

# Teoremi reprezentacije martingala s diskretnim vremenom

---

Vukić, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:735707>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-12**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marija Vukić

**TEOREMI REPREZENTACIJE  
MARTINGALA S DISKRETNIM  
VREMENOM**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminirani rezultati</b>	<b>3</b>
1.1 $\sigma$ -algebra . . . . .	3
1.2 Nezavisnost . . . . .	4
1.3 Slučajna šetnja . . . . .	6
1.4 Uvjetno matematičko očekivanje . . . . .	6
1.5 Definicija martingala . . . . .	11
1.6 Doobova dekompozicija . . . . .	16
1.7 Multinomni teorem . . . . .	16
<b>2 Reprezentacije slučajnom šetnjom</b>	<b>18</b>
2.1 Jednodimenzionalni slučaj . . . . .	18
2.2 Primjene jednodimenzionalnog teorema reprezentacije . . . . .	25
2.3 Višedimenzionalni teorem reprezentacije . . . . .	30
<b>3 Apstraktni teorem reprezentacije</b>	<b>35</b>
3.1 Kvadratna varijacija i kovarijacija . . . . .	35
3.2 Teorem reprezentacije . . . . .	36
3.3 Konvergencija martingalne transformacije . . . . .	39
<b>Bibliografija</b>	<b>43</b>
<b>Sažetak</b>	<b>44</b>
<b>Summary</b>	<b>45</b>
<b>Životopis</b>	<b>46</b>

# Uvod

Područje kojim se bavi ovaj diplomski rad je teorija martingala. Mnogi od obrađenih rezultata se u literaturi najčešće formuliraju za procese s neprekidnim vremenom. Shodno tome trebalo je prilagoditi iskaze i dokaze za diskretno vrijeme. Tako se na primjer najvažniji rezultati ovog rada kao što su jednodimenzionalni teorem reprezentacije može naći u [6] ili pak apstraktni teorem reprezentacije pronalazimo u knjizi [5].

U prvom poglavlju dan je kratak pregled osnovnih rezultata iz teorije integrala, teorije vjerojatnosti i slučajnih procesa. Definiramo pojmove kao što su  $\sigma$ -algebra, Borelova  $\sigma$ -algebra, Lebesgueova mjera i slučajna šetnja. Također definiramo pojam uvjetnog matematičkog očekivanja i navodimo neka od njegovih svojstava bitna za izradu ovog rada. Na kraju poglavlja dane su definicije martingala, submartingala, filtracije i adaptiranosti, te iskazani i dokazani teoremi konvergencije martingala g.s. i u  $L^p$  i Doobova dekompozicija.

Drugo poglavlje sastoji se od dva dijela. Promatramo reprezentacije u odnosu na jednostavnu slučajnu šetnju za jednodimenzionalni i višedimenzionalni slučaj. U jednodimenzionalnom slučaju za jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju  $(S_n)_{n=0}^\infty$  na  $\mathbb{Z}$  i njezinu prirodnu filtraciju  $(\mathcal{F})_{n=0}^\infty$ , dokazujemo da je tako definirani proces martingal. Zatim uvodimo pojam predvidivog procesa  $(H_n)_{n=1}^\infty$  pomoću kojeg definiramo martingalnu transformaciju jednostavne simetrične slučajne šetnje  $(S_n)_{n=0}^\infty$  po procesu  $(H_n)_{n=1}^\infty$ . Martingalna transformacija je također martingal u odnosu na filtraciju  $(\mathcal{F})_{n=0}^\infty$ . Najvažniji rezultat ovog poglavlja je teorem reprezentacije martingala  $(X_n)_{n=0}^\infty$  obzirom na filtraciju  $(\mathcal{F})_{n=0}^\infty$  pomoću nekog predvidivog procesa  $(H_n)_{n=1}^\infty$ . Iz tog teorema slijede neke zanimljive činjenice kao što su Itôva formula za diskretan slučaj, prikaz varijable pomoću martingalne transformacije slučajne šetnje i Hinčinova nejednakost. U višedimenzionalnom slučaju dokazujemo analogon jednodimenzionalnog teorema reprezentacije. Za dokaz višedimenzionalnog teorema reprezentacije koristimo prikaze funkcija pomoću takozvanog Haarovog sistema.

Treće poglavlje obuhvaća apstraktni teorem reprezentacije. Tamo smo definirali kvadratnu varijaciju i kovarijaciju te dokazali egzistenciju kvadratne varijacije. Nakon toga pokazujemo da ukoliko imamo dva martingala  $X$  i  $Y$  obzirom na istu filtraciju  $\mathcal{F}$ , tada  $X$  možemo reprezentirati pomoću  $Y$  i dokazujemo na koji način to možemo postići. To nas dovodi do definicije predvidive reprezentacije i činjenice da standardna slučajna šetnja ima svojstvo predvidive reprezentacije. Na kraju poglavlja dokazan je još teorem o konvergen-

ciji martingalne transformacije.

*Osobito mi je zadovoljstvo ovom prigodom se zahvaliti svom mentoru doc.dr.sc. Vjekoslavu Kovaču na strpljenju, pomoći, izuzetnom vodstvu i suradnji tijekom izrade ovog diplomskog rada. Zahvaljujem mami i baki na razumijevanju i pruženoj podršci tijekom studiranja. Veliko hvala Ivanu na nesebičnoj potpori, pomoći i motivaciji.*

# Poglavlje 1

## Preliminarni rezultati

### 1.1 $\sigma$ -algebra

**Definicija 1.1.1.** Neka je  $\Omega$  neki skup i neka je  $\mathcal{P}(\Omega)$  partitivni skup skupa  $\Omega$ . Kažemo da je  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$   $\sigma$ -algebra ako vrijedi:

- (1)  $\mathcal{F}$  je neprazan skup,
- (2)  $\mathcal{F}$  je zatvoren na komplementiranje,
- (3)  $\mathcal{F}$  je zatvoren na prebrojive unije.

Svaki element  $\sigma$ -algebre zvat ćemo *izmjerivim skupom*. Iz definicije i de Morganovih pravila slijedi da je  $\sigma$ -algebra zatvorena i na prebrojive presjeke. Najmanja  $\sigma$ -algebra na nekom skupu  $\Omega$  je skup koji se sastoji od  $\Omega$  i  $\emptyset$ . Neka je  $\Omega$  neki skup i  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  tada definiramo

$$\sigma(\mathcal{D}) = \bigcap_{\mathcal{F} \sigma\text{-algebra, } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}} \mathcal{F}.$$

Skup  $\sigma(\mathcal{D})$  je najmanja  $\sigma$ -algebra generirana familijom  $\mathcal{D}$ . Uzmimo da je  $\Omega = [0, 1)$  i neka je  $\mathcal{A}$  zadan kao

$$\mathcal{A} = \left\{ \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) : k \in \{0, \dots, 2^n\} \right\}.$$

Elementi od  $\mathcal{A}$  su takozvani *dijadski intervali* duljine  $2^{-n}$ . Neka je  $I = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ . Pokazat ćemo da je najmanja  $\sigma$ -algebra generirana skupom  $\mathcal{A}$  upravo familija svih konačnih unija intervala oblika  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ . Preciznije,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{k \in J} \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) : J \subseteq I \right\}.$$

Ovako definirana familija zadovoljava prvo i treće svojstvo iz definicije  $\sigma$ -algebre. Pokažimo sada drugo svojstvo. Neka je  $A \in \mathcal{F}$  i  $A = \bigcup_{k \in J_1} [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$  za neki  $J_1 \subseteq I$ . Tada vrijedi da je

$$A^c = \bigcup_{k \in J_1^c} [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}) \in \mathcal{F},$$

te imamo da je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra. Svaka  $\sigma$ -algebra sadrži sve prebrojive unije te mora nužno vrijediti  $\mathcal{F} \subseteq \sigma(A)$ , čime smo dokazali  $\mathcal{F} = \sigma(A)$ .

Neka je  $\mathcal{I}$  skup svih intervala oblika  $\langle a, b \rangle$ , gdje su  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Definiramo Borelovu  $\sigma$ -algebru s

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}).$$

Borelovu  $\sigma$ -algebru mogli smo definirati i kao najmanju  $\sigma$ -algebra generiranu otvorenim skupovima u  $\mathbb{R}$ . Na taj način definiciju možemo poopćiti i na višedimenzionalni slučaj. Borelovu  $\sigma$ -algebru na  $\mathbb{R}^d$  označavamo s  $\mathcal{B}^d$ .

Uzmimo da je  $I = \langle a, b \rangle$ . S  $l(I) = b - a$  definiramo funkciju  $l : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ . Neka je dan  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Lebesgueova vanjska mjera je zadana s

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ je niz otvorenih intervala takvih da vrijedi } E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Dodatno, ako za svaki  $A \subseteq \mathbb{R}$  vrijedi

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c),$$

tada kažemo da je  $E$  izmjeriv i s  $\lambda(E) = \lambda^*(E)$  definiramo Lebesgueovu mjeru. Na sličan način definiramo Lebesgueovu mjeru  $\lambda^d$  na  $\mathbb{R}^d$ , samo što umjesto intervala uzimamo otvorene pravokutnike.

## 1.2 Nezavisnost

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor. Neka su  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k$   $\sigma$ -podalgebre od  $\mathcal{F}$ . Kažemo da su  $\mathcal{S}_i$  nezavisne ako za svaki  $A_1 \in \mathcal{S}_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}_k$  vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_k).$$

Slučajne varijable  $X_1, \dots, X_k$  na  $\mathcal{F}$  su nezavisne ako su nezavisne  $\sigma$ -algebre  $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_k)$ , pri čemu označavamo

$$\sigma(X) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{B})).$$

To je ekvivalentno tvrdnji da vrijedi

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_k \in A_k) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \in A_k)$$



za svake  $A_i \in \mathcal{B}, i = 1, \dots, k$ .

Događaji  $A_1, \dots, A_k$  su nezavisni ako su slučajne varijable  $\mathbf{1}_{A_1}, \dots, \mathbf{1}_{A_k}$  nezavisne. Ubuduće s  $\mathbf{1}_A$  označavamo karakterističnu familiju skupa  $A$  (tzv. indikator skupa  $A$ ).

Neka je zadana familija  $\{\mathcal{S}_i, i \in I\}$   $\sigma$ -algebri. Familija  $\{\mathcal{S}_i, i \in I\}$  je nezavisna ako za svaki konačan skup  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  vrijedi da su  $\mathcal{S}_{i_1}, \dots, \mathcal{S}_{i_n}$  nezavisne  $\sigma$ -podalgebri.

Nadalje familija slučajnih varijabli  $\{X_i, i \in I\}$  je nezavisna ako je svaki njen konačni podskup nezavisan.

