Hausdorffova metrika

Volarić, Marina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marina Volarić

HAUSDORFFOVA METRIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, lipanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Ovaj se rad bavi Hausdorffovom metrikom, odnosno Hausdorffovom udaljenošću. Hausdorffova udaljenost se definira za dva neprazna omeđena skupa u metričkom prostoru. pokazuje se da tako dobivamo pseudometriku na skupu svih nepraznih omeđenih podskupova danog metričkog prostora, a metriku na skupu svih nepraznih omeđenih i zatvorenih podskupova danog metričkog prostora.

Hausdorffova je udaljenost dobila ime po Felixu Hausdorffu koji je rođen 1869. godine u Leipzigu, a umro 1942. godine.
U prvom poglavlju definiramo pojam metričkog prostora te neke osnovne pojmove koji će nam biti potrebni. U drugom poglavlju definiramo Hausdorffovu udaljenost dva skupa te ispitujemo razna svojstva tog pojma. S tim u vezi promatramo pseudometriku, zatvorene skupove, potpuno omeđene skupove, guste skupove te pojam zatvarača skupa te proučavamo veze ovih pojmova i Hausdorffove udaljenosti.

Poglavlje 1

Metriči prostor

Definicija 1.0.1. *Neka je X neprazan skup te* $d : X \times X \to \mathbf{R}$ *funkcija takva da za sve x, y, z* $\in X$ *vrijede sljedeće svojstva:*

(1) $d(x, y) \geq 0$

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x, y) = d(y, x)$

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(nejednakost trokuta)*

Tada za d kažemo da je metrika na skupu X, a za uređen par (X, d) *kažemo da je metrički prostor.*

Primjer 1.0.2. *Neka je* $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana sa* $d(x, y) = |y - x|$. *Tvrdimo da je d metrika na skupu* $\mathbf{R}$.

Neka su $x, y \in \mathbf{R}$. *Očito je* $d(x, y) \geq 0$. *Nadalje,*

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Očito je $d(x, y) = d(y, x)$. *Neka je* $z \in \mathbf{R}$. *Tada je*

$$d(x, y) = |y - x| = |(y - z) + (z - x)| \leq |y - z| + |z - x| = d(z, y) + d(x, z),$$

dakle $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *Dakle, d je zaista metrika na* $\mathbf{R}$. *Za d kažemo da je euklidska metrika na* $\mathbf{R}$.

Primjer 1.0.3. *Neka je* $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana sa*

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Tada je d metrika na $\mathbf{R}^2$. *Dokažimo to. Neka su*

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}.$$

Očito je $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geq 0$. *Vrijedi*

$$\begin{aligned} & d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y_1 - x_1)^2 = 0 \end{aligned}$$

i

$$(y_2 - x_2)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow (y_1 - x_1) = 0$ *i* $(y_2 - x_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = x_1$ *i* $y_2 = x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, *dakle*

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2).$$

Vrijedi

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d((y_1, y_2), (x_1, x_2)).$$

Neka su z_1, $z_2 \in \mathbf{R}$.
Dokažimo da je

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leq d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d((z_1, z_2), (y_1, y_2)),$$

tj. da je

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \leq \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}. \tag{1.1}$$

Neka je $u_1 = z_1 - x_1$, $v_1 = y_1 - z_1$, $u_2 = z_2 - x_2$, $v_2 = y_2 - z_2$. *Tada je* $u_1 + v_1 = y_1 - x_1$, $u_2 + v_2 = y_2 - x_2$. *Stoga je nejednakost (1.1) ekvivalentna*

$$\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2} + \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

a ova nejednakost je ekvivalentna

$$(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 \leq u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

tj. sa

$$u_1^2 + 2u_1 v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2 v_2 + v_2^2 \leq u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Stoga je dovoljno dokazati da je

$$u_1v_1 + u_2v_2 \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{1.2}$$

Tvrdimo da je

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2). \tag{1.3}$$

Ako to pokažemo, onda bismo imali

$$|u_1v_1 + u_2v_2| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

pa će posebno slijediti (1.2). Dokažimo dakle da vrijedi (1.3).

Imamo da je nejednakost (1.3) ekvivalentna sa

$$u_1^2v_1^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_2^2 \leq u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2$$

tj. sa

$$0 \leq u_1^2v_2^2 - 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_1^2.$$

No, posljednja nejednakost vrijedi jer je broj na desnoj strani jednak

$$(u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

Prema tome d je metrika na $\mathbf{R}^2$. *Za d kažemo da je euklidska metrika na* $\mathbf{R}^2$.

Primjer 1.0.4. *Općenitije, neka je* $n \in \mathbf{N}$ *te neka je* $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana sa*

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}.$$

Tada je d metrika na $\mathbf{R}^n$. *Dokažimo to.*

Da vrijede prva tri svojstva iz definicije metrike vidimo na isti način u prethodnom primjeru. Dokažimo sada da za d vrijedi nejednakost trokuta.

Neka su

$$x, y, z \in \mathbf{R}^n, x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n), z = (z_1, ..., z_n).$$

Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ *definiramo brojeve* u_i *i* v_i *sa*

$$u_i = z_i - x_i, v_i = y_i - z_i.$$

Tada za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ *vrijedi*

$$u_i + v_i = y_i - x_i.$$

Uočimo da je

$$d(x,z) = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}, d(z,y) = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}, d(x,y) = \sqrt{(u_1+v_1)^2 + ... + (u_n+v_n)^2}.$$

Stoga je nejednakost

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

ekvivalentna nejednakosti

$$\sqrt{(u_1+v_1)^2 + ... + (u_n+v_n)^2} \leq \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2} + \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}. \tag{1.4}$$

Analogno kao u prethodnom primjeru dobivamo da je nejednakost (1.4) ekvivalentna nejednakosti

$$u_1v_1 + ... + u_nv_n \leq \sqrt{(u_1^2 + ... + u_n^2)}\sqrt{(v_1^2 + ... + v_n^2)},$$

stoga je dovoljno pokazati da je

$$(u_1v_1 + ... + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + ... + u_n^2)(v_1^2 + ... + v_n^2). \tag{1.5}$$

Općenito, ako su $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbf{R}$ *onda je*

$$(x_1 + ... + x_n)(y_1 + ... + y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i<j} x_iy_j + \sum_{i<j} y_ix_j.$$

Posebno za $x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$ *dobivamo*

$$(x_1 + ... + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_1^2 + 2\sum_{i<j} x_ix_j.$$

Stoga je nejednakost (1.5) ekvivalentna sa

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2v_i^2 + 2\sum_{i<j} u_iv_iu_jv_j \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^2v_i^2 + \sum_{i<j} u_i^2v_j^2 + \sum_{i<j} v_i^2u_j^2,$$

tj. sa $\sum_{i<j} 2u_iv_iu_jv_j \leq \sum_{i<j}(u_i^2v_j^2 + v_i^2u_j^2)$ *što je ekvivalentno sa*

$$0 \leq \sum_{i<j}(u_i^2v_j^2 + v_i^2u_j^2 - 2u_iv_iu_jv_j).$$

No ova nejednakost vrijedi jer je za sve $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$u_i^2v_j^2 + v_i^2u_j^2 - 2u_iv_iu_jv_j = (u_iv_j - v_iu_j)^2 \geq 0.$$

Time smo dokazali da je d metrika na $\mathbf{R}^n$. *Za d kažemo da je euklidska metrika na* $\mathbf{R}^n$.

Definicija 1.0.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka su A i B neprazni poskupovi od X te neka je ε pozitivan realan broj. Tada pišemo $A <_\varepsilon B$ ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) < \varepsilon$.*

Primjer 1.0.6. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^2$ te neka je*

$$A = \{(0, t) \mid t \in [0, 1]\}, B = \{(\frac{1}{4}, t) \mid t \in [0, 2]\}.$$

Tada je $A <_{\frac{1}{3}} B$.

Naime, neka je $a \in A$. Tada je $a = (0, t)$, gdje je $t \in [0, 1]$. Neka je $b = (\frac{1}{4}, t)$. Tada je $b \in B$ te je

$$d(a, b) = \frac{1}{4}.$$

Dakle, za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je

$$d(a, b) < \frac{1}{3}.$$

Uočimo da isti argument pokazuje da je $A <_\varepsilon B$ za svaki $\varepsilon \in \mathbf{R}$ td. je $\varepsilon > \frac{1}{4}$.

Nadalje, ne vrijedi $A <_{\frac{1}{4}} B$. Pretpostavimo suprotno. Tada za točku $a = (0, 0)$ postoji $b \in B$ tako da je $d(a, b) < \frac{1}{4}$. Imamo $b = (\frac{1}{4}, t)$, gdje je $t \in [0, 2]$. Stoga je

$$d(a, b) = \sqrt{(\frac{1}{4} - 0)^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + t^2} \geq \sqrt{(\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{4},$$

dakle $d(a, b) \geq \frac{1}{4}$ što je u kontradikciji s $d(a, b) < \frac{1}{4}$.

S druge strane $B <_\varepsilon A$ ne vrijedi za $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Naime, neka je $b = (\frac{1}{4}, 2)$. Očito je $b \in B$. Neka je $a \in A$. Tada je $a = (0, t), t \in [0, 1]$. Iz $t \leq 1$ slijedi $0 \leq 1 - t$ pa je $1 \leq 2 - t$. Stoga je

$$d(a, b) = \sqrt{(\frac{1}{4} - 0)^2 + (2 - t)^2} \geq \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + 1} = \sqrt{\frac{17}{16}}.$$

Dakle, $d(b, a) \geq \frac{\sqrt{17}}{4}$ za svaki $a \in A$. Posebno,

$$d(b, a) > \frac{1}{3}$$

za svaki $a \in A$ pa je očito da ne vrijedi $B <_{\frac{1}{3}} A$. Uočimo da $B <_{\frac{1}{3}} A$ također ne vrijedi za niti jedan $\varepsilon \leq \frac{\sqrt{17}}{4}$.

Nadalje, neka je $\varepsilon \in \mathbf{R}$ tako da je $\varepsilon > \frac{\sqrt{17}}{4}$. Tada je $B <_\varepsilon A$. To slijedi iz činjenice da za svaki $b \in B$ vrijedi

$$d(b, (0, 1)) \leq \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Zašto vrijedi posljednja nejednakost?
Ako je $b \in B$ onda je

$$b = (\frac{1}{4}, t), t \in [0, 2].$$

Iz $0 \leq t \leq 2$ *slijedi* $-1 \leq t - 1 \leq 1$ *pa je* $|t - 1| \leq 1$ *što povlači da je* $(t-1)^2 \leq 1$*. Stoga je*

$$d(b, (0, 1)) = \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (1-t)^2} \leq \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + 1} = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Neka je (X, d) metrički prostor te neka su A i B neprazni poskupovi od X i $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi $A <_\varepsilon B$ i $B <_\varepsilon A$. Tada pišemo $A \approx_\varepsilon B$.

Primjer 1.0.7. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^2$ te neka su A i B kao u prethodnom primjeru. Neka je $\varepsilon \in \mathbf{R}$ takav da je $\varepsilon > \frac{\sqrt{17}}{4}$.*
Tada je $\varepsilon > \frac{1}{4}$ pa vrijedi $A <_\varepsilon B$ i $B <_\varepsilon A$ pa je $A \approx_\varepsilon B$. S druge strane ako je ε pozitivan broj tako da je $\varepsilon \leq \frac{\sqrt{17}}{4}$ onda ne vrijedi $B <_\varepsilon A$ pa stoga ne vrijedi ni $A \approx_\varepsilon B$.

