Metoda sparivanja

Votuc, Ana-Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:124260

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana-Marija Votuc

METODA SPARIVANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Ante Mimica

Zagreb, rujan,2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ___________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. __________________________, predsjednik
2. __________________________, član
3. __________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. __________________________
2. __________________________
3. __________________________

Sadržaj

Uvod

Metoda sparivanja poznata je već dugo vremena i pokazala se veoma korisnom u dokazivanju teorema iz teorije vjerojatnosti. Sastoji se od toga da je slučajni objekti stavljaju na isti vjerojatnosni prostor s namjerom da se međusobno uspoređuju.
U ovom diplomskom radu dat ćemo uvod u metodu sparivanja, te ćemo primijeniti rezultate na teoriju Markovljevih lanaca i Poissonove aproksimacije. Prvo ćemo, kako bi to sve bilo moguće, u poglavlju "Preliminarije" ponoviti naše znanje o mjerama, Markovljevim lancima, harmonijskim funkcijama i diskretnom Laplasijanu te diskretnim procesima obnavljanja. Nakon toga posvetit ćemo se osnovama teorije sparivanja kako bismo izveli i dokazali glavne rezultate koje ćemo kasnije koristiti. Zadnje poglavlje bavi se primjenom metode sparivanja. Posebno ćemo obraditi Markovljeve lance (pozitivno povratne, nul-povratne i prolazne), slučajne šetnje i na kraju Poissonove aproksimacije.

Poglavlje 1

Preliminarije

Za temeljito proučavanje metode sparivanja potrebna su nam neka predznanja koja ćemo u ovom poglavlju ponoviti.

1.1 Osnovno o mjerama

Za proučavanje metode sparivanja od velike važnosti će nam biti neke činjenice iz teorije mjere, pa ćemo se zato prvo prisjetiti nekih osnovnih definicija.

Definicija 1.1.1. *Neka je X skup. Neprazna familija $\mathcal{F}$ podskupova od X je $\sigma-$prsten ako vrijedi*
(i) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \backslash B \in \mathcal{F}$
(ii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
Ako $\mathcal{F}$ sadrži cijeli X onda se $\mathcal{F}$ zove $\sigma-$algebra.

Jedan on najvažnijih primjera $\sigma-$algebre je Borelova $\sigma-$algebra na $\mathbb{R}^n$ u oznaci $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ koja se definira kao $\sigma-$algebra generirana famlilijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.1.2. *Neka je X skup i $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X, te neka je $\emptyset \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ takva da je $\mu(\emptyset) = 0$. Funkcija μ je $\sigma-$aditivna na $\mathcal{E}$ ako vrijedi*

$$E_1, E_2, ... \in \mathcal{E} \text{ međusobno disjunktni i } E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E} \implies \mu(E) = \sum_{i*1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Definicija 1.1.3. *Funkcija μ koja je $\sigma-$aditivna na $\sigma-$prstenu $\mathcal{F}$ zove se mjera na $\mathcal{F}$.*

Izmjeriv prostor je uređen par $(X, \mathcal{F})$, gdje je X skup, a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\sigma-$algebra. Elemente od $\mathcal{F}$ nazivamo izmjerivim skupovima. Prostor mjere je uređena trojka $(X, \mathcal{F}, \mu)$, pri čemu je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, a μ mjera na $\mathcal{F}$. Ako su $(X, \mathcal{X})$ i $(Y, \mathcal{Y})$ izmjerivi prostori onda za funkciju f kažemo da je $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})-$izmjeriva (izmjeriva u paru $\sigma-$algebri $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, samo izmjeriva ako su $\sigma-$algebre jasne) ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}$.

Definicija 1.1.4. *Neka je $\{(X_k, \mathcal{X}_k) : k \in K\}$ neprazna familija izmjerivih prostora. Promatramo Kartezijev produkt skupova $\prod_{k\in K} X_k$ i za svaki $k_0 \in K$ promatramo projekcije $\pi_{k_0} : \prod_{k\in K} X_k \to X_{k_0}$,*

$$\pi_{k_0}(x_k)_{k\in K} = x_{k_0}.$$

Najmanju $\sigma-$algebru u odnosu na koju su sve π_k izmjerive nazivamo produktnom $\sigma-$algebrom u oznaci $\otimes_{k\in K}\mathcal{X}_k$.

Posebno ćemo u slučaju da imamo Kartezijev produkt samo dva skupa imati sljedeće oznake.
Za $(x, x') \in X_1 \times X_2$ definiramo lijevu projekciju π i desnu projekciju π' sa

$$\pi(x, x') = x, \quad \pi'(x, x') = x'.$$

Nadalje, ako postoji niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ takav da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ i za svaki n iz $\mathbb{N}$ je $\mu(E_n) < \infty$ onda kažemo da je μ $\sigma-$konačna. Posebno ona je konačna ako je $\mu(X) < \infty$, a ako je još i $\mu(X) = 1$ onda je vjerojatnosna.
Kao jedan jednostavan primjer mjere pogledajmo mjeru koncentriranu u točki.
Definiramo $\delta_x : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ kao

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \upsilon)$ $\sigma-$konačni prostori mjere. Tada postoji jedinstvena mjera $\mu \otimes \upsilon$ na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ takva da je

$$(\mu \otimes \upsilon)(A \times B) = \mu(A)\upsilon(B) \quad \text{za } A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Definicija 1.1.5. *Realna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$ je realna funkcija $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ sa svojstvima*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$ i
(ii) za $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ međusobno disjunktne vrijedi

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

Neka je μ realna mjera na $(X, \mathcal{F})$. Za skup $P \in \mathcal{F}$ kažemo da je pozitivan (za mjeru μ) ako vrijedi $\mu(P \cap E) \geq 0$ za sve $E \in \mathcal{F}$, te za skup $N \in \mathcal{F}$ kažemo da je negativan (za mjeru μ) ako vrijedi $\mu(N \cap E) \leq 0$ za sve $E \in \mathcal{F}$.

Teorem 1.1.6. *Neka je μ realna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Tada postoje pozitivan skup $P \in \mathcal{F}$ i negativan skup $N \in \mathcal{F}$ takvi da je $P \cup N = X$ i $P \cap N = \emptyset$. Par (P, N) s ovim svojstvima nazivamo Hahnova dekompozicija funkcije μ.*

Uočimo da Hahnova dekompozicija ne mora biti jedinstvena.

Neka je (P, N) Hahnova dekompozicija od μ. Definiramo $\mu^+, \mu^- : \mathcal{F} \to [0, \infty\rangle$ sa

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap P) \quad \mu^-(A) = -\mu(A \cap N).$$

Vidimo da su μ^+ i μ^- mjere.
Uzmimo da je $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{F}, B \subseteq A$. Sada iz činjenica da je

$$\mu(B) = \mu^+(B) - \mu^-(B) \leq \mu^+(B) \leq \mu^+(A)$$

dobivamo

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}, B \subseteq A\}.$$

Analogno za μ^- dobivamo

$$\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B) : B \in \mathcal{F}, B \subseteq A\}.$$

Te dvije činjenice nam pokazuju da μ^+ i μ^- ne ovise o izbori Hahnove dekompozicije. Sada možemo pisati

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Takav rastav od μ nazivamo Jordanova dekompozicija za μ, a μ^+, μ^- nazivamo pozitivni,tj. negativni dio od μ. Budući da μ^+ i μ^- ne ovise o izboru Hahnove dekompozicije Jordanova dekompozicija je jedinstvena.
Nadalje, funkciju $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ nazivamo varijacija od μ. Za $|\mu|(X)$ imamo posebnu oznaku $||\mu||_{tv}$ i zovemo ju potpuna varijacija od μ.
Neka je μ realna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$ takva da vrijedi $\mu(X) = 0$. Imamo

$$0 = \mu(X) = \mu^+(X) - \mu^-(X) \Rightarrow \mu^+(X) = \mu^-(X).$$

Nadalje,

$$||\mu||_{tv} = |\mu|(X) = \mu^+(X) + \mu^-(X) = 2\mu^+(X) = 2 \sup_{A \in \mathcal{F}} \mu(A).$$

Dakle dobili smo jednakost

$$\|\mu\|_{tv} = 2 \sup_{A \in \mathcal{F}} \mu(A), \text{ za } \mu \text{ takvu da je } \mu(X) = 0, \tag{1.1}$$

koju ćemo često koristiti.
Jedan od važnih teorema teorije mjere je Radon-Nikodymov teorem, pa ćemo ponoviti još neke pojmove kako bismo ga mogli izreći.
Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je jednostavna i izmjeriva ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni i $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}.$$

Označimo sa $S = S(X, \mathcal{F}, \mu)$ skup svih jednostavnih izmjerivih funkcija. Definiramo $S_+ = \{f \in S, f \geq 0\}$. Za f iz S_+ definiramo integral od f kao

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k).$$

Sada možemo definirati integral općenite izmjerive funkcije $f : X \to [0, \infty]$ kao

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g d\mu, g \in S_+, g \leq f \right\}$$

Konačno neka je $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ $(\mathbb{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}))-$izmjeriva funkcija. Definiramo

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Taj integral postoji ako je barem jedan od integrala $\int_X f^+ d\mu$ i $\int_X f^- d\mu$ konačan. Kažemo da je f integrabilna nad $A \in \mathcal{F}$ (ili $\mu-$integrabilna nad $A \in \mathcal{F}$) ako postoji integral od $f \cdot 1_A$ i konačan je. Tada za taj prostor mjere definiramo vektorski prostor

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ je } \mu - \text{integrabilna na } X\}.$$

Nadalje za funkciju $\upsilon : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ kažemo da je potpuno aditivna ako je $\upsilon(\emptyset) = 0$ i ako za $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ međusobno disjunktni vrijedi

$$\upsilon\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \upsilon(A_n).$$

Ako još vrijedi da je $\upsilon : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ onda kažemo da je konačna potpuno aditivna funkcija.

Definicija 1.1.7. *Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i μ mjera na $(X, \mathcal{F})$ te neka je υ potpuno aditivna funkcija na $(X, \mathcal{F})$. Reći ćemo da je υ apsolutno neprekidna u odnosu na μ, u oznaci $\upsilon \ll \mu$, ako vrijedi*

$$A \in \mathcal{F}, \mu(A) = 0 \Longrightarrow |\upsilon|(A) = 0.$$

Uočimo da $|\upsilon|(A) = 0 \Longrightarrow \upsilon(A) = 0$ dok obrat ne mora općenito vrijediti. Ako je υ mjera onda je $|\upsilon| = \upsilon$.

Teorem 1.1.8 (Radon-Nikodym). *Neka je μ $\sigma-$konačna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Ako je υ konačna potpuno aditivna funkcija za koju vrijedi $\upsilon \ll \mu$, tada postoji $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ takva da je*

$$\upsilon(A) = \int_A g d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Funkcija g je $\mu-$g.s. jedinstvena.

Napomena 1.1.9. *Funkcija g označava se sa $\frac{d\upsilon}{d\mu}$ i naziva Radon-Nikodymova derivacija od υ u odnosu na μ.*

1.2 Markovljevi lanci i slučajne šetnje

Kako bismo mogli izučavati teoriju sparivanja i primjenjivati ju na Markovljeve lance i slučajne šetnje moramo prvo ponoviti svoje znanje o istima.

Definicija 1.2.1. *Neka je S neprazan skup. Slučajni proces s diskretnim vremenom i prostorom stanja S je familija $X = (X_n)_{n \geq 0}$ slučajnih varijabli (ili elemenata) definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u S. Dakle, za svaki $n \geq 0$, $X_n : \Omega \to S$ je slučajna varijabla.*

Definicija 1.2.2. *Neka je S prebrojiv skup. Slučajni proces $X = (X_n)_{n \geq 0}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S je Markovljev lanac ako vrijedi:*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, ..., i_{n-1}, i, j \in S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Činjenicu da je

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

nazivamo Markovljevim svojstvom. Što to zapravo znači? Ako postavimo da je sadašnost vremenski trenutak n Markovljevo svojstvo nam govori da je ponašanje Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno na sadašnjost i prošlost, jednako ponašanju Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno samo na sadašnjost.
Lako se izvodi relacija

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0 | X_n = i) = \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0 | X_n = i).$$

koja nam zapravo daje drugi način izricanja Markovljevog svojstva. Neposredna budućnost i prošlost uvjetno su nezavisne uz danu sadašnjost. Mi se često bavimo samo homogenim Markovljevim lancima. Kažemo da je Markovljev lanac homogen ako desna strana u gornjoj relaciji ne ovisi o vremenu $n \geq 1$.
Definirajmo sada $(\lambda, P)-$Markovljev lanac. Kako bismo to napravili treba nam definicija stohastičke matrice.