**Propozicija 1.2.1.** *Neka je  $\{X_i : i \in I\}$  familija nezavisnih slučajnih varijabli i neka su  $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borelove funkcije. Tada je  $\{g(X_i) : i \in I\}$  familija nezavisnih slučajnih varijabli.*

*Dokaz.* Iz činjenice kako kompozicija djeluje na prasluku

$$\{g_i(X_i) \in B_i\} = \{X_i \in g_i^{-1}(B_i)\}$$

i nezavisnosti slučajnih varijabli  $X_1, \dots, X_n$  imamo traženu tvrdnju.  $\square$

**Teorem 1.2.2.** *Neka su  $X_1$  i  $X_2$  nezavisne slučajne varijable. Ako su  $X_1$  i  $X_2$  nenegativne ili ako je  $\mathbb{E}|X_1|$  i  $\mathbb{E}|X_2|$  konačno, tada postoji  $\mathbb{E}[X_1 X_2]$  i vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2].$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da su  $X_1, X_2$  nenegativne. Tada vrijedi, uz pisanje  $X = (X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 X_2] &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 d\mathbb{P}_X(x_1, x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} x_1 x_2 d\mathbb{P}_X(x_1, x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} x_1 \mathbb{P}_{X_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}_+} x_2 \mathbb{P}_{X_2}(x_2) = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2]. \end{aligned}$$

Ovdje smo koristili činjenicu  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \times \mathbb{P}_{X_2}$  Neka su sada  $X_1$  i  $X_2$  integrabilne slučajne varijable. Tada je funkcija  $(x_1, x_2) \mapsto |x_1 x_2|$  nenegativna te po Fubinijevom teoremu kao u prethodnom slučaju vrijedi

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} |x_1 x_2| d\mathbb{P}_X(x_1, x_2)}_{\mathbb{E}|X_1 X_2|} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |x_1| d\mathbb{P}_{X_1}(x_1)}_{\mathbb{E}|X_1|} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |x_2| d\mathbb{P}_{X_2}(x_2)}_{\mathbb{E}|X_2|}.$$

Ako je bilo koja od  $X_1, X_2$  jednaka nuli gotovo sigurno tada teorem svakako vrijedi. Kako su  $X_1$  i  $X_2$  integrabilne slučajne varijable, prema prethodnoj propoziciji i gornjoj jednakosti

imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E} |X_1 X_2| &= \int_{\mathbb{R}^2} |x_1 x_2| d\mathbb{P}_X(x_1, x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x_1| d\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}} |x_2| d\mathbb{P}_{X_2}(x_2) = \mathbb{E} |X_1| \mathbb{E} |X_2| < \infty,\end{aligned}$$

čime smo dobili da je funkcija  $(x_1, x_2) \mapsto |x_1 x_2|$  apsolutno integrabilna. Sada zbog integrabilnosti od  $X_1$  i  $X_2$  te apsolutne integrabilnosti funkcije  $(x_1, x_2) \mapsto |x_1 x_2|$  imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [X_1 X_2] &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 d\mathbb{P}_X(x_1, x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x_1 d\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}} x_2 d\mathbb{P}_{X_2}(x_2) = \mathbb{E} [X_1] \mathbb{E} [X_2].\end{aligned}$$

Time smo dokazali teorem. □

### 1.3 Slučajna šetnja

Neka je  $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Definiramo  $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  i  $X_0 = 0$ . Niz  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  nazivamo slučajnom šetnjom. U slučaju da uzmemo slučajne varijable  $Y_i$  sa distribucijom

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

kažemo da je  $S_n$  jednostavna simetrična slučajna šetnja na  $\mathbb{Z}$ . Kako je  $\mathbb{E} [Y_n] = 0$ , tada zbog linearnosti očekivanja imamo da je  $\mathbb{E} [S_n] = 0$ .

$(Y_n)_{n=0}^{\infty}$  poprima vrijednost  $\pm e_i$ , za  $i = 1, \dots, d$  s istom vjerojatnošću  $\frac{1}{2d}$ . Ovdje smo s  $e_1, \dots, e_d$  označili vektore standardne baze od  $\mathbb{R}^d$ ,

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1).$$

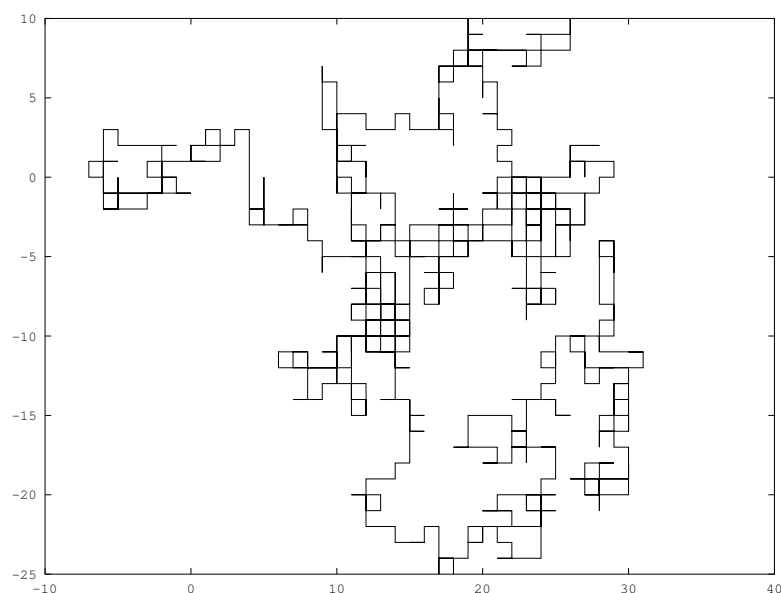
Jednostavna simetrična slučajna šetnja na  $\mathbb{Z}^d$  je niz  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  gdje je  $S_0 = 0$  i  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ .

Na slici 1.1 prikazan je primjer dvodimenzionalne slučajne šetnje za  $n = 1000$ .

### 1.4 Uvjetno matematičko očekivanje

Ako je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor,  $X$  slučajna varijabla takva da je  $\mathbb{E} |X| < \infty$ , te  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -podalgebra od  $\mathcal{F}$ . Ako postoji slučajna varijabla  $Y$  takva da vrijedi :

- (1)  $Y$  je  $\mathcal{G}$ -izmjeriva,



Slika 1.1: Primjer dvodimenzionalne slučajne šetnje

$$(2) \mathbb{E}|Y| < \infty,$$

$$(3) \int_G Y d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}, \text{ za svaki } G \in \mathcal{G}.$$

Slučajnu varijablu  $Y$  koja zadovoljava navedene uvjete zovemo verzijom *uvjetnog matematičkog očekivanja* od  $X$  uz dato  $\mathcal{G}$ , u oznaci  $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ . Tako zadana slučajna varijabla postoji i jedinstvena je do na jednakost g.s. Iz definicije uvjetnog očekivanja slijedi sljedeća lema

**Lema 1.4.1.** *Ako je  $X$   $\mathcal{G}$ -izmjeriva, tada je  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$  gotovo sigurno.*

Navedimo neka svojstva uvjetnog matematičkog očekivanja:

**Teorem 1.4.1.** (1) *Uvjetno matematičko očekivanje je linearno,*

$$\mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}].$$

(2) *Ako je  $X \leq Y$  g.s., tada vrijedi*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \text{ g.s.}$$

(3) *Ako je  $X$  integrabilna slučajna varijabla nezavisna s  $\mathcal{G}$  tada vrijedi*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$

*Dokaz.* Kako bismo dokazali tvrdnju pod (1), pokazat ćemo da je lijeva strana varijanta desne strane. Iz definicije slijedi da su lijeva i desna strana  $\mathcal{F}$ -izmjerive funkcije. Neka je  $A \in \mathcal{F}$ . Zbog linearnosti integrala i definicije uvjetnog matematičkog očekivanja imamo

$$\begin{aligned} \int_A (a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]) d\mathbb{P} &= a \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] d\mathbb{P} \\ &= a \int_A X d\mathbb{P} + \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A (aX + Y) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Time je dokazana prva tvrdnja. Za dokaz druge tvrdnje iskoristimo definiciju uvjetnog matematičkog očekivanja, tj. imamo

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \leq \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] d\mathbb{P}$$

te iz toga slijedi

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] d\mathbb{P} \leq 0.$$

Za fiksirano  $\epsilon > 0$  definiramo skup

$$B = \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) \geq \epsilon\}.$$

Iz gornje relacije za  $A = B$  imamo

$$0 \geq \int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] d\mathbb{P} \geq \epsilon \int_B d\mathbb{P} = \epsilon \mathbb{P}(B),$$

tj.  $\mathbb{P}(B) = 0$ . Dokazali smo da je mjera skupa na kojem vrijedi  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$  jednaka nuli tj. da je  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$  g.s. Preostaje nam još dokazati tvrdnju (3). Neka je  $G \in \mathcal{G}$  proizvoljan. Tada su slučajne varijable  $\mathbf{1}_G$  i  $X$  nezavisne i imamo

$$\begin{aligned} \int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} &= \int_G X d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G X] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_G] \mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(G) \mathbb{E}[X] = \int_G \mathbb{E}[X] d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

□

**Teorem 1.4.2.** *Neka je  $X$  slučajna varijabla na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  i neka su  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$   $\sigma$ -algebre. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}].$$

*Dokaz.* Definiramo  $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ . Iz definicije uvjetnog matematičkog očekivanja za proizvoljan  $A \in \mathcal{H}$  slijedi da je

$$\int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{H}] d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Dobili smo da vrijedi  $\int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{H}] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$ . Kako je slučajna varijabla  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$  izmjeriva obzirom na  $\mathcal{H}$ , po definiciji uvjetnog matematičkog očekivanja imamo  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ , tj.

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}].$$

Preostala jednakost je trivijalna jer je  $\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$  izmjeriva u odnosu na  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Teoremi o konvergenciji za matematičko očekivanje vrijedit će i za uvjetno matematičko očekivanje. Navodimo te tvrdnje. Svugdje se implicitno pretpostavlja da su integrabilne sve varijable od kojih uzimamo uvjetno matematičko očekivanje.

**Teorem 1.4.3.** (1) *Neka je  $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$  i  $X = \lim_n X_n$ . Tada je  $0 \leq \mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}] \leq \dots \leq \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  g.s. i vrijedi  $\lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ .*

(2) *Neka je  $X_n \geq 0$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\liminf_n X_n|\mathcal{G}\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \text{ g.s.}$$

(3) *Neka je  $(X_n)_{n=0}^\infty$  niz slučajnih varijabli takvih da je  $|X_n| \leq Y$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , pretpostavimo  $\mathbb{E}[Y] < \infty$ , te neka je  $X = \lim_n X_n$  g.s. Tada je  $X$  integrabilna i vrijedi  $\lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ .*

*Dokaz.* (1) Znamo da je  $X_n \leq X_{n+1} \leq X$  g.s., iz toga slijedi da je i  $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  g.s. i to za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Kako je  $\mathcal{G}$ -izmjeriva slučajna varijabla  $\limsup_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$  dobro definirana i jer je niz  $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$  rastući i ograničen g.s. imamo  $Y = \lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$  g.s. Pokazat ćemo da je  $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  g.s. Za dobivanje tog rezultata, zbog definicije uvjetnog matematičkog očekivanja dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Prema Lebesgueovom teoremu o monotonij konvergenciji za  $A \in \mathcal{G}$  imamo

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A \lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \lim_n \int_A \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \lim_n \int_A X_n d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

(2) Niz  $\inf_{k \geq n} X_k$  je rastući po  $n$  i  $\lim_n \inf_{k \geq n} X_k = \lim \inf_n X_n$ . Prema tvrdnji (1) imamo

$$\lim_n \mathbb{E} \left[ \inf_{k \geq n} X_k \middle| \mathcal{G} \right] = \mathbb{E} \left[ \lim_n \inf X_k \middle| \mathcal{G} \right].$$

Iz  $\int_A \inf_{k \geq n} X_k d\mathbb{P} \leq \int_A X_k d\mathbb{P}$  slijedi da je  $\mathbb{E} [\inf_{k \geq n} X_k | \mathcal{G}] \leq \inf_{k \geq n} \mathbb{E} [X_k | \mathcal{G}]$ . Time smo dobili

$$\mathbb{E} \left[ \lim_n \inf X_k \middle| \mathcal{G} \right] = \lim_n \mathbb{E} \left[ \inf_{k \geq n} X_k \middle| \mathcal{G} \right] \leq \lim_n \inf_{k \geq n} \mathbb{E} [X_k | \mathcal{G}] = \lim_n \inf \mathbb{E} [X_k | \mathcal{G}].$$

(3) Kako su  $X_n + Y$  i  $Y - X_n$  nenegativne slučajne varijable za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , primjenjujući tvrdnju pod (2) imamo

$$\mathbb{E} [X + Y | \mathcal{G}] = \mathbb{E} \left[ \lim_n \inf (X_n + Y) \middle| \mathcal{G} \right] \leq \lim_n \inf \mathbb{E} [X_n + Y | \mathcal{G}]$$

$$\mathbb{E} [Y - X | \mathcal{G}] = \mathbb{E} \left[ \lim_n \inf (Y - X_n) \middle| \mathcal{G} \right] \leq \lim_n \inf \mathbb{E} [Y - X_n | \mathcal{G}].$$

Iz linearnosti uvjetnog matematičkog očekivanja te jer je

$$\lim_n \inf \mathbb{E} [-X_n | \mathcal{G}] = - \lim_n \sup \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}]$$

vrijedi

$$\lim_n \inf \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \geq \mathbb{E} [X | \mathcal{G}] \text{ i } \lim_n \sup \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E} [X | \mathcal{G}],$$

tj.

$$\lim_n \mathbb{E} [X_n | \mathcal{G}] = \mathbb{E} [X | \mathcal{G}].$$

□

Dijelovi teorema 1.4.3 su “uvjetne” varijante poznatih graničnih rezultata iz teorije mjere:

1. teorema o monotonij konvergenciji,
2. Fatuove leme,
3. Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Iduća propozicija je “uvjetne” varijanta Cauchy-Schwarzove nejednakosti.