Zaključak: Skup svih pozitivnih brojeva ε takvih da je $A \approx_\varepsilon B$ je jednak $\langle \frac{\sqrt{17}}{4}, +\infty \rangle$.

Definicija 1.0.8. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $a \in R$. Za a kažemo da je gornja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq a$.*

Definicija 1.0.9. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $a \in \mathbf{R}$. Za a kažemo da je donja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \geq a$.*

Definicija 1.0.10. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $a \in \mathbf{R}$. Za a kažemo da je infimum skupa S ako je a najveća donja međa skupa S tj. ako vrijedi slijedeće:*

(1) a je donja međa skupa S

(2) Za svaku donju među b skupa S vrijedi $b \leq a$.

Uočimo da je infimum skupa, ako postoji, jedinstven.
Naime, neka su a_1 i a_2 infimumi skupa S onda, budući da je a_2 donja međa skupa S, vrijedi $a_2 \leq a_1$ te također vrijedi $a_1 \leq a_2$ jer je a_1 donja međa skupa S. Stoga je $a_1 = a_2$.

Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Za $a \in S$ kažemo da je minimum skupa S ako je $a \leq x$, $\forall\ x \in S$ tj. ako je a donja međa skupa S. Uočimo slijedeće: Ako je a minimum skupa S, onda je a i infimum skupa S.
Naime, očito je a donja međa od S, a ako je b bilo koja donja međa od S onda je b manji ili jednak od svakog elementa skupa S pa je posebno $b \leq a$.

Primjer 1.0.11. *Neka je $a \in \mathbf{R}$. Tada je a infimum skupa $\langle a, +\infty\rangle$. Dokažimo to.*

Očito je a donja međa ovog skupa. Pretpostavimo da je b donja međa od $\langle a, +\infty\rangle$. Tvrdimo da je $b \leq a$. Pretpostavimo suprotno.

Tada je $a < b$ pa postoji

$$x \in \mathbf{R}$$

tako da je

$$a < x < b.$$

Tada je $x \in \langle a, +\infty\rangle$ pa budući da je b donja međa ovog skupa vrijedi $b \leq x$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $x < b$. Premo tome $b \leq a$ pa zaključujemo da je a i infimum skupa $\langle a, +\infty\rangle$. Nadalje ovaj skup nema minimum: ako je m minimum ovog skupa onda je m i infimum ovog skupa pa iz činjenice da infimum skupa je jedinstven slijedi $m = a$, no ovo je nemoguće jer

$$a \notin \langle a, +\infty\rangle.$$

Primjer 1.0.12. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Za S kažemo da je odozdo omeđen skup u S ako postoji bar jedna donja međa od S (tj. ako postoji bar jedan $a \in \mathbf{R}$ tako da je a donja međa od S).*

Uočimo da samo odozdo omeđeni skupovi mogu imati infimum.

Aksiom potpunosti: Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbf{R}$ takvi da je $x \leq y$ za sve $x \in S$ i $y \in T$. Tada postoji $z \in \mathbf{R}$ takav da je

$$x \leq z \leq y$$

za sve $x \in S$ i $y \in T$.

Propozicija 1.0.13. *Neka je S neprazan odozdo omeđen podskup od $\mathbf{R}$. Tada S ima infimum.*

Dokaz. Neka je T skup svih $a \in \mathbf{R}$ takvih da je a donja međa od S. Tada je

$$T \neq \emptyset$$

(jer je S odozdo omeđen). Nadalje, za svaki $x \in T$ i svaki $y \in S$ vrijedi $x \leq y$. Stoga prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbf{R}$ tako da je

$$x \leq z \leq y$$

za sve $x \in T$ i $y \in S$. Iz ovoga je očito da je z infimum skupa S. □

Definicija 1.0.14. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je $a \in \mathbf{R}$. Za a kažemo da je supremum skupa S ako je a najmanja donja međa skupa S tj. ako vrijedi slijedeće:*

(1) a je gornja međa skupa S

(2) Za svaku gornju među b skupa S vrijedi $a \leq b$.

Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Za $a \in S$ kažemo da je maksimum skupa S ako je a gornja međa skupa S. Uočimo sljedeće: Ako je a maksimum skupa S, onda je a supremum skupa S.

Za $S \subseteq \mathbf{R}$ kažemo da je odozgo omeđen ako postoji barem jedna gornja međa od S.

Propozicija 1.0.15. *Neka je S neprazan odozdo omeđen podskup od R. Tada S ima supremum.*

Dokaz. Dokazujemo analogno kao prethodna propozicija 1.0.13. □

Napomena 1.0.16. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su A i B neprazni podskupovi od X takvi da je $A \subseteq B$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$A <_{\varepsilon} B.$$

Naime, za svaki $a \in A$ vrijedi $a \in B$ i

$$d(a, a) = 0 < \varepsilon.$$

Primjer 1.0.17. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Neka je $A = \{0\}$ te B=$\mathbf{R}$. Tvrdimo da ne postoji $\varepsilon > 0$ tako da je*

$$B <_{\varepsilon} A.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji

$$\varepsilon > 0$$

tako da

$$B <_{\varepsilon} A.$$

To znači da za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da

$$d(b, a) < \varepsilon.$$

No, ako je $a \in A$, onda je $a = 0$. Prema tome, za svaki $b \in B$ vrijedi $d(b, 0) < \varepsilon$, tj. $| b | < \varepsilon$. Posebno za

$$b = \varepsilon + 1$$

imamo

$$b \in B$$

i

$$|b| < \varepsilon,$$

tj.

$$\varepsilon + 1 < \varepsilon,$$

kontradikcija.
Zaključak: Ne postoji $\varepsilon > 0$ *tako da je* $B <_\varepsilon A$. *Posebno, ne postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je* $A \approx_\varepsilon B$.

Definicija 1.0.18. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* $x_0 \in X$ *i* $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$. *Definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x_0 \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ *kažemo da je kugla oko* x_0 *radijusa* r *u metričkom prostoru* (X, d).

Primjer 1.0.19. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbf{R}$. *Neka je* $x_0 \in \mathbf{R}$ *te* $r > 0$. *Tvrdimo da je*

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle. \tag{1.6}$$

Neka je

$$k \in K(x_0, r)$$

Tada je

$$d(x_0, k) < r,$$

tj.

$$|x_0 - k| < r$$

pa je

$$-r < x_0 - k < r.$$

Iz ovoga slijedi $x_0 - r < k$ *i* $k < x_0 + r$. *Stoga je*

$$k \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle.$$

Time smo dokazali da je

$$K(x_0, r) \subseteq \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle.$$

Analogno dobivamo da je

$$\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \subseteq K(x_0, r).$$

Prema tome vrijedi (1.6). Nadalje, neka su $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Neka je*

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, r = \frac{b-a}{2}.$$

Tada je $a = x_0 - r$, $b = x_0 + r$, *stoga je*

$$\langle a, b\rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$$

pa prema (1.6) imamo $\langle a, b\rangle = K(x_0, r)$. *Dakle,* $\langle a, b\rangle$ *je otvorena kugla u metričkom prostoru (*$\mathbf{R}$*,*d*).*

Poglavlje 2

Hausdorffova metrika

Definicija 2.0.20. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te* $A \subseteq X$. *Kažemo da je* A *omeđen skup u metričkom prostoru* (X, d) *ako postoji* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$ *tako da je* $A \subseteq K(x_0, r)$.

Lema 2.0.21. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* A *omeđen skup u tome metričkom prostoru. Tada za svaki* $x \in X$ *postoji* $s > 0$ *tako da je*

$$A \subseteq K(x, s).$$

Dokaz. Budući da je A omeđen u (X, d) postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ tako da je

$$A \subseteq K(x_0, r).$$

Neka je $x \in X$. Neka je

$$s = d(x_0, x) + r.$$

Očito je $s > 0$. Tvrdimo da je

$$K(x_0, r) \subseteq K(x, s). \tag{2.1}$$

Neka je $k \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x_0, k) < r$. Imamo

$$d(x, k) \le d(x, x_0) + d(x_0, k) < d(x_0, x) + r = s,$$

dakle, $d(x, k) < s$. Stoga je $k \in K(x, s)$. Time smo dokazali da vrijedi (2.1). Iz $A \subseteq K(x_0, r)$ slijedi

$$A \subseteq K(x, s).$$

Time je lema dokazana. □

Propozicija 2.0.22. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* S *i* T *dva omeđena skupa u* (X, d). *Tada je*

$$S \cup T$$

omeđen skup u (X, d).

Dokaz. Odaberimo $x \in X$. Budući da je S omeđen skup, prema lemi 2.0.21 postoji $r_1 > 0$ takav da je

$$S \subseteq K(x, r_1).$$

Isto tako, budući da je T omeđen skup, postoji $r_2 > 0$ takav da je

$$T \subseteq K(x, r_2).$$

Neka je

$$r = max\{r_1, r_2\}.$$

Tada je $S \subseteq K(x, r)$ i $T \subseteq K(x, r)$ pa je

$$S \cup T \subseteq K(x, r).$$

Prema tome $S \cup T$ je omeđen skup u (X, d). □

Primjer 2.0.23. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^2$. Neka je*

$$A = \{(0, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$$

i

$$B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Tvrdimo da ne postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $A <_\varepsilon B$ ili $B <_\varepsilon A$.
Pretpostavimo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $A <_\varepsilon B$. Neka je

$$a = (0, \varepsilon + 1).$$

Neka je $b \in B$. Tada je $b = (x, 0)$, gdje je $x \in R$. Vrijedi

$$d(a, b) = d((0, \varepsilon + 1), (x, 0)) = \sqrt{(0 - x)^2 + (\varepsilon + 1)^2} = \sqrt{x^2 + (\varepsilon + 1)^2} \geq \varepsilon + 1.$$

Dakle,

$$d(a, b) \geq \varepsilon + 1$$

za svaki $b \in B$.
S druge strane očito je $a \in A$ pa zbog $A <_\varepsilon B$ postoji $b \in B$ takav da je

$$d(a, b) < \varepsilon,$$

a to je kontradikcija. Dakle, ne postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $A <_\varepsilon B$.
Analogno pokazujemo da ne postoji ni $\varepsilon > 0$ takav da je $B <_\varepsilon A$.

