global convergence of the method under the strategies from the special family $\mathcal{C}_1$ and under one parallel strategy. Using a computer program, we have partitioned the set of 720 cyclic strategies in 5 equivalence classes. For each class we have found a strategy for which the method is convergent. That is enough to show the global convergence of the method under all 720 cyclic strategies.

Životopis

Grgur Valentić rođen je 3. 10. 1992. u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Malešnica upisuje zagrebačku V. gimnaziju. Sve razrede završava odličnim uspjehom te sudjeluje na domaćim matematičkim natjecanjima kao i na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi. Godine 2011. upisuje preddiplomski studij matematike na Matematičkom odjseku PMF-a u Zagrebu. Godine 2014. upisuje diplomski studij Primjenjena matematika. Tokom studija ima prosjek ocjena 4.8, te sudjeluje na studentskim natjecanjima iz matematike uključujući International Mathematics Competition.