SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tanja Kralj

TALESOVI TEOREMI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mirko Polonijo

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Roditeljima i sestri...
Hvala, što ste vjerovali u mene...

Sadržaj

Uvod

Odavno je poznato da su babilonska i egipatska civilizacija dale temelje starogrčkoj matematici, fizici i astronomiji. Mnogi sačuvani starogrčki tekstovi spominju putovanja grčkih znanstvenika u područje starog Babilona i Egipta. Najčešće spominjana imena su Talesa i Pitagore. Osim što su njih dvojica u tim područjima upoznati sa starim znanjima, pretpostavlja se da su mnoga i preuzeli. Babilon i Egipat su nam ostavili mnogo nepovezanih podataka i činjenica, a Grci su ta znanja pokušali grupirati obzirom na uzročno - posljedične veze i posebne slučajeve. Tako se u području matematike, u grčko doba, prešlo na apstraktan način razmišljanja, generalizaciju i deduktivni oblik zaključivanja. Na tom se području posebno istaknuo Tales koji je dao primjere prvih dokaza. Stoga ćemo se u ovom radu i usredotočiti na njegov život i postignuća, prvenstveno ona na području matematike.

Diplomski je rad podijeljen u tri poglavlja. Na početku rada je dan uvid u Talesov život kao filozova, matematičara i astronoma. Od općih činjenica, do anegdota koje se povezuju uz njegov rad i djelovanje. Srednji dio rada govori o pet teorema čije je otkrivanje pripisano Talesu. Navedeni su i dokazi teorema - u obliku kakvom ih danas poznajemo. Talesovi su dokazi uglavnom bili na intuitivnoj razini, potkrijepljeni raznim primjerima i pokusima. Treći dio rada prikazuje obrađenu temu kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko (gimnazijski program) obrazovanje učenika u hrvatskim školama, kroz primjere i razne metode rada s učenicima.

Mnogo je različitih izvora, zapisa i nedoumica o Talesovu životu, ali ono što mu nitko ne osporava je njegova svestranost i genijalnost, preciznost i osobitost. Stoga njegovo djelovanje i otkrića te djela njegovih prethodnika i neposrednih nasljednika imaju važan značaj u razvoju matematike i obrazovanju, te nam pomažu u rješavanju raznih zadataka i problema.

Poglavlje 1

Tales iz Mileta

1.1 Biografski podaci

Tales iz Mileta, "otac grčke filozofije", živio je od 624. do 546. godine prije novog vijeka. Kako su tada važnu ulogu imale Olimpijske igre, računa se da je Tales rođen za vrijeme 39., a umro za vrijeme 58. Olimpijade - prateći atletsko natjecanje, u dobi od 78 godina. Bio je prvi grčki matematičar, astronom i filozof. Aktivno je djelovao na gotovo svim područjima društvenog života onog vremena. Njegova se genijalna svestranost odrazila na sva područja tadašnjeg života. Bio je polihistoričar, prirodnjak, graditelj, političar, trgovac, a ujedno i ugledni građanin Mileta. Godine 582. (prije nove ere) prorekao je pomrčinu Sunca. Ovo je bilo novo otkriće, obzirom da je za to doba bilo uobičajeno predviđanje pomrčine Mjeseca. Zbog tog je događaja Tales uvršten među sedam legendarnih mudraca i tako postao prvi filozof i matematičar koji je uvršten među njih. Navedena "titula" (mudraca) je bila nagrada genijalnosti, a ne titula razine obrazovanja.
Roditelji su mu bili feničkog porijekla, majka Kleobulina i otac Heksamija. Prema raznim predajama, nikada se nije ženio i nije imao djece, ali je posvojio i odgojio sestrinog sina. Pojedinosti tog događaja nisu poznati.

Za Talesova je života grad Milet, u antičkoj regiji Joniji (regija na središnjoj obali zapadne Male Azije; danas područje oko grada Izmira, Turska), bio razvijeno i važno trgovačko središte. Stoga je to mjesto bilo izvrsno za širenje raznih znanja, razvoj zanimanja i poslova njegovih stanovnika. Začetnik filozofije i znanosti u tome gradu je bio upravo Tales. Razmišljanja Milećana su se temeljila na njegovim idejama o podrijetlu života, (općim) zakonitostima, spoznajama o nekim fizikalnim svojstvima tvari. Njegova slika svijeta, Zemlje, je bila potpuno drugačija od razmišljanja naroda prvih civilizacija. Smatrao je da zemlja lebdi u praznom prostoru, a danas se s takvim razmišljanjem u jednom dijelu, možemo i složiti. Zanimanjem za fizikalna svojstva tvari, s druge je strane, uočio da se voda pojavljuje u tri agregatna stanja: čvrstom, tekućem i plinovitom. Tales nikada nije prihvatio neku tvrdnju, bez da spozna uzroke pojave o kojoj ta tvrdnja govori.

Veličinu njegovog lika i djela opisuje i zabilježeni natpis s njegova groba - za koji nije poznato gdje se nalazi:

"Mali je ovaj grob - ali slava dopire do neba -
Ovo je mjesto najmudrijeg Talesa."

1.2 Talesovi teoremi

Iako je Tales bio zaista svestran, teško je odrediti njegova točna zaključivanja, budući da ništa od njegovih znanstvenih i filozofskih spisa nije sačuvano. Ako je išta od svojih zaključaka Tales i zabilježio, sve je izgubljeno već u Aristotelovo doba, 384. - 322. godine prije novog vijeka. Pretpostavlja se ipak da je, obzirom na dokazivanje geometrijskih problema, bilježio svoje zaključke. Većina njegovih otkrića na području matematike pripada geometriji.
Prvi sačuvani zapisi koji govore o Talesovom djelovanju su Proklovi. Proklo (411.-485., grčki filozof) je bio Euklidov (330.-275.pr.Kr., grčki matematičar) komentator, ali je bilježio i postignuća Euklidovih prethodnika. Tako je Talesu pripisao nekoliko teorema koji se i danas spominju u raznim knjigama o povijesti matematike.
Pripisao mu je otkrivanje sljedećih "teorema":

1. Krug je svakim svojem promjerom podijeljen na dva dijela jednakih površina.
2. Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.
3. Kutovi između dva pravca koji se sijeku su jednaki (misli se na vršne kutove!).
4. Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.
5. Kut nad promjerom kružnice je pravi.

Navedene tvrdnje su zapisane u obliku za koji se vjeruje da je najsličniji izvornom.

Prvi po redu teorem je Tales opisao demonstrirajući situaciju (vjerojatno crtežom), drugi je samo izrekao. Jedan od Aristotelovih najvažnijih učenika, Eudomus (Rhodos, 370. - 300. g. pne., grčki filozof, bilježio Aristotelova predavanja i djela) je tvrdio da je teorem o vršnim kutovima Tales također samo izrekao, ali ga nije obrazložio, strogo dokazao. Navodno je teorem o sukladnosti Tales koristio pri određivanju udaljenosti broda od obale (detaljnije kasnije) što pokazuje da je sigurno bio upoznat s njim. Prvu je tvrdnju Euklid u *Elementima* naveo kao definiciju. Tales ju je također radije opisao i demonstrirao nego dokazao jer je, pretpostavlja se, bio siguran da navedena pravilnost vrijedi. Pravilnost o površini kruga je zapravo matematička interpretacija situacije koju je Tales uočio na spomenicima u Egiptu. Naime, na spomenicima su zabilježene "figure" krugova podijeljenih na sukladne dijelove dvama, četirima ili sa šest dijametara. Tales je uočio da bi sličnu situaciju imali podijelimo li krug jednim dijametrom, o čemu teorem i govori.

Posljednji po redu navedeni teorem (o kutu nad promjerom kružnice) je danas poznatiji kao *Talesov teorem*. Povjesničari smatraju da je taj fenomen (iskaz teorema) prvi opisao upravo Tales - bila je to novina koju nije preuzeo od Egipćana. Legenda kaže da je zbog tog otkrića u čast bogovima žrtvovao vola.

Preostale tvrdnje se rijetko, u svakodnevnom govoru, pripisuju Talesu. Budući da nisu sačuvani nikakvi pisani dokazi, teško je odrediti i poredak kojim ih je Tales "otkrio" ili dokazao.

Još jedan teorem, koji samo nosi ime po Talesu je *Talesov teorem o proporcionalnosti*. On glasi: Dva paralelna pravca na krakovima nekog kuta odsijecaju proporcionalne dužine. Navedeni je teorem dokazao Euklid. U svom djelu, Elementi, je dokazao proporcionalnost površina trokuta jednakih visina, tj. upravo ovaj teorem, interpretiran na drugi način. To je još jedna od činjenica zapisanih u Proklovim djelima (osvrtima). Teorem je nazvan po Talesu jer je on prvi koji ga je "koristio", mjereći visinu Keopsove piramide, bez stroge matematičke interpretacije. Kasnije ćemo vidjeti o čemu je riječ. Svi ranije navedeni teoremi su također navedeni i opisani u Euklidovim Elementima, i to prvom dijelu.

Važno je i napomenuti da je upravo Tales prvi koji je postavio "logičke temelje" dokazivanja teorema. Drugim riječima, prvi je uočio da nije dovoljno samo opažati razne pojave, već je potrebno i pokazati (dokazati) zašto vrijedi uočena pravilnost. Vjeruje se da su se njegovi prvi dokazi temeljili na induktivnom zaključivanju, ponavljanjem pokusa. Rezultate tih pokusao je smatrao upravo dokazima. Bilo je to revolucionaran potez onoga doba.

"Proširenjem" egipatske matematike, Tales je prešao na apstraktno mišljenje i dokaz. U njegovim su postupcima i razmišljanju ipak bili vidljivi veliki utjecaji egipatske matematike. Ponekad je promišljao na apstarktnoj, a ponekad na konkretnoj razini. Pojave je opisivao racionalno, a s druge strane empirijski, komentirao je Proklo. Bez obzira što su neka znanja otkrivena još za vrijeme Babilona, u Egiptu, Grci su uvijek znanja interpretirali na nov način. Tako je i Tales učinio veliki pomak i znanost "doveo" na novu razinu, razinu apstrakcije.

1.3 Keopsova piramida i nautika

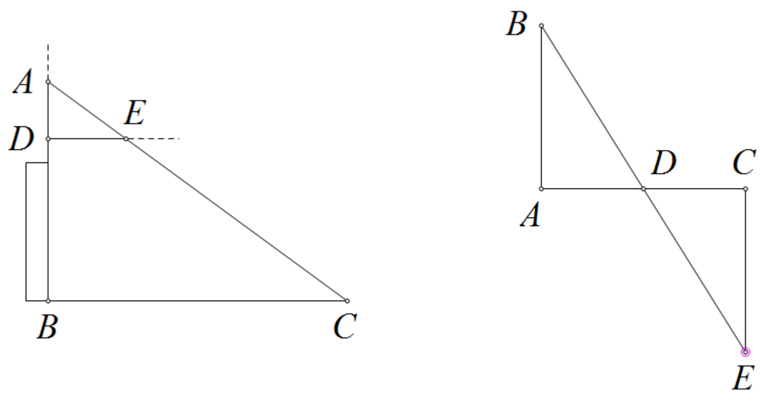
Kao svestrana osoba, Tales je izazvao opće divljenje demonstracijom mjerenja Keopsove piramide koristeći duljinu sjene. To je samo jedna u nizu "priča" koje mu se pripisuju.

Kako je grad Milet za Talesova života bio važno trgovačko središte, tako su se ondje često sastajali trgovci ulja i soli s kojima je Tales raspravljao, posebice o matematici i astronomiji. Kako se njegovo zanimanje za znanost na taj način sve više proširivalo, odlučio se zaputiti do Egipta, grčkih naseobina smještenih u dolini Nila. Ondje su ga egipatski svećenici dodatno poučavali raznim mjerenjima i izračunavanjima jednostavnih zadaća. Smatra se da su odande potekli začeci geometrije, koja se zbog čestih poplava i potrebe za mjerenjem parcela zemlje, i razvila. Tales je puno otkrivao i učio sam, pa je i ova priča, objavljena u Colerusovoj knjizi (Egmont Colerus, *Od Pitagore do Hilberta*, Italija, 1939.) rekonstrukcija trenutka mjerenja Keopsove piramide. Kasnije je uočeno da je Tales piramidu izmjerio koristeći teorem o proporcionalnosti.

Priča ide ovako: *Tako on stoji u pustinjskom pijesku podno velike piramide. Jedan od svećenika ga smiješeći se zapita, koliko je visoka piramida kralju Chufuu (Keopsu). Tales malo razmišlja pa odgovara, da on neće visinu cijeniti od oka, nego će je izmjeriti i to bez ikakvog naročitog pribora, bez svakog pomoćnog sredstva. Legao je u pijesak i izmjerio dužinu tijela.*
"Što li to namjerava?" - pitaju se svećenici. "Stat ću jednostavno, - objašnjava on, - na jedan kraj ove izmjerene dužine svoga tijela i čekat ću, dok moja sjena ne bude točno onoliko dugačka, koliko je dužina moga tijela. U istom trenutku mora i dužina sjene piramide vašeg faraona Chufua iznositi točno onoliko koraka, koliko je i piramida visoka."
Dok je svećenik zabezeknut nevjerojatnom jednostavnošću rješenja još razmišljao, da tu nije možda pogrešan zaključak, da se tu ne krije možda neka smicalica, Tales već dalje govori: "A ako hoćete, da vam ovu visinu izmjerim u ma koje doba dana, tada ću zabosti ovaj štap u pijesak. Gle! - njegova sjena iznosi upravo polovinu štapa. Prema tome mora sada i sjena piramide iznositi polovinu njene visine. Vi ste inače sposobni, da mjerenja izvodite vrlo točno. Treba samo dužinu štapa usporediti sa dužinom sjene, pa onda - da dobijete visinu piramide - pomnožite duljinu sjene piramide s dobivenim brojem." (Sevdić, 1947.) (vidi [18])

Ovakvo je zaključivanje zadivilo Egipćane, posebice svećenike - Talesove učitelje. Tales je do opisanog zaključka vjerojatno došao mjerenjem vlastite visine i svoje sjene, nizom pokušaja. Na kraju je shvatio, ako se sjena konkretnog objekta podudara s visinom objekta, onda to vrijedi za svaki objekt. Navedena je priča lijep uvod u razumijevanje samog teorema o proporcionalnosti (koji ćemo kasnije i dokazati), posebice kao motivacija učenicima u nastavi matematike.