Definicija 1.2.3. *Matrica $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ naziva se stohastičkom matricom ako je*

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in S \quad \textit{i ako je} \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in S.$$

Definicija 1.2.4. *Neka je $\lambda = (\lambda_i)_{i \in S}$ vjerojatnosna distribucija na S, te neka je $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ stohastička matrica. Slučajni proces $X = (X_n)_{n \geq 0}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s prostorom stanja S je homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i prijelaznom matricom P ako vrijedi*
(i) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i \quad \forall i \in S$ *i*
(ii) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = p_{ij} \quad \forall n \geq 0, i_0, ..., i_{n-1}, i, j \in S.$

Primijetimo da nije odmah jasno da svaki $(\lambda, P)-$Markovljev lanac ima Markovljevo svojstvo, međutim ta se činjenica vrlo lako pokazuje.
Uvedimo još uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_i$ formulom $\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A | X_0 = i)$ za $A \in \mathcal{F}$.
Također, uvest ćemo i pojam $n-$koračne prijelazne vjerojatnosti $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j)$. Ova formula nam govori da ako Markovljev lanac kreće iz stanja i, tada je vjerojatnost da nakon n koraka bude u stanju j jednaka $ij-$tom elementu $n-$te potencije prijelazne matrice P.

Posvetimo se sada nekim svojstvima Markovljevih lanaca.

Definicija 1.2.5. *Neka je $X = (X_n)_{n \geq 0}$ Markovljev lanac s prostorom stanja S i prijeznom matricom P. Za $B \subset S$ definiramo prvo vrijeme pogađanja tog skupa sa*

$$T_B = \min\{k \geq 0 : X_k \in B\},$$

uz konvenciju $\min \emptyset = +\infty$. *U slučaju $B = \{j\}$ zbog jednostavnosti pišemo T_j umjesto $T_{\{j\}}$.*

Još možemo definirati i $n-$to vrijeme posjeta stanju $i \in S$.

$$T_i^{(1)} = \min\{k > 0 : X_n = i\}.$$

$T_i^{(1)}$ zovemo prvim vremenom povratka u stanje $i \in S$. Induktivno definiramo

$$T_i^{(n)} = \begin{cases} \min\{k > T_i^{(n-1)} : X_k = i\}, & T_i^{(n-1)} < \infty, \quad n \geq 2 \\ \infty, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija 1.2.6. *Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j dostižno iz i, u oznaci $i \longrightarrow j$, ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0.$$

Nadalje stanja $i, j \in S$ komuniciraju, u oznaci $i \longleftrightarrow j$, ako vrijedi $i \longrightarrow j$ i $j \longrightarrow i$.

Relacija komuniciranja je relacije ekvivalencije na $S \times S$, te stoga inducira particiju prostora S na klase. Označimo te klase sa $C_1, C_2, ...$ (može ih biti konačno ili beskonačno). Dakle $C_k \cap C_l = \emptyset$ za $k \neq l$, te $\cup_l C_l = S$. Sva stanja iz jedne klase međusobno komuniciraju. Sada možemo uvesti pojam ireducubilnog Markovljevog lanca.

Definicija 1.2.7. *Markovljev lanac X je ireducubilan ako se prostor stanja S sastoji samo od jedne klase komuniciranja, tj. ako sva stanja u S komuniciraju.*

Za $C \subset S$ kažemo da je zatvoren ako za svaki $i \in C$ vrijedi $\mathbb{P}_i(T_{S \setminus C} = \infty) = 1$. Zapravo skup je zatvoren ako lanac ne može izaći iz njega. S druge strane, u zatvoren skup se može ući. Za stanje $j \in S$ kažemo da je apsorbirajuće ako je $\{j\}$ zatvoren skup. To znači da kada lanac dođe u stanje j tamo ostaje zauvijek.

Definicija 1.2.8. *Stanje $i \in S$ je povratno ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_i^{(1)} < \infty) = 1$, a prolazno ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_i^{(1)} < \infty) < 1$.*

Navedimo nekoliko činjenica vezanih uz povratnost i prolaznost. Ako je $i \in S$ povratno i $i \longleftrightarrow j$ tada je i $j \in S$ povratno stanje. Iz ovog lako slijedi da su povratnost i prolaznost stanje klasa. Nadalje svaka povratna klasa je zatvorena i ako je S konačan skup stanja on sadrži barem jedno povratno stanje.

Teorem 1.2.9. *Neka je X ireducibilan i povratan Markovljev lanac. Tada za svaki $i \in S$ vrijedi $\mathbb{P}(T_i^{(1)} < \infty) = 1$.*

Definirajmo N_i kao broj posjeta stanju $i \in S$, tj. preciznije

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}}.$$

Teorem 1.2.10. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
(i) $i \in S$ *je povratno;*
(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$*;*
(iii) $\mathbb{E}_i N_i = \infty$*;*
(iv) $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$.

Pogledajmo sada specijalne slučajeve Markovljevih lanaca-slučajne šetnje.

Slučajne šetnje na $\mathbb{Z}$

Neka je $(Y_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}$ s distribucijom $\mathbb{P}(Y_i = k) = p_k, k \in \mathbb{Z}$. Definiramo slučajnu šetnju $X = (X_n)_{n\geq 0}$ sa:

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad n \geq 1.$$

Za slučajnu šetnju kažemo da je jednostavna ako $(Y_n)_{n\geq 1}$ imaju distribuciju

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - p \quad \text{za neki } p \in [0, 1].$$

Za jednostavnu slučajnu šetnju kažemo da je simetrična ako je $p = \frac{1}{2}$. Pokazuje se da je jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ povratna.
Kao kriterij povratnosti za jednodimenzionale slučajne šetnje navest ćemo Chung-Fuchsov teorem. Kako bismo ga dokazali trebat će nam sljedeće leme. Prije nego što ih navedemo ponovimo Borel-Cantelli lemu i Kroneckerovu lemu.
Neka je $\{A_n : n \geq 1\}$ niz događaja na vjerojatnosonom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Poznato je iz teorije vjerojatnosti da je događaj $\{A_n\ b.m.p.\} = \{A_n$ se dogodi za beskonačno mnogo n $\}$ dan sa

$$\{A_n\ b.m.p.\} = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Lema 1.2.11 (Borel-Cantelli)**.** *Ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ *tada* $\mathbb{P}(A_n\ b.m.p.) = 0$.

Lema 1.2.12 (Kroneckerova lema)**.** *Ako je* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beskonačan niz realnih brojeva takav da vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s, \quad s \in \mathbb{R}$$

onda za $0 < b_1 \leq b_2 \leq ...$ *i* $b_n \to \infty$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0.$$

Lema 1.2.13. *Vrijedi da ako je* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_n\| < \varepsilon) < \infty$ *tada* $\mathbb{P}(\|S_n\| < \varepsilon \text{ b.m.p.}) = 0$. *Ako* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_n\| < \varepsilon) = \infty$ *onda* $\mathbb{P}(\|S_n\| < 2\varepsilon \text{ b.m.p.}) = 1$.

Dokaz. Prvi zaključak slijedi iz Borel-Cantelli leme. Kako bismo dokazali drugi označimo s $F = \{\|S_n\| < \varepsilon \text{ b.m.p.}\}^c$. Rastavom po tome kada je zadnji put bilo $\|S_n\| < \varepsilon$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_m\| < \varepsilon, \|S_n\| \geq \varepsilon \text{ za sve } n \geq m+1) \\
&\geq \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_m\| < \varepsilon, \|S_n - S_m\| \geq 2\varepsilon \text{ za sve } n \geq m+1) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_m\| < \varepsilon)\rho_{2\varepsilon,1}
\end{aligned}$$

gdje je $\rho_{\delta,k} = \mathbb{P}(\|S_n\| \geq \delta \text{ za sve } n \geq k)$. Budući da je $\mathbb{P}(F) \leq 1$ i

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_m\| < \varepsilon) = \infty$$

slijedi da je $\rho_{2\varepsilon,1} = 0$. Za poopćenje ovog zaključka na $\rho_{2\epsilon,k}$ za $k \geq 2$ označimo s

$$A_m = \{\|S_m\| < \varepsilon, \|S_n\| \geq \varepsilon \text{ za sve } n \geq m+k\}.$$

Budući da bilo koji ω može biti u većini k za A_m ponavljajući isti argument kao gore dobivamo

$$k \geq \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) \geq \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_m\| < \varepsilon)\rho_{2\varepsilon,k}.$$

Dakle $\rho_{2\varepsilon,k} = \mathbb{P}(\|S_n\| \geq 2\varepsilon \text{ za sve } j \geq k) = 0$, pa iz proizvoljnosti od k slijedi željeni zaključak. □

Napomena 1.2.14. *Prethodni dokaz vrijedi za sve norme. Za sljedeći dokaz pretpostavit ćemo da je za* $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sup_{i=1,2\dots,n} |x_i|$.

Lema 1.2.15. *Neka je* $m \geq 2$ *prirodni broj i* $\epsilon > 0$. *Tada je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_n\| < m\epsilon) \leq (2m)^d \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_n\| < \epsilon).$$

Dokaz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_n\| < m\varepsilon) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k} \mathbb{P}(S_n \in k\varepsilon + [0, \varepsilon\rangle^d)$$

gdje unutarnja suma ide po $k \in \{-m, ..., m-1\}^d$. Označimo s

$$T_k = \inf\{l \geq 0 : S_l \in k\varepsilon + [0, \varepsilon\rangle^d\}$$

i tada rastavom prema vrijednosti od T_k i upotrebom Fubinijevog teorema imamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \in k\varepsilon + [0, \varepsilon\rangle^d) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \in k\varepsilon + [0, \varepsilon\rangle^d, T_k = l) \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=l}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_n - S_l\| < \varepsilon, T_k = l).\end{aligned}$$

Budući da su $\{T_k = l\}$ i $\{\|S_n - S_l\| < \varepsilon\}$ nezavisni dobivamo nadalje

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=l}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_n - S_l\| < \varepsilon, T_k = l) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_k = m) \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_j\| < \varepsilon) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_j\| < \varepsilon).$$

Koristeći činjenicu da ima $(2m)^d$ vrijednosti od k u $\{-m, ..., m-1\}^d$ dokaz je gotov. □

Kombiniranjem prethodne dvije leme dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 1.2.16. *Konvergencija (divergencija) izraza $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|S_n\| < \epsilon)$ za bilo koju vrijednost od $\epsilon > 0$ je dovoljna za prolaznost (povratnost).*

Teorem 1.2.17 (Chung-Fuchs)**.** *Ako vrijedi slabi zakon velikih brojeva i $\frac{S_n}{n} \to 0$ po vjerojatnosti, tada je S_n povratna.*

Dokaz. Označimo sa $u_n(x) = \mathbb{P}(|S_n| < x)$ za $x > 0$. Prema Lemi 1.2.15 slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) \geq \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(m) \geq \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{Am} u_n\left(\frac{n}{A}\right)$$

za bilo koji $A > 0$ jer je $u_n(x) \geq 0$ i rastuća po x. Po pretpostavci $u_n\left(\frac{n}{A}\right) \to 1$ pa kada pustimo $m \to \infty$ i primijetimo da je

$$\frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{Am} u_n\left(\frac{n}{A}\right) = \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{Am} \frac{u_n\left(\frac{n}{A}\right)}{Am}$$

dobivamo, koristeći Kroneckerovu lemu

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) \geq \frac{A}{2}.$$

Budući da je A proizvoljan, suma mora biti jednaka ∞ pa željeni zaključak sljedi iz Korolara 1.2.16. □

Slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^2$

Neka je $e_1 = (1,0)$ i $e_2 = (0,1)$. $(Y_n)_{n\geq 1}$ je niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih vektora sa distribucijom $\mathbb{P}(Y_n = e_1) = \mathbb{P}(Y_n = -e_1) = \mathbb{P}(Y_n = e_2) = \mathbb{P}(Y_n = -e_2) = \frac{1}{4}$. Jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^2$ definiramo kao

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad n \geq 1.$$

Pokazuje se da je takva slučajna šetnja povratna.

Slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^3$

Neka je $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ i $e_3 = (0,0,1)$. $(Y_n)_{n\geq 1}$ je niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih vektora sa distribucijom $\mathbb{P}(Y_n = e_i) = \mathbb{P}(Y_n = -e_i) = \frac{1}{6}, i = 1,2,3$. Jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju definiramo analogno kao u $\mathbb{Z}^2$. Pokazuje se da je takva slučajna šetnja prolazna.

Za kraj prisjetimo se pojmova stacionarne i granične distribucije Markovljevih lanaca, invarijantne mjere te nekih njihovih svojstava.

Definicija 1.2.18. *Slučajni proces $X = (X_n)_{n\geq 0}$ definiran na vjerojatnosonom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se stacionaran ako za sve $k \geq 0$ i sve $n \geq 0$ slučajni vektori $(X_0, X_1, ..., X_k)$ i $(X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+k})$ imaju istu distribuciju (u odnosu na vjerojatnost $\mathbb{P}$).*

Definicija 1.2.19. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i)_{i\in S}$ na S je stacionarna distribucija (ili invarijantna distribucija) Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako vrijedi*

$$\pi = \pi P,$$

odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj}, \quad \text{za sve } j \in S.$$

Propozicija 1.2.20. *Neka je S konačan skup stanja, te pretpostavimo da za neki $i \in S$,*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall j \in S.$$

Tada je $\pi = (\pi_j)_{j\in S}$ stacionarna distribucija.