Propozicija 2.0.24. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su A i B neprazni omeđeni skupovi u* (X, d)*. Tada postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je*

$$A <_{\varepsilon} B.$$

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji skup $A \cup B$ je omeđen pa stoga postoji $x_0 \in X$ i $r > 0$ tako da je $A \cup B \subseteq K(x_0, r)$. Neka je $a \in A$ i $b \in B$. Tada su $a, b \in K(x_0, r)$ pa je $d(a, x_0) < r$ i $d(b, x_0) < r$. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo $d(a, b) \leq d(a, x_0) + d(x_0, b) < r + r = 2r$. Dakle, $d(a, b) < 2r$ za svaki $a \in A$ i za svaki $b \in B$. Prema tome, $A <_{2r} B$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 2.0.25. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su A i B neprazni omeđeni skupovi u* (X, d)*. Tada postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je*

$$A \approx_{\varepsilon} B.$$

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji postoji

$$\varepsilon_1 > 0$$

takav da je $A <_{\varepsilon_1} B$. Također, prema istoj propoziciji postoji

$$\varepsilon_2 > 0$$

takav da je $B <_{\varepsilon_2} A$. Neka je

$$\varepsilon = max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

Tada je $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ pa je $A <_{\varepsilon} B$ te također $\varepsilon_2 \leq \varepsilon$ pa je $B <_{\varepsilon} A$. Prema tome

$$A \approx_{\varepsilon} B.$$

□

Definicija 2.0.26. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su A i B neprazni omeđeni skupovi u* (X, d)*. Definiramo*

$$\varphi(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 \mid A \approx_{\varepsilon} B\}.$$

Tada za $\varphi(A, B)$ *kažemo da je Hausdorffova udaljenost skupova A i B u metričkom prostoru* (X, d)*.*

Primjer 2.0.27. *Neka su A,B podskupovi od* $\mathbf{R}^2$ *definirani sa*

$$A = \{(0, t) \mid t \in [0, 1]\},$$

$$B = \{(\frac{1}{4}, t) \mid t \in [0,2]\}.$$

Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^2$*. Vrijedi*

$$A \subseteq K((0,0),2).$$

Naime, za svaki $x \in [0,1]$ *imamo*

$$d((0,x),(0,0)) = \sqrt{(0-0)^2 + (0-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x| \leq 1 < 2$$

pa je

$$(0,x) \in K((0,0),2).$$

Analogno zaključujemo da je

$$B \subseteq K((\frac{1}{4},0),3).$$

Prema tome A i B su omeđeni skupovi u metričkom prostoru ($\mathbf{R}^2$*,d). Očito su A i B neprazni skupovi.*

U primjeru 1.0.6 smo vidjeli da je $\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} = \langle \frac{\sqrt{17}}{4}, +\infty\rangle$*. Stoga je* $\varphi(A,B) = inf\langle \frac{\sqrt{17}}{4}, +\infty\rangle$ *pa je prema primjeru 1.0.11* $\varphi(A,B) = \frac{\sqrt{17}}{4}$*.*

Primjer 2.0.28. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbf{R}^2$*. Neka je* $r > 0$ *te neka su A,B podskupovi od* $\mathbf{R}^2$ *definirani sa*

$$A = \{(0,x) \mid x \in [0,1]\},$$

$$B = \{(r,x) \mid x \in [0,1]\}.$$

Kao u prethodnom primjeru, zaključujemo da su A i B omeđeni skupovi u metričkom prostoru ($\mathbf{R}^2$*,d).*$Pretpostavimoda je \varepsilon > 0$ *takav da je*

$$A \approx_\varepsilon B,$$

tada je $A <_\varepsilon B$ *pa za svaki* $a \in A$ *postoji* $b \in B$ *takav da je*

$$d(a,b) < \varepsilon.$$

Posebno, za $a = (0,0)$ *postoji* $b \in B$ *takav da je* $d(a,b) < \varepsilon$*. Imamo* $b = (r,x)$ *gdje je* $x \in [0,1]$*. Stoga je*

$$d(a,b) = \sqrt{x^2 + r^2}$$

pa je

$$\sqrt{x^2 + r^2} < \varepsilon$$

što povlači

$$x^2 + r^2 < \varepsilon^2.$$

Prema tome $r^2 < \varepsilon^2$ *pa je* $r < \varepsilon$. *Time smo dokazali da je*

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} \subseteq \langle r, +\infty\rangle.$$

Uočimo slijedeće, za svaki $x \in [0, 1]$ *vrijedi*

$$d((0, x), (r, x)) = r.$$

Ovo znači da za svaki $a \in A$ *postoji* $b \in B$ *takav da je*

$$d(a, b) = r$$

te za svaki $b \in B$ *postoji* $a \in A$ *takav da je* $d(b, a) = r$. *Stoga, za svaki* $\varepsilon \in \langle r, +\infty\rangle$ *vrijedi* $A <_\varepsilon B$ *i* $B <_\varepsilon A$, *tj.*

$$A \approx_\varepsilon B.$$

Zaključak:

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} = \langle r, +\infty\rangle.$$

Stoga je

$$\varphi(A, B) = r.$$

Primjer 2.0.29. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Neka su* $x, y \in X$. *Neka je* $A = \{x\}$ *i* $B = \{y\}$. *Očito je da su* A *i* B *neprazni skupovi u* (X, d). *Tada je*

$$\varphi(A, B) = d(x, y).$$

Dokažimo to.

Pretpostavimo da je $\varepsilon > 0$ *takav da je*

$$A \approx_\varepsilon B.$$

Tada je $A <_\varepsilon B$ *pa budući da je* $x \in A$ *postoji* $b \in B$ *tako da je*

$$d(x, b) < \varepsilon.$$

Očito je $b = y$. *Dakle imamo*

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Prema tome,

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} \subseteq \langle d(x, y), +\infty\rangle.$$

Obratno, ako je

$$\varepsilon \in \langle d(x, y), +\infty\rangle$$

onda je $d(x, y) < \varepsilon$ *pa je očito da je* $A <_\varepsilon B$ *i* $B <_\varepsilon A$*, tj.*

$$A \approx_\varepsilon B.$$

Dakle,

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} = \langle d(x, y), +\infty\rangle$$

pa je

$$\varphi(A, B) = d(x, y).$$

Primjer 2.0.30. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbf{R}$ *te neka je* $A = [0, 1]$ *i* $B = [2, 3]$*. Pretpostavimo da je* $\varepsilon > 0$ *takav da je*

$$A \approx_\varepsilon B.$$

Tada je $A <_\varepsilon B$ *pa zbog* $0 \in A$ *postoji* $b \in B$ *takav da je* $d(0, b) < \varepsilon$*. Onda*

$$d(0, b) = |b - 0| = b$$

pa je $b < \varepsilon$*. S druge strane vrijedi* $2 \leq b$ *(jer je* $b \in B$*) pa je* $2 < \varepsilon$*. Dakle,*

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} \subseteq \langle 2, +\infty\rangle.$$

Obratno, neka je $\varepsilon \in \langle 2, +\infty\rangle$*. Tada je* $2 < \varepsilon$*. Neka je* $a \in A$*. Tada je* $0 \leq a \leq 1$ *pa je*

$$2 \leq a + 2 \leq 3.$$

Definirajmo $b = a + 2$*. Tada je* $b \in B$ *i*

$$d(a, b) = |b - a| = 2$$

pa je $d(a, b) < \varepsilon$*. Prema tome,* $A <_\varepsilon B$*. S druge strane ako je* $b \in B$ *onda je* $2 \leq b \leq 3$ *pa je* $0 \leq b - 2 \leq 1$*. Definirajmo* $a = b - 2$*. Tada je* $a \in A$ *i*

$$d(b, a) = |a - b| = 2 < \varepsilon.$$

Prema tome $B <_\varepsilon A$ *pa zaključujemo da je* $A \approx_\varepsilon B$*. Dakle,*

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} = \langle 2, +\infty\rangle$$

što povlači da je

$$\varphi(A, B) = 2.$$

Propozicija 2.0.31. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka je* $n \in \mathbf{N}$ *te neka su* $S_1, ..., S_n$ *omeđeni skupovi u* (X, d)*. Tada je*

$$S_1 \cup ... \cup S_n$$

omeđen skup u (X, d)*.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza: Za $n = 1$ tvrdnja je jasna.

Pretpostavka: Tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$.

Korak: Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n + 1$. Neka su

$$S_1, ..., S_{n+1}$$

omeđeni skupovi u (X, d). Vrijedi da je

$$S_1 \cup ... \cup S_{n+1} = (S_1 \cup ... \cup S_n) \cup S_{n+1}.$$

Prema induktivnoj pretpostavci skup

$$S_1 \cup ... \cup S_n$$

je omeđen. Iz propozicije 2.0.22 slijedi da je

$$(S_1 \cup ... \cup S_n) \cup S_{n+1}$$

omeđen skup. Prema tome

$$S_1 \cup ... \cup S_n \cup S_{n+1}$$

je omeđen skup. Dakle, tvrdnja slijedi za $n + 1$. Time je propozicija dokazana. □

Korolar 2.0.32. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* S *konačan podskup od* X*. Tada je* S *omeđen skup u* (X, d)*.*

Dokaz. Uočimo prije svega slijedeće: ako je $x \in X$, onda je $\{x\}$ omeđen skup u (X, d), naime

$$\{x\} \subseteq K(x, r)$$

za svaki $r > 0$. Ako je $S = \emptyset$, onda je S očito omeđen. Ako je $S \neq \emptyset$, onda postoji $n \in \mathbf{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je

$$S = \{x_1, ..., x_n\}.$$

Vrijedi

$$S = \{x_1\} \cup ... \cup \{x_n\}$$

pa iz prethodne propozicije slijedi da je S omeđen skup. □

Primjer 2.0.33. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $a \in X$*,* $n \in \mathbf{N}$ *i* $b_1, ..., b_n \in X$*. Neka je* $A = \{a\}$ *i* $B = \{b_1, ..., b_n\}$*. Neka je*

$$\lambda = max\{d(a, b_i) | i \in \{1, ...n\}\}.$$

Tvrdimo da je

$$\varphi(A, B) = \lambda.$$

Pretpostavimo da je $\varepsilon > 0$ *takav da je* $A \approx_\varepsilon B$*. Tada je*

$$B <_\varepsilon A.$$

Neka je $i_0 \in \{1, ..., n\}$ *takav da je*

$$\lambda = d(a, b_{i_0})$$

Zbog $B <_\varepsilon A$ *za svaki* $x \in B$ *postoji* $y \in A$ *takav da je* $d(x, y) < \varepsilon$*. Posebno, imamo* $b_{i_0} \in B$ *pa postoji* $y \in A$ *takav da je*

$$d(b_{i_0}, y) < \varepsilon.$$

Očito je $y = a$*, dakle* $d(b_{i_0}, a) < \varepsilon$*, tj.* $\lambda < \varepsilon$*. To znači da je*

$$\varepsilon \in \langle \lambda, +\infty \rangle.$$

Obrnuto, neka je $\varepsilon \in \langle \lambda, +\infty \rangle$*. Tada je* $A \approx_\varepsilon B$*. Naime, imamo*

$$d(a, b_{i_0}) = \lambda < \varepsilon$$

što pokazuje da je $A <_\varepsilon B$*. Obratno, ako je* $i \in \{1, ..., n\}$ *onda je*

$$d(b_i, a) \leq d(b_{i_0}, a) = \lambda < \varepsilon$$

što pokazuje da je $B <_\varepsilon A$*. Prema tome, pokazali smo da je*

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} = \langle \lambda, +\infty \rangle.$$