Još jedan zabilježeni doprinos je onaj nautici. Tales je pronašao odgovor na još jedan, tada se činilo, nerješiv problem. Izračunao je udaljenost broda od obale. Ranije smo već spomenuli da je pri rješavanju problema vjerojatno koristio *četvrti* teorem, o sukladnosti trokuta. Ni ova priča nije pošteđena raznih verzija o metodama mjerenja.
Prva metoda pretpostavlja da je Tales popevši se na toranj smješten na samoj obali izmjerio udaljenost, koristeći sličnost trokuta. Demonstrirajmo situaciju pomoću skice. Uz oznake kao na slici 1.1 lijevo; sa B označimo toranj, C brod, sa A mjesto promatranja (Talesov položaj). Točka A je smještena vertikalno od točke B, pa je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu B. Dakle, $\overline{BC}$ označava razinu mora. Potom je potrebno odabrati točku D koja pripada $\overline{AB}$ te točku E koja pripada $\overline{AC}$, sa svojstvom da je $\overline{DE}$ paralelna s $\overline{BC}$. Također, točku D (tj. E) je potrebno postaviti tako da je lako moguće izmjeriti udaljenost tih točaka od točke A. Dakle, lako uočavamo da je i trokut ADE pravokutan s pravim kutom pri vrhu D. Odnosno, trokuti ABC i ADE su slični. Dakle, u proučavanoj je situaciji $|AB|$ poznata, dok $|AD|$ i $|AE|$ možemo izmjeriti. Obzirom da su trokuti ABC i ADE slični, vrijedi: $|CB|$:$|BA|$=$|ED|$:$|DA|$. Označimo li $|AD| = l$, $|DE| = m$, $|AB| = h$ možemo odrediti $|BC|$. Lakim računom izračunamo udaljenost broda od obale, tj. $|BC| = \dfrac{hm}{l}$.



Slika 1.1: Kako je Tales izmjerio udaljenost broda od obale

Nije teško uočiti da se ova metoda ne slaže s četvrtim po redu teoremom, tj. sa Eudomusovim komentarom tog Talesovog teorema (o sukladnosti trokuta). Ukoliko je Tales traženu udaljenost izmjerio na opisani način, onda nije teško uočiti da je metoda vrlo slična onoj mjerenja Keopsove piramide. Ova metoda stavlja fokus na sličnost trokuta, koja je usko vezana uz Talesov teorem o proporcionalnosti, koji je (kako je i rečeno) koristio i pri mjerenju piramide. Ista metoda, demonstrirana na dva različita primjera, a interpretirana na razne načine.

Drugi zabilježeni način, koji je detaljnije komentirao matematičar Paul Tannery (1843.-1904.), je prikazan na slici 1.1 desno. Dakle, promotrimo li skicu potrebno je odrediti udaljenost od točke A do (nepristupačne) točke B. Prvo je potrebno izmjeriti udaljenost od točke A do (proizvoljne) točke C, tako da je $\overline{AC}$ okomita na $\overline{AB}$. Potom odredimo točku D, polovište $\overline{AC}$. Produžimo li $\overline{BD}$ preko vrha D, kao na slici (1.1 desno), te iz vrha C nacrtamo okomitu dužinu na $\overline{AC}$. Točku presjeka nacrtanih pravaca označimo s E. Po Talesovom teoremu (K-S-K) o sukladnosti trokuta, $|CE|$=$|AB|$. $|CE|$ je moguće izmjeriti pa je odmah i tražena udaljenost, $|AB|$, poznata.

Ova metoda pak odgovara Talesovom teoremu o sukladnosti trokuta, ali je mnogi smatraju nerealnom i presloženom. Obzirom da je, u pravilu, jako teško imati dovoljno slobodnog prostora za provođenje opisanog mjerenja teško je predvidjeti je li ova metoda provedena. I u ovom slučaju, puno toga ostaje samo za nagađati.

Osim navedenih priče, uz Talesov se život vežu i mnoge anegdote, ali i izreke. Od Aristotelove priče kako je Tales predvidio dobar urod maslina u Grčkoj i zakupio sve maslinike kako bi zaradio u sljedećoj berbi, do Platona koji spominje Talesov pad u zdenac dok je hodajući promatrao nebo i zvijezde. Zabilježena je i jedna simpatična rečenica koju mu je u tom trenutku uputila starica, pomažući mu izaći iz zdenca: ”Kako očekuješ da ćeš razumjeti što se događa gore na nebu kada ne vidiš ni što ti je pod nogama?!”. Spominje se i priča o Talesu i muli, koja je - noseći teret sa soli, otkrila da ako teret natopi u potoku, sol će se otopiti i bit će joj lako nositi ono što ostane. Tales je ipak bio mudriji pa joj je, otkrivši prevaru, umjesto tereta u vreće natrpao spužve. Mula je na kraju odustala od svojih pokušaja prevare. Jednom je prilikom iskoristio i svoje znanje o inžinjerstvu. Napravivši umjetni kanal, preusmjerio je rijeku Halys (rijeka u današnjoj Turskoj, ujedno i najdulja rijeke koja izvire i ”završava” na teritoriju Turske) i tako onemogućio vojsku perzijskog kralja Croesusa (Kreza; 595.-547.pr.Kr.). Nakon obrane napada, preusmjerio je rijeku ponovno u njeno korito.

1.4 Matematika nakon Talesa

Osvrnemo li se na Talesova postignuća možemo uočiti kako je bio prvi koji je objasnio razne prirodne fenomene, bez uplitanja mitološke i teološke strane, svojstvenih za njegovo doba. Bili su to počeci razvoja znanstvenih metoda, odbacujući tradiciju. Njegova su razmišljala na početku bila individualna, bez potpore drugih znanstvenika. Promatrajući daljnji rad filozofa i otkrića onoga doba, uviđamo utjecaj Talesovih zaključaka na njih - napose u području matematike.

Promatramo li matematiku kao apstraktnu znanost, uviđamo da su prva apstraktna razmišljanja i dokazi povezani uz Talesov rad. Utjecaj takvog oblika razmišljanja je vidljiv i u vrijeme Pitagore (570.-497.g.pr.Kr.) koji je razmatrao apstraktne geometrijske objekte. Pitagora je prvi koji je i brojeve razmatrao na toj razini. Tako su Tales i Pitagora prvi začetnici apstraktnih matematičkih pojmova kojima su njihovi sljedbenici objašnjavali razne pojave, a prvenstveno strukturu svemira.

Osim na Pitagoru, Tales je utjecao i na Euklida te Arhimeda. Euklid je, kako smo već spominjali, u svojim Elemetima zapisao svoja i postignuća svojih prethodnika i suvremenika. Zabilježio je u njima i dokaze 400-tinjak teorema, u onom obliku kakvom ih danas poznajemo. Arhimed (287.-212.g.pr.Kr., grčki fizičar, astronom, jedan od najvećih matematičara starog vijeka) je prvi koji je odredio približnu vrijednost broja ”pi”, tj. interval unutar kojeg se nalazi vrijednost tog broja. Tako su starogrčki matematičari, u najvećoj mjeri pod utjecajem Talesovih otkrića i načina razmišljanja, otkrivali nove pojave i detaljno obrazlagali sve postupke zaključivanja.

Iako su poznati kao začetnici brojnih teorija i zakonitosti, starogrčki matematičari nisu znali odgovor na tri pitanja. Kako konstruirati kocku čiji je obujam jednak dvostrukom obujmu zadane kocke, kako konstruirati kvadrat jednake površine zadanom krugu, ali i kako podijeliti kut na tri jednaka dijela pomoću šestara i ravnala.

Starogrčka nam je matematika tako ostavila razne teoreme, njihove dokaze, ali i činjenice bez koje bi razumijevanje matematike bilo nezamislivo. Kao takva, uvelike je doprinijela razvoju matematike kakvom je danas poznajemo, kao jednom od najvažnijih znanosti.

Poglavlje 2

Dokazi Talesovih teorema

U ovom ćemo poglavlju navesti iskaze teorema koji se pripisuju Talesu, na onaj način kako se interpretiraju u današnjoj literaturi te ih na isti način i dokazati. Stoga ćemo i poredak teorema prilagoditi literaturi, jer neke od tvdnji koje ćemo navesti koristimo pri dokazivanju preostalih.
Važno je napomenuti da pojedine teoreme danas uzimamo za definicije, a neke za propozicije. Taksonomija se ipak većinom podudara s onom Euklidovom, zabilježenom u prvom dijelu njegovih Elemenata. Detaljnije u naslovima koji slijede.

2.1 Teorem o površini kruga

Tales: *Krug je svakim svojem promjerom podijeljen na dva dijela jednakih površina.*

Prvi "teorem" koji se pripisuje Talesu je o vezi promjera i površine kruga. Navedenu je tvrdnju Euklid u Elementima interpretirao kao definiciju.
Navedimo i promotrimo pojmove koji se spominju u definiciji o kojoj govorimo.

Kružnica je skup svih točaka ravnine na jednakoj udaljenosti od jedne čvrste točke ravnine (središta kružnice).

Krug je skup svih točaka ravnine ograničen kružnicom.

Krug je zatvoren ako njegova kružnica pripada krugu. Ako točke kružnice ne pripadaju krugu, kažemo da je krug otvoren. Kružnicu stoga nazivamo rubom kruga.

Tetiva kružnice (ili zatvorenog kruga) je svaka dužina kojoj su krajevi dvije različite točke kružnice. **Promjer** kružnice je tetiva koja prolazi središtem kružnice. Promjer je stoga najdulja tetiva.

Najjednostavnije rečeno, **površina** je geometrijski pojam kojim se mjeri veličina onog dijela ravnine koji zauzima geometrijski lik.

Napomenemo li da su ranije navedeni pojmovi opisani na najjednostavnijoj razini, onako kao se spominju u školskoj literaturi, lako je uočiti da se u istinitost navedene definicije ne trebamo uvjeravati (na razini osnovne ili srednje škole). Ona izravno slijedi iz navedenih opisa. Ranije je naveden razlog koji je najvjerojatnije nagnao Talesa na otkrivanje ove pravilnosti, odnosno - njene matematičke interpretacije. (vidi prvi odjeljak u 1.2, na stranici 5).

2.2 Teorem o sukladnosti trokuta (K-S-K)

Tales: *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.*

Ukoliko su dvije dužine jednakih duljina, kažemo da su sukladne. Analogno za kutove - dva su kuta sukladna ako imaju istu mjeru. Slično vrijedi i za trokute.

Definicija 2.2.1. *Trokuti su sukladni ako su odgovarajuće stranice jednakih duljina i odgovarajući kutovi jednakih veličina.*

Napomena 2.2.2. *Sukladnost dvaju trokuta, $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ označavamo sa $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Iz ove definicije odmah vidimo da "zahtijeva" previše. Stoga su određeni minimalni, odnosno dovoljni uvjeti za sukladnost dvaju trokuta. Sljedeći teoremi nam opisuju te dovoljne uvjete. Poznata su četiri teorema o sukladnosti trokuta. Smatra se da je jedan od njih otkrio i prvi dokazao upravo Tales pa ćemo navesti dokaz tog teorema.

Teorem 2.2.3 (S-K-S teorem o sukladnosti). *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut među njima.*

Navedeni teorem se često "uzima" za aksiom te pomoću njega dokazujemo preostale teoreme (o sukladnosti trokuta). Sljedeći teorem je Talesov teorem o sukladnosti dvaju trokuta. Promotrimo o čemu govori i pokažimo zašto on vrijedi. Uočimo da se njegova forma kakvu danas koristimo podudara s onom koju je izrekao Tales.

Teorem 2.2.4 (K-S-K teorem o sukladnosti). *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*

Dokaz. Neka su ABC i $A'B'C'$ trokuti takvi da vrijedi $|AB| = |A'B'|$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Odaberimo točku C_1 na polupravcu AC takvu da vrijedi $|AC_1| = |A'C'|$. Sada, prema ranije navedenom S-K-S teoremu o sukladnosti trokuta, vrijedi: $\triangle ABC_1 \cong$

$\triangle A'B'C'$, ali i $\sphericalangle ABC_1 = \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$. Prema tome, polupravci $|BC|$ i $|BC_1|$ se podudaraju. To je moguće jedino ako je $C_1 = C$. Očito je: $|AC| = |A'C'|$.
Prema tome, S-K-S teorem o sukladnosti trokuta nam daje $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

Napomena 2.2.5. *Znamo da je zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu jednak i iznosi* $180°$. *Prema tome, veličine dvaju kutova trokuta određuju treću. Uočimo stoga da bi prethodni teorem (vidi Teorem 2.2.4) mogao glasiti:* ***Dva su trokuta sukladna ako su im sukladni jedna stranica i bilo koja dva kuta****.*

Preostala dva teorema o sukladnosti trokuta su sljedeći.