**Propozicija 1.4.4.** *Neka je zadana  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  i neka su  $X, Y$   $\mathcal{F}$ -izmjerive slučajne varijable. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E} [XY | \mathcal{F}]^2 \leq \mathbb{E} [X^2 | \mathcal{F}] \mathbb{E} [Y^2 | \mathcal{F}].$$

*Dokaz.* Za  $t \in \mathbb{R}$  i  $\omega \in \Omega$  zbog linearnosti uvjetnog matematičkog očekivanja imamo

$$0 \leq \mathbb{E}[(X + tY)^2 | \mathcal{F}](\omega) = \mathbb{E}[X^2 | \mathcal{F}](\omega) + 2t\mathbb{E}[XY | \mathcal{F}](\omega) + t^2\mathbb{E}[Y^2 | \mathcal{F}](\omega).$$

Za fiksirani  $\omega$  gornjom je formulom dana kvadratna funkcija po  $t$ .

Zbog nenegativnosti diskriminanta te funkcije je manja ili jednaka 0, tj.

$$4\mathbb{E}[XY | \mathcal{F}]^2(\omega) - 4\mathbb{E}[X^2 | \mathcal{F}](\omega)\mathbb{E}[Y^2 | \mathcal{F}](\omega).$$

□

## 1.5 Definicija martingala

**Definicija 1.5.1.** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  izmjeriv prostor te neka je za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  dana slučajna varijabla  $X_n$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Familija  $X = (X_n)_{n=0}^\infty$  naziva se slučajni proces.

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  izmjeriv prostor i neka je  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  niz  $\sigma$ -algebri takvih da vrijedi  $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$  za svaki  $n \geq 1$ . Tada  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  nazivamo filtracijom.

Kažemo da je niz slučajnih varijabli  $(X_n)_{n=0}^\infty$  adaptiran s obzirom na filtraciju  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  ako je za svaki  $n \in \mathbb{N}$  slučajna varijabla  $X_n$   $\mathcal{F}_n$ -izmjeriva.

**Definicija 1.5.2.** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor i neka je dana filtracija  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ . Adaptirani niz integrabilnih slučajnih varijabli  $X = (X_n)_{n=0}^\infty$  je martingal ako vrijedi  $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$  g.s. za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ako umjesto jednakosti vrijedi  $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n$  za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  tada kažemo da je  $X$  submartingal.

Kažemo da je  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  prirodna filtracija procesa  $(X_n)_{n=0}^\infty$  ako je

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n).$$

Neka je  $X$  martingal i neka su  $a, b \in \mathbb{R}$  takvi da je  $a < b$ . Prijelazom nazivamo par  $(k, t)$  takav da je

$$X_k \leq a < b \leq X_t.$$

Drugačije rečeno, proces napravi prijelaz ako je u nekom trenutku njegova vrijednost manja od  $a$  te mu nakon određenog broja koraka vrijednost bude veća od  $b$ . S  $U_N([a, b])$  označavamo broj prijelaza intervala  $[a, b]$  do vremena  $N$ . Preciznije, definiramo niz slučaj-

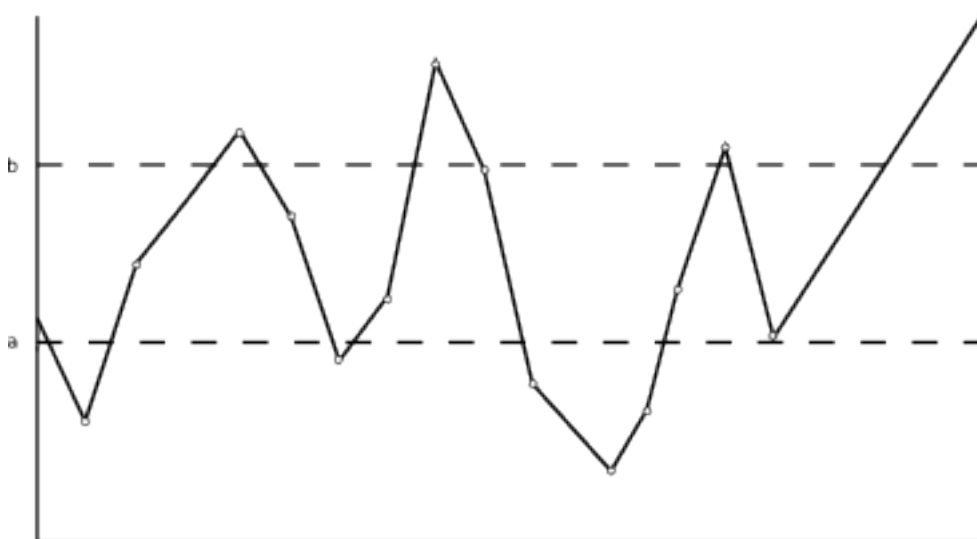
nih vremena

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 0, \\ \tau_1 &= \inf\{n > 0 : X_n \leq a\}, \\ \tau_1 &= \inf\{n > \tau_1 : X_n \geq b\}, \\ &\vdots \\ \tau_{2k-1} &= \inf\{n > \tau_{2k-2} : X_n \leq a\}, \\ \tau_{2k} &= \inf\{n > \tau_{2k-1} : X_n \geq b\}. \\ &\vdots\end{aligned}$$

Za svaki  $N \in \mathbb{N}$  definiramo

$$U_N(a, b) = \sup\{m \geq 0 : \tau_{2m} \leq N\}.$$

Slično kao i za slučajne varijable, možemo definirati broj prijelaza intervala  $[a, b]$  za niz realnih brojeva. Broj prijelaza intervala  $[a, b]$  do trenutka  $N$  označit ćemo s  $u_N(a, b)$ .



Slika 1.2: Primjer martingala s tri prijelaza

**Lema 1.5.3.** *Neka je zadan niz  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ . Tada postoji  $\lim_n x_n \in [-\infty, +\infty]$  ako i samo ako za svake  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $a < b$  vrijedi da je  $u(a, b) < \infty$ .  $u(a, b)$  je broj prijelaza intervala  $[a, b]$  za niz realnih brojeva.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da limes niza ne postoji, to znači da je  $\liminf_n x_n < \limsup_n x_n$ . Tada postoje  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $a < b$  takvi da je  $\liminf_n x_n \leq a < b \leq \limsup_n x_n$ . Dobili smo da niz  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  ima beskonačno mnogo prijelaza intervala  $[a, b]$ .



Dokažimo suprotan smjer. Pretpostavimo da postoji limes te neka su  $a, b \in \mathbb{Q}$  proizvoljni i  $a < b$ . Neka je  $c = \lim_n x_n$ . Tada za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $n_\epsilon$  takav da je  $x_n \in \langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle$  za  $n \geq n_\epsilon$ . Ako se  $c$  nalazi u  $[a, b]$  tada možemo uzeti dovoljno mali  $\epsilon$  za koji će vrijediti da  $\langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ . U slučaju da je  $c \notin [a, b]$  tada možemo naći  $\epsilon$  za koji vrijedi  $\langle c - \epsilon, c + \epsilon \rangle \cap [a, b] = \emptyset$ . Time smo dobili da nakon koraka  $n_\epsilon$  niz više ne može prijeći interval  $[a, b]$  te je tvrdnja dokazana.  $\square$

**Teorem 1.5.4.** *Za svaki  $N \in \mathbb{N}$  vrijedi*

$$\mathbb{E}[U_N(a, b)] \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}[(a - X_n)^+] \leq \frac{1}{b-a} (|a| + \mathbb{E}[X_N]).$$

Definiramo broj prijelaza za cjelokupni niz  $s$

$$U(a, b) = \lim_N U_N(a, b).$$

tj. to je ukupni broj prijelaza intervala  $[a, b]$ . Kako niz  $(U_n)_{n=0}^\infty$  monotono raste prema  $U$ , po teoremu o monotonij konvergenciji imamo sljedeću tvrdnju.

**Korolar 1.5.1.** *Ako je  $U$  gore definirana slučajna varijabla, tada vrijedi*

$$\mathbb{E}[U(a, b)] \leq \left( |a| + \sup_n \mathbb{E}[X_n] \right).$$

**Teorem 1.5.5.** *Neka je  $(X_n)_{n=0}^\infty$  martingal za koji postoji  $K > 0$  takav da je*

$$\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] \leq K < \infty.$$

*Tada postoji slučajna varijabla  $X_\infty$  s konačnim očekivanjem za koju vrijedi*

$$\lim_n X_n = X_\infty \text{ g.s.}$$

*Dokaz.* Neka su  $a, b \in \mathbb{R}$  takvi da vrijedi  $a < b$ . Kako je martingal ograničen u  $L^1$ , prema prethodnom korolaru imamo

$$\mathbb{E}[U(a, b)] \leq |a| + \sup_n \mathbb{E}[X_n] \leq |a| + K,$$

što povlači da je  $U(a, b) < \infty$  g.s., tj.

$$\mathbb{P}(U(a, b) < \infty) = 1$$

te vrijedi

$$\mathbb{P}(U(a, b) < \infty, \forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b) = 1.$$

Naime komplement je prebrojiva unija skupova mjere nula. Prema prethodnoj lemi zaključujemo da je

$$\liminf_n X_n = \limsup_n X_n$$

g.s. te definiramo

$$X_\infty(\omega) = \begin{cases} \liminf_n X_n(\omega) & \text{ako } \liminf_n X_n(\omega) = \limsup_n X_n(\omega), \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Vrijedi da je  $X_\infty$  slučajna varijabla i  $X_\infty = \lim_n X_n$  g.s. Još želimo pokazati da je  $X_\infty \in L^1$ . Kako je  $X$  martingal, uzimanjem očekivanja dobijemo da je  $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$  te vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n| &= \mathbb{E}[X_n^+] + \mathbb{E}[X_n^-] \\ &= 2\mathbb{E}[X_n^+] + \mathbb{E}[X_n] \\ &= 2\mathbb{E}[X_n^+] + \mathbb{E}[X_0]. \end{aligned}$$

Korištenjem Fatouove leme i uvjeta da je  $\sup_n \mathbb{E}|X_n| \leq K$  zaključujemo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_\infty| &= \mathbb{E}\left[\lim_n |X_n|\right] \\ &\leq \liminf_n \mathbb{E}|X_n| \\ &\leq 2 \sup_n \mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_0] < \infty, \end{aligned}$$

dobili smo da je  $X \in L^1$ . □

Neka je  $(X_n)_{n=0}^\infty$  niz slučajnih varijabli. Definiramo slučajnu varijablu  $S_n$  sa

$$S_n(\omega) = \sup_{1 \leq j \leq n} |X_j(\omega)|.$$

**Teorem 1.5.6** (Doobova nejednakost). *Neka je  $(X_n)_{n=0}^\infty$  martingal i neka je niz  $(S_n)_{n=0}^\infty$  definiran kao gore. Tada za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi*

$$\mathbb{E}[S_n^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(X_n)^p].$$