Definicija 1.2.21. *Niz $\lambda = (\lambda_i)_{i\in S}$ naziva se mjera ako je $\lambda_i \in [0,\infty\rangle$ za sve $i \in S$. Mjera λ je netrivijalna ako postoji $i \in S$ takav da je $\lambda_i > 0$. Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Netrivijalna mjera λ na S je invarijantna mjera Markovljevog lanca X (tj. prijelazne matrice P) ako vrijedi*

$$\lambda = \lambda P,$$

odnosno po komponentama

$$\lambda_j = \sum_{k\in S} \lambda_k p_{kj} \quad \forall i, j \in S.$$

Reći ćemo da je stanje $i \in S$ pozitivno povratno ako je $\mathbb{E}_i(T_i^{(1)}) < \infty$. Inače kažemo da je stanje $i \in S$ nul-povratno. Pozitivna potvratnost, tj. nul-povratnost su svojstva klasa komuniciranja.

Teorem 1.2.22. *Neka je $i \in S$ povratno stanje. Za $j \in S$ definiramo*

$$\upsilon_i = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{T_i^{(1)}-1} 1_{\{X_n = j\}}.$$

Tada je υ inavrijatna mjera. Posebno ako je stanje i pozitivo povratno, tada je

$$\pi_j = \frac{\upsilon_j}{\mathbb{E}_i(T_i^{(1)})}, \quad j \in S,$$

stacionarna distribucija.

Nadalje može se pokazati da ako je X ireducibilan Markovljev lanac s prijelaznom matricom P i stacionanom distribucijom π da je $\mathbb{E}_j(T_j^{(1)}) = \dfrac{1}{\pi_j}$ za sve $j \in S$.

Definicija 1.2.23. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac na skupu stanja S s prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i)_{i\in S}$ naziva se graničnom distribucijom Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako za sve $i, j \in S$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Lako se pokazuje da ako je π granična distribucija Markovljevog lanca X da je π tada i stacionarna distribucija. Obrat ove tvrdnje ne vrijedi uvijek. Da bismo pokazali kada vrijedi moramo definirati period stanja $i \in S$.

Definicija 1.2.24. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Za stanje $i \in S$ označimo sa $d(i)$ najveći zajednički djelitelj skupa $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$, gdje je $d(i) = 1$ ako je taj skup prazan. Kažemo da je stanje i aperiodično, ako je $d(i) = 1$. U suprotnom je i periodičko stanje, a $d(i)$ se zove period od i.*

Pokazuje se da je periodičnost svojstvo klase komuniciranja tj. ako za $i, j \in S$ vrijedi $i \longleftrightarrow j$ tada $d(i) = d(j)$.

Lema 1.2.25. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ireducibilan i aperiodičan Markovljev lanac. Tada za sve $i, j \in S$ postoji $n_0 = n_0(i, j) \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(n)} > 0$ za sve $n \geq n_0$.*

Teorem 1.2.26 (Teorem o konvergenciji Markovljevih lanaca)**.** *Neka je λ proizvoljna vjerojatnosna distribucija na skupu stanja S. Pretpostavimo da je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ $(\lambda, P)-$Markovljev lanac koji je ireducibilan i aperiodičan, te ima stacionarnu ditribuciju π. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j, \quad \forall j \in S.$$

Specijalno

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad i, j \in S,$$

tj., stacionarna distribucija ujedno je i granična.

Teorem 1.2.27. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ireducubilan, nul-povratan Markovljev lanac sa skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Tada za sve $i, j \in S$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

1.3 Harmonijske funkcije i diskretni Laplasijan

Neka je $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ funkcija. Označimo sa Δ diskretni Laplacian koji djeluje na funkciju f kao

$$(\Delta f)(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y\in\mathbb{Z}^d,\ \|y-x\|=1} [f(y) - f(x)], \quad x \in \mathbb{Z}^d,$$

gdje je $\|x\| = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_d|\}$. Za funkciju f kažemo da je harmonijska ako je $\Delta f \equiv 0$.

1.4 Diskretni procesi obnavljanja

Definicija 1.4.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka su* $Z_0, Z_1, Z_2...$ *nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu* $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *i neka su* $Z_1, Z_2...$ *jednako distribuirane i strogo pozitivne. Diskretni proces obnavljanja je proces* $S = (S_n)_{n\geq 0}$ *definiran sa*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} Z_i, \quad za \quad n \geq 0.$$

U slučaju da je $Z_0 = 0$ kažemo da je S čisti (diskretni) proces obnavljanja, a inače kažemo da je odgođeni.
Neka je $(p_k)_{k\geq 1}$ razdioba slučajne varijable Z_1, tj.

$$\mathbb{P}(Z_1 = k) = p_k, \quad za \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

i neka je $(a_k)_{k\geq 0}$ razdioba slučajne varijable Z_0, tj.

$$\mathbb{P}(Z_0 = k) = a_k, \quad za \quad k \geq 0.$$

Definicija 1.4.2. *Neka je* $(S_n)_{n\geq 0}$ *diskretni proces obnavljanja. Definiramo proces vremena obnavljanja* $V = (V_n)_{n\geq 0}$ *sa*

$$V_n = \begin{cases} 1, & n = S_k, \quad za \quad neki \quad k \\ 0, & ina\check{c}e \end{cases} = \sum_{k=0}^{n} 1_{\{S_k = n\}}.$$

Lema 1.4.3. *Neka je* S *čisti proces obnavljanja i pretpostavimo da je* $p = \sum_{k=1}^{\infty} p_k < 1$ *(tj. razdioba od* Z_1 *je degenerirana). Tada za ukupan broj obnavljanja* $R = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(R = m) = p^m(1 - p), \quad m \geq 1,$$

tj. R *ima geometrijsku razdiobu.*

Dokaz. Za $m \geq 1$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R = m) &= \mathbb{P}(Z_1 < \infty, Z_2 < \infty, ..., Z_m < \infty, Z_{m+1} = \infty) \\ &= \mathbb{P}(Z_1 < \infty)\mathbb{P}(Z_2 < \infty)...\mathbb{P}(Z_m < \infty)\mathbb{P}(Z_{m+1} = \infty) \\ &= p^m(1 - p). \end{aligned}$$

□

Napomena 1.4.4. *Zbog* $\{V_n = 1\} \subseteq \{R \geq n\}$ *iz Leme 1.4.3 zaključujemo da u slučaju* $p = \sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}R < \infty,$$

jer R ima geometrijsku razdiobu.
S druge strane pomoću Beppo-Levijevog teorema dobijemo

$$\mathbb{E}R = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_n = 1)$$

gde iz nužnog uvjeta konvergencije reda slijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n = 1) = 0$.
Dakle ako je $\lim_{n\to\infty}(V_n = 1) \neq 0$ *onda razdioba od* Z_1 *mora nužno biti nedegenerirana, tj.* $p = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.
Ako je Z_1 *nedegenerirana, onda je u slučaju* $Z_0 = 0$

$$\mathbb{P}(R = \infty) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty}\{Z_n < \infty\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n < \infty) = 1.$$

Primjer 1.4.5. *Neka je* $X = (X_n)_{n\geq 0}$ *Markovljev lanac sa skupom stanja* S *i neka je* $i \in S$. *Definiramo:*

$$\tau_0 = \min\{k \geq 0 : X_k = i\}$$

i

$$\tau_{n+1} = \min\{k > \tau_n : X_k = i\} \quad n \geq 1.$$

Sada iz jakog Markovljevog svojstva slijedi da je $\tau = (\tau_n)_{n\geq 0}$ *proces obnavljanja jer su duljine "izleta iz stanja"*

$$Z_0 = \tau_0, Z_1 = \tau_1 - \tau_0, Z_2 = \tau_2 - \tau_1, ..., Z_n = \tau_n - \tau_{n-1}, ...$$

nezavisne slučajne varijable, a $Z_1, Z_2, ...$ *su jednako distribuirane.*
Uz vjerojatnost $\mathbb{P}_i$ *je* τ *čisti proces obnavljanja, jer je* $\mathbb{P}_i(Z_0 = 0) = 1$, *dok se za* $\mathbb{P}_j$, $j \neq i$ *radi o odgođenom procesu obnavljanja.*
Primijetimo da u ovom slučaju za pripadni proces vremena obnavljanja $V = (V_n)_{n\geq 0}$ *vrijedi*

$$V_n = 1_{\{X_n = i\}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poglavlje 2

Osnove teorije sparivanja

U ovom poglavlju ćemo definirati sparivanje, reći nešto o osnovnim nejednakostima metode sparivanja i maksimalnom sparivanju.

2.1 Definicija sparivanja

Definicija 2.1.1. *Sparivanje dvije vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ na istom izmjerivom prostoru $(E, \mathcal{E})$ je svaka vjerojatnosna mjera $\hat{\mathbb{P}}$ na produktnom izmjerivom prostoru $(ExE, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ sa svojstvom da*

$$\mathbb{P} = \hat{\mathbb{P}}\pi^{-1}, \quad \mathbb{P}' = \hat{\mathbb{P}}\pi'^{-1},$$

gdje su π i π' desna i lijeva projekcija.

Ipak, ova definicija nam neće biti dovoljna za upotrebu, pa uvodimo i sljedeću definiciju za slučajne elemente.

Definicija 2.1.2. *Neka su X i X' slučajni elementi definirani na vjerojatnosnim prostorima $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ s vrijednostima u $(E, \mathcal{E})$. Sparivanje od X i X' je slučajni element $(\hat{X}, \hat{X}')$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$ koji poprima vrijednosti u $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ takav da vrijedi*

$$\hat{X} \stackrel{\mathrm{d}}{=} X, \quad \hat{X}' \stackrel{\mathrm{d}}{=} X'$$

gdje $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ označava jednakost po distribuciji.

Napomena 2.1.3. *Veza između Definicija 2.1.1. i 2.1.2. je sljedeća:*
$\hat{\mathbb{P}}_{(\hat{X}, \hat{X}')}$ je sparivanje mjera $\mathbb{P}_X$ i $\mathbb{P}'_{X'}$ pri čemu je $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ i $\mathbb{P}'_{X'}(A) = \mathbb{P}'(X' \in A)$.

Pogledajmo jedan jednostavan primjer.

Primjer 2.1.4. *Neka su X i X′ dvije Bernoullijeve slučajne varijable, tj.*

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \quad X' \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p' & p' \end{pmatrix}$$

te neka je $U \sim U(0,1)$ *uniformna slučajna varijabla na intervalu* $[0,1]$ *definirane na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Definiramo sparivanje na sljedeći način

$$(\hat{X}, \hat{X}')(\omega) = (1_{\{0<U\leq p\}}(\omega), 1_{\{0<U\leq p'\}}(\omega)).$$

Uz pomoć činjenice da za uniformnu razdiobu na intervalu $[a,b]$ *vrijedi* $\mathbb{P}(U \leq c) = \frac{c-a}{b-a}$ *pokazujemo da je*

$$\hat{X} \overset{\mathrm{d}}{=} X, \quad \hat{X}' \overset{\mathrm{d}}{=} X'.$$

Računamo

$$\mathbb{P}(\hat{X} = 1) = \mathbb{P}(0 < U \leq p) = p = \mathbb{P}(X = 1).$$

$$\mathbb{P}(\hat{X} = 0) = \mathbb{P}(p < U < 1) = 1 - \mathbb{P}(U \leq p) = 1 - p = \mathbb{P}(X = 0).$$

$$\mathbb{P}(\hat{X}' = 1) = \mathbb{P}(0 < U < p') = p' = \mathbb{P}(X' = 1).$$

$$\mathbb{P}(\hat{X}' = 0) = \mathbb{P}(p' < U < 1) = 1 - \mathbb{P}(U \leq p') = 1 - p' = \mathbb{P}(X' = 0).$$

Primjetimo još da sparivanje ne mora biti jedinstveno. U primjenama se pokušava naći sparivanje takvo da je $||\mathbb{P} - \mathbb{P}^{'}||_{tv}$ najmanja moguća.

2.2 Nejednakosti

Teorem 2.2.1. *Neka su X i X′ dvije slučajne varijable, sa vjerojatnosnim distribucijama* $\mathbb{P}_X$ *i* $\mathbb{P}'_{X'}$ *i neka je* $(\hat{X}, \hat{X}')$ *njihovo sparivanje na vjerojatnosnom prostoru* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$. *Tada vrijedi*

$$||\mathbb{P}_X - \mathbb{P}'_{X'}||_{tv} \leq 2\hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \neq \hat{X}')$$

.