Stoga je $\varphi(A, B) = \lambda$*.*

Propozicija 2.0.34. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbf{R}$*. Neka je* $S \subseteq \mathbf{R}$*.*
Tada je S *omeđen odozdo i omeđen odozgo u* $\mathbf{R}$ *ako i samo ako je* S *omeđen u metričkom prostoru* ($\mathbf{R}$,d)*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S omeđen odozdo i omeđen odozgo u $\mathbf{R}$. Želimo dokazati da je S omeđen u metričkom prostoru ($\mathbf{R}$,d). To je jasno ako je $S = \emptyset$. Pretpostavimo da je S neprazan.
Budući da je S omeđen odozdo postoji $a \in \mathbf{R}$ takav da je a donja međa skupa S. Budući da

je S omeđen odozgo postoji $b \in \mathbf{R}$ takav da je b gornja međa skupa S. Imamo $a \leq x \leq b$ za svaki $x \in S$. Posebno, $a \leq b$ (jer je S neprazan) te vrijedi $a - 1 < x < b + 1$ za svaki $x \in S$. Stoga je $S \subseteq \langle a - 1, b + 1 \rangle$.
Prema primjeru 1.0.19

$$\langle a - 1, b + 1 \rangle$$

je otvorena kugla u metričkom prostoru ($\mathbf{R}$,d). Prema tome S je omeđen u ($\mathbf{R}$,d).
Obratno, pretpostavimo da je S omeđen u ($\mathbf{R}$,d). Tada postoji $x_0 \in \mathbf{R}$ i $r > 0$ takav da je

$$S \subseteq K(x_0, r),$$

tj.

$$S \subseteq \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$x_0 - r$$

donja međa od S, a

$$x_0 + r$$

gornja međa od S. Dakle S je omeđen odozdo i odozgo. □

Primjer 2.0.35. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Neka je $A = \langle 0, 1 \rangle$ te $B = [0, 1]$.*
Iz prethodne propozicije slijedi da su A i B omeđeni skupovi u ($\mathbf{R}$,d).
Tvrdimo da je $\varphi(A, B) = 0$. U tu svrhu dovoljno je pokazati da je

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} = \langle 0, +\infty \rangle. \tag{2.2}$$

Očito je

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} \subseteq \langle 0, +\infty \rangle.$$

Obratno, neka je $\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle$. Tvrdimo da je $A \approx_\varepsilon B$. Iz $A \subseteq B$ i napomene 1.0.16 slijedi $A <_\varepsilon B$.
S druge strane, neka je $b \in B$. Ako je $b \in \langle 0, 1 \rangle$ onda uzimamo $a = b$ pa imamo $a \in A$ i

$$d(b, a) = 0 < \varepsilon.$$

Pretpostavimo da je $b = 0$. Neka je

$$a = min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}.$$

Očito je $0 < a$ *te* $a \leq \frac{1}{2} < 1$ *pa je* $a \in \langle 0, 1\rangle$*, tj.* $a \in A$*.*
Nadalje,

$$d(b, a) = d(0, a) = |a| = a \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dakle, $d(a, b) < \varepsilon$*.*
Pretpostavimo da je $b = 1$*.*
Neka je

$$a = max\{1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}.$$

$1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}$ *su brojevi manji od* 1 *pa je stoga* $a < 1$*.*
S druge strane, očito je

$$\frac{1}{2} \leq a$$

pa je $0 < a$*. Dakle,* $a \in A$*.*
Imamo također $1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq a$ *pa je* $1 - a \leq \frac{\varepsilon}{2}$*. No,* $1 - a > 0$ *jer je* $1 > a$*.*
Stoga je

$$|1 - a| = 1 - a \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Prema tome,

$$d(b, a) = |b - a| = |1 - a| < \varepsilon,$$

dakle, $d(b, a) < \varepsilon$*. Time smo dokazali da je* $B <_\varepsilon A$*.*
Prema tome,

$$A \approx_\varepsilon B$$

i zaključujemo da vrijedi

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\} = \langle 0, +\infty\rangle.$$

Dakle, $\varphi(A, B) = 0$*. Uočimo da je* $A \neq B$*.*

Napomena 2.0.36. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* A *omeđen neprazan skup u* (X, d)*. Tada je*

$$\varphi(A, A) = 0.$$

Naime, za svaki $\varepsilon > 0$ *prema napomeni 1.0.16 vrijedi* $A <_\varepsilon A$*, tj.* $A \approx_\varepsilon A$*. Stoga je*

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon A\} = \langle 0, +\infty\rangle$$

pa je $\varphi(A, A) = 0$.
Nadalje, ako su A, B *omeđeni neprazni skupovi u* (X, d)*, onda je očito*

$$\varphi(A, B) = \varphi(B, A).$$

Napomena 2.0.37. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* A, B *omeđeni neprazni skupovi u* (X, d)*. Neka je* $r \in \mathbf{R}$ *takav da je*

$$\varphi(A, B) < r.$$

Tada za svaki $a \in A$ *postoji* $b \in B$ *takav da je*

$$d(a, b) < r.$$

Imamo da je $\varphi(A, B)$ *najveća donja međa skupa*

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\},$$

a

$$\varphi(A, B) < r.$$

Stoga r *nije donja međa toga skupa. Stoga postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je*

$$A \approx_\varepsilon B$$

i $\varepsilon < r$*. Slijedi* $A <_\varepsilon B$ *pa za svaki* $a \in A$ *postoji* $b \in B$ *takav da je* $d(a, b) < \varepsilon$*, što povlači da je* $d(a, b) < r$*.*
Uočimo također da za svaki $b \in B$ *postoji* $a \in A$ *takav da je*

$$d(a, b) < r$$

(jer je $\varphi(B, A) = \varphi(A, B)$*).*

Propozicija 2.0.38. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* A, B, C *omeđeni neprazni skupovi u* (X, d)*. Tada je*

$$\varphi(A, B) \leq \varphi(A, C) + \varphi(C, B).$$

Dokaz. Neka je $\delta > 0$. Neka je $a \in A$. Očito je

$$\varphi(A, C) < \varphi(A, C) + \frac{\delta}{2} \tag{2.3}$$

pa prema prethodnoj napomeni postoji $c \in C$ takav da je

$$d(a, c) < \varphi(A, C) + \frac{\delta}{2}.$$

Nadalje, iz

$$\varphi(C,B) < \varphi(C,B) + \frac{\delta}{2} \tag{2.4}$$

i prethodne napomene slijedi da postoji $b \in B$ takav da je

$$d(c,b) < \varphi(C,B) + \frac{\delta}{2}.$$

Imamo:

$$d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b) < \varphi(A,C) + \frac{\delta}{2} + \varphi(C,B) + \frac{\delta}{2} = \varphi(A,C) + \varphi(C,B) + \delta.$$

Dakle, za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je

$$d(a,b) < \varphi(A,C) + \varphi(C,B) + \delta.$$

Ovo znači da je

$$A <_{\varphi(A,C)+\varphi(C,B)+\delta} B.$$

Neka je $b \in B$. Iz (2.4) slijedi da postoji $c \in C$ takav da je

$$d(b,c) < \varphi(C,B) + \frac{\delta}{2}.$$

Iz (2.3) slijedi da postoji $a \in A$ takav da je

$$d(a,c) < \varphi(A,C) + \frac{\delta}{2}.$$

Vrijedi

$$d(b,a) \le d(b,c) + d(c,a) < \varphi(C,B) + \frac{\delta}{2} + \varphi(A,C) + \frac{\delta}{2} = \varphi(C,B) + \varphi(A,C) + \delta.$$

Dakle, za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ takav da je

$$d(b,a) < \varphi(C,B) + \varphi(A,C) + \delta.$$

Prema tome, $B <_{\varphi(A,C)+\varphi(C,B)+\delta} A$. Zaključak

$$A \approx_{\varphi(A,C)+\varphi(C,B)+\delta} B.$$

Stoga je

$$\varphi(A,C) + \varphi(C,B) + \delta \in \{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\},$$

a $\varphi(A, B)$ je infimum skupa $\{\varepsilon > 0 | A \approx_\varepsilon B\}$ pa je

$$\varphi(A, B) \leq \varphi(A, C) + \varphi(C, B) + \delta.$$

Dakle, $\varphi(A, B) \leq \varphi(A, C) + \varphi(C, B) + \delta$ za svaki $\delta > 0$ pa je

$$\varphi(A, B) - \varphi(A, C) - \varphi(C, B) \leq \delta, \forall \delta > 0. \tag{2.5}$$

Općenito, ako je $x \in \mathbf{R}$ takav da je $x \leq \delta$ za svaki $\delta > 0$ onda je $x \leq 0$. Naime, u suprotnom bi vrijedilo $x > 0$ pa bi za $\delta = \frac{x}{2}$ vrijedilo $\delta > 0$ i $x \leq \delta$, tj. $x \leq \frac{x}{2}$ što bi povlačilo $1 \leq \frac{1}{2}$ jer je $x > 0$. Kontradikcija. Sada zaključujemo da je

$$\varphi(A, B) - \varphi(A, C) - \varphi(C, B) \leq 0,$$

pa je $\varphi(A, B) \leq \varphi(A, C) + \varphi(C, B)$. □

Definicija 2.0.39. *Neka je X neprazan skup te d : $X \times X \to \mathbf{R}$ funkcija. Za d kažemo da je pseudometrika na skupu X ako za svaki x, y, z $\in$ X vrijedi sljedeće svojstvo:*

(1) $d(x, x) = 0$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Uočimo sljedeće: Ako je d pseudometrika na skupu X, onda je d metrika na X ako i samo ako za sve x, y $\in$ X takve da je $d(x, y) = 0$ vrijedi $x = y$.

Propozicija 2.0.40. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{B}$ skup svih omeđenih nepraznih skupova u (X, d). Neka je $\varphi_O : O \times O \to R$ funkcija definirana sa $\varphi_O(A, B) = \varphi(A, B)$. Tada je φ_O pseudometrika na O.*

Dokaz. Treba dokazati da za sve $A, B, C \in O$ vrijedi:
(1) $\varphi_O(A, A) = 0$
(2) $\varphi_O(A, B) = \varphi_O(B, A)$
(3) $\varphi_O(A, B) \leq \varphi_O(A, C) + \varphi_O(C, B)$.
No, ovo slijedi iz napomene 2.0.36 i propozicije 2.0.38. □

Primjer 2.0.41. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbf{R}$*, neka je* $\mathcal{O}$ *skup svih omeđenih nepraznih skupova u* ($\mathbf{R}$,d) *te neka je*

$$\varphi_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathbf{R}, \varphi_{\mathcal{O}}(A, B) = \varphi(A, B).$$

Tada $\varphi_{\mathcal{O}}$ *nije metrika na* $\mathcal{O}$*.*
To slijedi iz primjera 2.0.35.