*Dokaz.* Neka je  $q = \frac{p}{p-1}$ . Primijetimo da za  $\tau := \inf\{n \geq 0 : |X_n| \geq \lambda\}$  vrijedi

$$\lambda \mathbb{P}(S_N \geq \lambda) \leq \int_{S_{\min(\tau, n)} \geq \lambda} X_{\min(\tau, n)} d\mathbb{P} \leq \int_{S_n \geq \lambda} X_n d\mathbb{P}.$$

Zato imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^p] &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mathbb{P}(S_n \geq \lambda) d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty \lambda^{p-2} \left( \int_{\{S_n \geq \lambda\}} |X_n| d\mathbb{P} \right) d\lambda \\
&= \int_\Omega |X_n| \left( \int_0^{S_n} \lambda^{p-2} d\lambda \right) d\mathbb{P} \\
&= \frac{p}{p-1} \int_\Omega |X_n| |S_n|^{p-1} d\mathbb{P} \\
&\leq \frac{p}{p-1} \left( \mathbb{E}[|X_n|^p] \right)^{\frac{1}{p}} \left( \mathbb{E}[|S_n|^p] \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ako izraz podijelimo sa zadnjim članom na desnoj strani dobijemo traženu nejednakost.  $\square$

**Teorem 1.5.7.** *Neka je  $X$  ograničeni martingal u  $L^p$ , tj. neka vrijedi*

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty.$$

*Tada postoji slučajna varijabla  $X_\infty$  takva da  $X_n \rightarrow X_\infty$  g.s. i u  $L^p$ .*

*Dokaz.* Vjerojatnost je konačna mjera pa omeđenost u  $L^p$  povlači omeđenost u  $L^1$  te znamo da postoji slučajna varijabla  $X_\infty$  takva da  $X_n \rightarrow X_\infty$  g.s. Kako je  $S_n$  rastući niz, definiramo

$$S(\omega) = \lim_n S_n(\omega) = \sup_n |X_n(\omega)|.$$

Iz konvergencije gotovo sigurno slijedi

$$|X_n - X_\infty| \leq 2 \sup_n |X_n| = 2S.$$

Prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji i koristeći Doobovu nejednakost imamo

$$\mathbb{E}[S^p] = \lim_n \mathbb{E}[S_n^p] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|X_n|^p] \leq K,$$

gdje  $K$  ovisi samo o  $p$  i martingalu. Dobili smo da je  $2S$  omeđena u  $L^p$  te prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi

$$\lim_n \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}\left[ (\lim_n |X_n - X|)^p \right] = 0.$$

$\square$

## 1.6 Doobova dekompozicija

**Teorem 1.6.1.** Svaki proces  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  koji je adaptiran u odnosu na filtraciju  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$  se može na jedinstveni način zapisati u obliku  $X_n = M_n + A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , pri čemu je  $(M_n)_{n=0}^{\infty}$  martingal, a  $(A_n)_{n=0}^{\infty}$  predvidivi proces s  $A_0 = 0$ . Štoviše, ako je  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  submartingal, tada je  $(A_n)_{n=0}^{\infty}$  rastući.

*Dokaz.* Želimo pokazati da je  $X_n$  oblika  $X_n = M_n + A_n$ , pri čemu je  $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$  i  $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ . Kako bismo to imali nužno mora vrijediti sljedeće

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[A_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} + A_n = X_{n-1} - A_{n-1} + A_n. \end{aligned}$$

Dobili smo da nužno mora vrijediti

$$A_n = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] + A_{n-1} - X_{n-1}, \quad (1)$$

$$M_n = X_n - A_n. \quad (2)$$

Kako je  $A_0 = X_0$  i  $M_0 = 0$  tada imamo dobro definirane nizove  $(A_n)_{n=0}^{\infty}$  i  $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ . Indukcijom se pokaže da je  $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ . Još nam preostaje pokazati da je  $(M_n)_{n=0}^{\infty}$  martingal. Imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - A_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] - A_n = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1} \end{aligned}$$

gdje prva jednakost slijedi iz (2), druga iz toga jer je  $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$  a treća iz (1). U slučaju da je  $(X_n)_{n=0}^{\infty}$  submartingal, imamo da je  $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1}$  te po (1) vrijedi  $A_n \geq A_{n-1}$ .  $\square$

## 1.7 Multinomni teorem

Ovdje iskazujemo i dokazujemo multinomni teorem koji ćemo koristiti za dokazivanje jedne od posljedica teorema reprezentacije. Riječ je *Hinčinovoj* nejednakosti koju ćemo dokazati za sve parne brojeve koji su veći ili jednaki dva.

**Teorem 1.7.1.** Neka su  $m, n \in \mathbb{Z}$  takvi da je  $m \geq 1$  i  $n \geq 0$ . Tada vrijedi

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{1 \leq t \leq m} x_t^{k_t}$$

gdje je

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

*Dokaz.* Teorem ćemo dokazati koristeći binomni teorem i indukciju po  $m$ . Za  $m = 1$  lako se vidi da baza indukcije vrijedi. Pretpostavimo da teorem vrijedi za proizvoljan  $m$ . Tada imamo

$$\begin{aligned}
& (x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1})^n = (x_1 + x_2 + \cdots + (x_m + x_{m+1}))^n \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} (x_m + x_{m+1})^K \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} \sum_{k_m+k_{m+1}=K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+k_m+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m, k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}, \tag{1.1}
\end{aligned}$$

gdje smo treću jednakost dobili pomoću binomnog teorema. Zadnji korak u dokazu slijedi iz

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m, k_{m+1}},$$

što se lako može provjeriti ako raspíšemo koeficijente na sljedeći način:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_{m-1}!K!} \frac{K!}{k_m!k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_{m+1}!}.$$

□

## Poglavlje 2

# Reprezentacije u odnosu na jednostavnu slučajnu šetnju

### 2.1 Jednodimenzionalni slučaj

Neka je  $(S_n)_{n=0}^\infty$  jednodimenzionalna jednostavna simetrična slučajna šetnja na  $\mathbb{Z}$ . Iz uvodnog poglavlja znamo da to znači

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n,$$

pri čemu su  $Y_i$  nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable takve da je

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i  $S_0 = 0$ .

Označimo s  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  prirodnu filtraciju od  $(S_n)_{n=0}^\infty$ , tj.

$$\mathcal{F}_n := \sigma(S_1, S_2, \dots, S_n).$$

**Propozicija 2.1.1.** *Proces  $(S_n)_{n=0}^\infty$  je martingal obzirom na prirodnu filtraciju  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ .*

*Dokaz.* Adaptiranost od  $(S_n)_{n=0}^\infty$ , odnosno činjenica da je slučajna varijabla  $S_n$  izmjeriva u odnosu na  $\mathcal{F}_n$  slijedi iz definicije prirodne filtracije. Osim toga imamo

$$\mathbb{E} |S_n| = \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E} |Y_i| < \infty$$

te

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E} [Y_1 + \dots + Y_n + Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E} [S_n + Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \\ &= \mathbb{E} [S_n | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E} [Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = S_n + 0, \end{aligned}$$

što povlači da je  $(S_n)_{n=0}^\infty$  martingal. U posljednjem retku smo koristili činjenicu da su slučajna varijabla  $Y_{n+1}$  i  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_n$  međusobno nezavisne te primijenili svojstvo uvjetnog matematičkog očekivanja.  $\square$

**Definicija 2.1.2.** Slučajan proces  $(H_n)_{n=0}^\infty$  je predvidiv s obzirom na filtraciju  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  ako je za svaki  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$  izmjeriva, tj  $\sigma(H_n) \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$ .

Za predvidivi proces  $(H_n)_{n=1}^\infty$  obzirom na filtraciju  $\mathcal{F}$  definiramo *martingalnu transformaciju* slučajne šetnje  $(S_n)_{n=0}^\infty$  po procesu  $(H_n)_{n=0}^\infty$  kao

$$(H \cdot S)_n = \sum_{m=1}^n H_m(S_m - S_{m-1})$$

za bilo koji prirodni broj  $n$ . Pritom se još  $(H \cdot S)_0$  interpretira kao konstanta 0. Implicitno se u predvidivosti od  $H$  pretpostavlja da je  $\mathbb{E}|H_n| < \infty$  za svaki  $n$ . U našem slučaju je to dovoljna pretpostavka na integrabilnost od  $H$ , tj. ne moramo pretpostavljati i omeđenost, kao što se obično radi.

**Propozicija 2.1.3.** Proces  $((H \cdot S)_n)_{n=0}^\infty$  je martingal obzirom na filtraciju  $\mathcal{F}$ .

*Dokaz.* Adaptiranost od  $(H \cdot S)_n$  slijedi iz  $\mathcal{F}_{n-1}$ -izmjerivosti od  $H_n$  i  $\mathcal{F}_n$ -izmjerivosti od  $S_n$  pa je i  $(H \cdot S)_n$  također  $\mathcal{F}_n$ -izmjeriva.

$$\mathbb{E}|(H \cdot S)_n| = \mathbb{E} \left| \sum_{m=1}^n H_m(S_m - S_{m-1}) \right| \leq \sum_{m=1}^n \mathbb{E} \left[ (|H_m| |S_m - S_{m-1}|) \right] \leq \sum_{m=1}^n \mathbb{E} [|H_m| < \infty]$$

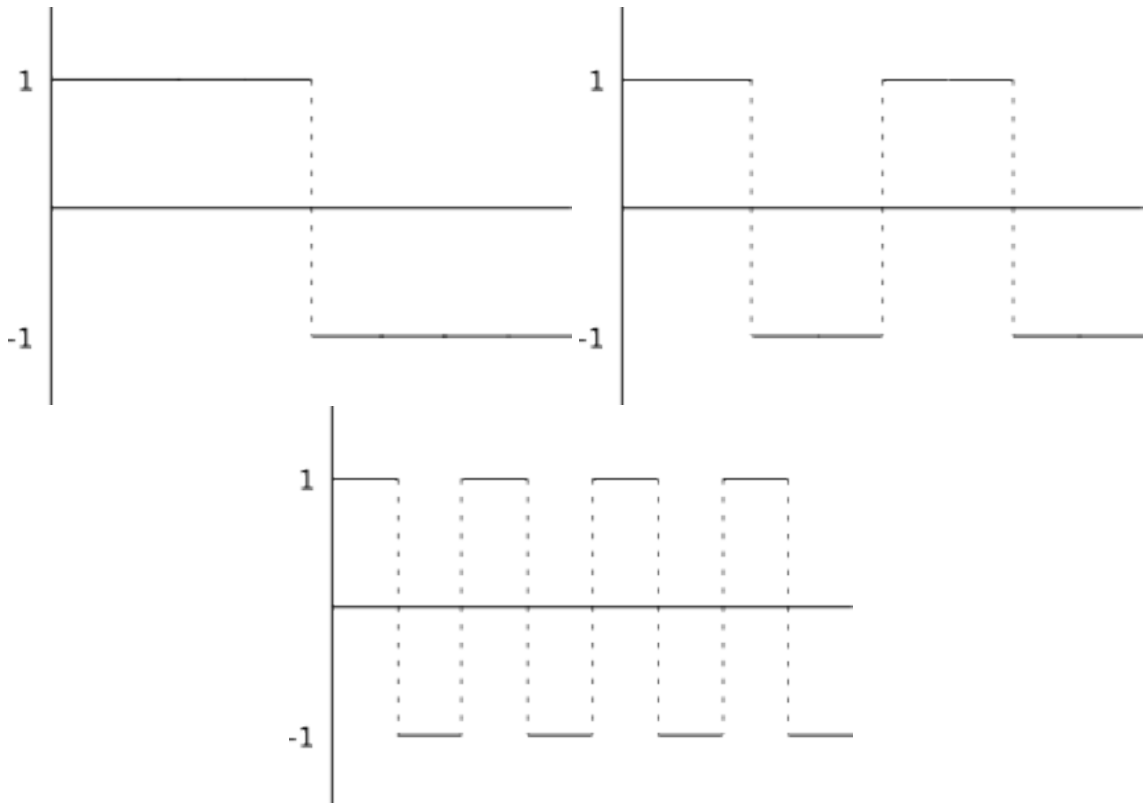
$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(H \cdot S)_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E} [(H \cdot S)_n + H_{n+1}(S_{n+1} - S_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E} [(H \cdot S)_n | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E} [H_{n+1}(S_{n+1} - S_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E} [(H \cdot S)_n | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E} [H_{n+1}(S_{n+1} - S_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot S)_n + \mathbb{E} [H_{n+1}(S_{n+1} - S_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot S)_n + H_{n+1} \mathbb{E} [(S_{n+1} - S_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot S)_n + H_{n+1} (\mathbb{E} [S_{n+1} | \mathcal{F}_n] - S_n) \\ &= (H \cdot S)_n + H_{n+1}(S_n - S_n) = (H \cdot S)_n \end{aligned}$$

Time smo dobili smo da je  $(H \cdot S)_n$  martingal.  $\square$

**Teorem 2.1.4.** Svaki martingal  $(X_n)_{n=0}^\infty$  obzirom na filtraciju  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$  ima reprezentaciju oblika

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n H_k(S_k - S_{k-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

za neki predvidivi integrabilni proces  $(H_k)_{k=1}^\infty$ .