Dokaz. Uzmimo $A \in \mathcal{E}$ i računajmo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A) &- \mathbb{P}'(X' \in A) = \hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \in A) - \hat{\mathbb{P}}(\hat{X}' \in A) \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \in A, \hat{X} = \hat{X}') + \hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \in A, \hat{X} \neq \hat{X}') \\
&\quad -\hat{\mathbb{P}}(\hat{X}' \in A, \hat{X} = \hat{X}') - \hat{\mathbb{P}}(\hat{X}' \in A, \hat{X} \neq \hat{X}') \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \in A, \hat{X} \neq \hat{X}') - \hat{\mathbb{P}}(\hat{X}' \in A, \hat{X} \neq \hat{X}') \\
&\leq \hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \in A, \hat{X} \neq \hat{X}').
\end{aligned}$$

Nadalje, prema (1.1)

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{P}_X - \mathbb{P}'_{X'}\|_{tv} &= 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} [\mathbb{P}_X(A) - \mathbb{P}'_{X'}(A)] \\
&= 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} [\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}^{'}(X^{'} \in A)] \\
&\leq 2 \sup_{A \in \mathbb{E}} \hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \in A, \hat{X} \neq \hat{X}^{'}) \\
&= 2\hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \neq \hat{X}^{'}).
\end{aligned}$$

□

Definicija 2.2.2. *Neka su $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ i $X' = (X'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dva niza slučajnih varijabli koji poprimaju vrijednosti u $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}_0})$ i neka je $(\hat{X}, \hat{X}')$ sparivanje od X i X'. Definiramo vrijeme sparivanja od $\hat{X}$ i $\hat{X}'$ s*

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \hat{X}_m = \hat{X}'_m \text{ za sve } m \geq n\}.$$

To je zapravo prvo vrijeme od kojeg se dva niza podudaraju.

Teorem 2.2.3. *Za dva niza slučajnih varijabli $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ i $X' = (X'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ koja poprimaju vrijednosti u $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}_0})$, neka je $(\hat{X}, \hat{X}')$ njihovo sparivanje i neka je T vrijeme sparivanja. Tada vrijedi:*

$$\|\mathbb{P}(X_n \in \cdot) - \mathbb{P}'(X'_n \in \cdot)\|_{tv} \leq 2\hat{\mathbb{P}}(T > n).$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz Teorema 2.2.1, jer je $\{\hat{X}_n \neq \hat{X}'_n\} \subseteq \{T > n\}$. □

Definicija 2.2.4. *Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo operator lijevog pomaka $\theta^n : E^{\mathbb{N}_0} \to E^{\mathbb{N}_0}$ kao*

$$\theta^n(x_0, x_1, ...) = (x_n, x_{n+1}, ...).$$

Teorem 2.2.5. *Za dva niza slučajnih varijabli $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $X' = (X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ koja poprimaju vrijednosti u $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}_0})$, neka je $(\hat{X}, \hat{X}')$ njihovo sparivanje i neka je T vrijeme sparivanja. Tada vrijedi*

$$||\mathbb{P}(\theta^n X \in \cdot) - \mathbb{P}'(\theta^n X' \in \cdot)||_{tv} \leq 2\hat{\mathbb{P}}(T > n).$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz Teorema 2.2.1, jer je $\{\hat{X}_m \neq \hat{X}'_m$ za neke $m \geq n\} \subseteq \{T > n\}$. □

Budući da se varijacijska norma nikad ne povećava za neko preslikavanje vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.2.6. *Neka je ψ izmjerivo preslikavanje s $(E, \mathcal{E})$ na $(E^*, \mathcal{E}^*)$ i neka je $\mathbb{Q}_X = \mathbb{P}_X \circ \psi^{-1}$ i $\mathbb{Q}'_{X'} = \mathbb{P}'_{X'} \circ \psi^{-1}$. Tada vrijedi*

$$||\mathbb{Q}_X - \mathbb{Q}'_{X'}||_{tv} \leq ||\mathbb{P}_X - \mathbb{P}'_{X'}||_{tv} \leq 2\hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \neq \hat{X}').$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} ||\mathbb{Q}_X - \mathbb{Q}'_{X'}||_{tv} &= 2\sup_{B\in\mathcal{E}^*}[\mathbb{Q}(B) - \mathbb{Q}'(B)] \\ &= 2\sup_{B\in\mathcal{E}^*}[\mathbb{P}(\psi(X) \in B) - \mathbb{P}'(\psi(X') \in B)] \\ &= 2\sup_{B\in\mathcal{E}^*}[\mathbb{P}(X \in \psi^{-1}(B)) - \mathbb{P}'(X' \in \psi^{-1}(B)] \end{aligned}$$

Označimo sad sa $A = \psi^{-1}(B)$. Imamo

$$\begin{aligned} ||\mathbb{Q}_X - \mathbb{Q}'_{X'}||_{tv} &= 2\sup_{B\in\mathcal{E}^*}[\mathbb{P}(X \in \psi^{-1}(B)) - \mathbb{P}'(X' \in \psi^{-1}(B)] \\ &\leq 2\sup_{A\in\mathcal{E}}[\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}^{'}(X' \in A)] = ||\mathbb{P}_X - \mathbb{P}'_{X'}||_{tv} \end{aligned}$$

Nejednakost dolazi iz činjenice da je ψ izmjeriva pa je $\psi^{-1}(\mathcal{E}^*) \subseteq \mathcal{E}$. □

2.3 Brzina konvergencije

Pretpostavimo da imamo neku kontrolu nad vremenom sparivanja T , tj. da postoji neopadajuća funkcija $\phi : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty\rangle$ takva da je

$$\lim_{n\to\infty} \phi(n) = \infty \text{ i } \hat{\mathbb{E}}(\phi(T)) < \infty. \tag{2.1}$$

Tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.3.1. *Neka su X i X' dvije slučajne varijable i ϕ funkcija koja zadovoljava (2.1). Tada vrijedi*

$$\|\mathbb{P}(\theta^n X \in \cdot) - \mathbb{P}'(\theta^n X' \in \cdot)\|_{tv} = o(\tfrac{1}{\phi(n)}) \text{ kada } n \to \infty.$$

Dokaz. Vidimo da je

$$\phi(n)\hat{\mathbb{P}}(T > n) \leq \hat{\mathbb{E}}(\phi(T)1_{\{T>n\}}).$$

Primijetimo da desna strana teži k nuli kad $n \to \infty$ po teoremu o dominiranoj konvergenciji zbog $\hat{\mathbb{E}}(\phi(T)) < \infty$. □

2.4 Sparivanje po distribuciji

Pretpostavimo da sparivanje $(\hat{X}, \hat{X}')$ dva slučajna niza $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $X' = (X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dolaze sa dva slučajna vremena T i T' takvima da ne vrijedi samo

$$\hat{X} \overset{\mathrm{d}}{=} X, \quad \hat{X}' \overset{\mathrm{d}}{=} X'$$

već i

$$(\theta^T \hat{X}, T) \overset{\mathrm{d}}{=} (\theta^{T'} \hat{X}', T').$$

Ovdje promatramo dva niza pomaknuta za različita slučajna vremena, a ne za isto slučajno vrijeme.

Teorem 2.4.1. *Vrijedi*

$$\|\mathbb{P}(\theta^n X \in \cdot) - \mathbb{P}'(\theta^n X' \in \cdot)\|_{tv} \leq 2\hat{\mathbb{P}}(T > n) = 2\hat{\mathbb{P}}(T' > n)$$

Dokaz. Za svaki $A \in \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}_0}$ promatramo

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}(\theta^n \hat{X} \in A, T \leq n) &= \sum_{m=0}^{n} \hat{\mathbb{P}}(\theta^{n-m}(\theta^m \hat{X}) \in A, T = m) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \hat{\mathbb{P}}(\theta^{n-m}(\theta^m \hat{X}') \in A, T' = m) \\
&= \hat{\mathbb{P}}(\theta^n \hat{X}' \in A, T' \leq n).
\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}(\theta^n \hat{X} \in A) - \hat{\mathbb{P}}(\theta^n \hat{X}' \in A) &= \hat{\mathbb{P}}(\theta^n \hat{X} \in A, T > n) - \hat{\mathbb{P}}(\theta^n \hat{X}' \in A, T' > n) \\
&\leq \hat{\mathbb{P}}(T > n) + \hat{\mathbb{P}}(T' > n) = 2\hat{\mathbb{P}}(T > n)
\end{aligned}$$

i konačno

$$\begin{aligned}||\mathbb{P}(\theta^n X \in \cdot) - \mathbb{P}'(\theta^n X' \in \cdot)||_{tv} &= 2 \sup_{A \in \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}_0}} [\mathbb{P}(\theta^n X \in A) - \mathbb{P}'(\theta^n X' \in A)] \\ &= 2 \sup_{A \in \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}_0}} [\hat{\mathbb{P}}(\theta^n \hat{X} \in A) - \hat{\mathbb{P}}(\theta^n \hat{X}' \in A)] \\ &\leq 2\hat{\mathbb{P}}(T > n).\end{aligned}$$

□

2.5 Maksimalno sparivanje

Teorem 2.5.1. *Za svake dvije vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ na izmjerivom prostoru $(E, \mathcal{E})$ postoji sparivanje $\hat{\mathbb{P}}$ takvo da vrijedi:*
(i) $||\mathbb{P} - \mathbb{P}'||_{tv} = 2\hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \neq \hat{X}')$
(ii) $\hat{X}$ i $\hat{X}'$ su nezavisne uvjetno na događaj $\{\hat{X} \neq \hat{X}'\}$ ako taj događaj dolazi s pozitivnom vjerojatnošću.

Dokaz. Neka je $\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ dijagonala od $E \times E$ i neka je $\psi : E \to E \times E$ preslikavanje definirano sa $\psi(x) = (x, x)$. Označimo sa

$$\lambda = \mathbb{P} + \mathbb{P}', \quad g = \frac{d\mathbb{P}}{d\lambda}, \quad g' = \frac{d\mathbb{P}'}{d\lambda}.$$

Primijetimo da su g i g' dobro definirane jer su $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ apsolutno neprekidne. Nadalje definiramo $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}'$ sa

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\lambda} = \min\{g, g'\}, \quad \hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \circ \psi^{-1}.$$

Sada je Δ nosač od $\hat{\mathbb{Q}}$. Označimo $\gamma = \hat{\mathbb{Q}}(\Delta)$ te

$$\upsilon = \mathbb{P} - \mathbb{Q}, \quad \upsilon' = \mathbb{P}' - \mathbb{Q}, \quad \hat{\mathbb{P}} = \frac{\upsilon \otimes \upsilon'}{1 - \gamma} + \hat{\mathbb{Q}}.$$

Tada vrijedi

$$\hat{\mathbb{P}}(A \times E) = \frac{\upsilon(A)\upsilon'(E)}{1 - \gamma} + \hat{\mathbb{Q}}(A \times E) = \mathbb{P}(A)$$

jer je $\upsilon(A) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A), \upsilon'(E) = \mathbb{P}'(E) - \mathbb{Q}(E) = 1 - \gamma$ i $\hat{\mathbb{Q}}(A \times E) = \mathbb{Q}(A)$. Slično $\hat{\mathbb{P}}(E \times A) = \mathbb{P}'(A)$. Vidimo da imamo valjano sparivanje. Kako bismo dobili (i) računamo, uz pomoć Radon-Nikodym teorema

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P} - \mathbb{P}'\|_{tv} &= \int_E |g - g'| d\lambda = \int_E (g + g' - 2\min\{g, g'\}) d\lambda \\ &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}'(E) - 2\int_E \min\}g, g'\} d\lambda \\ &= 2[1 - \int_E \min\{g, g'\} d\lambda] = 2[1 - \mathbb{Q}(E)] \\ &= 2(1 - \gamma) = 2\hat{\mathbb{P}}(\Delta^c) = 2\hat{\mathbb{P}}(\hat{X} \neq \hat{X}') \end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi iz činjenice da je $\min\{g, g'\} = \frac{g+g'}{2} - \frac{|g-g'|}{2}$.
(ii) izvodimo iz

$$\hat{\mathbb{P}}(\cdot|\hat{X} \neq \hat{X}') = \hat{\mathbb{P}}(\cdot|\Delta^c) = (\frac{\upsilon}{1-\gamma} \otimes \frac{\upsilon'}{1-\gamma})(\cdot).$$

□

Ono što ovaj teorem zapravo govori je da ako smo dovoljno kreativni, možemo naći sparivanje koje daje točnu vrijednost norme totalne varijacije. Ipak, u praksi je to teško egzaktno naći pa se moramo zadovoljiti nekim dobrim procjenama.

Poglavlje 3

Primjene metode sparivanja

3.1 Markovljevi lanci

U ovom poglavlju pretpostavit ćemo da je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ireducubilan i aperiodičan Markovljev lanac na prebrojivom skupu stanja S s početnom distribucijom $\lambda = (\lambda_i)_{i\in S}$ i prijelaznom matricom $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$.
Razvit ćemo posebnu teoriju za pozitivno povratne, nul povratne i prolazne Markovljeve lance.