Teorem 2.2.6 (S-S-S teorem o sukladnosti). *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne sve tri stranice.*

Teorem 2.2.7 (S-S-K$^>$ teorem o sukladnosti). *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot veće stranice.*

Još jedan dokaz Talesovog teorema o sukladnosti nužno zahtijeva i dokaz S-S-S teorema o sukladnosti. Prikažimo i taj način. Prisjetimo se prvo pojmova važnih za razumijevanje ovog dokaza.

Direktni (ili Kartezijev) produkt dvaju skupova S i T je skup $S \times T$ svih uređenih parova (x,y) elemenata $x \in S$, $y \in T$, tj. $S \times T = \{(x,y) \mid x \in S, y \in T\}$.

Svaki podskup $\rho \subseteq S \times S$ zove se **binarna relacija** na skupu S. Za elemente $x, y \in S$ kažemo da su u relaciji ρ, i piše se $\rho(x,y)$ ili $x\rho y$ ako je $(x,y) \in \rho$.
Relacija ρ je refleksivna, ako je $x\rho x$, za svako $x \in S$.
Relacija ρ je simetrična ako za svako $x, y \in S$, $x\rho y$ povlači $y\rho x$.
Relacija ρ je tranzitivna ako za svako $x, y, z \in S$, $(x\rho y)\&(y\rho x)$ povlači $x\rho z$.
Relacija ekvivalencije (ili klasifikacije) je binarna relacija koja je istodobno refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Nadalje, za preslikavanje $f : S \to T$ kažemo da je injekcija ako $f(x) = f(x')$ povlači $x = x'$, a kažemo da je surjekcija ako je $f(S) = T$ tj. $(\forall y \in T)(\exists x \in S), f(x) = y$. f je **bijekcija** (ili obostrano jednoznačno preslikavanje) ako je f injekcija i surjekcija.

Kako bismo dokazali teorem o sukladnosti, važno je znati i sljedeće.

AKSIOMI METRIKE *Zadana je funkcija* $d : M \to M$. *Zovemo je metrika (ili razdaljinska funkcija ili funkcija udaljenosti) na* M *ako vrijedi:*

1. $d(A,B) \geq 0, \forall A, B \in M, d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
2. $d(A,B) = d(B,A), \forall A, B \in M$.
3. *(Nejednakost trokuta)* $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B), \forall A, B, C \in M$ *i pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je* $C \in \overline{AB}$.

4. *Za svaki polupravac (O_u) s vrhom u O i za svaki realni broj $x > 0$ postoji (jedinstvena) točka T na tom polupravcu takva da je d(O,T) = x.*

Broj $d(A, B)$ zovemo duljinom dužine $\overline{AB}$ ili udaljenost točaka A i B. Ponekad ga označavamo i sa $|AB|$.

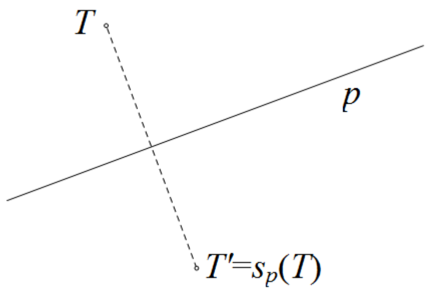
Pojam udaljenosti nam omogućava definiranje izometrije ravnine. Preslikavanje $f : M \to M$ je **izometrija ravnine** M ako vrijedi:

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \forall A, B \in M.$$

Važno je znati i da je izometrija bijektivno preslikavanje.

Bitnu klasu izometrija čine osne simetrije (zrcaljenja). Njihovu egzistenciju opisujemo sljedećim aksiomima.

Aksiom simetrije I. *Za svaki pravac $p \subset M$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$ različita od identitete, za koju je $s_p(T) = T$, $\forall T \in p$. Ta se izometrija zove* ***osna simetrija*** *obzirom na pravac p. Pravac p zovemo os simetrije.* (slika 2.1)



Slika 2.1:

Aksiom simetrije II. *Za svaki par (O_x, O_y) polupravaca s vrhom u O postoji bar jedan pravac p takav da je $s_p(O_x) = O_y$.*

Sljedeći teorem nazivamo osnovni teorem o izometrijama. Važan nam je korolar koji proizlazi iz njega.

Teorem 2.2.8. *Svaka izometrija $f : M \to M$ je ili osna simetrija ili kompozicija dviju osnih simetrija ili kompozicija triju osnih simetrija, tj. svaka izometrija je kompozicija najviše tri osne simetrije.*

Korolar 2.2.9. *Ako se dvije izometrije $f, g : M \to M$ podudaraju u tri nekolinearne točke, onda je $f = g$. Odavde slijedi da je svaka izometrija ravnine potpuno određena s tri para pridruženih točaka (s time da nijedna trojka nije kolinearna).*

Opišimo sada sukladnost trokuta pomoću navedenih pojmova.
Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trokuta. Kažemo da su ti trokuti sukladni ili kongruentni ako postoji bijekcija $f : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$ između njihovih vrhova, tako da je *f(A)=A', f(B)=B', f(C)=C'* i takva da je *a=a', b=b', c=c'*, $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$ (pri čemu je npr. $a' = |B'C'|$, $\alpha' = \sphericalangle B'A'C'$; analogno za preostale).

Prisjetimo se, sukladnost trokuta označavamo $\cong$ (npr. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$).
Važno: relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije na skupu svih trokuta ravnine.

Dokažimo sada Talesov teorem o sukladnosti trokuta. Prvo moramo dokazati *S-S-S teorem o sukladnosti*. Prisjetimo se i iskaza tih dvaju teorema.

Teorem 2.2.10 (S-S-S)**.** *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trokuta takvi da je *a=a', b=b', c=c'*. Treba dokazati da je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, tj. da je $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$. Iz definicije sukladnosti, konstruirajmo bijekciju na ovaj način: $f : \{A, B, C\} \to \{A', B', C'\}$. Prema ranije navedenom korolaru (vidi Korolar 2.2.9) slijedi da postoji jedinstvena izometrija $g : M \to M$ takva da je *g(A)=A', g(B)=B', g(C)=C'. Sada f definiramo sa* $f = g\,|_{\{A,B,C\}}$. Navedena izometrija preslikava (očito) kut α na α', β na β' i γ na γ'. Time je teorem dokazan. □

Sada možemo dokazati i Talesov teorem o sukladnosti trokuta.

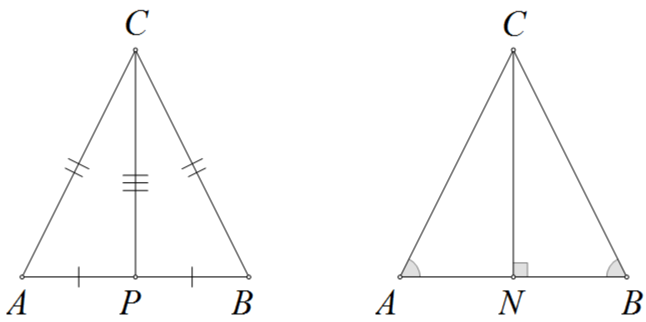
Teorem 2.2.11 (K-S-K)**.** *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.*

Dokaz. Neka je *c=c'*, $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$. Neka je $g : M \to M$ izometrija za koju je *g(A)=A'* i *g(B)=B'*. Razlikujemo dva slučaja, obzirom na položaj točke *C'*.
Ako *C'* i *g(C)* pripadaju istoj poluravnini obzirom na pravac *A'B'*, onda zbog $\alpha = \alpha'$ slijedi da je $g(Ax) = A'x'$, a zbog $\beta = \beta'$ da je $g(By) = B'y'$. Pokažimo da je *g(C)=C'*. Kako je g bijekcija, vrijedi $g(C) = g(Ax \cap By) = g(Ax) \cap (By) = A'x' \cap B'y' = C'$. Sada, po S-S-S teoremu o sukladnosti, slijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
Ako *C'* i *g(C)* pripadaju različitim poluravninama, onda umjesto g uzmemo kompoziciju g i osne simetrije obzirom na *A'B'*, pa problem svedemo na prethodni. □

2.3 Teorem o jednakokračnom trokutu

Talesovu tvrdnju: *Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.*; danas opisujemo na "širi" način.

Teorem 2.3.1. *Dvije stranice trokuta su sukladne ako i samo ako su im nasuprotni kutovi sukladni.*



Slika 2.2: Teorem o jednakokračnom trokutu

Dokaz. Uz oznake kao na slici 2.2 imamo:

$\Rightarrow$: Neka u trokutu ABC vrijedi: $|AC| = |BC|$. Označimo sa P polovište stranice $\overline{AB}$. Dakle $|AP| = |PB|$ i $|AC| = |BC|$. Kako je $\overline{CP}$ zajednička stranica $\triangle APC$ i $\triangle BPC$, slijedi da su ti trokuti sukladni po S-S-S teoremu o sukladnosti trokuta. Izravno slijedi: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$.

$\Leftarrow$: Neka u trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Označimo sa N točku na AB takvu da vrijedi $\sphericalangle ANC = \sphericalangle BNC = 90°$. Tada vrijedi: $\sphericalangle ACN = \sphericalangle BCN$. Kako je $\sphericalangle ANC = \sphericalangle BNC$, a $\overline{CN}$ zajednička stranica $\triangle ANC$ i $\triangle BCN$, slijedi da su ti trokuti sukladni po (ranije navedenom) K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta. Izravno slijedi: $|AC| = |BC|$. $\square$

Napomena 2.3.2. *Jednakokračan trokut je trokut kojemu su barem dvije stranice jednake duljine. Te dvije stranice nazivamo kraci trokuta, a treću stranicu nazivamo osnovica ili baza trokuta.*

Iz prethodne napomene uočavamo da je jednakostraničan trokut (trokut kojemu su sve tri stranice jednake duljine) vrsta jednakokračnog trokuta. Važan nam je i sljedeći rezultat.

Korolar 2.3.3. *Veličine unutarnjih kutova jednakostraničnog trokuta su jednake i iznose* $60°$.

Uočavanjem navedenih pravilnosti, prethodni teorem možemo i specijalizirati (za jednakostraničan trokut).

Teorem 2.3.4 (Specijalizacija teorema). *Tri stranice trokuta su sukladne ako i samo ako su im nasuprotni kutovi sukladni. Odnosno: Trokut je jednakostraničan ako i samo ako su veličine untarnjih kutova trokuta jednake i iznose* $60°$.

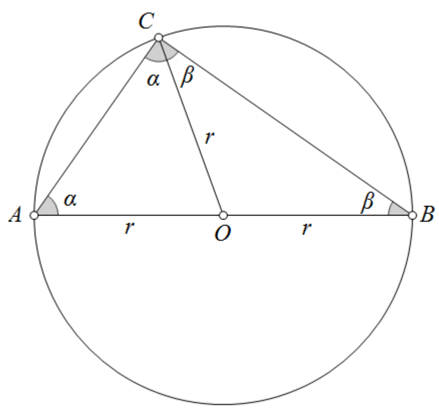
Lako uočavamo da bi dokaz navedene specijalizacije bio analogan već navedenom dokazu.

2.4 Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice

Tales: *Kut nad promjerom kružnice je pravi.*

Detaljniji opis i dokaz ovog teorema danas opisujemo na sljedeći način.

Teorem 2.4.1 (Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice). *Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a C bilo koja točka kružnice različita od A i B, tada je $\sphericalangle ACB$ pravi.*

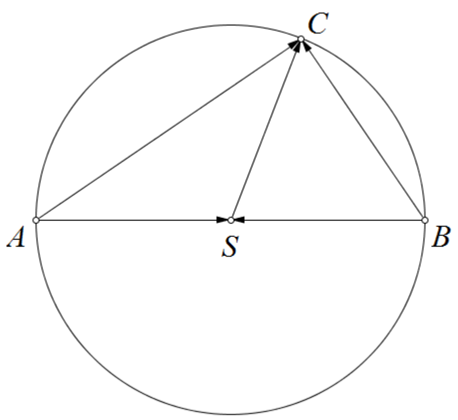


Slika 2.3: Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice

Dokaz. Promotrimo kružnicu sa središtem O i promjerom $\overline{AB}$ i preostalim oznakama kao na slici 2.3.
Uočavamo: $\sphericalangle AOC$ je jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$ i $\sphericalangle ACO = \alpha$. Nadalje, $\sphericalangle BOC$ je jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$ i $\sphericalangle BCO = \beta$.
Sada imamo: $\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OCB = \alpha + \beta$. Dakle, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ jer je zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta jednak $180°$ pa slijedi $2\gamma = 180°$. Odnosno, $\gamma = 90°$, što smo i htjeli pokazati. $\square$

Teorem možemo dokazati na još jedan način, koristeći svojstva vektora.