 Slika 2.1: Redom prikaz slučajnih varijabli  $Y_1, Y_2, Y_3$ 

U nastavku ćemo dokazati gore navedeni teorem. Odaberimo pogodan vjerojatnosni prostor na kojem ćemo konstruirati slučajnu šetnju. Neka je  $\Omega = [0, 1)$ ,  $\mathcal{F}$  Borelova  $\sigma$ -algebra,  $\mathbb{P}$  Lebesgueova mjera, tj.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1), \mathcal{B}([0, 1)), \lambda).$$

Promatramo niz slučajnih varijabli definiranih s  $Y_i(\omega) = (-1)^{\omega_i}$ , gdje  $\omega_i$  označava  $i$ -tu binarnu znamenku broja  $\omega \in [0, 1)$ , tj.

$$\omega = 0.\omega_1\omega_2\omega_3\dots$$

Brojevi oblika  $k/2^m$ ,  $k, m \in \mathbb{N}$  imaju dva moguća binarna zapisa pa za njih uvijek uzimamo onaj koji ima konačno mnogo jedinica. Taj odabir i nije previše važan, jer brojeva s nejednoznačnim binarnim zapisom ima prebrojivo mnogo pa posebno čine skup Lebesgueove mjere nula.

**Lema 2.1.1.** *Slučajne varijable  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  su nezavisne.*



*Dokaz.* Trebamo dokazati da je za svaki  $m \in \mathbb{N}$  konačno mnogo slučajnih varijabli  $Y_1, \dots, Y_m$  nezavisno. Da bismo to pokazali, dokazujemo da za svaki  $m \in \mathbb{N}$  i za svake  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  vrijedi

$$\mathbb{P}(Y_1 \in B_1, \dots, Y_m \in B_m) = \mathbb{P}(Y_1 \in B_1) \dots \mathbb{P}(Y_m \in B_m).$$

Kako  $Y_i$  mogu jedino poprimiti vrijednosti  $-1$  i  $1$ , zapravo dokazujemo da za  $y_1, \dots, y_m \in \{0, 1\}$  vrijedi

$$\mathbb{P}(Y_1 = (-1)^{y_1}, \dots, Y_m = (-1)^{y_m}) = \mathbb{P}(Y_1 = (-1)^{y_1}) \dots \mathbb{P}(Y_m = (-1)^{y_m}).$$

S jedne strane je

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_1 = (-1)^{y_1}, \dots, Y_m = (-1)^{y_m}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega = 0.x_1x_2\dots : (-1)^{x_1} = (-1)^{y_1}, \dots, (-1)^{x_m} = (-1)^{y_m}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega = 0.x_1x_2\dots : x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m\}) \\ &= \mathbb{P}(\{0.y_1y_2\dots y_mx_{m+1}x_{m+2}\dots, : x_i \in \{0, 1\}, i \geq m+1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{0.y_1y_2\dots y_m, 0.y_1y_2\dots y_m11\dots\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[0.y_1y_2\dots y_m, 0.y_1y_2\dots y_m + \frac{1}{2^m}\right]\right) = \frac{1}{2^m}. \end{aligned}$$

S druge strane, promotrimo isti izbor od  $y_1, \dots, y_m$ . Fiksirajmo  $i$ -tu znamenku od  $\omega = 0.x_1x_2\dots$ , tj. stavimo  $x_i = y_i$  i promotrimo dobiveni skup

$$\{Y_i = (-1)^{y_i}\} = \{\omega = 0.x_1x_2\dots : x_i = y_i\}.$$

Za  $y_i = 0$  to je unija intervala

$$\left[0, \frac{1}{2^i}\right) \cup \left[\frac{2}{2^i}, \frac{3}{2^i}\right) \cup \left[\frac{4}{2^i}, \frac{5}{2^i}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{2^i - 2}{2^i}, \frac{2^i - 1}{2^i}\right),$$

a za  $y_i = 1$  to je

$$\left[\frac{1}{2^i}, \frac{2}{2^i}\right) \cup \left[\frac{3}{2^i}, \frac{4}{2^i}\right) \cup \left[\frac{5}{2^i}, \frac{6}{2^i}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{2^i - 1}{2^i}, 1\right).$$

Lebesgueova mjera tog skupa je u oba slučaja jednaka  $2^{i-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$ . Zato konačno imamo

$$\mathbb{P}(Y_1 = (-1)^{y_1}) \dots \mathbb{P}(Y_m = (-1)^{y_m}) = \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^m}.$$

Time je završen dokaz nezavisnosti slučajnih varijabli  $Y_i$ .

□

**Lema 2.1.2.** Vrijedi  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ .

*Dokaz.* Prema definiciji s početka odjeljka je

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n),$$

dakle dokazujemo

$$\sigma(S_1, \dots, S_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n).$$

Kako je  $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ , pri čemu su  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  slučajne varijable, to povlači da je  $S_n$  slučajna varijabla (kao zbroj slučajnih varijabli). Budući je  $Y_n = S_n - S_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  svaka od slučajnih varijabli  $Y_1, \dots, Y_n$  je  $\sigma(S_1, \dots, S_n)$ -izmjeriva te slijedi da je

$$\sigma(Y_1, \dots, Y_n) \subseteq \sigma(S_1, \dots, S_n).$$

Obratno,  $S_n$  je definiran sa  $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Svaka od slučajnih varijabli  $S_1, \dots, S_n$  je  $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ -izmjeriva. To povlači

$$\sigma(S_1, \dots, S_n) \subseteq \sigma(Y_1, \dots, Y_n),$$

te imamo

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n).$$

□

Pokazat ćemo da je  $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  familija svih proizvoljnih unija skupova  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ ,  $k = 0, \dots, 2^n - 1$ , gdje ćemo takvu uniju označiti s  $\mathcal{E}_n$ . Zbog toga jer je

$$Y_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^i \left[ \frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right)$$

imamo da je  $Y_n$  jednostavna izmjeriva funkcija obzirom na  $\mathcal{E}_n$  te slijedi da je  $\sigma(Y_1, \dots, Y_n) \subseteq \mathcal{E}_n$ . Obratno, neka je  $0 \leq k \leq 2^n - 1$ . Tada je

$$\frac{k}{2^n} = 0.k_1 \dots k_n.$$

Gledamo skup  $\{Y_j = (-1)^{k_j}\}$ . Taj se skup nalazi u  $\mathcal{F}_n$  za  $j = 0, \dots, n$ . Jer je  $\mathcal{F}_n$   $\sigma$ -algebra znamo da vrijedi

$$\bigcap_{j=0}^n \{Y_j = (-1)^{k_j}\} \in \mathcal{F}_n$$

te raspisivanjem dobijemo

$$\begin{aligned} \bigcap_{j=0}^n \{ Y_j = (-1)^{k_j} \} &= \{ Y_1 = (-1)^{k_1}, \dots, Y_n = (-1)^{k_n} \} \\ &= \{ \omega : \omega_1 = k_1, \dots, \omega_n = k_n \} = \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Vratimo se sada na dokaz Teorema 2.1.4. Koristeći  $S_n - S_{n-1} = Y_n$  odmah vidimo da vrijedi

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n H_k (S_k - S_{k-1}) \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

ako i samo ako je

$$X_n - X_{n-1} = H_n Y_n \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje,  $H_n$  je  $\mathcal{F}_{n-1}$ -izmjeriva ako i samo ako je  $H_n$  konstantna funkcija na intervalima oblika  $\left[ \frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}} \right)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$ . Naime, prema lemi 2.1.2 i diskusiji nakon nje je slučajna varijabla  $\mathcal{F}_{n-1}$ -izmjeriva ako i samo ako je izmjeriva u odnosu na  $\sigma$ -algebru

$$\sigma \left( \left\{ \left[ \frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}} \right) : k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1 \right\} \right).$$

Iz tog razloga moramo tražiti  $H_n$  među linearnim kombinacijama karakterističnih funkcija spomenutih intervala, tj. među funkcijama oblika

$$H_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_k \mathbf{1}_{\left[ \frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}} \right)},$$

za neke (zasad neodređene) koeficijente  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ . Zapišimo  $Y_n$  kao u dokazu leme 2.1.1,

$$\begin{aligned} Y_n &= \mathbf{1}_{\left[ \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n} \right)} - \mathbf{1}_{\left[ \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n} \right)} + \mathbf{1}_{\left[ \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n} \right)} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} (\mathbf{1}_{\left[ \frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n} \right)} - \mathbf{1}_{\left[ \frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n} \right)}) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} (\mathbf{1}_{\left[ \frac{k}{2^{n-1}}, \frac{2k+1}{2^n} \right)} - \mathbf{1}_{\left[ \frac{2k+1}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n-1}} \right)}). \end{aligned}$$

Pomnožimo sada izraze za  $H_n$  i  $Y_n$ . Množenjem dvije karakteristične funkcije dobivamo karakterističnu funkciju presjeka ta dva skupa. Množenjem dviju suma s koeficijentima dobivamo

$$H_n Y_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_k (\mathbf{1}_{\left[ \frac{k}{2^{n-1}}, \frac{2k+1}{2^n} \right)} - \mathbf{1}_{\left[ \frac{2k+1}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n-1}} \right)}).$$

Uzmimo  $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$ . Provjerimo kako izgleda  $X_n - X_{n-1}$  na  $[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}})$ . Zbog izmjerivosti slučajnih varijabli  $X_{n-1}$  i  $X_n$  u  $\sigma$ -algebri  $\mathcal{F}_{n-1}$ , odnosno  $\mathcal{F}_n$  imamo

$$X_{n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \beta_k \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}})},$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \gamma_k \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}.$$

Još  $X_n$  možemo zapisati kao

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left( \gamma_{2k} \mathbf{1}_{[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n})} + \gamma_{2k+1} \mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n})} \right)$$

te imamo

$$X_n - X_{n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left( (\gamma_{2k} - \beta_k) \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{2k+1}{2^n})} + (\gamma_{2k+1} - \beta_k) \mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n-1}})} \right).$$

Kako je  $X$  martingal, imamo da je  $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] = X_{n-1}$  te vrijedi

$$\int_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}})} X_n d\mathbb{P} = \int_{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}})} X_{n-1} d\mathbb{P},$$

tj. imamo

$$\gamma_{2k} \frac{1}{2^n} + \gamma_{2k+1} \frac{1}{2^n} = \beta_k \frac{1}{2^{n-1}}$$

što daje

$$\frac{\gamma_{2k} + \gamma_{2k+1}}{2} = \beta_k. \quad (1)$$

Rješavamo sustav po nepoznicama  $\alpha_k$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \gamma_{2k} - \beta_k, \\ -\alpha_k &= \gamma_{2k+1} - \beta_k. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem (1) u sustav on postaje

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\gamma_{2k} - \gamma_{2k+1}}{2} \\ -\alpha_k &= -\frac{\gamma_{2k} - \gamma_{2k+1}}{2} \end{aligned}$$

za  $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ . Zaključujemo da sustav ima rješenje po nepoznatim koeficijentima  $\alpha_k$  te smo time dokazali teorem.