Neka je (X, d) *metrički prostor te neka je* $U \subseteq X$*. Kažemo da je* U *otvoren skup u metričkom prostoru* (X, d) *ako za svaki* $x \in U$ *postoji* $r > 0$ *takav da je* $K(x, r) \subseteq U$*.*

Propozicija 2.0.42. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Tada je svaka otvorena kugla u* (X, d) *otvoren skup u* (X, d)*.*

Dokaz. Neka su $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$. Želimo pokazati da je $K(x_0, r_0)$ otvoren skup u (X, d). Neka je $x \in K(x_0, r_0)$. Tada je $d(x_0, x) < r_0$. Definiramo

$$r = r_0 - d(x_0, x).$$

Tada je

$$r + d(x_0, x) = r_0 \tag{2.6}$$

Dokažimo da je

$$K(x, r) \subseteq K(x_0, r_0). \tag{2.7}$$

Neka je $y \in K(x, r)$.
Tada je $d(x, y) < r$, pa imamo

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r = r_0$$

prema (2.6). Dakle $d(x_0, y) < r_0$ pa je $y \in K(x_0, r_0)$. Prema tome pokazali smo da vrijedi (2.7). Iz toga zaključujemo da je $K(x_0, r_0)$ otvoren skup u (X, d). □

Definicija 2.0.43. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $F \subseteq X$ *kažemo da je* F *zatvoren skup u* (X, d) *ako je* F^C $(X \backslash F)$ *otvoren skup u* (X, d)*.*

Definicija 2.0.44. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$*. Definiramo*

$$\bar{K}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}.$$

Za $\bar{K}(x_0, r)$ *kažemo da je zatvorena kugla ako* x_0 *radijusa* r *u metričkom prostoru* (X, d)*.*

Propozicija 2.0.45. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je svaka zatvorena kugla u (X, d) zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka su $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$. Dokažimo da je $\bar{K}(x_0, r_0)$ zatvoren skup u (X, d).
Promotrimo skup $X \backslash \bar{K}(x_0, r_0)$. Ako dokažemo da je ovaj skup otvoren, imat ćemo da je $\bar{K}(x_0, r_0)$ zatvoren skup.
Neka je $x \in X \backslash \bar{K}(x_0, r_0)$. Tada $x \notin \bar{K}(x_0, r_0)$ pa slijedi da je $d(x_0, x) > r_0$. Definiramo $r = d(x_0, x) - r_0$.
Tada je $r > 0$ i

$$d(x, x_0) = r + r_0. \tag{2.8}$$

Tvrdimo da je

$$K(x, r) \subseteq X \backslash \bar{K}(x_0, r_0). \tag{2.9}$$

Neka je $y \in K(x, y)$. Želimo dokazati da je $y \in X \backslash \bar{K}(x_0, r_0)$.
U tu svrhu dovoljno je pokazati da je

$$d(x_0, y) > r_0.$$

Po nejednakosti trokuta imamo:

$$d(x_0, y) + d(y, x) \geq d(x_0, x)$$

pa je

$$d(x_0, y) \geq d(x_0, x) - d(y, x). \tag{2.10}$$

Iz $d(x, y) < r$ slijedi

$$-d(x, y) > -r. \tag{2.11}$$

Iz (2.10),(2.8) i (2.11) slijedi da je

$$d(x_0, y) > r + r_0 - r = r_0.$$

Dakle $d(x_0, y) > r_0$. Prema tome $y \in X \backslash \bar{K}(x_0, r_0)$.
Time smo dokazali da vrijedi (2.9). Zaključujemo da je

$$X \backslash \bar{K}(x_0, r_0)$$

otvoren skup.
Time je propozicija dokazana. $\square$

Propozicija 2.0.46. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su A, B neprazni, omeđeni i zatvoreni skupovi u (X, d) takvi da je $\varphi(A, B) = 0$. Tada je $A = B$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. da je

$$A \neq B.$$

Tada imamo $A \nsubseteq B$ ili $B \nsubseteq A$. Bez smanjenja općenitosti uzimamo $A \nsubseteq B$. Tada postoji $a \in A$ tako da $a \notin B$.
Slijedi $a \in B^c$. Pošto je B zatvoren skup, B^c je otvoren pa postoji $r > 0$ takav da

$$K(a, r) \subseteq B^c. \tag{2.12}$$

Zbog $\varphi(A, B) = 0$, imamo

$$\varphi(A, B) < r$$

pa prema napomeni 2.0.37 postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) < r$.
Slijedi

$$b \in K(a, r)$$

pa iz (2.12) slijedi $b \in B^c$. Kontradikcija. Prema tome, $A = B$. □

Propozicija 2.0.47. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{H}$ skup svih nepraznih, omeđenih i zatvorenih skupova u (X, d). Neka je $\varphi_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}\ x\ \mathcal{H} \to R$ funkcija definirana sa*

$$\varphi_{\mathcal{H}}(A, B) = \varphi(A, B).$$

Tada je $\varphi_{\mathcal{H}}$ metrika na $\mathcal{H}$.

Dokaz. Ovo slijedi iz napomene 2.0.36, propozicije 2.0.38 i propozicije prethodne propozicije. □

Definicija 2.0.48. *Neka je (X, d) metrički prosotr, S neprazan podskup od X te $x \in X$. Definiramo $d(x, S) = inf\{d(x, y)|y \in S\}$.*

Uočimo da je $d(x, S) \geq 0$ te da je $d(x, S) = 0$ ako je $x \in S$.
Obratno ne mora vrijediti, tj. ako je

$$d(x, S) = 0,$$

x ne mora biti element skupa S što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 2.0.49. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbf{R}$.
Imamo

$$d(0, \langle 0, +\infty\rangle) = inf\{d(0, x)|x \in \langle 0, +\infty\rangle\} = inf\{|x||x \in \langle 0, +\infty\rangle\} = inf\langle 0, +\infty\rangle = 0.$$

Dakle,

$$d(0, \langle 0, +\infty\rangle) = 0,$$

a očito $0 \notin \langle 0, +\infty\rangle$.

Propozicija 2.0.50. *Neka je (X, d) metrički prostor, S zatvoren, neprazan skup u (X, d) te $x \in X$ takav da je $d(x, S) = 0$. Tada je $x \in S$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. $x \notin S$. Tada je $x \in S^c$ pa budući da je S^c otvoren skup postoji $r > 0$ takav da

$$K(x, r) \subseteq S^c.$$

Neka je $y \in S$.
Kada bi vrijedilo

$$d(x, y) < r$$

onda bismo imali $y \in K(x, r)$, a to bi povlačilo $y \in S^c$, što je nemoguće jer je $y \in S$. Stoga je

$$d(x, y) \geq r$$

za svaki $y \in S$.
Ovo znači da je r donja međa skupa $\{d(x, y)|y \in S\}$ pa je

$$r \leq inf\{d(x, y)|y \in S\}$$

tj.

$$r \leq d(x, S).$$

To je u kontradikciji sa činjenicom da je

$$d(x, S) = 0.$$

Prema tome, $x \in S$. □

Propozicija 2.0.51. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka su A, B neprazni, omeđeni skupovi u (X, d). Tada je skup $\{d(x, B)|x \in A\}$ odozgo omeđen u* $\mathbf{R}$.

Dokaz. Kako su A i B omeđeni skupovi slijedi da je i $A \cup B$ omeđen skup prema propoziciji 2.0.31.
Prema tome postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je

$$A \cup B \subseteq K(x_0, r).$$

Stoga za svaki $x \in A$ i svaki $b \in B$ imamo $x, b \in K(x_0, r)$ pa je

$$d(x, b) \leq d(x, x_0) + d(x_0, b) < 2r,$$

tj.

$$d(x, b) < 2r. \tag{2.13}$$

Neka je $x \in A$. Odaberimo neki $b \in B$. Iz definicije broja $d(x, B)$ slijedi

$$d(x, B) \leq d(x, b)$$

pa (2.13) povlači da je

$$d(x, B) < 2r.$$

Dakle, $d(x, B) < 2r$ za svaki $x \in A$.
Prema tome, $2r$ je gornja međa skupa

$$\{d(x, B) | x \in A\}.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

Lema 2.0.52. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su A i B neprazni omeđeni skupovi u (X, d). Neka je $x \in A$. Tada je $d(x, B) \leq \varphi(A, B)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$\varphi(A, B) < d(x, B).$$

Iz napomene 2.0.37 slijedi da postoji $b \in B$ takav da je $d(x, b) < d(x, B)$ što je u kontradikciji sa definicijom broja $d(x, B)$. Prema tome,

$$\varphi(x, B) \leq d(A, B).$$

□

Teorem 2.0.53. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka su A i B neprazni, omeđeni skupovi u (X,d). Tada je*

$$\varphi(A,B) = max\{sup\{d(x,B)|x \in A\}, sup\{d(y,A)|y \in B\}\}.$$

Dokaz. Neka je $\alpha = sup\{d(x,B)|x \in A\}$ i $\beta = sup\{d(y,A)|y \in B\}$.
Želimo dokazati da je

$$\varphi(A,B) = max\{\alpha,\beta\}.$$

Prema prethodnoj lemi za svaki $x \in A$ vrijedi

$$d(x,B) \leq \varphi(A,B).$$

Ovo znači da je $\varphi(A,B)$ gornja međa skupa

$$\{d(x,B)|x \in A\},$$

a α je supremum ovoga skupa. Stoga je $\alpha \leq \varphi(A,B)$.
Analogno dobivamo

$$\beta \leq \varphi(A,B).$$

Stoga je

$$max\{\alpha,\beta\} \leq \varphi(A,B).$$

Pretpostavimo da je $max\{\alpha,\beta\} < \varphi(A,B)$ Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$max\{\alpha,\beta\} + \varepsilon < \varphi(A,B). \tag{2.14}$$

Neka je $x \in A$. Broj $d(x,B)$ je najveća donja međa skupa $\{d(x,b)|b \in B\}$.
Stoga $d(x,B) + \varepsilon$ nije donja međa ovoga skupa pa postoji $b \in B$ takav da je

$$d(x,b) < d(x,B) + \varepsilon.$$

Slijedi,

$$d(x,b) < \alpha + \varepsilon \leq max\{\alpha,\beta\} + \varepsilon.$$

Prema tome, za svaki $x \in A$ postoji $b \in B$ takav da je

$$d(x,b) < max\{\alpha,\beta\} + \varepsilon.$$

Stoga je $A <_{max\{\alpha,\beta\}+\varepsilon} B$. Analogno dobivamo $B <_{max\{\alpha,\beta\}+\varepsilon} A$. Prema tome,

$$A \approx_{max\{\alpha,\beta\}+\varepsilon} B.$$

Iz definicije od $\varphi(A, B)$ slijedi da je

$$\varphi(A, B) \leq max\{\alpha, \beta\} + \varepsilon.$$

Ovo je u kontradikciji sa (2.14). Zaključak,

$$max\{\alpha, \beta\} = \varphi(A, B).$$

□

Definicija 2.0.54. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S potpuno omeđen skup u (X, d) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $n \in \mathbf{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$ takavi da je*

$$S \subseteq K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Propozicija 2.0.55. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S potpuno omeđen skup u tom prostoru. Tada je S omeđen u (X, d).*

Dokaz. Neka je $\varepsilon = 1$. Tada postoje $n \in \mathbf{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$ takavi da je

$$S \subseteq K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Skupovi

$$K(x_1, \varepsilon), ..., K(x_n, \varepsilon)$$

su očito omeđeni pa iz propozicije 2.0.31 slijedi da je

$$K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon)$$

omeđen skup. Stoga je S omeđen skup. □

Propozicija 2.0.56. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S neprazan potpuno omeđen skup u (X, d). Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan neprazan podskup K od X takav da je*

$$\varphi(S, K) < \varepsilon.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $n \in \mathbf{N}$ i $x_1, ...x_n \in X$ takavi da je

$$S \subseteq K(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup ... \cup K(x_n, \frac{\varepsilon}{2}). \tag{2.15}$$