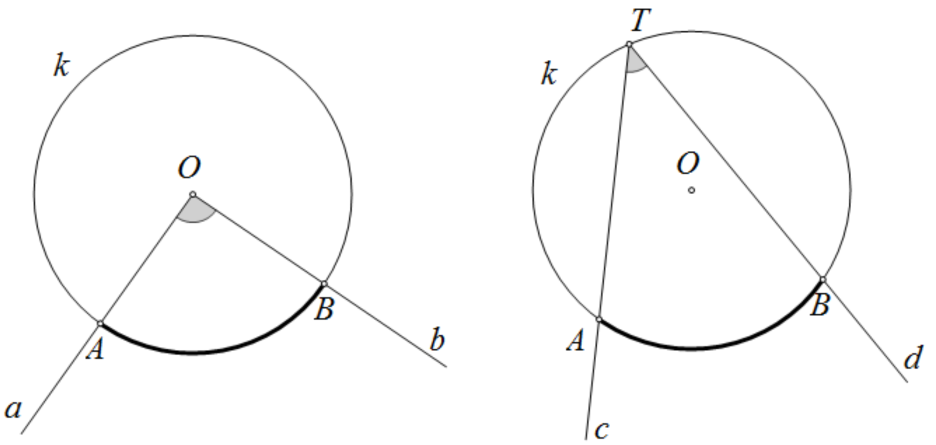
Dokaz. Uz oznake kao na slici 2.4 imamo: $\overline{AB}$ promjer kruga, S njegovo središte, a C bilo koja točka kružnice različita od A i B. Promotrimo sada skalarni produkt vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$.
Pravilom trokuta imamo:
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}) \cdot (\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC}) = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC}$
Uočavamo: $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{BS}$ su suprotni vektori.
Sada imamo: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AS} + (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS}) \cdot \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC} = -|\overrightarrow{AS}|^2 + |\overrightarrow{SC}|^2 = 0$.
Dakle, vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ su okomiti, što smo i željeli pokazati. $\square$



Slika 2.4: Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice - dokaz s vektorima

Opišimo sada središnji i obodni kut kružnice k. Uz oznake kao na slici 2.5 imamo:
Kut sa vrhom u središtu O kružnice k nazivamo **središnji kut** kružnice k.
Krakovi tog kuta, a i b, sijeku kružnicu k u dvije točke, A i B.
Kružnim lukom nazivamo presjek kružnice k i $\sphericalangle aOb$. Kažemo i: $\sphericalangle aOb$ (pišemo i $\sphericalangle AOB$) je središnji kut nad lukom $\widehat{AB}$.

Obodnim kutom kružnice k nazivamo konveksni kut s vrhom u točki T i krakovima (c i d) koji kružnicu k sijeku u dvjema točkama, A i B. Analognim opisom kao u slučaju središnjeg kuta kružnice k, često kažemo da je i $\sphericalangle cTd$, odnosno $\sphericalangle ATB$ obodni kut nad lukom $\overset{\frown}{AB}$.



Slika 2.5: Središnji (lijevo) i obodni (desno) kut kružnice k

Uz prethodne (opisne) definicije i napomene, dokazani Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice možemo izreći na još jedan način: ***Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.***

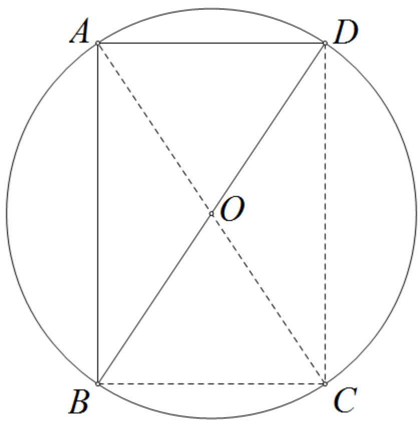
Ovako izrečeni teorem nam donosi još jedan zaključak: središnji kut nad promjerom kružnice je dvostruko veći od obodnog kuta nad tim promjerom.

Iz svega proizlazi poopćenje Talesovog teorema o kutu nad promjerom kružnice.

Teorem 2.4.2. *Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.*

Navedeni dokaz i zaključci su oni kakve mi danas poznajemo. U različitoj se litaraturi spominje i način kojim je, pretpostavlja se, Tales dokazao ovaj teorem. To nije bio dokaz koji se temeljio na strogim logičkim načelima, ali ipak - s druge strane, bio je početak deduktivne metode u matematici.
Tales je očitim smatrao:

Teorem 2.4.3. *Četverokut kojemu su dijagonale međusobno jednake i raspolavljaju se je nužno pravokutnik.*



Slika 2.6: *Talesov dokaz* teorema o kutu nad promjerom kružnice

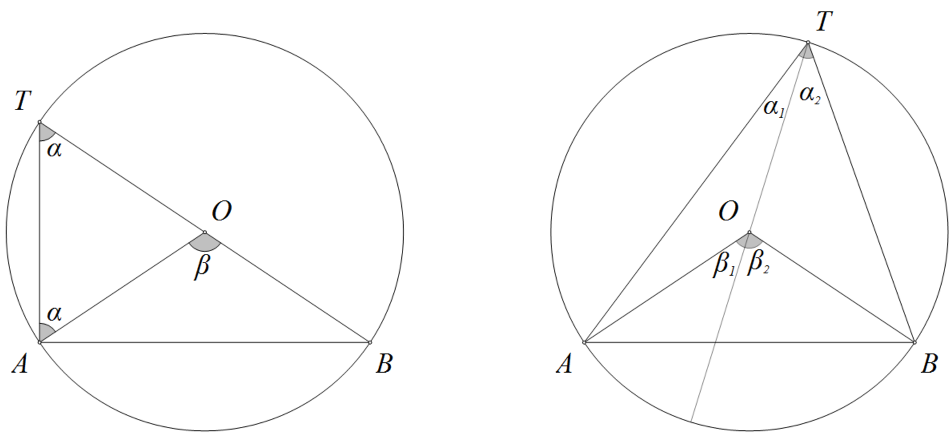
Dokaz. (**Talesov dokaz** teorema o kutu nad promjerom kružnice)
Konstruirajmo kružnicu proizvoljnog polumjera sa središtem u točki O, kao na slici 2.6. Nacrtajmo dva proizvoljna promjera, $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Spojimo li, redom, točke na kružnici: A,B,C,D, uočavamo četverokut $ABCD$. Kako se promjeri $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ raspolavljaju u točki O, prema prethodno spomenutoj slutnji (tvrdnji), $ABCD$ je pravokutnik. Sada znamo da su sva četiri unutarnja kuta tog četverokuta jednaka i da su pravi. Dakle, $\sphericalangle BAD$ je pravi kut. Zanemarimo li iscrtkane dužine, uočavamo obodni kut $\sphericalangle BAD$. Dakle, obodni kut $\sphericalangle BAD$ nad promjerom kružnice $\overline{BD}$ je pravi. Kako smo točku A odabrali proizvoljno na kružnici, uočavamo da će kut nad promjerom kružnice uvijek biti pravi. □

Važno je uočiti da za ovaj dokaz nije bilo potrebno predznanje o zbroju veličina unutarnjih kutova trokuta.

S druge strane, promatramo li Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice kao specijalan slučaj teorema o obodnom i središnjem kutu, tada je dokaz teorema izrazito jednostavan. Takav dokaz možemo pronaći u npr. Elementarnoj matematici 1 (vidi [17]). Dakle, dokazujemo li teorem na ovaj (obrnuti) način, prvo moramo dokazati ranije navedeno poopćenje Talesovog teorema. Navesti ćemo iskaz teorema još jednom, radi lakšeg razumijevanja.

Teorem 2.4.4 (o obodnom i središnjem kutu)**.** *Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom. Drugim riječima, obodni kut je jednak polovici pripadnog središnjeg kuta.*

Dokaz. Slično kao ranije (A, B dvije točke kružnice, $\overline{AB}$ tetiva; T bilo koja točka kružnice različita od A i B) sa $\widehat{AB}$ označimo luk kružnice i sa $\alpha = \sphericalangle ATB$ bilo koji obodni kut nad lukom $\widehat{AB}$.
U dokazu razlikujemo tri slučaja.
a) Neka krak TB kuta prolazi središtem O kružnice. Uz oznake na slici 2.7, lijevo imamo: $\sphericalangle AOB = \beta$. Tada je $\triangle AOT$ jednakokračan trokut, s krakovima duljine r (r je polumjer kružnice, $|AO| = |TO| = r$). Tada je kut pri vrhu A trokuta $\triangle AOT$ također α. No β je vanjski kut tog trokuta pri vrhu O pa po teoremu o vanjskom kutu trokuta (svaki vanjski kut trokuta jednak je zborju onih dvaju unutarnjih kutova trokuta koji s njime nisu susjedni) slijedi $\beta = 2\alpha$.

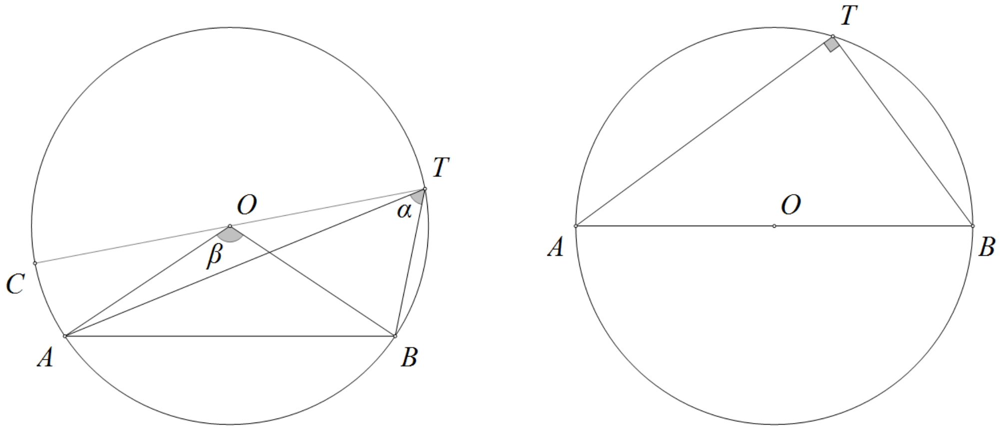


Slika 2.7:

b) Neka je sada središte O unutar kuta $\sphericalangle ATB$. Prikažimo situaciju slikom 2.7, desno. Ovaj slučaj lako svedemo na prethodni.
Spojimo točke T i O. Označimo kutove kao na slici. Prema prethodnom slučaju $\beta_1 = 2\alpha_1$, $\beta_2 = 2\alpha_2$ pa je $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$, što smo i željeli pokazati.

c) Neka je sada središte O izvan kuta $\sphericalangle ATB$. Spojimo točke T i O i drugo sjecište pravca TO i kružnice označimo s C (vidi sliku 2.8 lijevo). Tada je $\alpha = \sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC - \sphericalangle ATC$. Sada, prema prvom (a) slučaju, $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BTC$, $\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle ATC$, iz čega izravno slijedi $\beta = 2\alpha$. 2.8

□



Slika 2.8:

Izravna posljedica navedenog teorema je Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice, kao što smo najavili. Dakle:

Korolar 2.4.5. *Ako je $\overline{AB}$ dijametar kružnice, a T bilo koja točka kružnice različita od A i B, onda je i $\triangle ATB$ pravokutan s pravim kutom kod vrha T. Kraće, kažemo: svaki kružnici upisani trokut nad promjerom kružnice je pravokutan.*

Dokaz. Teorem o obodnom i središnjem kutu (vidi Teorem 2.4.4) uz oznake na slici 2.8 desno, povlači $|\sphericalangle ATB| = 90^\circ$ (jer je pripadni središnji kut, $\sphericalangle AOB$, ispruženi, tj. mjere 180°. Time smo dokazali Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice. □

2.5 Teorem o vršnim kutovima

Tales: *Kutovi između dva pravca koji se sijeku su jednaki (misli se na vršne kutove).*

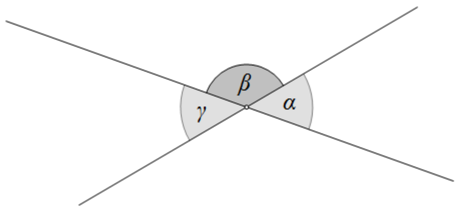
Teorem je naveden kao petnaesta po redu propozicija u prvoj dijelu Euklidovih Elemenata.

Napomena 2.5.1. *Za dva kuta koji imaju zajednički vrh, a po dva kraka im se nadopunjuju na pravac, kažemo da su* ***vršni kutovi****.*

Napomena 2.5.2. *Dva kuta kojima je jedan krak zajednički, a drugi kraci im se nadopunjuju na pravac, zovu se sukuti. Sukuti su suplementarni kutovi (zbroj njihovih mjera je jednak* $180°$*).*

Ovaj Talesov teorem poznajemo u sljedećem obliku.

Teorem 2.5.3. *Vršni kutovi su međudobno sukladni.*



Slika 2.9: Vršni kutovi

Dokaz. Uz oznake na slici 2.9: kutovi α i β su sukuti. Analogno, β i γ. Vrijedi $\alpha+\beta = 180°$ i $\beta + \gamma = 180°$. Oduzimanjem jednakosti slijedi: $\alpha = \gamma$, što smo i htjeli pokazati. □

Možemo uočiti i specijalan slučaj teorema. Ukoliko su pravci koji se sijeku međusobno okomiti, tada su sva četiri kuta što ih tvore ti pravci jednakih veličina. Njihova mjera je $90°$.