Više detalja čitatelj može naći u knjizi [6].

## 2.2 Primjene jednodimenzionalnog teorema reprezentacije

Teorem 2.1.4. ima neke zanimljive posljedice, koje ćemo izvesti primjenjujući ga na pogodno odabrane martingale.

Neka nam u daljnjem tekstu  $\mathcal{F}_\infty$  označava  $\sigma$ -algebru svih događaja generiranih slučajnom šetnjom, tj.

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma(\{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, \dots\}).$$

**Korolar 2.2.1.** Za svaki  $X \in L^p$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $X \in \mathcal{F}_\infty$  postoji predvidivi proces  $(H_k)_{k=1}^\infty$  takav da vrijedi

$$X = \mathbb{E}[X] + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(S_k - S_{k-1}).$$

Pritom red konvergira i g.s. i u  $L^p$ .

*Dokaz.* Definiramo proces  $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ . Ovako definiran proces je martingal u  $L^p$ . Naime, imamo  $X \in L^1$ , što povlači da je  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \in L^1$  te  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \in \mathcal{F}_n$ . Nadalje,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = X_n$$

te imamo da je  $X_n$  martingal.

$$|X_n|^p = |\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{F}_n]$$

implicira

$$\mathbb{E}|X_n|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$$

jer je  $X \in L^p$ . Imamo

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p] < \infty.$$

Po Teoremu 1.5.7. iz uvodnog dijela slijedi da  $(X_n)_{n=0}^\infty$  konvergira prema  $X$  g.s. i u  $L^p$ . Ispunjene su pretpostavke teorema 2.1.4. pa po njemu postoji predvidiv proces  $(H_k)_{k=1}^\infty$  takav da vrijedi

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n H_k(S_k - S_{k-1}) = \mathbb{E}[X] + \sum_{k=1}^n H_k(S_k - S_{k-1}),$$

pri čemu je  $X_0 = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[X]$ . Imamo

$$\begin{aligned} X &= \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (X_0 + \sum_{k=1}^n H_k(S_k - S_{k-1})) \\ &= X_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n H_k(S_k - S_{k-1}) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(S_k - S_{k-1}) \\ &= \mathbb{E}[X] + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(S_k - S_{k-1}). \end{aligned}$$

Pritom limes po  $n$  smatramo ili g.s. ili po  $L^p$  normi. □

Iduća posljedica se nekad naziva *diskretna Itōva formula*. Radi njene formulacije uvedimo sljedeću oznaku. Za funkciju  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $m \in \mathbb{Z}$  stavimo

$$(\delta f)(m) := \frac{1}{2}f(m+1) - \frac{1}{2}f(m-1)$$

te

$$(\delta^2 f)(m) := f(m+1) - 2f(m) + f(m-1).$$

Ova formulacija Itōve formule preuzeta je iz članka [3].

**Korolar 2.2.1.** Za svaku funkciju  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  i svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  vrijedi

$$f(S_n) = f(S_0) + \sum_{k=1}^n (\delta f)(S_{k-1})(S_k - S_{k-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\delta^2 f)(S_{k-1}).$$

*Dokaz.* Premda postoje i direktniji dokazi, teorem 2.1.4 nam omogućava da do formule dođemo na prirodan način. Iskoristimo Doobovu dekompoziciju (Teorem 1.6.1 u Poglavlju 1) i zapišimo adaptirani proces  $(f(S_n))_{n=0}^{\infty}$  kao

$$f(S_n) = M_n + A_n,$$

pri čemu je  $(M_n)_{n=0}^\infty$  martingal obzirom na filtraciju  $\mathcal{F}$ , a  $(A_n)_{n=0}^\infty$  proces koji je predvidiv obzirom na  $\mathcal{F}$  i zadovoljava  $A_0 = 0$ . Odmah vidimo

$$\begin{aligned}
 A_n - A_{n-1} &= \mathbb{E}[A_n - A_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \\
 &= \mathbb{E}[f(S_n) - f(S_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] - \underbrace{\mathbb{E}[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}]}_{=0} \\
 &= \mathbb{E}[f(S_{n-1} + Y_n) | \mathcal{F}_{n-1}] - f(S_{n-1}) \\
 &= \mathbb{E}[f(S_{n-1} + 1)\mathbf{1}_{\{Y_n=1\}} + f(S_{n-1} - 1)\mathbf{1}_{\{Y_n=-1\}} | \mathcal{F}_{n-1}] - f(S_{n-1}) \\
 &= f(S_{n-1} + 1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_n=1\}}] + f(S_{n-1} - 1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_n=-1\}}] - f(S_{n-1}) \\
 &= \frac{1}{2}(\delta^2 f)(S_{n-1}),
 \end{aligned}$$

iz čega sumiranjem slijedi da mora biti

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\delta^2 f)(S_{k-1}).$$

Nadalje, iz teorema 2.1.4 dobivamo da martingalni pribrojnik ima reprezentaciju oblika

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n H_k(S_k - S_{k-1})$$

i odmah je  $M_0 = f(S_0)$ . Osim toga imamo

$$\begin{aligned}
 H_n Y_n &= H_n(S_n - S_{n-1}) = M_n - M_{n-1} = f(S_n) - f(S_{n-1}) - (A_n - A_{n-1}) \\
 f(S_n) - f(S_{n-1}) - \frac{1}{2}(\delta^2 f)(S_{n-1}) &= f(S_{n-1} + Y_n) - \frac{1}{2}f(S_{n-1} + 1) - \frac{1}{2}f(S_{n-1} - 1).
 \end{aligned}$$

Na skupu  $\{Y_n = 1\}$  ta jednakost postaje

$$H_n = \frac{1}{2}f(S_{n-1} + 1) - \frac{1}{2}f(S_{n-1} - 1) = (\delta f)(S_{n-1}),$$

a na skupu  $\{Y_n = -1\}$  dobivamo opet istu jednakost, samo pomnoženu s  $-1$ . Uvrštavanjem dobivenih izraza za  $M_n$ ,  $H_n$  i  $A_n$  slijedi tvrdnja korolara.  $\square$

Posljednja primjena će nam biti jedna nejednakost koja se koristi u harmonijskoj analizi.

**Teorem 2.2.2** (Hinčinova nejednakost). *Ako je  $(X_n)_{n=1}^\infty$  martingalna transformacija jednostavne simetrične slučajne šetnje  $(S_n)_{n=1}^\infty$ , a članovi predvidivog procesa su konstante  $H_n = a_n$  za svaki  $n$ , odnosno*

$$X_n = \sum_{k=1}^n a_k(S_k - S_{k-1}) = a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n,$$

tada postoji konstanta  $0 < C_p < \infty$  koja ovisi samo o  $p$  i za koju vrijedi nejednakost

$$\|X_n\|_p \leq C_p \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) = C_p \|X_n\|_2.$$

*Dokaz.* Navedenu nejednakost dokazat ćemo za parne prirodne brojeve  $p \geq 2$ . Za pokazivanje ocjene za sve realne brojeve  $p \geq 2$  koristi se tzv. teorija interpolacije, koju ovdje nećemo komentirati.

Neka je  $p \geq 2$  paran prirodan broj. Tada je

$$\|X_n\|_p^p = \mathbb{E}[X_n^p] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^n a_k Y_k \right)^p \right] = \mathbb{E}[(a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n)^p].$$

Primjenom multinomnog teorema na  $(\sum_{k=1}^n a_k Y_k)^p$  i korištenjem linearnosti matematičkog očekivanja dobivamo

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \sum_{k_1 + \dots + k_n = p, k_i \geq 0 \text{ cijeli}} \binom{p}{k_1, \dots, k_n} (a_1 Y_1)^{k_1} \dots (a_n Y_n)^{k_n} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k_1 + \dots + k_n = p, k_i \geq 0 \text{ cijeli}} \frac{p!}{k_1! \dots k_n!} a_1^{k_1} Y_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} Y_n^{k_n} \right] \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = p, k_i \geq 0 \text{ cijeli}} \frac{p!}{k_1! \dots k_n!} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \mathbb{E}[Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}]. \end{aligned} \quad (2)$$

Tvrdimo da u ovoj sumi "nestaju" odnosno da su jednaki nuli svi pribrojnici za koji je neki od eksponenata  $k_1, \dots, k_n$  neparan. Znamo da su  $Y_i$  nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable takve da je

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

iz čega slijedi

$$Y_i^k \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{za } k \text{ neparan}$$

i  $Y_i^k = 1$  za  $k$  paran. Izračunajmo očekivanje produkta takvih potencija:

$$\mathbb{E}[Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}] = (\text{nezavisnost}) = \mathbb{E}[Y_1^{k_1}] \dots \mathbb{E}[Y_n^{k_n}] = 0,$$

ako je barem jedan od eksponenata neparan, to jest

$$\mathbb{E}[Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}] = 1$$



u slučaju kada su svi  $k_1, \dots, k_n$  parni brojevi. Kako su u svim preostalim pribrojnicima  $k_1, \dots, k_n$  parni brojevi imamo da je (2) jednaka

$$\sum_{\substack{k_i=2l_i \\ l_1+\dots+l_n=p/2 \\ l_i \geq 0 \text{ cijeli}}} \frac{p!}{(2l_1!) \dots (2l_n!)} a_1^{2l_1} \dots a_n^{2l_n}.$$

S druge strane imamo

$$((a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}})^p = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Ponovno iskoristimo multinomni teorem pa slijedi

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{p}{2}} = \sum_{\substack{l_1+\dots+l_n=p/2 \\ l_i \geq 0 \text{ cijeli}}} \frac{(p/2)!}{l_1! \dots l_n!} a_1^{2l_1} \dots a_n^{2l_n}.$$

Preostaje još dokazati da postoji konstanta  $0 < C_p < \infty$  takva da vrijedi

$$\frac{p!}{(2l_1!) \dots (2l_n)!} < C_p^p \frac{(p/2)!}{l_1! \dots l_n!}.$$

Kako je  $(2l)! \geq l!$  za svaki  $l \in \mathbb{N}_0$ , dovoljno je uzeti  $C_p^p = \frac{p!}{(p/2)!} < \infty$ . Prokomentirajmo još jednakost

$$\|X_n\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Primijenom istog postupka za  $p = 2$  dobivamo

$$\|X_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \mathbb{E}[Y_k^2].$$

Znamo da je  $\mathbb{E}[Y_k^2] = 1$  pa iz toga slijedi da je

$$\|X_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

□

### 2.3 Višedimenzionalni teorem reprezentacije

Sada se bavimo reprezentacijom martingala u odnosu na  $d$ -dimenzionalnu slučajnu šetnju. Neka je zadana dijadska kocka  $Q = [\frac{\mathbf{k}}{2^n}, \frac{\mathbf{k}+1}{2^n}]$ . Ovdje kratko pišemo  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$ . Imat ćemo  $Q \subseteq [0, 1]^d$  točno kada je  $0 \leq k_j \leq 2^{n-1}$  za svaki  $j$ . Sa  $h_Q^i$  definiramo funkciju

$$h_Q^i = \mathbf{1}_{[\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}] \times \dots \times [\frac{2k_i}{2^{n+1}}, \frac{2k_i+1}{2^{n+1}}] \times \dots \times [\frac{k_d}{2^n}, \frac{k_d+1}{2^n}]} - \mathbf{1}_{[\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}] \times \dots \times [\frac{2k_i+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_i+2}{2^{n+1}}] \times \dots \times [\frac{k_d}{2^n}, \frac{k_d+1}{2^n}]}$$

te za  $I \subseteq \{1, \dots, d\}$  definiramo

$$h_Q^I(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i \in I} h_Q^i(x_i) \quad \text{za } (x_1, \dots, x_d) \in Q.$$

U slučaju  $I = \emptyset$  smatramo da je  $h_Q^\emptyset$  konstantno jednaka 1 na  $Q$ . Na taj način je konstruiran tzv. *Haarov sistem*.