3.1.1 Pozitivno povratni Markovljevi lanci

U ovom slučaju postoji jedinstvena stacionarna distribucija π, koja je rješenje jednadžbe $\pi = \pi P$ te zadovoljava $\pi > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \lambda P^n = \pi$. Sada istražujemo brzinu konvergencije.
Za $i \in S$ neka su:

$$T_i = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\},$$
$$m_i = E_i(T_i) = E(T_i | X_0 = i)$$

Uočimo da si i T_i i m_i konačni jer je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ po pretpostavci pozitivno povratan. Jedan od rezultata teorije Markovljevih lanaca je da vrijedi $\pi_i = \dfrac{1}{m_i}$.
Mi želimo usporediti dvije kopije Markovljevih lanca koje počinju s različitim početnim distribucijama $\lambda = (\lambda_i)_{i\in S}$ i $\mu = (\mu_i)_{i\in S}$. Označit ćemo ih sa $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $X' = (X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Neka je

$$T^* = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = X'_n\}$$

vrijeme prvog njihovog susreta. Tada Teorem 2.2.3 daje

$$\|\lambda P^n - \mu P^n\|_{tv} \leq 2\hat{P}_{\lambda,\mu}(T^* > n),$$

gdje $\hat{P}_{\lambda,\mu}$ označava bilo koju vjerojatnosnu mjeru koja je sparivanje od X i X'. Mi ćemo uzeti nezavisno sparivanje $\hat{P}_{\lambda,\mu} = P_\lambda \otimes P_\mu$ i umjesto na T^* koncentrirat ćemo se na

$$T = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = X'_n = 0\},$$

njihovo prvo vrijeme susreta u nuli (gdje nula može predstavljati bilo koje odabrano stanje iz S). Budući da je $T \geq T^*$ imamo

$$\|\lambda P^n - \mu P^n\|_{tv} \leq 2\hat{P}_{\lambda,\mu}(T > n). \tag{3.1}$$

Ključna činjenica koju ćemo koristiti je sljedeća:

Teorem 3.1.1. *Ako je Markovljev lanac X pozitivno povratan, tada za sve početne distribucije λ i μ vrijedi*

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(T < \infty) = 1.$$

Dokaz. Promotrimo procese obnavljanja pridružene Markovljevim lancima X i X' kao u Primjeru 1.4.5 i neka su V i V' pripadni procesi vremena obnavljanja. Definirajmo

$$\hat{V} = (\hat{V}_n)_{n\geq 0} \quad sa \quad \hat{V}_n = V_n V'_n, \quad n \geq 0.$$

Uočimo da je $\hat{X} = (X, X')$ Markovljev lanac u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}$ pa je $\hat{V}$ proces vremena obnavljanja pridružen Markovljevom lancu $\hat{X}$ kao u Primjeru 1.4.5.
Neka je

$$I = \{\hat{V}_n = 1 \text{ za beskonačno mnogo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Sada po Teoremu 1.2.10 dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(I) = 1.$$

Uzmimo prvo da je $\lambda = \mu = \pi$. Tada zbog stacionarnosti imamo

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}_{\pi,\pi}(\hat{V}_n = 1) &= \mathbb{P}_\pi(V_n = 1)\mathbb{P}_\pi(V'_n = 1) \\
&= \mathbb{P}_\pi(X_n = 0)\mathbb{P}_\pi(X'_n = 0) \\
&= \mathbb{P}_\pi(X_0 = 0)\mathbb{P}_\pi(X'_0 = 0) \\
&= \pi_0^2 > 0
\end{aligned}$$

pa iz Napomene 1.4.4 slijedi da razdioba pripadnog procesa obnavljanja nije degenerirana i vrijedi

$$\hat{\mathbb{P}}_{00}(I) = 1.$$

Sada koristeći aperiodičnost iz Leme 1.2.21 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $m \geq 0$ vrijedi

$$\hat{\mathbb{P}}_{00}((V_{n_0}, V'_{n_0+m}) = (1,1)) = \hat{\mathbb{P}}_{00}(X_{n_0} = 0, X'_{n_0+m} = 0) > 0.$$

Imamo, iz formule potpune vjerojatnosti

$$\begin{aligned} 1 = \hat{\mathbb{P}}_{00}(I) &= \hat{\mathbb{P}}_{00}(I|(V_{n_0}, V'_{n_0+m} = (1,1))\hat{\mathbb{P}}(V_{n_0}, V'_{n_0+m} = (1,1)) \\ &+ \hat{\mathbb{P}}_{00}(I|(V_{n_0}, V'_{n_0+m} \neq (1,1))\hat{\mathbb{P}}(V_{n_0}, V'_{n_0+m} \neq (1,1)). \end{aligned}$$

Budući da ako vrijedi $1 = xz + y(1-z)$ za $x, y, z \in \langle 0, 1]$ znamo da je $x = 1$ slijedi

$$\hat{\mathbb{P}}_{00}(I|(V_{n_0}, V'_{n_0+m}) = (1,1)) = 1,$$

tj., zbog Markovljevog svojstva

$$\hat{\mathbb{P}}_{0,m}(I) = 1.$$

Dakle, zbog Markovljevog svojstva imamo

$$\hat{\mathbb{P}}_{i,j}(I) = \hat{\mathbb{P}}_{0,|j-i|}(i)$$

pa je

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(I) = \sum_{i,j \geq 0} \hat{\mathbb{P}}_{i,j}(I)\lambda_i \mu_j = \sum_{i,j \geq 0} \lambda_i \mu_j = 1.$$

□

Teorem 3.1.1 zajedno sa (3.1) daje

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda P^n - \mu P^n\|_{tv} = 0,$$

gdje stavljanjem $\mu = \pi$ dobivamo Teorem o konvergenciji Markovljevih lanaca.

Pogledajmo sada kako brzina konvergencije ovisi o kardinalnom broju skupa S.
Ako je $|S| < \infty$ tada je brzina konvergencije eksponencijalna. Zaista uzmimo k dovoljno velik da vrijedi

$$\min_{i,j \in S} (P^k)_{ij} \stackrel{def}{=} \rho > 0,$$

što je moguće zbog aperiodičnosti i ireducibilnosti.
Pokažimo sada indukcijom po n da vrijedi

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(T^* > nk) \leq (1-\rho)^n \quad \forall \lambda, \mu, n$$

Baza indukcije
$n = 1$

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(T^* > k) \leq 1-\rho \quad \forall \lambda, \mu$$

Pretpostavka indukcije
Pretpostavimo da

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(T^* > nk) \leq (1-\rho)^n \quad \forall \lambda, \mu$$

vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Korak indukcije

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(T^* > (n+1)k) = \hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X_m \neq X'_m, m = 0, 1, 2..., (n+1)k)$$

$$= \sum_{i,j\in S, i\neq j} \hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X_m \neq X'_m, m = nk+1, ..., (n+1)k | X_{nk} = i, X'_{nk} = j, X_m \neq X'_m, m = 0, 1, ..., nk-1)$$
$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X_{nk} = i, X'_{nk} = j, X_m \neq X'_m, m = 0, 1, ..., nk-1)$$
$$= \sum_{i,j\in S\, i\neq j} \hat{\mathbb{P}}_{ij}(X_m \neq X'_m, m = 1, ..., k)\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X_m \neq X'_m, m = 0, ..., nk)$$
$$= \sum_{i,j\in S, i\neq j} \hat{\mathbb{P}}_{ij}(X_m \neq X'_m, m = 1, ..., k)\hat{\mathbb{P}}(T^* > nk)$$
$$\leq (1-\rho)(1-\rho)^n = (1-\rho)^{n+1}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Odavde slijedi

$$\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(T^* > n) \leq \hat{\mathbb{P}}(T^* > \lfloor \tfrac{n}{k} \rfloor k) \leq (1-\rho)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$$

Sada koristeći Teorem 2.2.3 dobivamo

$$\|\lambda P^n - \mu P^n\|_{tv} \leq 2(1-\rho)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} = e^{-cn+O(n)},$$

gdje $c = \dfrac{1}{k} \ln\left[\dfrac{1}{1-\rho}\right] > 0$

Moguće je proučavati i slučaj kada $|S| = \infty$. Tada je brzina konvergencije nekad eksonencijalna, nekad polimonijalna. Uz pomoć Teorema 2.3.1 moguće je procijeniti brzinu kada na neki način kontroliramo T ili T^*. To najčešće zahtjeva neke dodatne strukture.

3.1.2 Nul-povratni Markovljevi lanci

Nul povratni Markovljevi lanci nemaju stacionarnu distribuciju, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \lambda P^n = 0.$$

Zanima nas da li je još uvijek

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda P^n - \mu P^n\|_{tv} = 0 \text{ za svaki } \lambda \text{ i } \mu? \tag{3.2}$$

Dovoljno je pokazati da postoji sparivanje $\hat{P}_{\lambda,\mu}$ takvo da $\hat{P}_{\lambda,\mu}(T < \infty) = 1$. Uočimo da ne možemo samo preslikati dokaz Torema 3.1.1. jer se on oslanja na činjenicu da je $\pi_0 > 0$. Zapravo dovoljno je pokazati da postoji sparivanje $\hat{P}_{\lambda,\mu}$ takvo da je $\hat{P}_{\lambda,\mu}(T^* < \infty) = 1$, što se čini lakšim jer se dvije kopije Markovljevog lanca samo moraju sresti negdje, ne nužno u nuli.

Teorem 3.1.2. *Ako je Markovljev lanac nul-povratan tada za svaki λ i μ vrijedi*

$$\hat{P}_{\lambda,\mu}(T^* < \infty) = 1.$$

Dokaz ovog teorema nećemo provoditi, ali ćemo kao zamjenu dokazati (3.2) ali u Cesarovom smislu, tj. činjenicu da ako je X povratan onda je

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \lambda P^n - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mu P^n \right\|_{tv} = 0 \quad \text{za sve } \lambda, \mu.$$

Dokaz koristi pomično sparivanje, tj. sparivanje sa slučajnim vremenom pomaka.

Dokaz. Neka su X i X' dvije nezavisne kopije Markovljevog lanca sa početnim distribucijama λ i μ i neka su τ_0 i τ_0' prva vremena pogađanja stanja 0. Sparujemo X i X' na način da pustimo puteve da im podudaraju nakon τ_0, tj. τ_0'. Imamo

$$X_{k+\tau_0} = X'_{k+\tau_0'} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Fiksirajmo bilo koji događaj A i $m, m' \in \mathbb{N}_0$. Promatramo događaj $K = \{(\tau_0, \tau_0') = (m, m')\}$.

Uvjetovanjem na njega imamo

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(\lambda P^n)(A) - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(\mu P^n)(A)\right| \\
= \quad & \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X_n \in A) - \sum_{n=0}^{N-1}\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X'_n \in A)\right| \\
= \quad & \frac{1}{N}\sum_{m,m'\in\mathbb{N}_0}\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(K)\times\left|\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X_n \in A|K) - \sum_{n=0}^{N-1}\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X'_n \in A|K)\right| \\
\leq \quad & \hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(\max\{\tau_0,\tau'_0\} \geq M) + \frac{1}{N}\sum_{m,m'\in\mathbb{N}_0,\max\{m,m'\}<M}\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(K) \\
& \times\left[(m+m') + |m-m'| + \left|\sum_{k=0}^{\min\{N-m-1,N-m'-1\}}\left(\hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X_{m+k} \in A|K) - \hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(X'_{m'+k} \in A|K)\right)\right|\right] \\
\leq \quad & \hat{\mathbb{P}}_{\lambda,\mu}(\max\{\tau_0,\tau'_0\} \geq M) + \frac{2}{N}\mathbb{E}(\max\{\tau_0,\tau'_0\}1_{\{\max\{\tau_0,\tau'_0\}<M\}})
\end{aligned}
$$

gdje u prvoj nejednakosti uzimamo $M \leq N$ i primjećujemo da je $m + m' + |m + m'| = 2\max\{m, m'\}$ broj sumanada koje gubimo kada pustimo da suma počne u $n = m$ tj. $n = m'$, pomičući ih za m, tj. m' i na kraju režući ih u $\min\{N - m - 1, N - m' - 1\}$. Posljednja suma poslije prve nejednakosti je nula po sparivanju i tako dobivamo drugu nejednakost.
Budući da je veza uniformna na A, tvrdnju dobivamo uzimajući supremum po A i puštanjem $N \to \infty$ i zatim $M \to \infty$. □

3.1.3 Prolazni Markovljevi lanci

Za prolazne Markovljeve lance nema općenitog rezultata. Za njih uvijek vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\lambda P^n = 0,$$

ali

$$\lim_{n\to\infty}\|\lambda P^n - \mu P^n\|_{tv} = 0 \text{ za svaki } \lambda \text{ i } \mu$$

nekada može vrijediti, nekada ne mora. Kao primjere uzmimo prvo slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$. Za nju navedena jednakost vrijedi (detalji u Poglavlju 3.2). Nadalje za sljedeći Markovljev lanac ona ne vrijedi. Uzmimo da je $S = \mathbb{Z}$ i da su vjerojatnosti prelaska zadane ovako

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{i+1} = 1|X_i = 0) = \mathbb{P}(X_{i+1} = 0|X_i = 0) = \mathbb{P}(X_{i+1} = -1|X_i = 0) &= \frac{1}{3} \\
\mathbb{P}(X_{i+1} = j+1|X_i = j) &= \frac{2}{3} \quad \text{za } j \in S, j > 0 \\
\mathbb{P}(X_{i+1} = j-1|X_i = j) &= \frac{1}{3} \quad \text{za } j \in S, j > 0 \\
\mathbb{P}(X_{i+1} = j+1|X_i = j) &= \frac{1}{3} \quad \text{za } j \in S, j < 0 \\
\mathbb{P}(X_{i+1} = j-1|X_i = j) &= \frac{2}{3} \quad \text{za } j \in S, j < 0
\end{aligned}$$

Ovaj Markovljev lanac je ireducibilan i aperiodičan s $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}_x(\tau_0 = \infty) = \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}_x(\tau_0 = \infty) = 1$. Slijedi da je

$$\lim_{x\to\infty} \liminf_{n\to\infty} ||\delta_x P^n - \delta_{-x} P^n||_{tv} = \lim_{x\to\infty} \liminf_{n\to\infty} 2 \sup_{A\in\mathbb{Z}} (\delta_x(A) P^n(A) - \delta_{-x}(A) P^n(A)) = 2$$

jer se taj supremum postiže za skup $A = \mathbb{N}$.