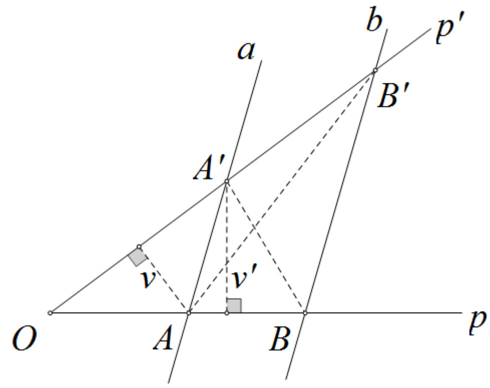
2.6 Talesov teorem o proporcionalnosti

Tales: *Dva paralelna pravca na krakovima nekog kuta odsijecaju proporcionalne dužine.*

Dokaz ovog teorema susrećemo u literaturi za osnovnu i srednju školu, na fakultetskoj razini i raznoj stručnoj literaturi - što ukazuje na njegovu veliku važnost.

Teorem 2.6.1 (Talesov teorem o proporcionalnosti). *Paralelni pravci a i b na krakovima kuta* $\sphericalangle pOp'$ *odsijecaju proporcionalne dužine. Odnosno, uz oznake na slici 2.10 vrijedi:*

$$(i)\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|},\ (ii)\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|},\ (iii)\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}.$$



Slika 2.10: Talesov teorem o proporcionalnosti

Dokaz. *(i)* Da prva jednakost vrijedi, pokazat ćemo promatranjem površina trokuta sa slike 2.10. Uočimo prvo:

$$P(OAB')=P(OAA')+P(AA'B'),\, a P(OA'B)=P(OAA')+P(AA'B). \tag{2.1}$$

Znamo: pravci a i b su paralelni. Stoga je duljina visine na stranicu $\overline{AA'}$ u trokutu $AA'B$ jednaka duljini visine na istu stranicu u trokutu $AA'B'$. Dakle: $P(AA'B)=P(AA'B')$. Uvrstimo li tu jednakost u (2.1) uočavamo: $P(OAB')=P(OA'B)$.

Jednostavnim računom, iz toga nam slijedi:

$$\frac{P(OAA')}{P(OA'B)} = \frac{P(OAA')}{P(OAB')}. \tag{2.2}$$

Visina iz vrha A' je zajednička trokutima OAA' i $OA'B$. Stoga je lijeva strana jednakosti (2.2) jednaka $\frac{|OA|}{|OB|}$. S druge strane, visina iz vrha A je zajednička trokutima OAA' i OAB'. Dakle, desna strana jednakosti (2.2) je upravo $\frac{|OA'|}{|OB'|}$. Odavde izravno slijedi tvrdnja koju smo željeli pokazati.

(ii) Uočimo da vrijedi, uz oznake na slici 2.10: $\frac{|A'B'|}{|OA'|}=\frac{|OB'|-|OA'|}{|OA'|}=\frac{|OB'|}{|OA'|}-1.$

Uz prethodno dokazanu tvrdnju (*i*): $\frac{|A'B'|}{|OA'|}=\frac{|OB|}{|OA|}\text{-}1=\frac{|OB|-|OA|}{|OA|}=\frac{|AB|}{|OA|}$, a to smo i željeli pokazati.

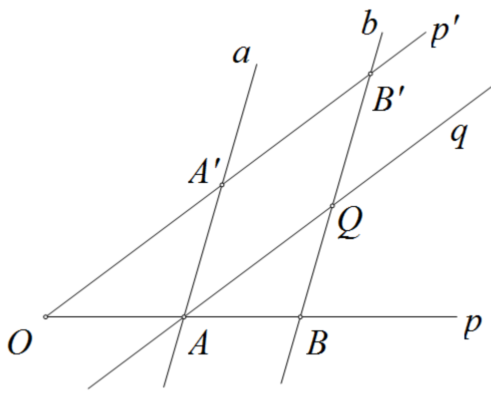
(iii) Promotrimo sada sliku 2.11. Označimo s q pravac koji prolazi točkom A i koji je paralelan s p'. S Q označimo točku presjeka pravca b i q.
Prema dokazanom (i), paralelni pravci p' i q na krakovima kuta OBB' odsijecaju proporcionalne dužine. Stoga vrijedi: $\frac{|BA|}{|BO|}=\frac{|BQ|}{|BB'|}$.

Iz $\frac{|OB|-|OA|}{|OB|}=\frac{|BB'|-|QB'|}{|BB'|}$ imamo 1-$\frac{|OA|}{|OB|}$=1-$\frac{|QB'|}{|BB'|}$.

Odnosno:

$$\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|QB'|}{|BB'|}. \tag{2.3}$$

Jer je $QAA'B'$ paralelogram, $|B'Q| = |AA'|$. Uvrštavanjem u (2.3), tvrdnja izravno slijedi. □

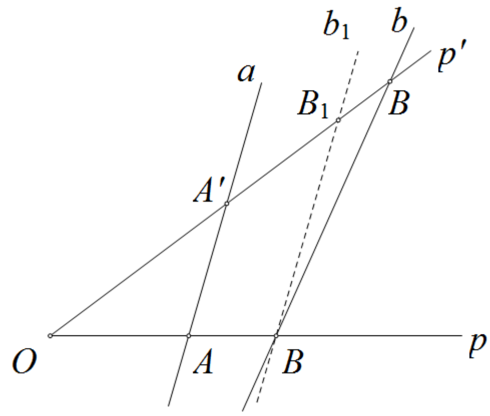


Slika 2.11:

Često susrećemo i obrat navedenog teorema. Pogledajmo o čemu se radi.

Obrat Talesovog poučka o proporcionalnosti Ako dva pravca na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine, onda su ti pravci paralelni.

Dokaz. Promotrimo sliku 2.12. Neka pravci a i b na krakovima kuta $\sphericalangle pOp'$ odsijecaju proporcionalne dužine. Vrijedi: $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}$.



Slika 2.12:

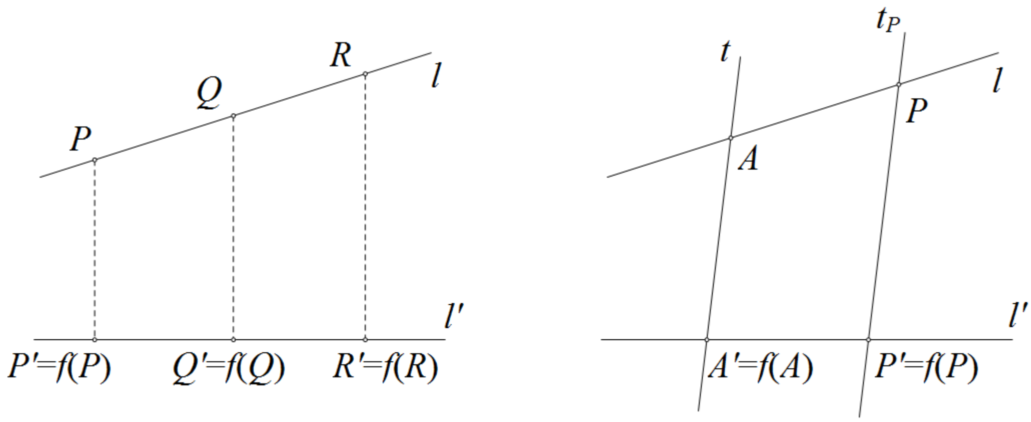
Neka je pravac b_1 paralelan s a te neka prolazi točkom B. S B_1 označimo presjek pravca b_1 i p'. Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti, vrijedi: $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB_1|}$.
Odakle nužno slijedi: $|OB'| = |OB_1|$, odnosno B'=B_1. Dakle, pravci b_1 i b se podudaraju, tj. b je paralelan s a. □

Ukoliko smo upoznati s pojmom paralelne projekcije, teorem o proporcionalnosti možemo dokazati na još jedan način. Ovaj dokaz najčešće susrećemo u literaturi na fakultetskoj razini (konkretno: Elementarna matematika 1, vidi [17]). Osvrnimo se i na taj dokaz. Opišimo prvo što je paralelna projekcija. Važna nam je sljedeća propozicija.

Propozicija 2.6.2. *Kroz svaku točku A prolazi jedan i samo jedan pravac okomit na dani pravac p.*

Promotrimo sljedeće. Neka su l i l' dva pravca u ravnini. Po prethodnoj propoziji, tada možemo definirati **ortogonalnu projekciju** $f : l \to l'$ definiranu sa $P \mapsto P' = f(P)$, gdje je P' nožište okomice kroz P na l'. Analogno za Q i R (slika 2.13, lijevo).
Općenitije, neka su l i l' bilo koji pravci ravnine, a t njihova transverzala (slika 2.13, desno). Označimo redom s A i A' točke u kojima t siječe l i l'. Neka je $A' = f(A)$. Za svaku točku $P \in l$ neka je t_p pravac kroz P paralelan sa t, a $P' = f(P) = t_p \cap l'$. Na opisani način, dobivamo preslikavanje $f : l \to l'$. Takvo preslikavanje se zove **paralelna projekcija** sa l na l' u smjeru pravca t.

Sljedeći teoremi opisuju osnovna svojstva paralelnog projiciranja.



Slika 2.13:

Teorem 2.6.3. *(**a**) Paralelno projiciranje $f : l \to l'$ je bijekcija.*
*(**b**) Paralelno projiciranje čuva relaciju "ležati između" (tj. ako na l imamo $A \leq B \leq C$, onda je $A' \leq B' \leq C'$, na l').*
*(**c**) Paralelno projiciranje čuva jednakost dužina, tj. ako je $|AB| = |CD|$ na l, onda je $|A'B'| = |C'D'|$ na l'.*

Teorem 2.6.4. *Neka su l i l' dva pravca, a t_1, t_2, t_3 njihove zajedničke transverzale koje su međusobno paralelne i neka ih l i l' sijeku redom u točkama A, B, C i A', B', C', tako da je $A \leq B \leq C$ (pa stoga i $A' \leq B' \leq C'$). Tada je*

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}, \text{ tj. } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

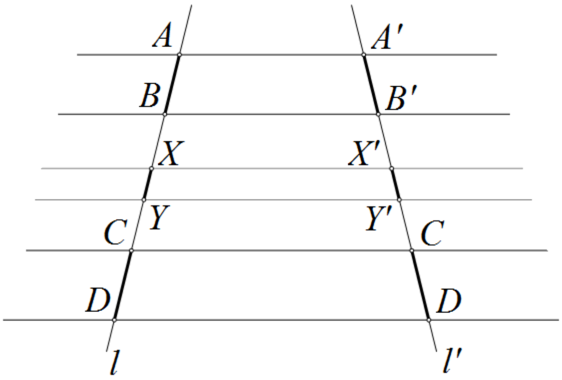
Proširimo li prethodni teorem na opći slučaj, vrijedi:

Teorem 2.6.5. *Ako su dvije dužine na pravcu disjunktne, onda se omjer njihovih duljina čuva paralelnim projiciranjem.*

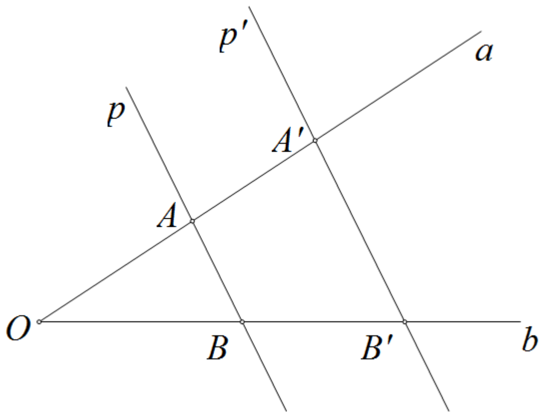
Sada možemo izreći Talesov teorem o proporcionalnosti, u opisanim terminima.

Teorem 2.6.6 (Talesov teorem o proporcionalnosti)**.** *Paralelna projekcija čuva omjere duljina. Drugima riječima, ako su A, B, C, D točke na pravcu l, a A', B', C', D' odgovarajuće točke na l' dobivene paralelnom projekcijom, onda je (slika 2.14):*

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}, \text{ tj. } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}.$$



Slika 2.14: Talesov teorem o proporcionalnosti (pomoću paralelne projekcije)



Slika 2.15: Talesov teorem o proporcionalnosti u pramenu pravaca

Dokaz. Neka je $\overline{XY}$ dužina na l disjunktna sa $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, a $\overline{X'Y'}$ odgovarajuća dužina na l' dobivena paralelnim projiciranjem. Tada je prema prethodnom teoremu

$$\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|XY|}{|X'Y'|}=\frac{|CD|}{|C'D'|},$$

pa je

$$\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|CD|}{|C'D'|},\text{ tj. }\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

□

Tvrdnja (korolar) koja proizlazi iz prethodnog teorema se naziva **Talesov teorem o proporcionalnosti u pramenu pravaca**. Vrijedi:

Korolar 2.6.7. *Ako se dva pravca a i b sijeku u točki O, i ako su presječeni s dva paralelna pravca p i p' ($p \| p'$), tako da je $p \cap a$=A, $p \cap b$=B, $p' \cap a$=A', $p' \cap b$=B', onda vrijedi (slika 2.15):*

$$\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|OA'|}{|OB'|}, \ \frac{|OA|}{|AB|}=\frac{|OA'|}{|A'B'|}, \ \frac{|OB|}{|BA|}=\frac{|OB'|}{|B'A'|}.$$

Dokaz korolara je upravo onaj koji smo naveli ranije (u drugim oznakama), pomoću površine. (vidi dokaz u 2.6, na stranici 24)

Poglavlje 3

Talesovi teoremi u nastavi matematike

Dobro je poznato da se Talesovi teoremi javljaju u nastavi matematike osnovne, ali i srednje škole.
Obzirom na različitost nastavnog plana i programa u srednjim školama te literature kojom se učenici koriste na nastavi, temu ćemo opisati na temelju nastavnom plana i programa opće gimnazije i udžbenika dvaju nakladnika (*Školska knjiga* (osnovna škola) i *Element* (srednja škola - program: opća gimnazija)).
Usredotočiti ćemo se na opis teme kroz razne metode rada, kojima svaki nastavnik matematike danas treba težiti. Odnosno, važno je "aktivirati" učenike, ustrajati na grupom radu, raznim oblicima otkrivanja i korištenju tehnologije. Gotovo uvijek se pokaže da je takav način nastave zanimljiviji učenicima te da gradivo i pravilnosti koje su sami otkrili puno lakše pamte i znaju primijeniti u zadacima. Glavni je problem ovog oblika nastave nedostatak vremena pa je nemoguće svaki sat nastave održati na takav način.
Obzirom da Talesovi teoremi pripadaju području geometrije (elementarne geomerije), glavni načini otkrivanja pravilnosti kojima se možemo poslužiti su mjerenje (za najmanje uzraste) do raznih načina dokazivanja teorema (za starije uzraste) učenika. Na ovoj razini opisivanja ćemo se usredotočiti samo na osnovnu i srednju školu, jer su ranije navedeni dokazi oni koji se (uglavnom) obrađuju i uče samo na fakultetskoj razini.