Pri tome možemo pretpostaviti da je

$$K(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S \neq \emptyset$$

za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Neka je $K = \{x_1, ...x_n\}$.
Tvrdimo da je
$$S \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} K. \tag{2.16}$$
Neka je $s \in S$. Prema (2.15) vrijedi
$$s \in K_1(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup ... \cup K_n(x_n, \frac{\varepsilon}{2})$$
pa stoga postoji $i \in \{1, ...n\}$ takav da $s \in K_i(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$.
Iz toga slijedi da je $d(s, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Jasno je da je $x_i \in K$. Prema tome za svaki $s \in S$ postoji $k \in K$ takav da je
$$d(s, k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Stoga je po definiciji $S <_{\frac{\varepsilon}{2}} K$.
Obratno, neka je $k \in K$.
Tada je $k = x_i$, za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Budući da je
$$K(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S \neq \emptyset$$
postoji $s \in S$ takav da je $s \in K(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ iz čega slijedi
$$d(x_i, s) < \frac{\varepsilon}{2},$$
tj. $d(k, s) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Iz toga zaključujemo da je $K <_{\frac{\varepsilon}{2}} S$. Time smo dokazali da vrijedi (2.16).
Iz (2.16) zaključujemo da je $\varphi(S, K) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dakle,
$$\varphi(S, K) < \varepsilon.$$
□

Propozicija 2.0.57. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S neprazan i omeđen skup u (X, d) koji ima svojstvo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan neprazan podskup K od X takav da je $\varphi(S, K) < \varepsilon$. Tada je S potpuno omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji konačan neprazan podskup K od X takav da je $\varphi(S, K) < \varepsilon$. Imamo $K = \{x_1, ..., x_n\}$, gdje su $n \in \mathbf{N}$ i $x_1, ...x_n \in X$.
Tvrdimo da je
$$S \subseteq K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon). \tag{2.17}$$
Neka je $s \in S$.
Iz napomene 2.0.37 i $\varphi(S, K) < \varepsilon$ slijedi $d(s, x_i) < \varepsilon$ za neki $i \in \{1, ..., n\}$. Tada je $s \in K(x_i, \varepsilon)$ pa je
$$s \in K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Prema tome, vrijedi (2.17) pa zaključujemo da je S potpuno omeđen skup u (X, d). □

Iz prethodne dvije propozicije dobivamo slijedeći teorem.

Teorem 2.0.58. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S neprazan omeđen skup u (X, d). Tada je S potpuno omeđen ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan neprazan podskup K od X takav da je*

$$\varphi(S, K) < \varepsilon.$$

Definicija 2.0.59. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $G \subseteq X$. Kažemo da je G gust skup u (X, d) ako za svaki $x \in X$ i svaki $r > 0$ postoji $g \in G$ takav da je $d(x, g) < r$.*

Uočimo sljedeće: Ako je (X, d) metrički prostor, onda je X gust skup u (X, d).

Primjer 2.0.60. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Tada je $\mathbf{Q}$ gust skup u ($\mathbf{R}$,d).*
To vidimo na sljedeći način. Neka su $x \in \mathbf{R}$ i $r > 0$.
Imamo $x - r < x + r$ pa postoji $g \in Q$ takav da je

$$x - r < g < x + r.$$

Tada je

$$g \in \langle x - r, x + r\rangle$$

pa je $g \in K(x, r)$ prema primjeru 1.0.19.
Stoga je $d(x, g) < r$. Prema tome $\mathbf{Q}$ je gust skup u ($\mathbf{R}$,d).

Primjer 2.0.61. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$.*
Neka je

$$G = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R} | x_1, ..., x_n \in \mathbf{Q}\},$$

Tada je G gust skup u ($\mathbf{R}^n$,d).
Neka je $x \in \mathbf{R}^n$ i $r > 0$. Imamo

$$x = (x_1, ..., x_n), x_1, ..., x_n \in \mathbf{R}.$$

Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ odaberemo racionalan broj g_i takav da je

$$|x_i - g_i| < \frac{r}{n}$$

(takav broj možemo naći prema prethodnom primjeru). Neka je $g = (g_1, ..., g_n)$. Očito je $g \in G$. Imamo

$$d(x, g) = \sqrt{(x_1 - g_1)^2 + ... + (x_n - g_n)^2} < \sqrt{(\frac{r}{n})^2 + ... + (\frac{r}{n})^2} = \sqrt{n(\frac{r}{n})^2} = r\frac{1}{\sqrt{n}} \leq r.$$

Dakle $d(x, g) < r$.

Propozicija 2.0.62. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je G gust skup u (X, d). Neka je A neprazan omeđen skup u (X, d) te neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji neprazan omeđen skup B u (X, d) takav da je $\varphi(A, B) < \varepsilon$ i $B \subseteq G$.*

Dokaz. Budući da je G gust skup, za svaki $x \in A$ postoji $g_x \in G$ takav da je $d(x, g_x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Definiramo

$$B = \{g_x | x \in A\}.$$

Očito je $B \neq \emptyset$. Budući da je A omeđen skup postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takavi da je

$$A \subseteq K(x_0, r).$$

Neka je $b \in B$. Tada je $b = g_x$ za neki $x \in A$ pa je

$$d(b, x) = d(g_x, x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

tj. $d(b, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Imamo

$$d(x_0, b) \leq d(x_0, x) + d(x, b). \tag{2.18}$$

Iz $x \in A$ i $A \subseteq K(x_0, r)$ slijedi $d(x_0, x) < r$. Sada iz (2.18) slijedi

$$d(x_0, b) < r + \frac{\varepsilon}{2}$$

pa je $b \in K(x_0, r + \frac{\varepsilon}{2})$. Zaključak,

$$B \subseteq K(x_0, r + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Prema tome, B je omeđen skup.
Nadalje, očito je $B \subseteq G$.
Tvrdimo da je $A \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} B$. Za svaki $a \in A$ vrijedi $d(a, g_a) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $g_a \in B$. Stoga je

$$A <_{\frac{\varepsilon}{2}} B.$$

Obratno, ako je $b \in B$, onda je $b = g_x$ za neki $x \in A$ pa imamo

$$d(b, x) = d(g_x, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stoga je $B <_{\frac{\varepsilon}{2}} A$. Dakle, vrijedi $A \approx_{\frac{\varepsilon}{2}} B$. Iz toga slijedi da je

$$\varphi(A, B) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dakle, $\varphi(A, B) < \varepsilon$. □

Propozicija 2.0.63. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je A neprazan potpuno omeđen skup u (X, d) te neka je G gust skup u (X, d). Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan neprazan podskup K od G takav da je $\varphi(A, K) < \varepsilon$.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.0.56 postoji konačan neprazan podskup K od X takav da je $\varphi(S, K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Imamo

$$K = \{x_1, ..., x_n\},$$

gdje su $n \in \mathbf{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$.
Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ odabreimo $y_i \in G$ takav da je $d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{4}$.
Neka je $K' = \{y_1, ..., y_n\}$. Tada je

$$K \approx_{\frac{\varepsilon}{4}} K'$$

pa je $\varphi(K, K') \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
Stoga je $\varphi(K, K') < \frac{\varepsilon}{2}$. Imamo

$$\varphi(A, K') < \varphi(A, K) + \varphi(A, K') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dakle, $\varphi(A, K') < \varepsilon$. Očito je K' konačan neprazan skup i $K \subseteq G$. □

Propozicija 2.0.64. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

(1) Skupovi $\emptyset$ i X su otvoreni u (X, d).

(2) Ako je $\mathcal{U}$ familija otvorenih skupova u (X, d) onda je $\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A$ otvoren skup u (X, d).

(3) Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d) onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).

Dokaz. 1) Očigledno vrijedi.

2) Neka je $\mathcal{U}$ familija otvorenih skupova u (X, d) te neka je $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{U}} A$.
Tada postoji $A_0 \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in A_0$. Budući da je A_0 otvoren u (X, d) postoji $r > 0$ takav da $K(x, r) \subseteq A_0$. Stoga je

$$K(x, r) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{U}} A.$$

Prema tome $\bigcup_{A\in\mathcal{U}} A$ je otvoren skup u (X,d).

3) Neka su U i V otvoreni skupovi u (X,d). Neka je $x \in U \cap V$. Iz $x \in U$ slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $K(x,r) \subseteq U$. Iz $x \in V$ slijedi da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$K(x,\varepsilon) \subseteq V.$$

Neka je $r_0 = min\{r,\varepsilon\}$. Tada je

$$K(x,r_0) \subseteq U \cap V.$$

Prema tome $U \cap V$ je otvoren skup. □

Propozicija 2.0.65. *Neka je (X,d) metrički prostor.*

(1) Skupovi $\emptyset$ i X su zatvoreni u (X,d).

(2) Ako je $\mathcal{F}$ neprazna familija zatvorenih skupova u (X,d) onda je $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$ zatvoren skup u (X,d).

(3) Ako su F i G zatvoreni skupovi u (X,d) onda je $F \cup G$ zatvoren skup u (X,d).

Dokaz. 1) Očigledno vrijedi.

2)Neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija zatvorenih skupova u (X,d). Vrijedi

$$(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^c.$$

Skup $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^c$ je otvoren prema prethodnoj propoziciji. Prema tome $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$ je zatvoren skup.

3) Neka su F i G zatvoreni skupovi u (X,d). Imamo

$$(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$$

pa iz prethodne propozicije slijedi da je $(F \cup G)^c$ otvoren skup. Stoga je $F \cup G$ zatvoren skup. □

Definicija 2.0.66. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$.*
Neka je $\mathcal{A} = \{F \subseteq X |\ F$ je zatvoren u (X,d) i $A \subseteq F\}$. Definiramo

$$ClA = \bigcap_{F\in\mathcal{A}} F.$$

Za ClA kažemo da je zatvarač skupa A u metričkom prostoru (X,d).

Prema prethodnoj propoziciji skup ClA *je zatvoren u* (X, d).
Uočimo da je $A \subseteq ClA$. *Naime, ako je* $x \in A$, *onda je očito* $x \in F$ *za svaki* $F \in \mathcal{A}$ *pa je* $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{A}} F$, *tj.* $x \in ClA$.

Nadalje uočavamo sljedeće:
Ako je F_0 *zatvoren skup takav da je* $A \subseteq F_0$, *onda je* $ClA \subseteq F_0$.
Naime, za takav F_0 *imamo* $F_0 \in \mathcal{A}$ *pa je*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F \subseteq F_0,$$

tj. $ClA \subseteq F_0$.

Propozicija 2.0.67. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* A *omeđen skup u* (X, d). *Tada je* ClA *omeđen skup u* (X, d).

Dokaz. Budući da je A omeđen postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x_0, r)$.
Slijedi $A \subseteq \bar{K}(x_0, r)$. Znamo da je $\bar{K}(x_0, r)$ zatvoren skup u (X, d). Stoga je

$$ClA \subseteq \bar{K}(x_0, r).$$

Iz toga slijedi da je ClA omeđen skup. □

Propozicija 2.0.68. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. *Tada je* $ClA = \{x \in X | \forall r > 0, \exists a \in A$ *takav da* $d(x, a) < r\}$.