3.2 Slučajne šetnje

Slučajne šetnje su samo specijalni slučajevi Markovljevih lanaca, ali njih možemo veoma detaljno analizirati.

3.2.1 Jednodimenzionalne slučajne šetnje

Neka je $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ koja kreće iz 0.

Teorem 3.2.1. *Za svaki paran $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathbb{P}(S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n + k \in \cdot)||_{tv} = 0.$$

Dokaz. Označimo sa S' nezavisnu kopiju od S koja počinje u $S'_0 = k$. Stavimo da je $\hat{\mathbb{P}}$ zajednička vjerojatnosna distribucija od (S, S') i

$$T = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = S'_n\}.$$

Tada

$$||\mathbb{P}(S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n + k \in \cdot)||_{tv} = ||\mathbb{P}(S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S'_n \in \cdot)||_{tv} \leq 2\hat{\mathbb{P}}(T > n).$$

Sada, $\tilde{S}$ definirana sa $\tilde{S}_n = S'_n - S_n$ je slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ koja počinje u $\tilde{S}_0 = k$ i sa nezavisnim jednako distribuiranim koracima $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takvima da

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}_i = -2) = \mathbb{P}(\tilde{Y}_i = 2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(\tilde{Y}_i = 0) = \frac{1}{2}.$$

Ovo je jednostavna slučajna šetnja na $2\mathbb{Z}$ i "skače" samo pola vremena. Iz Chung-Fuchsovog teorema slijedi da je povratna. Iz činjenice da

$$T = \tilde{\tau}_0 = \{n \in \mathbb{N}_0 : \tilde{S}_n = 0\}$$

i povratnosti od $\tilde{S}$ slijedi $\hat{\mathbb{P}}(T < \infty) = 1$. Tvrdnju dobivamo puštanjem $n \to \infty$. □

Rezultat teorema se ne može poopćiti na neparne $k-$ove. Zapravo, jer jednostavna slučajna šetnja ima period 2 slijedi

$$\|\mathbb{P}(S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n + k \in \cdot)\|_{tv} = \sup_{A\in\mathbb{Z}}(\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(S_n + k \in A)) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z} \text{ neparan.}$$

jer se taj supremum postiže za $A = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$.

Sada je pitanje da li rezultat Teorema 3.2.1 vrijedi za slučajne šetnje koje nisu jednostave? Odgovor je da, što nam pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 3.2.2. *Neka je $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ sa nezavisnim jednako distribuiranim koracima $Y = (Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ koji zadovoljavaju sljedeći uvjet*

$$nzd\{z' - z : z, z' \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(Y_1 = z)\mathbb{P}(Y_1 = z') > 0\} = 1. \tag{3.3}$$

Tada za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{P}(S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n + k \in \cdot)\|_{tv} = 0.$$

Dokaz. Pokušat ćemo napraviti isto sparivanje kao u dokazu Teorema 3.2.1. Neka je $\hat{\mathbb{P}}$ zajednička vjerojatnosna distribucija od (S, S'). Stavljamo $\tilde{S}_n = S'_n - S_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Sada je $\tilde{S} = (\tilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ slučajna šetnja koja počinje u $\tilde{S}_0 = k$ čiji su nezavisni jednako distribuirani koraci dani sa

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}_1 = \tilde{z}) = \sum_{z,z'\in\mathbb{Z}, z'-z=\tilde{z}} \mathbb{P}(Y_1 = z)\mathbb{P}(Y_1 = z'), \quad \tilde{z} \in \mathbb{Z}.$$

Uočimo da uvjet (3.2) napisan pomoću $\tilde{Y}$ glasi

$$nzd\{\tilde{z} \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(\tilde{Y}_1 = \tilde{z}) > 0\} = 1,$$

tako da je $\tilde{S}$ aperiodična i po Chung-Fuchsovom teoremu povratna slučajna šetnja tj.

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tau} < \infty) = 1.$$

Ipak povratnost može nekada ne vrijediti. Iako je $\tilde{S}$ simetrična slučajna šetnja (jer je $\mathbb{P}(\tilde{Y}_1 = \tilde{z}) = \mathbb{P}(\tilde{Y}_1 = -\tilde{z}), \tilde{z} \in \mathbb{Z}$), distribucija od $\tilde{Y}_1$ može imati težak rep što može rezultirati sa $\mathbb{E}(|\tilde{Y}_1|) = \infty$, u kojem slučaju $\tilde{S}$ nije nužno povratna.
Nedostatak povratnosti može se prevladati malom prilagodbom sparivanja. Naime, umjesto da pustimo kopije slučajnih šetnji S i S' da rade nezavisne korake, pustimo ih da rade nezavisno male korake, ali zavisno velike korake. Formalno, pustimo Y_i'' da bude nezavisna kopija od Y_i, i definiramo Y' na način

$$Y_i' = \begin{cases} Y_i'', & |Y_i - Y_i''| \leq N, \\ Y_i, & |Y_i - Y_i''| > N. \end{cases} \tag{3.4}$$

Zapravo S' kopira korake od S'' kada se oni razlikuju od koraka od S za najviše N, inače kopira korake od S. N ćemo kasnije uzeti da bude dovoljno velik.
Sada prvo provjerimo da je S' kopija od S. Tome je tako, jer za svaki $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1' = z) &= \hat{\mathbb{P}}(Y_1' = z, |Y_1 - Y_1''| \leq N) + \hat{\mathbb{P}}(Y_1' = z, |Y_1 - Y_1''| > N) \\ &= \hat{\mathbb{P}}(Y_1'' = z, |Y_1 - Y_1''| \leq N) + \hat{\mathbb{P}}(Y_1 = z, |Y_1 - Y_1''| > N) \end{aligned}$$

gdje je prvi izraz na desnoj stani jednak $\hat{\mathbb{P}}(Y_1 = z, |Y_1 - Y_1''| \leq N)$ po simetričnosti (koristimo da su Y i Y'' nezavisne) i dobivamo $\mathbb{P}(Y_1' = z) = P(Y_1 = z)$.
Nadalje, slučajna šetnja $\tilde{S} = S - S'$ ima korake

$$\tilde{Y}_i = Y_i' - Y_i = \begin{cases} Y_i'' - Y_i, & |Y_i - Y_i''| \leq N, \\ 0, & |Y_i - Y_i''| > N. \end{cases}$$

tj. koraci veći od N ne mogu se dogoditi. Imamo $\mathbb{P}(\tilde{Y}_1 \neq 0) = \mathbb{P}(|Y_i - Y_i''| \leq N) > 0$ za dovoljno veliki N.
Znači, $\tilde{S}$ je aperiodična simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ sa ograničenom veličinom koraka. Posljedica toga je da je $\tilde{S}$ povratna i zato imamo $\hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tau}_0 < \infty) = 1$ pa dokaz teorema možemo dovršiti kao i dokaz Teorema 3.2.1. □

Napomena 3.2.3. *Sparivanje u* (3.3) *zove se Ornsteinovo sparivanje.*

3.2.2 Slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^d$

U slučaju kada imamo slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^d$ radimo Ornsteinovo sparivanje po komponentama. Prvo promatramo jednostavnu slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$. Odabiremo smjer 1, naprimjer gledamo x_1 koordinatu slučajnih šetnji S i S' i radimo sparivanje na način da

$$Y_i \in \{-e_1, e_1\} \Longrightarrow Y_i' \in \{-e_1, e_1\}, \text{ nezavisno sa } \mathbb{P}(Y_i' = -e_1) = \mathbb{P}(Y_i' = e_1) = \frac{1}{2}$$
$$Y_i \notin \{-e_1, e_1\} \Longrightarrow Y_i' = Y_i.$$

Tada slučajna šetnja $\tilde{S} = S' - S$ ima korake $\tilde{Y}$ dane sa

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}_i = -2e_i) = \mathbb{P}(\tilde{Y}_i = 2e_i) = \left(\frac{1}{2d}\right)^2, \quad \mathbb{P}(\tilde{Y}_i = 0) = 1 - 2\left(\frac{1}{2d}\right)^2.$$

Počinjemo u $\tilde{S}_0 = \tilde{z} \in \mathbb{Z}^d$ kojem su sve komponente $\tilde{z}^1, \tilde{z}^2, ..., \tilde{z}^d$ parne, i koristeći da je $\tilde{S}$ povratna u smjeru 1 dobivamo da

$$\tau_1 = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \tilde{S}_n^1 = 0\}$$

zadovoljava $\hat{\mathbb{P}}(\tau_1 < \infty) = 1$. U trenutku τ_1 prelazimo na sparivanje u smjeru 2, tj. radimo isto kao u smjeru 1 samo što sada izjednačavamo korake u svim smjerovima različitim od 2 i dopuštamo nezavisne korake samo u smjeru 2. Stavljamo da je

$$\tau_2 = \inf\{n \geq \tau_1 : \tilde{S}_n^2 = 0\}$$

i primjećujemo da je $\hat{\mathbb{P}}(\tau_2 - \tau_1 < \infty) = 1$. Nastavljamo dok postupak ne ponovimo za svih d smjerova. U trenutku

$$\tau_d = \inf\{n \geq \tau_{d-1} : \tilde{S}_n^d = 0\}$$

za koji vrijedi $\hat{\mathbb{P}}(\tau_d - \tau_{d-1} < \infty) = 1$ dvije slučajne šetnje se susreću i sparivanje je gotovo.

Kako bimo dobili isti rezultat kada je $\tilde{z}^1 + \tilde{z}^2 + ... + \tilde{z}^d$ paran radimo sljedeće. Postoji paran broj smjerova i za koje je $\tilde{z}^i$ neparan. Sparimo te smjerove na prozvoljan način, recimo $(i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_l, j_l)$ za neke $1 \leq l \leq d$. Radimo sparivanje po komponentama u smjerovima (i_1, j_1) na način da su skokovi od S u smjeru i_1 nezavisni od skokova od S' u smjeru j_1, dok su skokovi u svim drugim smjerovima jednaki. Čekamo dok $S' - S$ ne postane parna u smjerovima i_1 i j_1 te tada krećemo na smjerove (i_2, j_2). Nastavljamo sve dok sve komponente od $S' - S$ nisu parne. Nakon toga radimo sparivanje kao u prijašnjem slučaju.
Općenita tvrdnja, koju nećemo dokazivati nalazi se u sljedećem teoremu.

Teorem 3.2.4. *Pretpostavimo da nijedna podrešetka od $\mathbb{Z}^d$ ne sadrži $\{z' - z : z, z' \in \mathbb{Z}^d, \mathbb{P}(Y_1 = z)\mathbb{P}(Y_1 = z') > 0\}$. Tada za svaki $z \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{P}(S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n + z \in \cdot)\|_{tv} = 0.$$

3.2.3 Slučajne šetnje i diskretni Laplasijan

Teorem 3.2.4 ima jako zanimljiv korolar. On nam pokazuje kako nam sparivanje uvelike olakšava razne dokaze iz raznih područja matematike.

Korolar 3.2.5. *Svaka ograničena harmonijska funkcija na $\mathbb{Z}^d$ je konstanta.*

Dokaz. Neka je S jednostavna slučajna šetnja koja počinje u nuli. Tada zbog harmoničnosti od f imamo

$$\mathbb{E}(f(S_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(S_n)|S_{n-1})) = \mathbb{E}(f(S_{n-1})),$$

gdje koristimo $\mathbb{E}(f(S_n)|S_{n-1} = x) = f(x)+(\Delta f)(x) = f(x)$. Iteriranjem dobivamo $\mathbb{E}(f(S_n)) = f(0)$. Sada izaberimo bilokoji $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tako da su sve komponente od $x - y$ parne i računajmo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\mathbb{E}(f(S_n + x)) - \mathbb{E}(f(S_n + y))| \\ &= \left|\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}[f(z + x) - f(z + y)]\mathbb{P}(S_n = z)\right| \\ &= \left|\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(z)\,[\mathbb{P}(S_n = z - x) - \mathbb{P}(S_n = z - y)]\right| \\ &\leq M\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}|\mathbb{P}(S_n + x = z) - \mathbb{P}(S_n + y = z)| \\ &= M\|\mathbb{P}(S_n + x \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n + y \in \cdot)\|_{tv} \end{aligned}$$

Gdje je $M = \sup_{z\in\mathbb{Z}^d} |f(z)| < \infty$. Pustimo $n \to \infty$ i z pomoć Teorema 3.2.4 dobivamo $f(x) = f(y)$. Proširimo ovu nejednakost na $x, y \in \mathbb{Z}^d$ sa $\|x-y\|$ je parna radeći sparivanje u sparenim smjerovima, kao u odjeljku 3.2.2-Slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^d$. Na taj način zaključujemo da je f konstanta na parnim i neparnim podrešetkama od $\mathbb{Z}^d$, tj. $f \equiv c_{paran}$ i $f \equiv c_{neparan}$. Sada iz činjenice $c_{neparan} = \mathbb{E}(f(S_1)) = f(0) = c_{paran}$ zaključujemo da je f konstanta. □

3.3 Poissonova aproksimacija

U ovom poglavlju $B(n, p)$ će nam označavati binomnu slučajnu varijablu. Podsjetimo se da za $X \sim B(n, p)$ vrijedi $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}, k = 0, 1...n$. Također nam je poznato da vrijedi $\mathbb{E}(X) = np$ i $Var(X) = np(1 - p)$. Nadalje ćemo označavati $q = 1 - p$. Također za $n = 1$ imamo Bernoullijevu slučajnu varijablu i za to ćemo koristiti oznaku $Ber(p)$. Sada jedan od rezultata teorije vjerojatnosti nam kaže da je za svaki $\lambda \in \langle 0, \infty\rangle$ $B(n, \frac{\lambda}{n})$ blizu Poissonovoj slučajnoj varijabli $P(\lambda)$, kada je n velik. Ako je $X \sim P(\lambda)$ vrijedi

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2\ldots, \mathbb{E}(X) = \lambda$ i $Var(X) = \lambda$. Uvedimo još oznaku $p_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, za $\lambda > 0$ i $k \in \mathbb{N}_0$. U ovom poglavlju mi zapravo želimo vidjeti koliko su binomna i Poissonova slučajna varijabla blizu. U tu svrhu razvit ćemo tzv. Stein-Chenovu metodu.