3.1 Osnovna škola

Peti je razred osnovne škole usredotočen na skupove brojeva i osnovne operacije s razlomcima. No svoje su mjesto u tom razredu ipak pronašla dva teorema. Ponavljajući pojmove kružnice i kruga (koje su naučili u nižim razredima), učenici uče novi pojam - promjer kruga. U udžbeniku za peti razred tako susrećemo teorem o površini kruga u sljedećem obliku: Svaki promjer dijeli krug na dva polukruga. I to je sve što se o tom teoremu, u tom trenutku, spominje. Idući po redu je teorem o vršnim kutovima. Učenici ga iskazuju u onom obliku kao što se navodi u svakoj literaturi (vidi Teorem 2.5.3). Taj se teorem potom primjenjuje u najjednostavnim zadacima. Aktivnost kojom učenici mogu predočiti ove dvije situacije su izrezivanje likova (polukrugova i kutova) te preklapanje odgovarajućih dijelova. Na taj će si način predočiti te se uvjeriti u istinitosti tvrdnji.
Teorem o vršnim kutovima učenicima ponovno, u istom obliku, ponavljaju u šestom razredu gdje je naglasak na rješavanje zadataka primjenom istog. Nadalje, u trenutku kada promatraju odnose stranica i kutova trokuta, kao specijalan slučaj, učenici uočavaju teorem o jednakokračnom trokutu. U otkrivanju pravilnosti, da se nasuprot jednakim stranicama u trokutu nalaze jednaki kutovi, ali i da se nasuprot jednakih kutova kutova u trokutu nalaze jednake stranice, se možemo poslužiti mjerenjem. Prednost mjerenja je ta da učenici mogu, npr. nacrtati, razne trokute (jednakokračne) te na više primjera uočiti istu pravilnost. Na njihovoj je razini zaključivanja to dokaz (uvjerenje) da pravilnost vrijedi.
Poučak o sukladnosti je posljednji po redu s kojim se učenici susrećeu u šestom razredu. Metoda otkrivanja sukladnosti je izrezivanje likova i njihovo poklapanje. Dobra metoda je postavljanje dvaju papira jedan na drugi, te izrezivanje likova (odjednom). Još jedna (sigurna) metoda je metoda mjerenja. Zadamo li učenicima da za dva trokuta (za koja ranije znamo da su sukladni) izmjere jednu od stranica te kutove uz nju (pri čemu je važno da na oba mjere odgovarajuće veličine - odgovarajuće stranice i kutove) otkriti će pravilnost.
Trenutak kada učenici uče razmjere i proporcionalnost je onaj kada uče i Talesov teorem o proporcionalnosti, najpoznatiji teorem u školskoj matematici. To je jedno od područja matematike koje (zbog zaista nepoznatog razloga) učenicima stvara velike probleme. Bez obzira na mnoštvo realnih primjera (kao što je npr. mjerenje udaljenosti broda od obale, spominjane već nekoliko puta u ovom radu), učenici teorem teško primjenjuju u zadacima. Na kraju, učeći pojmove obodnog i središnjeg kuta, učenici otkrivaju i teorem o obodnom kutu nad promjerom kružnice. Da je svaki obodni kut nad promjerom kružnice pravi se učenici također mogu uvjeriti mjerenjem. Obzirom da su nastavnici u osnovnoj školi rijetko u mogućnosti održavati nastavu u informatičkoj učionici, kako bi učenici sami istraživali, svaka im se od sitacija može prikazati (demonstrirati) u alatu dimaničke geometrije. U raznim je primjerima pokazano da učenici, bez obzira što izravno ne sudjeljuju u otkrivanju, pamte i znaju opisati zaključke koje su uočili promatrajući neke pripremljene materijale za nastavu.

Sa sedmim razredom i završavamo. U osmom se razredu, u cjelini s vektorima može razraditi jedan od teorema (o obodnom kutu nad promjerom), ali na osnovnoškolskoj razini - na dodatnoj nastavi matematike. Detaljniji opis u sljedećem poglavlju.

3.2 Srednja škola

Osvrnemo li se na plan i program srednjoškolske nastave matematike, možemo uočiti da se Talseovi teoremi i pojmovi nužni za njihovo razumijevanju pojavljuju u udžbenicima u jednakoj mjeri kao i u osnovnoj školi. Ovdje je pak veći fokus na kvalitativnoj (pojmovnoj) razini, koja se sadržajno proširuje dokazima. Dakle, srednja je škola trenutak kada se učenici prvi puta susreću sa "pravim" dokazima. U osnovnoj se školi dokazi (ponekad) detaljnije promatraju na dodatnoj nastavi matematike, dok se na redovnoj nastavi često ni ne spominju.
Po gimnazijskom programu, u prvom razredu učenici susreću (ponavljaju) sve Talesove teoreme. Nakon algebarskih sadržaja, učenici ponavljaju i proširuju svoje znanje na području sukladnosti i sličnosti te pojmova kružnice i kruga.
Metode rada na srednjoškolskoj razini su razne. Učenicima su jednako zanimljive praktične aktivnosti (mjerenja, pokusi) kao i istraživanja u alatima dinamične geometrije. Obzirom na sve veću informatičku pismenost, istu je važno unaprijeđivati i na području matematike, osobito na području geometrije. Alati dinamične geometrije nam omogućuju stvarno razumijevanje problema pa su odličan alat i za razumijevanje Talesovih teorema i istraživanje njihovih pravilnosti.
Prvi po redu teorem s kojim se učenici susreću je teorem o vršnim kutovi. Ni na ovoj razini obrazovanja se taj teorem ne dokazuje. Teorem o jednakokračnom trokutu se spominje kao specijalan slučaj (primjer) teorema o sukladnositi pravokutnih trokuta te se dokazuje. Dokaz je analogan onome koji smo naveli u drugom poglavlju (vidi poglavlje 2.3, str.16). Poučak o sukladnosti trokuta se dokazuje i to primjenom izometrije.
Ipak, i u srednjoj je školi najveći naglasak na teoremu o proporcionalnosti. Nakon ponavljanja pojmova omjera i razmjera, učenici uče dijeliti dužine u zadanom omjeru. Uz to, uče i Talesov poučak o proporcionalnosti. Dokaz ovog teorema je više na opisnoj razini, bez strogih matematičkih objašnjenja. Sami teorem učenici "usvajaju" rješavanjem primjera. Ovaj se teorem vjerojatno najviše ističe jer ga učenici primjernjuju u zadacima, dok sve ranije navedene uče uglavnom na opisnoj razini. Ranije smo u radu (vidi poglavlje 2.6, str. 25) naveli i obrat Talesova teorema, čiji se iskaz i dokaz također spominju.
Preostaju nam teoremi o površini kruga i kutu nad promjerom kružnice. Obzirom da je jedna od tema koju učenici obrađuju i površina kruga, teorem o površini možemo navesti kao primjer. Naime, teorem kao teorem se niti ne spominje. Talesov teorem o obodnom kutu se spominje kao poseban slučaj poučka o obodnom kutu, te se na taj način i dokazuje. Dokaz smo naveli ranije (vidi poglavlje 2.4, str.21).

Po sadašnjem planu i programu, na elementarnu je geometriju fokus stavljen u prvom razredu srednje škole pa tako i na Talesove teorem. Izniman trenutak kada se još jednom možemo osvrnuti na poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice je treći razred, u trenutku kada učenici uče vektore (kao i u osmom razredu osnovne škole). Kao primjer, učenicima možemo zadati da pomoću svojstava vektora dokažu taj teorem. Dokaz koji se očekuje od učenika smo naveli ranije u radu (vidi dokaz u 2.4, na stranici 18). Značajan je to primjer povezivanja matematičkih sadržaja.
Važno je napomenuti i da se, osim teorema o proporcionalnosti te onog o obodnom kutu, u školskoj matematici niti jedan ne pripisuje Talesu. Obzirom na sve veće isticanje korelacije predmeta, tu bi činjenicu ipak bilo važno istaknuti i na taj način povezati nastavu povijesti (starogrčke) i matematike.

3.3 Intuitivna, kvalitatativna i kvantitativna razina Talesovih teorema

Osvrnimo se i na jedan članak, objavljenog u broju 8 časopisa MiŠ (Matematika i škola) 2000/2001. godine. Autor, prof. dr. sc. Ivica Gusić (Zavod za matematiku, Fakultet kemijskog injžinjerstva i tehnologije) je tada održani seminar za nastavnike u Opatiji na temu "Tri razine obrade matematičkih pojmova" prokometirao u istoimenom članku.
Obzirom da je nastava matematike u osnovnim, ali i srednjim školama i danas većim dijelom tradicionalnog tipa te se nije uvelike promijenila od tog razdoblja, komentare od prije četrnaest godina u školama možemo prepoznati i danas. Autor članka se osvrnuo na sadržaje koji se obrađuju u osnovnoj školi: brojevi i njihov zapis, sukladnost, ekvivalentnost jednadžbi te razlomci i racionalni brojevi, na intuitivnoj, kvalitativnoj i kvantitativnoj razini. Promotrimo važnost tih sadržaja nekada i danas, te uočimo njihovo nepromijenjeno značenje i interpretaciju.

Intuitivna, kao prva razina, je najjednostavnija predodžba pojma, pojave. Ova je razina shvaćanja ljudima (djeci) prva s kojom se susreću, nesvjesno - i prije školovanja, kroz igru. Kvalitativna ili pojmovna razina podrazumijeva "teorijsko" razumijevanje samog pojma, a kvantitativna "najvišu" razina, razinu zapisa, simboličku razinu.

Razlog spominjanja članka je njegova veza s nekoliko Talesovih teorema. Mi ćemo se stoga usredotočti na dio članka koji govori o sukladnosti. Autor je sukladnost trokuta, teorem o vršnim kutovima te definiciju o povšini kruga opisao u okviru ranije navedene tri razine. Prepričat ćemo rečeno u članku i povezati to s današnjom nastavom matematike osnovne i srednje škole.

Teoreme o sukladnosti trokuta učenici otkrivaju već u šestom razredu. Važno je prvo uočavanje intuitivne razine teorema. Tako učenici znaju da su *dva trokuta sukladna ako se mogu nanijeti jedan na drugoga tako da se poklope*. Kao što je i Tales nekada radio,

na ovoj razini učenici istinitost tvrdnje predočavaju pokusom. Dakle, kao što je i autor članka uočio, važno je da se učenici u sukladnost trokuta uvjere ”opipom”, preklapajući dva trokuta (npr. izrezana iz papira). Ovaj korak otkrivanja je s učenicima moguće napraviti i u prvom razredu osnovne škole, ali i ranije. Djeca od rođenja preklapaju stvari i često pronalaze one koje potpuno odgovaraju jedna drugoj (npr. dva lista..). U šestom razredu taj opis možemo prevesti u matematički jezik, tj. primijeniti na matematičke objekte. Idući je korak prelazak na kvalitativnu razinu. Autor navodi da je to razina koja govori: *Dva su trokuta (u ravnini) sukladna ako se jedan iz drugoga mogu dobiti paralelnim pomakom, rotacijom (oko vrha) i simetrijom (u odnosu na stranicu).* Sadržajno, ova je razina razumljiva učenicima od osmog razreda na dalje, jer se naglasak na osnu simetriju ”daje” upravo u tom razredu. Iduća razina je kvantitativna: *Dva su trokuta sukladna ako su im odgovarajuće stranice i kutovi sukladni.* Navedeni opis sukladnost opisuje, na ovoj razini, pomoću sukladnosti njegovih osnovnih elemenata (stranice i kutovi). Ovaj opis smo mogli uočiti i ranije u radu. Dakle, iz kvantitativne razine opisa sukladnosti trokuta nam proizlaze upravo teoremi o sukladnosti pa tako i Talesov teorem. Dakle, teoremi o sukladnosti su izrečeni na kvantitativnoj (najvišoj) razini i to, kao što smo već rekli, u šestom razredu(!). Upravo ovdje uočavamo ranije navedenu problematiku učenja pojmova na pamet. Često učenici moraju naučiti kvalitativan opis sukladnosti trokuta, bez da su savladali intuitivnu razinu. Tada nastaje problem.
Obzirom da se sukladnost može definirati za sve geometrijske likove i preostala dva teorema spomenuta u ovom radu ukratko možemo opisati na isti način.
Intuitivnu razinu shvaćanja teorema (definicije) o sukladnosti površina dvaju polukrugova autor nije spomenuo, ali iz ranijih poglavlja možemo uočiti da je to razina mjerenja ili preklapanja objekata (polukrugova, polukružnica), analogno kao kod trokuta. Kvalitativno, Talesov teorem o površini kruga možemo iskazati: *Dva su kružna luka (tj. isječka) sukladna ako se jedan iz drugoga može dobiti paralelnim pomakom ili rotacijom (oko pripadnog središta - središta kruga, kružnice).* Kvantitativno, teorem opisujemo: *Dva su kružna luka (tj. isječka - u našem slučaju polukruga) sukladna ako su im pripadni polumjeri jednaki i pripadni središnji kutovi jednakih mjera.* Dakle, opisane su razine zapravo generalizacije Talesovog teorema o površini kruga.