+1	-1	+1	+1	-1
		-1	-1	+1

Slika 2.2: Funkcije  $h^{(1)}$ ,  $h^{(2)}$ ,  $h^{(1,2)}$

**Lema 2.3.1.** *Skup*

$$\{h_Q^I : I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}\}$$

je ortogonalna baza za prostor funkcija

$$V_Q = \{f : Q \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ je konstantna funkcija na svakoj dijadskoj kocki } Q' \text{ takvoj da je } Q' \subseteq Q \text{ i } l(Q') = \frac{1}{2}l(Q)\}.$$

Ovdje  $l(Q)$  označava duljinu brida od  $Q$ .

*Dokaz.* Pokazat ćemo da je  $\{h_Q^I\}$  ortogonalni sistem u odnosu na standardni skalarni produkt

$$\langle f | g \rangle = \int f(x)g(x) dx.$$

Funkciju  $h_Q^I$  možemo zapisati na sljedeći način

$$h_Q^I(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d \psi_i(x_i),$$

gdje je  $\psi_i = h_Q^i$  ako  $i \in I$  a inače  $\psi_i = 1$ . Neka su  $I, I' \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$  i  $I \neq I'$ . Bez smanjenja općenitosti postoji  $i_0 \in \{1, 2, \dots, d\}$  takav da je  $i_0 \in I$  i  $i_0 \notin I'$ . Ako još

$$h_Q^{I'}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i)$$

tada imamo

$$\begin{aligned} \langle h_Q^I | h_Q^{I'} \rangle &= \int h_Q^I(x_1, \dots, x_d) h_Q^{I'}(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d \\ &= \int \left( \prod_{i=1}^d \psi_i(x_i) \right) \left( \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i) \right) dx_1 \dots dx_d \\ &= \prod_{i=1}^d \int \psi_i(x_i) \varphi_i(x_i) dx_i \\ &= \left( \prod_{i \leq 1 \leq d, i \neq i_0} \int \psi_i(x_i) \varphi_i(x_i) dx_i \right) \left( \int \psi_{i_0}(x_{i_0}) 1 dx_{i_0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Time smo dobili da su funkcije  $h_Q^I$  međusobno ortogonalne pa posebno i linearno nezavisne. Dimenzija od  $V_Q$  je  $2^d$ , a kardinalitet skupa  $\{h_Q^I\}$  je također  $2^d$ , čime smo dobili da je skup  $h_Q^I$  ortogonalna baza za  $V_Q$ .  $\square$

**Teorem 2.3.1.** *Za svaki kvadratno-integrabilni martingal  $(X_n)_{n=0}^\infty$  postoje kvadratno integrabilni predvidivi procesi  $(H_k^I)_{k=0}^\infty$ ,  $I \subseteq \{1, 2, \dots, d\} \setminus \emptyset$  takvi da vrijedi reprezentacija*

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, I \neq \emptyset} H_k^I \prod_{i \in I} (S_k^i - S_{k-1}^i), \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Dokaz.* Odaberimo pogodan vjerojatnosni prostor na kojem ćemo konstruirati slučajnu šetnju. Neka je  $\Omega = [0, 1]^d$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1]^d)$ ,  $\mathbb{P} = \lambda_d = \lambda = d$ -dimenzionalna Lebesgueova mjera, tj.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1]^d, \mathcal{B}([0, 1]^d), \lambda_d).$$

Promatramo niz slučajnih vektora  $Y_k = (Y_k^1, \dots, Y_k^d)$ , gdje je

$$Y_k^i(\omega_1, \dots, \omega_d) = (-1)^{k-\text{ta binarna znamenka od } \omega_i}.$$

Tako zadana slučajna varijabla ima distribuciju

$$Y_k^i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Slučajnu varijablu  $Y_k^i$  možemo zapisati i na sljedeći način

$$Y_k^i = \sum_{i=0}^{2^k-1} (-1)^i \mathbf{1}_{[0,1) \times \dots \times [\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}) \times \dots \times [0,1)}.$$

Stavimo

$$S_n^i = Y_1^i + Y_2^i + \dots + Y_n^i, \quad S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d).$$

Jer su  $Y_k^1, \dots, Y_k^d$ , međusobno nezavisne slučajne varijable tada su i  $Y_k$  međusobno nezavisni slučajni vektori. Kako je  $(S_n^i)_{n=0}^\infty$  jednostavna slučajna šetnja na  $\mathbb{Z}$  i  $(S_n^i)_{n=0}^\infty$ ,  $i = 1, \dots, d$  su međusobno nezavisni slučajni procesi, imamo da je  $(S_n)_{n=0}^\infty$  jednostavna slučajna šetnja na  $\mathbb{Z}^d$ . Zanima nas kako izgleda  $\sigma$ -algebra generirana slučajnim vektorima  $S_1, \dots, S_n$ . Neka je  $\bar{\mathcal{F}}_n = \sigma(S_n, \dots, S_n)$ . Tada imamo

$$\bar{\mathcal{F}}_n = \sigma(S_n, \dots, S_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) = \sigma(\{Y_k^i : k \in \{1, \dots, n\}, i \in \{1, \dots, d\}\}).$$

Definirajmo  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, [0, 1)^d\}$ . Iz jednodimenzionalnog slučaja znamo da vrijedi

$$\sigma(\{Y_k^i : k \in \{1, \dots, n\}\}) = \mathcal{F}_0 \times \dots \times \mathcal{F}_n \times \dots \times \mathcal{F}_0$$

gdje se  $\mathcal{F}_n$  nalazi na  $i$ -tom mjestu.  $\sigma$ -algebra generirana unijama svih skupova gornjeg oblika je upravo  $\mathcal{F}_n \times \dots \times \mathcal{F}_n$  te imamo

$$\bar{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n \times \dots \times \mathcal{F}_n = \sigma\left(\left\{\left[\frac{\mathbf{k}}{2^n}, \frac{\mathbf{k}+1}{2^n}\right] : \mathbf{k} \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}^d\right\}\right)$$

što je upravo kolekcija koja sadrži sve konačne unije skupova oblika  $[\frac{\mathbf{k}}{2^n}, \frac{\mathbf{k}+1}{2^n})$ . Definirajmo

$$Y_n^I = \prod_{i \in I} Y_n^i.$$

Dokazati tvrdnju teorema je ekvivalentno tome da dokažemo da postoje kvadratno integrabilni predvidivi procesi  $(H_k^I)_{k=0}^\infty$ ,  $I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$ ,  $I \neq \emptyset$  takvi da vrijedi reprezentacija

$$X_n - X_{n-1} = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, I \neq \emptyset} H_n^I Y_n^I, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definirali smo pojam dijadske kocke  $Q$  kao

$$Q = \left[ \frac{\mathbf{k}}{2^n}, \frac{\mathbf{k} + 1}{2^n} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{k} \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}^d.$$

S  $l(Q)$  označimo duljinu brida dijadske kocke. Kako je  $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$  i zbog same definicije uvjetnog matematičkog očekivanja imamo

$$\int_Q (X_n - X_{n-1}) d\lambda = 0, \quad Q \subseteq [0, 1)^d, \quad l(Q) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Kako je svaka od slučajnih varijabli izmjeriva u paru  $\sigma$ -algebri  $(\tilde{\mathcal{F}}_n, \mathcal{B})$ , imamo

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= \sum_{Q, l(Q)=\frac{1}{2^{n-1}}} \beta_Q \mathbf{1}_Q \\ X_n &= \sum_{Q, l(Q)=\frac{1}{2^{n-1}}} \sum_{Q' \subseteq Q, l(Q')=\frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \mathbf{1}_{Q'}. \end{aligned}$$

Za svaku dijadsku kocku  $Q$  takvu da  $l(Q) = \frac{1}{2^{n-1}}$  vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q (X_n - X_{n-1}) d\lambda = \left( \sum_{Q' \subseteq Q, l(Q')=\frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \lambda(Q') \right) - \beta_Q \lambda(Q) \\ &= \left( \sum_{Q' \subseteq Q, l(Q')=\frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \left( \frac{1}{2^n} \right)^d \right) - \beta_Q \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right)^d, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\beta_Q = \frac{1}{2^d} \sum_{Q' \subseteq Q, l(Q')=\frac{1}{2}l(Q)} \gamma_{Q'}. \quad (3)$$

Kako je svaki  $H_n^I$ ,  $I \subseteq \{1, \dots, d\}$  izmjeriv u  $\tilde{\mathcal{F}}_n$ , imamo da je  $H_n^I$  oblika

$$H_n^I = \sum_{Q, l(Q)=\frac{1}{2^{n-1}}} \alpha_Q^I \mathbf{1}_Q.$$

Ako gledamo restrikciju funkcije  $Y_n^I$  na dijadskoj kocki  $Q$  takvoj da je  $l(Q) = \frac{1}{2^{n-1}}$  imamo

$$Y_n^I|_Q = h_Q^I \mathbf{1}_Q,$$

a restrikcija od  $H_n^I$  je

$$H_n^I|_Q = \alpha_Q^I \mathbf{1}_Q,$$

čime smo dobili da je

$$H_n^I Y_n^I|_Q = \alpha_Q^I h_Q^I \mathbf{1}_Q$$

Promatramo restrikciju jednadžbe

$$X_n - X_{n-1} = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, I \neq \emptyset} H_n^I Y_n^I$$

na dijadskoj kocki  $Q$  za koju vrijedi  $l(Q) = \frac{1}{2^{n-1}}$ , tj.

$$\begin{aligned} \left( \sum_{Q' \subseteq Q, l(Q') = \frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \mathbf{1}_{Q'} \right) - \beta_Q \mathbf{1}_Q &= \sum_{Q' \subseteq Q, l(Q') = \frac{1}{2^n}} \gamma_{Q'} \mathbf{1}_{Q'} - \sum_{Q' \subseteq Q, l(Q') = \frac{1}{2^n}} \beta_{Q'} \mathbf{1}_{Q'} \\ &= \sum_{Q' \subseteq Q, l(Q') = \frac{1}{2^n}} (\gamma_{Q'} - \beta_{Q'}) \mathbf{1}_{Q'} = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, d\}, I \neq \emptyset} \alpha_Q^I h_Q^I. \end{aligned}$$

Prema uvijetu (3) je

$$\sum_{Q' \subseteq Q, l(Q') = \frac{1}{2^n}} (\gamma_{Q'} - \beta_{Q'}) = 0$$

pa je lijeva strana funkcija konstantna na dijadskim kockama  $Q'$  duljine brida  $\frac{1}{2^n}$ , a integral po cijeloj kocki  $Q$  joj je jednak 0. Kako skup  $\{h_Q^I : I \neq \emptyset\}$  baza za skup svih takvih funkcija, postoje konstante  $\alpha_Q^I$  takve da vrijedi jednakost.

$$f_Q = \sum_I \alpha_Q^I h_Q^I.$$

Time smo dobili tvrdnju teorema da postoje slučajne varijable  $H_n^I$  takve da je

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, I \neq \emptyset} H_k^I \prod_{i \in I} (S_k^i - S_{k-1}^i)$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

□

## Poglavlje 3

# Apstraktni teorem reprezentacije

### 3.1 Kvadratna varijacija i kovarijacija

Neka su

$$X = (X_n)_{n=0}^{\infty} \quad \text{i} \quad Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$$

martingali s obzirom na filtraciju  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ . Kvadratna kovarijacija od  $X$  i  $Y$  je jedinstveni predvidivi proces  $\langle X, Y \rangle = (\langle X, Y \rangle_n)_{n=0}^{\infty}$  takav da je  $X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n$  martingal. Specijalno, kvadratna varijacija od  $X$  je jedinstveni predvidivi proces  $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_n)_{n=0}^{\infty}$  takav da je  $X_n^2 - \langle X \rangle_n$  martingal. Egzistencija kvadratne kovarijacije slijedi iz Dobove dekompozicije (teorem 1.6.1). Ipak, instruktivno je direktno izvesti njenu formulu.