Pogledajmo prvo jedan primjer.

Primjer 3.3.1. *Neka su Y_i nezavisne jednako distribuirane Bernulijeve slučajne varijable, tj. $Y_i \sim Ber(p_i), i = 1, 2 \ldots, n$ i neka je $X = \sum_{i=1}^n Y_i$. Nadalje neka X' ima Poissonovu distribuciju sa parametrom $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$. Za $k \in \mathbb{N}_0$ imamo*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) - p_\lambda(k) &= \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(X' = k) \\ &= \mathbb{P}(X = k, X = X') + \mathbb{P}(X = k, X \neq X') \\ &\quad -\mathbb{P}(X' = k, X = X') - \mathbb{P}(X' = k, X \neq X') \\ &= \mathbb{P}(X = k, X \neq X') - \mathbb{P}(X' = k, X \neq X') \end{aligned}$$

i stoga

$$\|\mathbb{P}(X \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)\|_{tv} \leq 2\mathbb{P}(X \neq X').$$

Dakle dovoljno je naći sparivanje od X i X' koje ih čini jednakima sa velikom vjerojatnošću. Ako ih izaberemo nezavisno, to neće ići.
Neka su $(Y_i, Y_i'), i = 1, \ldots, n$ nezavisni slučajni vektori s vrijednostima u $\{0, 1\} \times \mathbb{N}_0$ i distribucijom:

$$\mathbb{P}((Y_i, Y_i') = (k, k')) = \begin{cases} 1 - p_i, & k = 0, k' = 0 \\ e^{-p_i} - (1 - p_i), & k = 1, k' = 0 \\ 0, & k = 0, k' \in \mathbb{N} \\ e^{-p_i}\frac{p_i^{k'}}{k'!}, & k = 1, k' \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sumiranjem po k' i k vidimo da je

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = \begin{cases} 1 - p_i, & k = 0 \\ p_i, & k = 1, \end{cases} \qquad \mathbb{P}(Y_i' = k') = e^{-p_i}\frac{p_i^{k'}}{k'!}, \quad k' \in \mathbb{N}_0.$$

Sada računamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \neq X') &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i'\right) \\
&\leq \mathbb{P}(\exists i = 1, ..., n \text{ t.d. } Y_i \neq Y_i') \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \neq Y_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_i' \neq 0) + \mathbb{P}(Y_i = 1, Y_i' \neq 1)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-p_i} - (1 - p_i) + \sum_{k'=2}^{\infty} e^{-p_i} \frac{p_i^{k'}}{k'!} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[e^{-p_i} - 1 + p_i + \sum_{k'=0}^{\infty} e^{-p_i} \frac{p_i^{k'}}{k'!} - e^{-p_i} - p_i e^{-p_i} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[-1 + p_i + e^{-p_i} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{p_i^{k'}}{k'!} - p_i e^{-p_i} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [-1 + p_i + e^{-p_i} e^{p_i} - p_i e^{-p_i}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [-1 + p_i + e^{0} - p_i e^{-p_i}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i (1 - e^{-p_i}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2.
\end{aligned}
$$

Dakle za $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$ dokazali smo da vrijedi

$$
\|\mathbb{P}(X \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)\|_{tv} \leq 2\lambda M \quad \text{pri čemu je} \quad M = \max_{i=1,...,n} p_i.
$$

Vidimo da je aproksimacija dobra kada je M malen. Općenito i M i λ ovise o n. Pokazuje se da je sparivanje konstruirano u ovom primjeru najbolje moguće,tj. da je to maksimalno sparivanje.

Sada ćemo izvesti sličnu ocjenu nešto općenitije. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ i $p_1, p_2, ..., p_n \in [0, 1\rangle$.

Teorem 3.3.2. *Neka su Y_i nezavisne jednako distribuirane Bernulijeve slučajne varijable, tj. $Y_i \sim Ber(p_i), i = 1, ...n$ i neka je $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Tada vrijedi*

$$\|\mathbb{P}(X \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)\|_{tv} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

pri čemu je $\lambda_i = -\ln q_i$ i $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Dokaz. Stavimo $Y_i' \sim P(\lambda_i)$ nezavisne od Y_i i $X' = \sum_{i=1}^{n} Y_i'$. Tada

$$Y_i \sim \min\{Y_i', 1\} \tag{3.5}$$
$$X' \sim P(\lambda), \tag{3.6}$$

gdje (3.4) slijedi iz činjenice da je suma nezavisnih Poissonovih slučanih varijabli s parametrima λ_i opet Poissonova sa parametrom $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Dokažimo sada (3.3).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min\{1, Y_i'\} = 1) &= \mathbb{P}(Y_i' \geq 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y_i' < 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y_i' = 0) \\
&= 1 - e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^0}{0!} \\
&= 1 - e^{-\lambda_i} \\
&= 1 - (1 - p_i) \\
&= p_i = \mathbb{P}(Y_i = 1)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min\{1, Y_i'\} = 0) &= \mathbb{P}(Y_i' = 0) \\
&= e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^0}{0!} \\
&= e^{-\lambda_i} \\
&= 1 - p_i = q_i = \mathbb{P}(Y_i = 0).
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \neq X') = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i'\right) &\leq \mathbb{P}(\exists i = 1, ..., n \text{ t.d. } Y_i \neq Y_i') \\
\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \neq Y_i') = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i' \geq 2).
\end{aligned}$$

Sada pak imamo

$$\mathbb{P}(Y_i' \geq 2) = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!} \leq \frac{1}{2}\lambda_i^2 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^l}{l!} = \frac{1}{2}\lambda_i^2,$$

gdje nejdnakost slijedi iz činjenice da je $k! \geq 2(k-2)!$ za $k \geq 2$. Dakle,budući da je

$$||\mathbb{P}(X \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)||_{tv} = ||\mathbb{P}(X \in \cdot) - \mathbb{P}(X' \in \cdot)||_{tv} \leq 2\mathbb{P}(X \neq X')$$

tvrdnja teorema slijedi. □

Napomena 3.3.3. *Vidimo da je $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq M\lambda$ gdje je $M = \max\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$. Ovaj teorem se najčešće koristi kada je n velik, $p_1, p_2, ..., p_n$ mali i λ reda 1. U tipičnom primjeru je $p_i = \frac{c}{n}$, te onda imamo*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = n\left[-\log\left(1 - \frac{c}{n}\right)\right]^2 \sim \frac{c^2}{n}$$

kada $n \to \infty$.

Napomena 3.3.4. *Primjer 3.3.1 i Teorem 3.3.2 pokazuju slične ocjene za $\lambda_i = p_i$. Kada su p_i dovoljno mali imamo $\lambda_i \sim p_i$.*

Sada ćemo se posvetiti sofisticiranijem načinu postizanja Poissonove aproksimacije koja se zove Stein-Chen metoda. Ona nam omogućava bolju ocjenu, te je moguća i sa zavisnim slučajnim varijablama.
Opet fiksiramo $n \in \mathbb{N}$ i $p_1, p_2, ..., p_n \in [0, 1\rangle$. Nadalje neka su $Y_i \sim Ber(p_i), i = 1, ..., n$. Ipak ne mora vrijediti da su Y_i nezavisne. Neka je

$$W = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

i, za $j = 1, ..., n$ definiramo slučajne varijable U_j i V_j kao

$$U_j \sim W, \quad V_j \sim W - 1|Y_j = 1$$

gdje je $W - 1 = \sum_{i=1, i\neq j}^n Y_i$ kada $Y_j = 1$ i $V_j = 0$ kada $\mathbb{P}(Y_j = 1) = 0$. Jasno je da ako je sa velikom vjerojatnošću $U_j = V_j, j = 1, ..., n$ tada očekujemo da su Y_i' slabo zavisne. U tom slučaju, ako su p_i' mali, tada očekujemo da je moguća dobra aproksimacija Poissonovom slučajnom varijablom.
Kako bismo nastavili bit će nam potrebne sljedeće dvije leme.

Lema 3.3.5. *Ako je $Z \sim P(\lambda)$ za neki $\lambda \in \langle 0, \infty\rangle$ tada za svaku ograničenu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\mathbb{E}(\lambda f(Z+1) - Zf(Z)) = 0.$$

Dokaz. Stavimo $p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ za $k \in \mathbb{N}_0$. Tada

$$\lambda p_\lambda(k) = (k+1)p_\lambda(k+1),$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\lambda f(Z+1)) &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \lambda p_\lambda(k) f(k+1) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} (k+1)p_\lambda(k+1)f(k+1) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{N}} p_\lambda(l) l f(l) \\
&= \mathbb{E}(Zf(Z)).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.6. *Neka su $\lambda \in \langle 0, \infty\rangle$ i $A \subset \mathbb{N}_0$, i neka je $g_{\lambda,A} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ rješenje rekurzivne relacije*

$$\begin{aligned}
&\lambda g_{\lambda,A}(k+1) - k g_{\lambda,A}(k) = 1_A(k) - p_\lambda(A), \quad k \in \mathbb{N}_0, \\
&g_{\lambda,A}(0) = 0. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Tada, uniformno na A, vrijedi

$$\|\Delta g_{\lambda,A}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} |g_{\lambda,A}(k+1) - g_{\lambda,A}(k)| \le \min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\}.$$

Dokaz. Neka je za $k \in \mathbb{N}_0$ $U_k = \{0, 1, ...k\}$. Tada je rješenje jednadžbe (3.6) dano sa

$$\begin{aligned}
&g_{\lambda,A}(0) = 0 \\
&g_{\lambda,A}(k+1) = \frac{1}{\lambda p_\lambda(k)}[p_\lambda(A \cap U_k) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_k)], \quad k \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Provjerimo to indukcijom.
Baza indukcije
$k = 0$

$$g_{\lambda,A}(1) = \frac{1}{\lambda p_\lambda(0)}[p_\lambda(A \cap \{0\}) - p_\lambda(A)p_\lambda(0)]$$

1. slučaj: $0 \notin A$

$$g_{\lambda,A}(1) = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda}}[-p_\lambda(A)e^{-\lambda}]$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$\lambda g_{\lambda,A}(1) = -p_\lambda(A)$$
$$\lambda \frac{1}{\lambda}[-p_\lambda(A)] = -p_\lambda(A)$$

2. slučaj: $0 \in A$

$$g_{\lambda,A}(1) = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda}}[e^{-\lambda}(1 - p_\lambda(A))]$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$\lambda \frac{1}{\lambda}[(1 - p_\lambda(A))] = 1 - p_\lambda(A)$$

<u>Pretpostavka indukcije</u>
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}_0$.

$$g_{\lambda,A}(0) = 0$$
$$g_{\lambda,A}(k+1) = \frac{1}{\lambda p_\lambda(k)}[p_\lambda(A \cap U_k) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_k)]$$

<u>Korak indukcije</u>
Provjeravamo tvrdnju za $k + 1$.

$$g_{\lambda,A}(k+2) = \frac{1}{\lambda p_\lambda(k+1)}[p_\lambda(A \cap U_{k+1}) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_{k+1})]$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo
1. slučaj: $k + 1 \notin A$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{p_\lambda(k+1)}[p_\lambda(A \cap U_{k+1}) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_{k+1})] - \tfrac{k+1}{\lambda p_\lambda(k)}[p_\lambda(A \cap U_k) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_k)] &= -p_\lambda(A) \\
\tfrac{1}{p_\lambda(k+1)}[p_\lambda(A \cap U_k) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_{k+1})] - \tfrac{1}{p_\lambda(k+1)}[p_\lambda(A \cap U_k) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_k)] &= -p_\lambda(A) \\
\tfrac{-p_\lambda(A)}{p_\lambda(k+1)}[p_\lambda(U_{k+1}) - p_\lambda(U_k)] &= -p_\lambda(A) \\
\tfrac{-p_\lambda(A)}{p_\lambda(k+1)}p_\lambda(k+1) &= -p_\lambda(A)
\end{aligned}$$