Dokaz. Označimo $G = \{x \in X | \forall r > 0, \exists a \in A$ takav da $d(x, a) < r\}$. Vrijedi $A \subseteq G$, naime za svaki $x \in A$ i svaki $r > 0$ možemo uzeti $a = x$ pa imamo

$$d(x, a) = 0 < r.$$

Dokažimo da je G zatvoren skup. Neka je $x \in G^c$. Tada $x \notin G$ pa zaključujemo da postoji $r > 0$ takav da svaki $a \in A$ vrijedi

$$d(x, a) \geq r.$$

Ovo povlači da za svaki $a \in A$ vrijedi $a \notin K(x, r)$, prema tome

$$A \cap K(x, r) = \emptyset. \tag{2.19}$$

Tvrdimo da je

$$K(x, r) \subseteq G^c.$$

Neka je $y \in K(x,r)$. Budući da je $K(x,r)$ otvoren skup postoji $s > 0$ takav da je

$$K(y,s) \subseteq K(x,r).$$

Iz (2.19) slijedi

$$A \cap K(y,s) = \emptyset. \tag{2.20}$$

Pretpostavimo da je $y \in G$. Tada postoji $a \in A$ takav da je $d(y,a) < s$.
To povlači da je $a \in K(y,s)$, no ovo je u kontradikciji s (2.20). Prema tome $y \notin G$, tj. $y \in G^c$. Prema tome vrijedi

$$K(x,r) \subseteq G^c.$$

Dakle G^c je otvoren skup pa je G zatvoren skup. Iz $A \subseteq G$ slijedi

$$ClA \subseteq G.$$

Pretpostavimo sada da je F zatvoren skup takav da je $A \subseteq F$. Tvrdimo da je $G \subseteq F$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $x \in G$ takav da $x \notin F$. Slijedi, $x \in F^c$ pa postoji $r > 0$ takav da $K(x,r) \subseteq F^c$. Stoga je

$$K(x,r) \cap F = \emptyset$$

pa iz $A \subseteq F$ slijedi da je

$$K(x,r) \cap A = \emptyset. \tag{2.21}$$

No, $x \in G$ povlači da postoji $a \in A$ takav da $d(x,a) < r$. To je u kontradikciji sa (2.21). Dakle, $G \subseteq F$ za svaki zatvoren skup F takav da je $A \subseteq F$. Prema tome, $G \subseteq ClA$ pa je

$$ClA = G$$

i time je propozicija dokazana. □

Propozicija 2.0.69. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je A neprazan, omeđen skup u (X,d). Tada je*

$$\varphi(A, ClA) = 0.$$

Dokaz. Uočimo prije svega da je prema prethodnoj propoziciji 2.0.67 ClA omeđen skup. Nadalje, iz $A \subseteq ClA$ slijedi da je ClA neprazan. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$A <_{\varepsilon} ClA$$

(jer je $A \subseteq ClA$). S druge strane neka je $x \in ClA$. Tada prema propoziciji 2.0.68 postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \varepsilon$. Stoga je

$$ClA <_{\varepsilon} A.$$

Prema tome za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$A \approx_{\varepsilon} ClA.$$

Dakle,

$$\{\varepsilon > 0 | A \approx_{\varepsilon} ClA\} = \langle 0, +\infty \rangle$$

pa je $\varphi(A, ClA) = 0$. □

Propozicija 2.0.70. *Neka je d pseudometrika na skupu X te neka su $x, x', y, y' \in X$ takvi da je $d(x, x') = 0$ i $d(y, y') = 0$. Tada je*

$$d(x, y) = d(x', y').$$

Dokaz. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) = d(x', y').$$

Dakle,

$$d(x, y) \leq d(x', y').$$

Analogno dobivamo $d(x', y') \leq d(x, y)$.
Prema tome

$$d(x, y) = d(x', y').$$

□

Teorem 2.0.71. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su A i B neprazni, omeđeni skupovi u (X, d). Tada je*

$$\varphi(A, B) = \varphi(ClA, ClB).$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{O}$ familija svih nepraznih omeđenih skupova u (X, d) te neka je $\varphi_{\mathbf{O}} : \mathbf{O} \times \mathbf{O} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana sa

$$\varphi_{\mathbf{O}}(S, T) = \varphi(S, T).$$

Prema propoziciji 2.0.40 $\varphi_{\mathbf{O}}$ je pseudometrika na $\mathbf{O}$. Prema propoziciji 2.0.69 vrijedi

$$\varphi_{\mathbf{O}}(A, ClA) = 0, \ \varphi_{\mathbf{O}}(B, ClB) = 0$$

pa iz propozicije 2.0.70 slijedi

$$\varphi_{\mathbf{O}}(A, B) = \varphi_{\mathbf{O}}(ClA, ClB),$$

tj. $\varphi(A, B) = \varphi(ClA, ClB)$. □

Napomena 2.0.72. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* $S, T \subseteq X$ *takavi da je* $S \subseteq T$. *Tada je* $ClS \subseteq ClT$. *Naime, imamo* $S \subseteq T \subseteq ClT$, *tj.* $S \subseteq ClT$ *pa iz činjenice da je* ClT *zatvoren skup slijedi*

$$ClS \subseteq ClT.$$

Korolar 2.0.73. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Neka su* A *i* B *neprazni i omeđeni skupovi u* (X, d) *te neka su* $C, D \subseteq X$ *takvi da je* $A \subseteq C \subseteq ClA$ *i* $B \subseteq D \subseteq ClB$. *Tada je*

$$\varphi(A, B) = \varphi(C, D).$$

Dokaz:
Iz $A \subseteq C$ *slijedi* $Cl(A) \subseteq Cl(C)$. *Iz* $C \subseteq ClA$ *slijedi* $Cl(C) \subseteq Cl(A)$. *Prema tome*

$$Cl(C) = Cl(A).$$

Analogno dobivamo da je

$$Cl(D) = Cl(B).$$

Koristeći teorem 2.0.71 dobivamo

$$\varphi(A, B) = \varphi(ClA, ClB) = \varphi(ClC, ClD) = \varphi(C, D),$$

dakle

$$\varphi(A, B) = \varphi(C, D).$$

Propozicija 2.0.74. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* A *neprazan podskup od* X *te* $x \in X$. *Tada je* $d(x, A) = d(x, ClA)$.

Dokaz. Uočimo prije svega sljedeće. Ako su $S, T \subseteq \mathbf{R}$ takvi da je $S \subseteq T$ te ako je t_0 infimum od T i s_0 infimum od S onda je $t_0 \leq s_0$. Naime, t_0 je donja međa skupa T pa je stoga i donja međa skupa S. Budući da je s_0 najveća donja međa skupa S, imamo $t_0 \leq s_0$. Očito je

$$\{d(x, y) | y \in A\} \subseteq \{d(x, y) | y \in ClA\}.$$

Stoga je $inf\{d(x, y) | y \in ClA\} \leq \{d(x, y) | y \in A\}$, tj. $d(x, ClA) \leq d(x, A)$.
Pretpostavimo da je $d(x, ClA) < d(x, A)$. Dakle,

$$inf\{d(x, y) | y \in ClA\} < d(x, A),$$

tj. broj $d(x, A)$ je veći od najveće donje međe skupa $\{d(x, y) | y \in ClA\}$.
Stoga $d(x, A)$ nije donja međa ovog skupa, pa zaključujemo da postoji $y \in ClA$ takav da $d(x, A) > d(x, y)$. Neka je

$$\varepsilon = d(x, A) - d(x, y).$$

Tada je $\varepsilon > 0$ i
$$d(x, y) + \varepsilon = d(x, A).$$
Iz $y \in ClA$ i propozicije 2.0.68 zaključujemo da postoji $a \in A$ takav $d(x, y) < \varepsilon$. Imamo
$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < d(x, y) + \varepsilon = d(x, A),$$
dakle $d(x, a) < d(x, A)$. No prema definiciji broja $d(x, A)$ je jasno da je $d(x, A) \leq d(x, a)$. Kontradikcija. Prema tome,
$$d(x, ClA) < d(x, A).$$

□

Propozicija 2.0.75. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je A neprazni omeđen skup u (X, d). Neka je $x \in X$. Tada je*
$$\varphi(\{x\}, A) = sup\{d(x, y)|y \in A\}.$$

Dokaz. Uočimo prije svega da je skup
$$\{d(x, y)|y \in A\}$$
neprazan i odozdo omeđen, naime budući da je A omeđen u (X, d) postoji $x_0 \in X$ i $r > 0$ takav da je
$$A \subseteq K(x_0, r)$$
iz čega slijedi da je za svaki $y \in A$ $d(x_0, y) < r$ pa je
$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq d(x, x_0) + r.$$
Dakle, $d(x, x_0) + r$ je gornja međa skupa $\{d(x, y)|y \in A\}$. Uočimo da općenito da sve $y, z \in X$ vrijedi
$$d(z, \{y\}) = d(z, y).$$

Naime, $d(z, \{y\}) = inf\{d(z, y)|y' \in \{y\}\} = inf\{d(z, y)\} = d(z, y)$.
Nadalje, odaberimo $a \in A$. Imamo
$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq sup\{d(x, y)|y \in A\},$$
dakle, $d(x, A) \leq sup\{d(x, y)|y \in A\}$.
Uzimajući sve u obzir te koristeći teorem 2.0.53 dobivamo:
$\varphi(A, \{x\}) = max\{sup\{d(a, \{x\})|a \in A\}, sup\{d(b, A)|b \in \{x\}\} = max\{sup\{d(a, x)|a \in A\}, sup\{d(x, A)\}\} = max\{sup\{d(y, x)|y \in A\}, d(x, A)\} = sup\{d(y, x)|y \in A\}$. Time je propozicija dokazana. □

Definicija 2.0.76. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $K \subseteq X$ *te neka je* $\mathcal{U}$ *neprazna familija otvirenih skupova u* (X, d) *takva da* $K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{U}$*. Tada za* $\mathcal{U}$ *kažemo da je otvoreni pokrivač skupa K u metričkom prostoru* (X, d)*.*

Primjer 2.0.77. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $K \subseteq X$*. Neka je* $\mathcal{U} = \{X\}$*. Tada je* $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač od K u* (X, d)*.*

Primjer 2.0.78. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka je K neprazan podskup od X te* $r > 0$*. Neka je*

$$\mathcal{U} = \{K(x, r) | x \in K\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač od K u* (X, d)*.*

Definicija 2.0.79. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $K \subseteq X$*. Kažemo da je K kompaktan skup u* (X, d) *ako za svaki otvoren poktivač* $\mathcal{U}$ *od K u* (X, d) *postoje* $n \in \mathbf{N}$ *i* $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je*

$$K \subseteq \mathcal{U}_1 \cup ... \cup \mathcal{U}_n.$$

Primjer 2.0.80. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je K konačan podskup od X. Tada je K kompaktan skup u* (X, d)*. To je jasno ako je K prazan skup. Inače imamo* $K = \{x_1, ..., x_n\}$ *za neki* $n \in \mathbf{N}$ *i neke* $x_1, ..., x_n \in X$*. Neka je* $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač od K u* (X, d)*. Za svaki* $i \in \{1, ..., n\}$ *vrijedi* $x_i \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ *pa postoji* $U_i \in \mathcal{U}$ *takav da je* $x_i \in U_i$*. Slijedi da je*

$$\{x_1, ..., x_n\} \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n.$$

Propozicija 2.0.81. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je K kompaktan skup u* (X, d)*. Tada je K potpuno omeđen u* (X, d)*.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(x, \varepsilon) | x \in K\}.$$