Teorem o vršnim kutovima, u okviru tri razine, opisujemo (prvo) na općoj razini sukladnosti kutova. Analogno kao u slučaju sukladnosti trokuta, na intuitivnoj razini za dva kuta kažemo da su sukladna ako se mogu nanijeti jedan na drugoga da se preklope. Opisom sukladnosti na kvalitativnoj razini, kažemo da su dva kuta (u ravnini) sukladna ako se jedan iz drugoga mogu dobiti paralelnim pomakom i rotacijom (oko vrha). Konačno, na kvantitativnoj razini kažemo da su dva kuta sukladna ako su im mjere jednake. Talesov teorem o vršnim kutovima je poseban slučaj opisanog teorema u terminima triju razina. Dakle, na kvalitativnoj razini možemo reći: *vršni su kutovi sukladni jer se mogu dobiti jedan iz drugoga rotacijom oko zajedničkog vrha (za jedan poluokret, za* $180°$*).*

Iz napisnog uočavamo da jednu temu možemo ”provući” kroz različite razine obrazovanja i prilagoditi učenicima različitih uzrasta. Dakle, potrebno se je usredotočiti na korake otkrivanja. Kao što smo vidjeli i u prethodna dva potpoglavlja, krećemo od najjednostavnijih pojmova, prema složenijim metodama otkrivanja. To je jedini način da kod učenika povećamo zanimanje za matematičke sadržaje i uklonimo eventualni strah od matematike. Na žalost, današnja situacija se nije uvelike promijenila. Autor je prije četrnaest godina, pišući navedeni članak, upozoravao na potrebu modernizacije matematike i detaljniju razradu koraka. Žalosno je vidjeti da, bez obzira na trud i želju većine nastavnika, nastava i metode i dalje stagnira i pridržava se tradicionalnih, provjerenih oblika - uhodane metode, provjereni sadržaji i zadaci. Odgovoriti na pitanje zašto je tome tako je široko i teško i prelazi okvire komentara ovog rada. Stoga ćemo tu problematiku ipak ovdje završiti i nadati se da će se u skorije vrijeme napredovati na tom području.

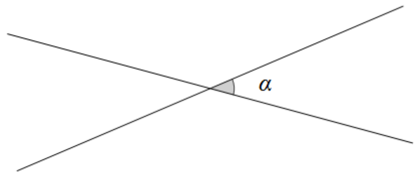
3.4 Primjena Talesovih teorema u zadacima s natjecanja

Talesovi se teoremi u redovnoj nastavi matematike osnovne i srednje škole najčešće samo izriču (i dokazuju), a primjenjuju u rješavanju najjednostavnijih problema. To je još jedno područje matematike koje se danas uči na taj način, učenici na pamet nauče pravila i pravilnosti, bez da razumiju o čemu je riječ. Negativna strana takvog načina poučavanja, kao što smo spominjali, jest odmak od stvarnosti u kojoj živimo. Odmak od tehnologije i svih mogućnosti koje nam ona pruža kako bi učenici na što realniji način uspjeli razumjeti samu bit sadržaja koje uče na teorijskoj razini. Ipak, da postoje problemi koje je moguće riješiti primjenom Talesovih teorema vidimo u primjerima zadataka s natjecanja: školskih, županijskih, ali i državnih.

Navest ćemo nekoliko primjera sa osnovnoškolskih i srednjoškolskih natjecanja koji se rješavaju primjenom Talesovih teorema. Promotrimo prvo zadatke za osnovnu školu. Fokus je stavljen na zadatke s natjecanja održanih posljednje četiri godine, od 2011. do 2014. godine. Zadatke ćemo poredati kronološki, krenuvši od 2011. godine, i to od općinsko-školskih natjecanjem ka državnima.

Primjer 3.4.1 (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 6. razred, 24. siječnja 2011., Zadatak 1.)**.** *Dva se pravca sijeku i određuju 4 kuta tako da zbroj veličina triju kutova iznosi* $322°$. *Kolike su velične svakog pojedinog kuta?*

Rješenje: Znamo da su vršni kutovi međusobno sukladni (**Talesov teorem o vršnim kutovima**). Lako možemo ”odbaciti” slučaj kada su sva četiri kuta prava, jer bi tada zbroj veličina triju kutova bio $270°$. Dakle, trebamo odrediti veličinu šiljastog i tupog kuta. Veličinu šiljastih kutova označimo s α. Predočimo situaciju slikom 3.1.



Slika 3.1:

Četiri kuta čije veličine trebamo odrediti čine puni kut, tj. $360°$ pa je veličina četvrtog kuta: $360° - 322° = 38° = \alpha$. Veličina tupog kuta je $180° - 38° = 142°$. Dakle, tražene veličine kutova su: $38°$ (dva vršna kuta) i $142°$ (dva vršna kuta).

Sličan zadatak, koji se rješava primjenom teorema o vršnim kutovima, susrećemo i 2012. godine, također u šestom razredu. Navesti ćemo stoga još ovaj primjer, a preostali, slični zadaci se rješavaju na analogan način. Zadaci ovog tipa su jedni od rijetkih "šablonskih" zadataka na natjecanjima za osnovnu školu.

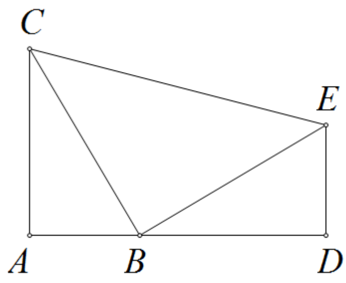
Primjer 3.4.2 (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 6. razred, 14. veljače 2012., Zadatak 5.)**.** *Dva pravca sijeku se u točki S. Zbroj veličina šiljastih kutova, koji pri tom nastaju, jednak je polovini veličine tupoga kuta. Odredi veličine šiljastih i tupih kutova.*

Rješenje: Označimo s α šiljasti kut, a sa β tupi. Zbog **Talesovog teorema o vršnim kutovima** i iz uvjeta zadatka slijedi: $2 \cdot (\alpha + \alpha) = \beta$. Dakle, $\beta = 4 \cdot \alpha$. Znamo da je zbroj sukuta jednak $180°$, odnosno, $\alpha + \beta = 180°$. Stoga vrijedi $\alpha + 4\alpha = 180°$, tj. $5\alpha = 180°$. Dakle, veličina šiljastog kuta je $\alpha = 36°$, a tupog $\beta = 4\alpha = 4 \circ 36° = 144°$.

Za rješavanje sljedećeg zadataka je potrebno znati teoreme o sukladnosti trokuta. Konkretno, problem ćemo riješiti primjenom Talesovog teorema o sukladnosti trokuta.

Primjer 3.4.3 (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 6. razred, 17. siječnja 2013., Zadatak 7.)**.** *Na dužini $\overline{AD}$ odabrana je točka B tako da su trokuti ABC i BDE pravokutni, a trokut CBE jednakokračan pravokutan (kao na slici 3.2). Pokaži da su trokuti ABC i BDE sukladni.*

Rješenje: Kako je trokut CBE jednakokračan pravokutan, onda je $|BC| = |BE|$ i $|\sphericalangle EBC| = 90°$. Obzirom da je trokut ABC pravokutan, onda je $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DBE|$ jer su to šiljasti kutovi s okomitim kracima. Kako je trokut BDE pravokutan, onda je $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BED|$ jer su to šiljasti kutovi s okomitim kracima. Prema **K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta**

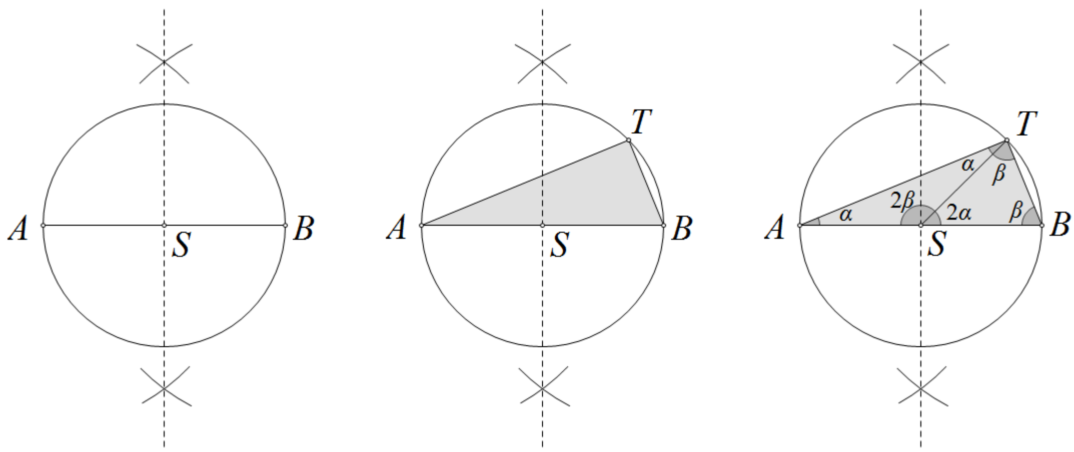


Slika 3.2:

slijedi $\triangle ABC \cong \triangle DEB$.

Sljedeći primjer lako možemo riješiti ukoliko smo upoznati s Talesovim teoremom o kutu nad promjerom kružnice. Ovdje ćemo navesti rješenje koje od učenika šestog razreda ne zahtijeva znanje šire od onoga koje oni obrađuju, po nastavnom planu i programu, do tada (trenutka kada se natjecanje održava). Zadatak ćemo stoga riješiti primjenom osnovnog znanja konstruktivne i elemetarne geometrije.

Primjer 3.4.4 (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 6. razred, 27. siječnja 2014., Zadatak 6.)**.** *Nacrtaj dužina $\overline{AB}$. Konstruiraj kružnicu kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer. Odaberi bilo koju točku T na konstruiranoj kružnici, različitu od A i B. Odredi veličinu kuta $\sphericalangle ATB$.*

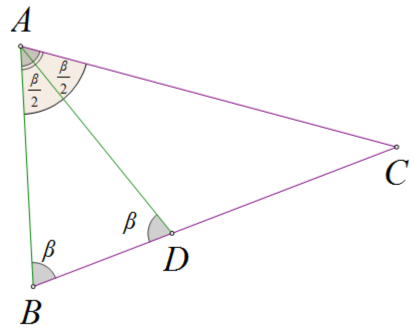


Slika 3.3:

Rješenje: Nacrtajmo prvo proizvoljnu dužinu $\overline{AB}$ (slika 3.3, lijevo). Konstruirajmo simetralu dužine $\overline{AB}$ i sa S označimo sjecište simetrale i dužine - to je upravo središte kružnice. Kontruirajmo stoga kružnicu sa središtem u S, polumjera $|AS| = |SB|$.
Odaberimo točku T na nacrtanoj kružnici i označimo $\sphericalangle ATB$, tj. $\triangle ABT$ (slika 3.3, sredina). Nacrtajmo dužinu $\overline{ST}$. Na taj smo način podijelili $\triangle ABT$ na dva trokuta: $\triangle AST$ i $\triangle SBT$ (slika 3.3, desno).
Uočavamo da su trokuti $\triangle AST$ i $\triangle SBT$ jednakokračni (jer su im kraci polumjeri kružnice sa središtem u točki S i promjerom $\overline{AB}$). Po **Talesovom teoremu o jednakokračnom trokutu**, veličine kutova uz osnovice navednih trokuta su jednake. Označimo redom te kuteve sa α i β, kao na slici 3.3, desno.
Uočimo, u $\triangle AST$, veličina vanjskog kuta označenog na slici je $|\sphericalangle BST| = 2\alpha$. Također, u $\triangle SBT$, veličina vanjskog kuta označenog na slici je $|\sphericalangle TSA| = 2\beta$.
Kut $\sphericalangle BSA$ je ispruženi, odnosno: $2\alpha + 2\beta = 180°$. Dijeljenjem izraza brojem dva, dobivamo: $\alpha + \beta = 90°$. Obzirom da je $\sphericalangle ATB = \alpha + \beta$, zaključujemo da je $|\sphericalangle ATB| = 90°$.
Dakle, pokazali smo da je kut nad promjerom kružnice pravi bez znanja o Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice.