2. slučaj: $k+1 \in A$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{p_\lambda(k+1)}[p_\lambda(A\cap U_{k+1}) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_{k+1})] - \tfrac{k+1}{\lambda p_\lambda(k)}[p_\lambda(A\cap U_k) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_k)] &= 1 - p_\lambda(A)\\
\tfrac{1}{p_\lambda(k+1)}[p_\lambda(k+1) - p_\lambda(A)p_\lambda(U_{k+1})] - \tfrac{1}{p_\lambda(k+1)}[-p_\lambda(A)p_\lambda(U_k)] &= 1 - p_\lambda(A)\\
1 - \tfrac{p_\lambda(A)}{p_\lambda(k+1)}[p_\lambda(U_{k+1}) - p_\lambda(U_k)] &= 1 - p_\lambda(A)\\
1 - \tfrac{p_\lambda(A)}{p_\lambda(k+1)}p_\lambda(k+1) &= 1 - p_\lambda(A)
\end{aligned}$$

Tvrdnja vrijedi za $k+1$. Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Sada možemo zaključiti sljedeće dvije činjenice:

$$g_{\lambda,A} = \sum_{j\in A} g_{\lambda,\{j\}}, \tag{3.8}$$

$$g_{\lambda,A} = -g_{\lambda,A^c} \tag{3.9}$$

gdje je $A^c = \mathbb{N}_0 \setminus A$. Za $A = \{j\}$ imamo

$$g_{\lambda,\{j\}}(k+1) = \begin{cases} -\frac{p_\lambda(j)}{\lambda p_\lambda(k)} \sum_{l=0}^{k} p_\lambda(l), & k < j \\ \frac{p_\lambda(j)}{\lambda p_\lambda(k)} \sum_{l=k+1}^{\infty} p_\lambda(l), & k \geq j, \end{cases} \tag{3.10}$$

iz čega vidimo da je funkija koja $k \mapsto g_{\lambda,\{j\}}(k+1)$ negativna i padajuća za $k < j$ te pozitivna i padajuća za $k \geq j$.
Sada imamo $g_{\lambda,\{j\}}(k+1) - g_{\lambda,\{j\}}(k) \leq 0$ za $k \neq j$, dok za $k = j$ vrijedi

$$\begin{aligned}
g_{\lambda,\{j\}}(j+1) - g_{\lambda,\{j\}}(j) &= \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{p_\lambda(j)}{p_\lambda(j)}\sum_{l=j+1}^{\infty} p_\lambda(l) + \frac{p_\lambda(j)}{p_\lambda(j-1)}\sum_{l=0}^{j-1} p_\lambda(l)\Big)\\
&= \frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{l=j+1}^{\infty} p_\lambda(l) + \frac{\lambda}{j}\sum_{l=0}^{j-1} p_\lambda(l)\Big)\\
&= \frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{l=j+1}^{\infty} p_\lambda(l) + \sum_{l=1}^{j} p_\lambda(l)\frac{l}{j}\Big)\\
&\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{l=1}^{\infty} p_\lambda(l) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})\\
&\leq \min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\},
\end{aligned}$$

gdje treća jednakost sljedi iz Leme 3.3.6. Sada iz (3.7) slijedi

$$g_{\lambda,A}(k+1) - g_{\lambda,A}(k) \leq \min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\}.$$

To u kombinaciji sa (3.9) daje

$$g_{\lambda,A}(k+1) - g_{\lambda,A}(k) \geq -\min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\},$$

iz čega konačno imamo

$$||\Delta g_{\lambda,A}||_\infty \leq \min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\}.$$

□

Sada smo spremni iskazati teorem o ocjeni koja nas zanima.

Teorem 3.3.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}, p_1, p_2, ..., p_n \in [0,1\rangle$ i W, U i V definirane kao gore. Tada vrijedi*

$$||\mathbb{P}(W \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)||_{tv} \leq 2\min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\} \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(|U_j - V_j|).$$

Dokaz. Neka je $A \subset \mathbb{N}_0$. Tada je

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(W \in A) - p_\lambda(A)| &= |\mathbb{E}(1_A(W) - p_\lambda(A))| \\
&= |\mathbb{E}(\lambda g_{\lambda,A}(W+1) - W g_{\lambda,A}(W))| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} [p_j \mathbb{E}(g_{\lambda,A}(W+1)) - \mathbb{E}(Y_j g_{\lambda,A}(W))] \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} p_j [\mathbb{E}(g_{\lambda,A}(W+1)) - \mathbb{E}(g_{\lambda,A}(W)|Y_j = 1)] \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(g_{\lambda,A}(U_j+1) - g_{\lambda,A}(V_j+1)) \right|
\end{aligned}$$

Sada iz činjenice da je $|g_{\lambda,A}(i) - g_{\lambda,A}(j)| \leq ||\Delta g_{\lambda,A}||_\infty |i-j|$ i Leme 3.3.6 zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{P}(W \in A) - p_\lambda(A)| = \left| \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(g_{\lambda,A}(U_j+1) - g_{\lambda,A}(V_j+1)) \right| \\
&\leq ||\Delta g_{\lambda,A}||_\infty \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(|U_j - V_j|) \\
&\leq \min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\} \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(|U_j - V_j|).
\end{aligned}$$

Prisjetimo se da vrijedi

$$||\mathbb{P}(W \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)||_{tv} = 2 \sup_{A \in \mathbb{N}_0} |\mathbb{P}(W \in A) - p_\lambda(A)|$$

pa tvrdnja teorema slijedi uzimanjem supremuma po A. □

Kako bismo primjenili ovaj teorem gledamo klasu zavisnih slučajnih varijabli $Y_1, ...Y_n$.

Definicija 3.3.8. *Kažemo da su slučajne varijable $Y_1, ...Y_n$ negativno korelirane ako postoje nizovi slučajnih varijabli $Y_{j1}, ..., Y_{jn}$ i $Y'_{j1}, ..., Y'_{jn}$, $j = 1, ..., n$, takvi da za svaki j sa $\mathbb{P}(Y_j = 1) > 0$ vrijedi*

$$(Y_{j1}, ..., Y_{jn}) \stackrel{d}{=} (Y_1, ..., Y_n),$$
$$(Y'_{j1}, ..., Y'_{jn}) \stackrel{d}{=} (Y_1, ..., Y_n)|Y_j = 1,$$
$$Y'_{ji} \leq Y_{ji} \quad \forall i \neq j,$$

dok za j takav da $\mathbb{P}(Y_j = 1) = 0$ vrijedi

$$Y'_{ji} = 0 \text{ } za \text{ } j \neq i$$
$$Y'_{jj} = 1.$$

Važna posljedica negativne korelacije je da postoji sparivanje takvo da je $U_j \geq V_j$ za sve j. Zaista možemo izabrati

$$U_j = \sum_{i=1}^{n} Y_{ji}, \quad V_j = -1 + \sum_{i=1}^{n} Y'_{ji}.$$

Sada

$$U_j - V_j = \sum_{i=1,..n,i\neq j} (Y_{ji} - Y'_{ji}) + (1 - Y'_{jj}) + Y_{jj} \geq 0.$$

Teorem 3.3.9. *Ako su $Y_1, ...Y_n$ negativno korelirane tada*

$$||\mathbb{P}(W \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)||_{tv} \leq 2 \min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\}[\lambda - Var(W)]$$

Dokaz. Uz pomoć sume iz Teorema 3.3.7 i činjenice da je $U_j \geq V_j$ imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(|U_j - V_j|) &= \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(U_j - V_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(W) - \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbb{E}(W|Y_j = 1) + \sum_{j=1}^{n} p_j \\
&= \mathbb{E}(W)^2 - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(Y_j W) + \lambda \\
&= \mathbb{E}(W)^2 - \mathbb{E}(W^2) + \lambda \\
&= -Var(W) + \lambda.
\end{aligned}$$

□

Sada ćemo dati primjer.

Primjer 3.3.10. *Pretpostavimo da imamo $N \geq 2$ urni i $m < N$ kuglica. U svaku urnu stane najviše jedna kuglica. Stavimo kuglice slučajno u urne. Neka je $Y_i = 1_{\{urna\ i\ sadrži\ kuglicu\}}$ za $i = 1, ..., N$.*
Izaberimo $n < N$ i neka je $W = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Tada W ima hipergeometrijsku razdiobu tj.,

$$\mathbb{P}(W = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}}, \quad k = \max\{0, m+n-N\}, \ldots \min\{m, n\}\},$$

gdje je $\binom{n}{k}$ broj načina za smjestiti k kuglica u urne $1, ..., n$, a $\binom{N-n}{m-k}$ broj načina za smjestiti $m - k$ kuglica u urne $n + 1, ..., N$.
Znamo da vrijedi

$$\mathbb{E}(W) = n\frac{m}{N} = \lambda, \quad Var(W) = n\frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Intuitivno je jasno da su $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ negativno korelirane jer ako uvjetujemo da urna j sadržava kuglicu, tada urna $i, i \neq j$ ima manju vjerojatnost da sadržava kuglicu. Formalno, za $j = 1, ..., n$, definiramo $Y_{j1}, Y_{j2}, ..., Y_{jn}$ i $Y'_{j1}, Y'_{j2}, ..., Y'_{jn}$ na sljedeći način:
- *stavimo kuglicu u urnu j*
- *razmjestimo preostalih $m - 1$ kuglica slučajno u ostalih $N - 1$ urni*
- *stavimo $Y'_{ji} = 1_{\{urna\ i\ sadržava\ kuglicu\}}$*
- *bacamo novčić na kojem je vjerojatnost da padne glava jednaka $\frac{m}{N}$*
- *ako padne glava stavljamo $(Y_{j1}, Y_{j2}, ..., Y_{jn}) = (Y'_{j1}, Y'_{j2}, ..., Y'_{jn})$*
- *ako padne pismo, izaberemo kuglicu u urni j, stavimo ju slučajno u jednu od $N - m$ urni*

koje su prazne i stavimo $Y_{ji} = 1_{\{urna\ i\ sadržava\ kuglicu\}}$
Očekujemo da ako je $\frac{m}{N}, \frac{n}{N} \ll 1$, *tada W ima približno Poissonovu distibuciju. Formalno,koristeći Teorem 3.3.9 dobivamo*

$$\begin{aligned}
||\mathbb{P}(W \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)||_{tv} &\leq 2\min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\}[\lambda - Var(W)] \\
&= 2\min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\}\lambda\left[1 - \left(1 - \frac{m}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}\right] \\
&= 2\min\{1, \tfrac{1}{\lambda}\}\lambda\frac{(m+n-1)N - mn}{N(N-1)} \\
&\leq 2\frac{m+n-1}{N-1}.
\end{aligned}$$

Zaista ovo je maleno kada je $\frac{m}{N}, \frac{n}{N} \ll 1$ *jer ako uzmemo* $\varepsilon > 0$ *i* $\frac{m}{N} < \frac{\varepsilon}{8}, \frac{n}{N} < \frac{\varepsilon}{8}$ *onda je*

$$2\frac{m+n-1}{N-1} < 2\frac{N\frac{\varepsilon}{4} - 1}{N-1} = \frac{N\frac{\varepsilon}{2} - 2}{N-1} < \frac{\varepsilon}{2}\frac{N}{N-1} \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Bibliografija

[1] F. den Hollander, *The Coupling Method*, skripta, Sveučilište u Leidenu, 2012., `http://websites.math.leidenuniv.nl/probability/lecturenotes/CouplingLectures.pdf`

[2] A. Klenke, *Probability Theory: A Comprehensive Course*, Springer, Berlin, 2008.

[3] T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, Dover Publications, New York, 2007.

[4] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[5] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, 2008.

[6] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, 2010.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo, nakon ponavljanja osnovnih činjenica iz nekoliko područja matematike, definirali sparivanje i izveli ključne teoreme koji opisuju sparivanje. Ono što smo naučili o metodi sparivanja primjenili smo na Markovljeve lance i slučajne šetnje gdje smo između ostaloga razvili Ornsteinovo sparivanje, te na Poissonove aproksimacije gdje smo razvili Stein-Chen metodu.

Summary

In this work, after recalling some elementary facts from masure and probability theory, we have defined coupling and presented basic theorems of coupling. Developed theory of coupling has been applied to Markov chains and random walks, in particular Ornstein coupling and Poisson approximation by using Stein-Chen method.

Životopis

Rođena sam 19.08.1990. u Koprivnici. Svoje školovanje započela sam u osnovnoj školi ''Braća Radić'' u Koprivnici te ga nastavila u koprivničkoj općoj gimnaziji ''Fran Galović''. Nakon završetka srednjoškolskog obrazovanja, 2009. upisujem preddiplomski studij matematike inženjerskog smjera na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija 2012. stječem akademski naziv sveučilišne prvostupnice te iste godine upisujem diplomski studij financijske i poslovne matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.