Prema primjeru 2.0.78 $\mathcal{U}$ je otvoren pokrivač skupa K u (X, d). Budući da je K kompaktan postoje $n \in \mathbf{N}$ i postoje

$$U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$$

takavi da je

$$K \subseteq \mathcal{U}_1 \cup ... \cup \mathcal{U}_n.$$

Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ iz $U_i \in \mathcal{U}$ slijedi da je

$$\mathcal{U}_i = K(x_i, \varepsilon)$$

gdje je $x_i \in X$. Prema tome

$$K \subseteq K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon).$$

□

Korolar 2.0.82. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Ovo slijedi iz propozicije 2.0.81 i propozicije 2.0.55. □

Lema 2.0.83. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je K kompaktan skup u (X, d) te neka je $x \in X$ takav da $x \notin K$. Tada postoje otvoreni disjunktni skupovi U i V u (X, d) takavi da je $x \in \mathcal{U}$ i $K \subseteq V$.*

Dokaz. Uočimo prije svega sljedeće. Za sve $a, b \in X, a \neq b$ postoji $r > 0$ takav da je

$$K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset.$$

Naime, definirajmo

$$r = \frac{d(a, b)}{2}.$$

Očito je $r > 0$, pretpostavimo da je

$$c \in K(a, r) \cap K(b, r).$$

Slijedi $c \in K(a, r)$ i $c \in K(b, r)$ pa je $d(a, c) < r$ i $d(b, c) < r$ pa imamo

$$2r = d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < 2r$$

što je kontradikcija. Prema tome vrijedi

$$K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset.$$

Tvrdnja leme je jasna ako je $K = \emptyset$. Pretpostavimo da je K neprazan. Neka je $y \in K$. Tada je $x \neq y$ pa postoji $r_y > 0$ takav da je

$$K(x, r_y) \cap K(y, r_y) = \emptyset. \tag{2.22}$$

Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(y, r_y) | y \in K\}.$$

Tada je U otvoren pokrivač od K pa budući da je K kompaktan postoje $n \in \mathbf{N}$ i $y_1, ..., y_n \in K$ takavi da je

$$K \subseteq K(y_1, r_{y_n}) \cup ... \cup K(y_n, r_{y_n}). \tag{2.23}$$

Neka je

$$S = min\{r_{y_1}, ..., r_{y_n}\}.$$

Očito je $s > 0$. Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Imamo $s \leq r_{y_i}$ pa je

$$K(x, s) \subseteq K(x, r_{y_i}).$$

Sada iz

$$K(x, r_{y_i}) \cap K(y_i, r_{y_i}) = \emptyset,$$

što je posljedica od (2.22), slijedi

$$K(x, s) \cap K(y_i, r_{y_i}) = \emptyset.$$

Iz ovoga zaključujemo da je

$$K(x, s) \cap K(y_1, r_{y_1}) \cup ... \cup K(y_n, r_{y_n}) = \emptyset. \tag{2.24}$$

Neka je $U = K(x, s)$, $V = K(y_1, r_{y_1}) \cup ... \cup K(y_n, r_{y_n})$. Tada su U i V otvoreni skupovi, očito je $x \in U$, prema (2.23) vrijedi $K \subseteq V$, a prema (2.24) imamo

$$U \cap V = \emptyset.$$

Time je lema dokazana. □

Teorem 2.0.84. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Dokažimo da je K^c otvoren skup. Neka je $x \in K^c$. Tada $x \notin K$ pa prema prethodnoj lemi postoji otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U, K \subseteq V$ i $U \cap V = \emptyset$. Budući da je U otvoren postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x, r) \subseteq U.$$

Iz $U \cap V = \emptyset$ i $K \subseteq V$ slijedi

$$U \cap K = \emptyset.$$

Stoga je $U \subseteq K^c$.
Prema tome

$$K(x, r) \subseteq K^c.$$

Time smo dokazali da je K^c otvoren skup pa zaključujemo da je K zatvoren skup. □

Definicija 2.0.85. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$.
Definiramo $d' : Y \times Y \to \mathbf{R}$ sa $d'(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$. Tada je očito d' metrika na Y.
Za metrički prostor (Y, d') kažemo da je potprostor metričkog prostora (X, d).*

Napomena 2.0.86. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka je* $\mathcal{H}$ *skup svih nepraznih zatvorenih omeđenih skupova u* (X, d) *te neka je* $\mathcal{K}$ *skup svih nepraznih kompaktnih skupova u* (X, d)*. Tada je* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ *što slijedi iz teorema 2.0.84 i korolara 2.0.82.*

Neka je $\varphi_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbf{R}$ *funkcija definirana sa*

$$\varphi_{\mathcal{K}}(A, B) = \varphi(A, B), A, B \in \mathcal{K}.$$

Nadalje, neka je $\varphi_{\mathcal{H}}$ *metrika na* $\mathcal{H}$ *definirana kao u propoziciji 2.0.47. Očito za sve* $A, B \in \mathcal{K}$ *vrijedi* $\varphi_{\mathcal{K}}(A, B) = \varphi_{\mathcal{H}}(A, B)$*. Stoga je* $\varphi_{\mathcal{K}}$ *metrika na* $\mathcal{K}$ *i* $(\mathcal{K}, \varphi_{\mathcal{K}})$ *je potprostor metričkog prostora* $(\mathcal{H}, \varphi_{\mathcal{H}})$*.*

Propozicija 2.0.87. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $\mathcal{K}$ *skup svih nepraznih kompaktnih skupova* (X, d)*. Neka je* $\varphi_{\mathcal{K}}$ *metrika na* $\mathcal{K}$ *definirana kao u napomeni 2.0.86. Neka je* G *gust skup u* (X, d) *te neka je* $\mathcal{G}$ *familija svih nepraznih konačnih podskupova od* G*. Tada je* $\mathcal{G}$ *gust skup u metričkom prostoru* $(\mathcal{K}, \varphi_{\mathcal{K}})$*.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{G}$. Tada je A konačan skup i $A \neq \emptyset$. Prema primjeru 2.0.80 A je kompaktan skup. Stoga je $A \in \mathcal{K}$. Prema tome, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$. Neka je $K \in \mathcal{K}$ te neka je $r > 0$. Tada je prema propoziciji 2.0.81 K potpuno omeđen skup u (X, d) pa iz propozicije 2.0.63 slijedi da postoji konačan neprazan podskup K' od G takav da je $\varphi(K, K') < r$. Dakle,

$$\varphi_{\mathcal{K}}(K, K') < r$$

i $K' \in \mathcal{G}$. Prema tome, $\mathcal{G}$ je gust skup u $(\mathcal{K}, \varphi_{\mathcal{K}})$. □

Korolar 2.0.88. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka je* $\mathcal{K}$ *familija svih nepraznih kompaktnih skupova u* (X, d) *te neka je* $\varphi_{\mathcal{K}}$ *metrika na* $\mathcal{K}$ *definirana u napomeni 2.0.86. Neka je* $\mathcal{A}$ *familija svih konačnih nepraznih podskupova od* X*. Tada je* $\mathcal{A}$ *gust skup u metričkom prostoru* $(\mathcal{K}, \varphi_{\mathcal{K}})$*.*

Dokaz. Neka je $G = X$. Tada je G gust skup u (X, d). Prema prethodnoj propoziciji familija svih nepraznih konačnih podskupova od G je gust skup u $(\mathcal{K}, \varphi_{\mathcal{K}})$. No, ta familija je upravo $\mathcal{A}$. □

Definicija 2.0.89. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka je* S *neprazan podskup od* X *te neka je* $\varepsilon > 0$*. Definiramo* $N(S, \varepsilon) = \{x \in X | \exists s \in S \text{ takav da je } d(x, s) < \varepsilon\}$*.*

Uočimo sljedeće: Ako je (X, d) *metrički prostor,* S *neprazan podskup od* X *te* $\varepsilon > 0$*, onda je* $S \subseteq N(S, \varepsilon)$*.*

Napomena 2.0.90. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $S \subseteq X$*,* $S \neq \emptyset$ *i* $\varepsilon > 0$*. Tada je očito*

$$N(S, \varepsilon) = \cup_{s \in S} K(s, \varepsilon).$$

Iz ovoga i propozicije 2.0.64 slijedi da je $N(S, \varepsilon)$ *otvoren skup u* (X, d)*.*

Propozicija 2.0.91. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* A *i* B *neprazni podskupovi od* X*. Neka je* $\varepsilon > 0$*. Tada je*

$$A <_{\varepsilon} B \Leftrightarrow A \subseteq N(B, \varepsilon).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $A <_{\varepsilon} B$ Neka je $a \in A$. Tada postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) < \varepsilon$. Stoga je $a \in N(B, \varepsilon)$. Prema tome,

$$A \subseteq N(B, \varepsilon).$$

Obratno, pretpostavimo da je $A \subseteq N(B, \varepsilon)$. Neka je $a \in A$. Tada je $a \in N(B, \varepsilon)$ pa slijedi da postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) < \varepsilon$. Dakle,

$$A <_{\varepsilon} B.$$

□

Napomena 2.0.92. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* A, B *neprazni omeđeni skupovi u* (X, d)*. Tada postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je* $A \subseteq N(B, \varepsilon)$ *i* $B \subseteq N(A, \varepsilon)$*. Naime, znamo da postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je* $A \approx_{\varepsilon} B$*. Iz toga slijedi* $A <_{\varepsilon} B$ *i* $B <_{\varepsilon} A$ *pa iz prethodne propozicije slijedi* $A \subseteq N(B, \varepsilon)$ *i* $B \subseteq N(A, \varepsilon)$*.*

Propozicija 2.0.93. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* A *i* B *neprazni omeđeni skupovi u* (X, d)*. Tada je*
$\varphi(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 | A \subseteq N(B, \varepsilon) \text{ i } B \subseteq N(A, \varepsilon)\}$*.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je prema prethodnoj propoziciji $A \approx_{\varepsilon} B \Leftrightarrow A \subseteq N(B, \varepsilon)$ i $B \subseteq N(A, \varepsilon)$ pa slijedi tvrdnja propozicije. □

Bibliografija

[1] C. O. Christenson, W. L. Voxman, Aspects of Topology, Marcel Dekker, Inc., New York,1977.
[2] W. A. Sutherland, Introduction to metric and topological spaces, Oxford University Press 19775.
[3] S.B. Nadler, Continuum theory, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada je Hausdorffova metrika.
U prvom poglavlju se definira pojam metričkoga prostora te se također definiraju neki pojmovi s tim u vezi. U drugom poglavlju se definira Hausdorffova udaljenost između dva skupa. Nadalje, promatraju se pseudometrika, zatvoreni skupovi, potpuno omeđeni skupovi, gusti skupovi te pojam zatvarača skupa te se ispituju veze ovih pojmova i Hausdorffove udaljenosti.

Summary

The subject of this thyses is Hausdorff metric. The first chapter we define the notion of a metric space and we also define some basic notions related to metric spaces. In the second chapter we define the Hausdorff distance between two sets. Furthermore, we observe pseudometric, closed sets, totally bounded sets, dense sets and the notion of the closure of a set and we examine relationships between these notions and the Hausdorff distance.

Životopis

Moje ime je Marina Volarić. Rođena sam 30.07.1989. u Zagrebu. Djetinjstvo sam provela u mjestu Desinec pokraj Jastrebarskog. U Jastrebarskom sam završila osnovnu i srednju školu. Srednju školu završila sam 2008. godine. Te godine upisala sam studij Matematike na PMF.