Navest ćemo još dva zadatka, jedan sa županijskog, a drugi državnog natjecanja, oba iz 2012. godine.

Primjer 3.4.5 (Županijsko natjecanje iz matematike, 6. razred, 13. ožujka 2012., Zadatak 2.)**.** *Odredi veličine unutarnjih kutova trokuta ABC ako vrijedi:* $|AC| = |BC|$, $|AB| = |AD|$ *i* $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD|$.



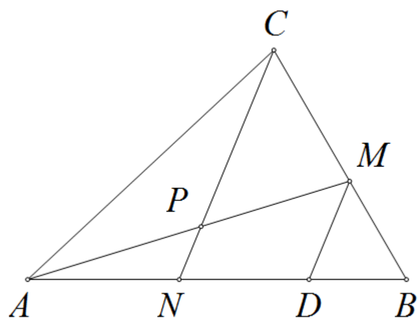
Slika 3.4:

Rješenje: Iz $|AC| = |BC|$ slijedi da je trokut ACB jednakokračan pa vrijedi (po **teoremu o jednakokračnom trokutu**) $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CAB|$. Označimo te kuteve sa β. Analogno, iz $|AB| = |AD|$ slijedi da je trokut ABD jednakokračan pa je $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle ADB|$. Dakle, ove

kutove također označavamo s β (vidi sliku 3.4).
Iz činjenice $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD|$ i $|\sphericalangle CAB| = \beta$ slijedi: $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD| = \frac{\beta}{2}$. Znamo: zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta je jednak 180° pa vrijedi $\beta + \beta + \frac{\beta}{2} = 180°$. Lakim računamo dobivamo: $\frac{5}{2} \cdot \beta = 180°$, tj. $\beta = 72°$. Dakle, veličine unutarnjih kutova trokuta ABC su 72°, 72° i $180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

Posljednji zadatak koji ćemo navesti se rješava primjenom Talesovog teorema o proporcionalnosti.

Primjer 3.4.6 (Državno natjecanje iz matematike, 7. razred, 25. travnja - 27. travnja 2012., Zadatak 5.)**.** *Točka N pripada stranici $\overline{AB}$, a točka M stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC, pri čemu je $|AN| : |NB| = 2 : 3$ i $|BM| : |MC| = 3 : 4$. U kojem omjeru točka presjeka dužina $\overline{AM}$ i $\overline{CN}$ dijeli dužinu $\overline{AM}$?*



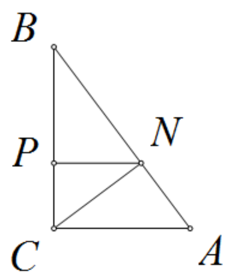
Slika 3.5:

Rješenje: Označimo s P točku presjeka dužina $\overline{AM}$ i $\overline{CN}$. Sa D označimo točku na $\overline{AB}$, takvu da vrijedi $\overline{CN} \| \overline{MD}$.
Iz uvjeta zadatka: $|AN| = 2k$, $|NB| = 3k$, $|BM| = 3m$ te $|MC| = 4m$, za neko $k, m \in \mathbb{Q}$.
Primjenom **Talesovog teorema o proporcionalnosti** vrijedi $|BD| : |DN| = |BM| : |MC| = 3 : 4$. Dakle, $|BD| = 3n$ i $|DN| = 4n$, za neko $n \in \mathbb{Q}$. Slijedi da je $|NB| = |ND| + |DB|$, tj. $3k = 4n + 3n$. Odnosno $\frac{k}{n} = \frac{7}{3}$.
Ponovno, prema teoremu o proporcionalnosti vrijedi: $|AP| : |PM| = |AN| : |ND|$. Odavde slijedi: $|AP| : |PM| = \frac{2k}{4n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{6}$.
Dakle, točka presjeka P, dužinu $\overline{AM}$ dijeli u omjeru 7:6.

Uočimo da se većina zadataka koji se rješavaju primjenom Talesovih teorema u osnovnoj školi pojavljuje u šestom razredu. Zašto je tome tako? U prethodnim smo naslovima vidjeli da Talesovi teoremi, po planu i programu osnovnoškolske matematike "pripadaju" sedmom razredu. Na natjecanjima se od učenika očekuje znanje i "viših" godina obrazovanja, tj. učenici šestog razreda bi trebali znati određene sadržaje sedmog razreda pa ih sukladno tome nastavnici i pripremaju za iste.

Na natjecanjima za srednju školu se zadaci ovog tipa rijetko pojavljuju. Srednjoškolska natjecanja naglasak stavljaju na primjenu trigonometrijskih funkcija, algebarske izraze, teoriju brojeva, krivulje drugog reda ili kompleksne brojeve. U zadnje četiri godine, možemo uočiti dva zadatka koji se rješavaju primjenom Talesovih teorema. Također, kod srednjoškolskih natjecanja možemo uočiti dvije varijante, A i B. Varijanta A je za prirodoslovno-matematičke programe, a B za opće (važno je znati da razinu A mogu rješavati svi učenici, bez obzira na smjer i školu koju pohađaju; ta se razina sadržajno razlikuje i poznata je kao "teža"). Zadatke ćemo, kao i u osnovnoj školi poredati vremenskim redoslijedom održavanja natjecanja (posljednje četiri godine, 2011.-2014.).

Primjer 3.4.7 (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 2. razred, B varijanta, 24. siječnja 2011.)**.** *Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Povučena je visina CN na stranicu AB i iz točke N povučemo visinu NP na stranicu BC u trokutu BCN. Ako su duljine kateta $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$, kolika je duljina visine NP?*



Slika 3.6:

Rješenje:
Predočimo situaciju slikom 3.6. Sada uočavamo:
trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle CBN$ su slični pa imamo (primjenom **Talesovog teorema o proprocionalnosti**) sljedeći omjer: $\dfrac{|NB|}{|BC|} = \dfrac{|BC|}{|AB|}$.

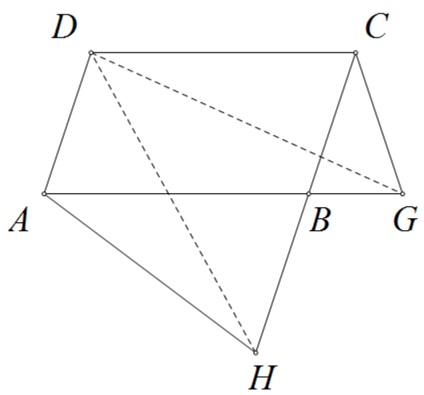
Uz isto obrazloženje, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle NBP$ su slični pa vrijedi: $\dfrac{|NP|}{|AC|} = \dfrac{|NB|}{|AB|}$.
Sada, iz navedena dva omjera i primjenom Pitagorinog teorema imamo:

$$|NP| = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot |NB| = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} \cdot |BC| = \frac{|AC| \cdot |BC|^2}{|AB|^2} = \frac{3 \cdot 4^2}{3^2 + 4^2} = \frac{48}{25}.$$

Uočimo da smo sličan zadatak već promatrali u ovom radu. Prevedemo li tekst navedenog zadatka u realan kontekst, na primjer, trebamo li odrediti udaljenost broda od obale, možemo ju odrediti na opisani način.

Primjer 3.4.8 (Županijsko natjecanje iz matematike, 1. razred, A varijanta, 13. ožujka 2012.)**.** *Dan je paralelogram ABCD sa šiljastim kutom u vrhu A. Na pravcu AB odabrana je točka G, različita od B, tako da je* $|BC| = |CG|$*, a na pravcu BC točka H, različita od B, tako da je* $|AB| = |AH|$*. Dokaži da je trokut DGH jednakokračan.*

Rješenje: Predočimo situaciju slikom 3.7.



Slika 3.7:

Trokuti ABH i BCG su jednakokračni i vrijedi $\sphericalangle ABH = \sphericalangle CBG$ (po teoremu o vršnim kutovima). Iz istog je razloga i $\sphericalangle BAH = \sphericalangle BCG$. Kako je $|\sphericalangle DAH| = |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle DCG|$ i $|AD| = |BC| = |CG|$ te $|AH| = |AB| = |CD|$ trokuti ADH i CGD su sukladni. Iz toga slijedi da je $|DH| = |DG|$, tj. trokut DGH je jednakokračan.

Bibliografija

[1] G. D. Allen, *Thales of Miletus*, dostupno na http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/Greek/thales.pdf, (srpanj 2014.)

[2] D. M. Burton, *The History of Mathematics*, Mc Graw Hill, Boston (etc.), 2003.

[3] Ž. Dadić, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[4] B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2001.

[6] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za treći razred gimnazije, 2.dio*, Element, Zagreb, 2006.

[7] I. Gusić, *Tri razine obrade matematičkih pojmova*, Matematika i škola (MiŠ) 8 (2001), 111-118.

[8] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1965.

[9] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1931.

[10] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija (skripta)*, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf, (srpanj 2014.)

[11] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Sukladnost trokuta*, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/sukladnost-dokazi.pdf, (srpanj 2014.)

[12] B. Kalin, *Povijest filozofije*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.

[13] Z. Kurnik, *Apstrakcija*, Matematika i škola (MiŠ) 6 (2000), 11-15.

[14] Ž. Orčić, R. Svedrec, N. Sarapa, *Matematika 6, udžbenik sa zbirkom zadataka za šesti razred, 1. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2010.

[15] Ž. Orčić, R. Svedrec, N. Sarapa, *Matematika 7, udžbenik sa zbirkom zadataka za sedmi razred, 1. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2009.

[16] Ž. Orčić, R. Svedrec, N. Sarapa, *Matematika 7, udžbenik sa zbirkom zadataka za sedmi razred, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2009.

[17] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.

[18] M. Sevdić, *Matematička čitanka*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1947.

[19] S. Stilinović, Ž. Orčić, N. Sarapa, *Matematika 5, udžbenik sa zbirkom zadataka za peti razred, 1. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2010.

[20] S. Stilinović, Ž. Orčić, N. Sarapa, *Matematika 5, udžbenik sa zbirkom zadataka za peti razred, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2010.

[21] K. Vincetić, *Starogrčka matematika*, dostupno na `http://www.mathos.unios.hr/~kvinceti/zadaca1/`, (kolovoz 2014.)

[22] `http://hr.wikipedia.org/wiki/Tales`, (srpanj 2014.)

[23] `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Extras/Airy_Thales.html`, (srpanj 2014.)

[24] `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-OS.htm`, (kolovoz 2014.)

[25] `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`, (kolovoz 2014.)

[26] `http://www.britannica.com/EBchecked/topic/589798/Thales-of-Miletus#`, (kolovoz 2014.)

[27] `http://www.hazu.hr/~duda/tales.html`, (srpanj 2014.)

[28] `http://www.iep.utm.edu/thales/`, (kolovoz 2014.)

Sažetak

Talesovi su teoremi jedno od važnijih postignuća elementarne geometrije. Postoje razni dokazi ovih teorema, ali ni za jedan nije sigurno da je izvorni, tj. da ga je upravo u tom obliku izrekao Tales.
Teoremi se javljaju na svim razinama obrazovanja, od osnovnoškolske do fakultetske. Osim što njihovom primjenom možemo riješiti razne matematičke probleme i zadatke, možemo riješiti i razne probleme iz realnog života, kao što je i opisano u radu.
U prvom smo dijelu naveli biografske podatke o Talesu, o njegovom doprinosu matematici i utjecaju na znanstvenike koji su živjeli nakon njega. Dokaze Talesovih teorema, krenuvši od teorema u njihovom prvotnom obliku, do iskaza i dokaza kakve danas poznajemo, smo opisali u drugom poglavlju. Konačno, u trećem smo poglavlju povezali Talesove teoreme i osnovnoškolsku te srednjoškolsku razinu obrazovanja i naveli razne primjere koji se rješavaju primjenom Talesovih teorema.

Summary

Tales theorems are one of the most important discoveries of elementary geometry. There are various proofs of these theorems, but none of these proofs were never found to be said by Tales himself.

Theorems are represented in all levels of education, from Elementary school to Colleges. Except that their application can solve various mathematical problems and tasks, we can solve a variety of problems in real life also, as we describe in this paper.

First chapter contains general, biographic information about Tales, his contribution to mathematic and his influence on scientists years after his death. Proofs of Tales theorems, starting from theorems in their original form to statements and evidences as we know today are described in second chapter.

Finally, in the third chapter, we connected Tales theorems with primary and secondary level of education. Also, we have selected a various examples which can be solved using Tales theorems.

Životopis

Zovem se Tanja Kralj. Rođena sam 24. siječnja 1991. godine u Banja Luci, u Republici Bosni i Hercegovini. Ubrzo nakon rođenja sam s roditeljima, Marijom i Borisom, te starijom sestrom Anom preselila u Sloveniju gdje smo živjeli do 1993. godine. Od tada živimo u Velikim Zdencima u kojima sam pohađala prva četiri razredna osnovne škole (područna škola; Osnovna škola Ivana Nepomuka-Jemeršića). Sljedeća četiri razreda sam pohađala u matičnoj školi, u Grubišnom Polju. U istom sam mjestu upisala i Opću gimnaziju Bartola Kašića. Bila sam odličan učenik kroz cijelo školovanje. Godine 2009. upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, Matematičkom odjelu. Tri godine kasnije, stekla sam diplomu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike i iste godine nastavila studij upisavši Diplomski sveučilišni studij matematike, također nastavnički smjer.