**Lema 3.1.1.** *Kvadratna kovarijacija postoji i dana je formulom*

$$\langle X, Y \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}) | \mathcal{F}_{k-1}].$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da je zadan predvidiv slučajni proces  $\langle X, Y \rangle$  takav da je  $X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n$  martingal. Tada mora vrijediti

$$\mathbb{E} [X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} Y_{n-1} - \langle X, Y \rangle_{n-1}.$$

Kako je  $\langle X, Y \rangle_n$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -izmjeriva tada vrijedi

$$\mathbb{E} [X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E} [X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \langle X, Y \rangle_n$$

čime smo dobili

$$\langle X, Y \rangle_n = \langle X, Y \rangle_{n-1} + \mathbb{E} [X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} Y_{n-1}.$$

Rekurzivno dobijemo

$$\langle X, Y \rangle_n = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}[X_k Y_k | \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1} Y_{k-1}).$$

Trebamo još pokazati da je proces  $\langle X, Y \rangle$  kvadratna kovarijacija od  $X$  i  $Y$ , tj. trebamo pokazati da je  $X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n$  martingal. Računajmo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\left[X_n Y_n - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}] | \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \mathbb{E}[X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_{n-1} Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= X_{n-1} Y_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= X_{n-1} Y_{n-1} - \langle X, Y \rangle_n, \end{aligned}$$

gdje zadnja i predzadnja jednakost slijede iz toga da su  $X_{n-1}$  i  $Y_{n-1}$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -izmjerive slučajne varijable.  $\square$

## 3.2 Teorem reprezentacije

Neka su  $X$  i  $Y$  martingali obzirom na istu filtraciju  $\mathcal{F}$ . Pitamo se: Može li se i na koji način  $X$  reprezentirati pomoću  $Y$ ?

**Teorem 3.2.1.** *Neka su  $X = (X_n)_{n=0}^\infty$  i  $Y = (Y_n)_{n=0}^\infty$   $L^2$  martingali obzirom na  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ . Tada postoje procesi  $H = (H_n)_{n=1}^\infty$  i  $R = (R_n)_{n=0}^\infty$  takvi da vrijedi*

- (1)  $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n H_k(Y_k - Y_{k-1}) + R_n$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (2)  $H$  je predvidiv obzirom na  $\mathcal{F}$ ,
- (3)  $\langle R, Y \rangle = 0$ ,  $R$  je  $L^2$  martingal obzirom na  $\mathcal{F}$ ,  $R_0 = 0$ .

Nadalje taj prikaz je jedinstven u smislu da ako je  $X$  predstavljen pomoću  $H$  i  $R$ , odnosno pomoću  $H'$  i  $R'$ , tada mora biti  $R_n = R'_n$  i  $H_n(Y_n - Y_{n-1}) = H'_n(Y_n - Y_{n-1})$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .



*Dokaz.* Pretpostavimo najprije da  $H$  i  $R$  zadovoljavaju (1),(2) i (3). iz (1) dobivamo

$$X_n - X_{n-1} = H_n(Y_n - Y_{n-1}) + (R_n - R_{n-1})$$

pa množenjem s  $Y_n - Y_{n-1}$  i uzimanjem uvjetnog matematičkog očekivanja slijedi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= H_n \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[(R_n - R_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}], \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili predvidivost od  $H$ , tj. (2). Osim toga, zbog (3) imamo

$$\mathbb{E}[(R_n - R_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] = \langle R, Y \rangle_n - \langle R, Y \rangle_{n-1} = 0.$$

Na taj način dobivamo

$$\mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = H_n \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]. \quad (4)$$

Dokažimo najprije jedinstvenost prikaza. Za to pretpostavimo da su  $H$  i  $R$ , odnosno  $H'$  i  $R'$  kao iz iskaza. Iz (4) slijedi

$$H_n \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = H'_n \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}]$$

tj.

$$(H_n - H'_n) \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

Množenjem s  $H_n - H'_n$  i korištenjem predvidivosti imamo da je

$$\mathbb{E}[(H_n - H'_n)^2(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

a uzimanjem očekivanja slijedi

$$\|(H_n - H'_n)(Y_n - Y_{n-1})\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}[(H_n - H'_n)^2(Y_n - Y_{n-1})^2] = 0,$$

odakle je

$$(H_n - H'_n)(Y_n - Y_{n-1}) = 0 \text{ g.s.}$$

tj.

$$H_n(Y_n - Y_{n-1}) = H'_n(Y_n - Y_{n-1}),$$

kao što je i trebalo pokazati. Konačno,  $R_n = R'_n$  slijedi iz jednakosti (1):

$$R_n = X_n - X_0 - \sum_{k=1}^n H_k(Y_k - Y_{k-1}) = X_n - X_0 - \sum_{k=1}^n H'_k(Y_k - Y_{k-1}) = R'_n.$$

Sada dokažimo egzistenciju prikaza. Pritom će nam početak dokaza ukazati na kandidata za proces  $H$ . Želimo pokazati da za bilo koje  $L^2$  martingale  $X$  i  $Y$  obzirom na  $\mathcal{F}$  postoji proces  $H$  takav da vrijedi (4) za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Iz uvjetne Cauchy-Schwarzove nejednakosti (propozicija 1.4.4) je

$$\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]^2 \leq \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}],$$

odakle je specijalno

$$\left\{ \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = 0 \right\} \subseteq \left\{ \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] = 0 \right\}.$$

Zato ako definiramo

$$H_n(\omega) := \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]}{\mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}]}, & \text{za } \omega \in \left\{ \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = 0 \right\}, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

tada će  $H_n$  svakako zadovoljavati jednakost (4) i očito je  $H$  predvidiv. Preostaje definirati  $R = (R_n)_n$  kao

$$R_n = X_n - X_0 - \sum_{k=1}^n H_k(Y_k - Y_{k-1}),$$

takav da je (1) ispunjeno po samoj konstrukciji. Za provjeru od (3) računamo za  $n \in \mathbb{N}$  i  $R_n \in \mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[R_{n-1} + X_n - X_{n-1} - H_n(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= R_{n-1} + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} - H_n(\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] - Y_{n-1}) = R_{n-1} \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(R_n - R_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(R_n - R_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}) - H_n(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] - H_n \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (4) = 0 \end{aligned}$$

pa je doista

$$\langle R, Y \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(R_n - R_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}] = 0.$$

□

**Definicija 3.2.1.** Neka je  $Y = (Y_n)_{n=0}^\infty$   $L^2$  martingal obzirom na  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ . Kažemo da taj martingal ima svojstvo *predvidive reprezentacije* ako za svaki  $L^2$  martingal  $X = (X_n)_{n=0}^\infty$  obzirom na  $\mathcal{F}$  postoji predvidivi proces  $H = (H_n)_{n=0}^\infty$  obzirom na  $\mathcal{F}$  takav da je

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n H_k(Y_k - Y_{k-1})$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .

**Napomena 3.2.2.** Iz prethodnog poglavlja, teorema 2.1.4, slijedi da standardna slučajna šetnja ima svojstvo predvidive reprezentacije.

**Korolar 3.2.2.** Za  $L^2$  martingal  $Y = (Y_n)_{n=0}^\infty$  obzirom na  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  je ekvivalentno:

1.  $(Y, \mathcal{F})$  ima svojstvo predvidive reprezentacije.
2. Ako je  $R$   $L^2$  martingal takav da je  $\langle R, Y \rangle = 0$  i  $R_0 = 0$ , tada mora biti  $R = 0$ .

*Dokaz.* Da (2) povlači (1) slijedi iz egzistencije u teoremu 3.2.1 jer ostatak mora biti 0. Pokažimo sada da (1) povlači (2). Prikažimo  $R$  na dva načina:

$$R_n = \sum_{k=1}^n H_k(Y_k - Y_{k-1}) + 0R_n = \sum_{k=1}^n 0(Y_k - Y_{k-1}) + R_n.$$

Iz jedinstvenosti u teoremu 3.2.1 slijedi da je  $R_n = 0$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . □

### 3.3 Konvergencija martingalne transformacije

Neka je zadan kvadratno integrabilni martingal  $Y = (Y_n)_{n=0}^\infty$ . Definiramo  $D_n = Y_n - Y_{n-1}$ . Pokažimo da je niz  $D = (D_n)_{n=0}^\infty$  ortogonalan. Ako je  $m < n$  tada imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_m D_n] &= \mathbb{E}[(Y_m - Y_{m-1})(Y_n - Y_{n-1})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y_m - Y_{m-1})(Y_n - Y_{n-1}) | \mathcal{F}_m]] \\ &= \mathbb{E}[(Y_m - Y_{m-1}) \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1}) | \mathcal{F}_m]] = 0. \end{aligned}$$

Time smo dobili da je niz ortogonalan.

**Propozicija 3.3.1.** Neka je  $Y$   $L^1$  martingal s obzirom na filtraciju  $\mathcal{F}$ . Tada  $Y$  možemo zapisati kao

$$Y = Y' - Y'',$$

gdje su  $Y'$  i  $Y''$  nenegativni martingali. Možemo izabrati  $Y'$  i  $Y''$  takve da vrijedi

$$\sup_t \mathbb{E}[|Y_t|] = \sup_t \mathbb{E}[Y'_t] + \sup_t \mathbb{E}[Y''_t].$$

*Dokaz.* Neka su

$$Y'_t = \lim_n \mathbb{E}[Y_n^+ | \mathcal{F}_t], \quad Y''_t = \lim_n \mathbb{E}[Y_n^- | \mathcal{F}_t].$$

Ako uzmemo  $s, t \in \mathbb{N}_0$  i  $s < t$ , teorem o monotonij konvergenciji nam daje

$$\mathbb{E}[Y'_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\lim_n \mathbb{E}[Y_n^+ | \mathcal{F}_s] | \mathcal{F}_s\right] = \lim_n \mathbb{E}[Y_n^+ | \mathcal{F}_s] = Y'_s$$

i analogno dobijemo  $\mathbb{E}[Y_t''|\mathcal{F}_s] = Y_s''$ . Pokažimo još da vrijedi  $Y = Y' - Y''$ :

$$\begin{aligned} Y_t' - Y_t'' &= \lim_n \mathbb{E}[Y_n^+|\mathcal{F}_t] - \lim_n \mathbb{E}[Y_n^-|\mathcal{F}_t] \\ &= \lim_n \mathbb{E}[Y_n^+ - Y_n^-|\mathcal{F}_t] = \lim_n \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_t] = Y_t. \end{aligned}$$

□

**Teorem 3.3.1.** *Neka je  $Y = (Y_n)_{n=0}^\infty$   $L^1$ -omeđeni martingal i neka je  $H \cdot Y$  martingalna transformacija po predvidivom procesu  $H = (H_n)_{n=0}^\infty$ . Tada  $H \cdot Y$  konvergira gotovo sigurno na skupu  $A = \{H^* < \infty\}$ , gdje je  $H^* = \sup_n |(H \cdot Y)_n|$ .*

*Dokaz.* Neka je  $Y$  uniformno ograničeni submartingal i  $H^* \leq 1$ . Definiramo  $X_n = (H \cdot Y)_n - (H \cdot Y)_{n-1}$  i  $D_n = Y_n - Y_{n-1}$  te imamo

$$|X_n| = |(H \cdot Y)_n - (H \cdot Y)_{n-1}| = |H_n(Y_n - Y_{n-1})| \leq |Y_n - Y_{n-1}| = |D_n|.$$

Zbog ortogonalnosti nizova  $(D_n)_{n=0}^\infty$  i  $(X_n)_{n=0}^\infty$  imamo

$$\mathbb{E}[(Y_n - Y_0)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n D_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[D_k^2] \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2] = \mathbb{E}[(H \cdot Y)_n^2].$$

Dobili smo da je  $(H \cdot Y)_n$   $L^2$ -omeđeni martingal te prema teoremu o konvergenciji martingala  $(H \cdot Y)_n$  konvergira g.s.

Svakom elementu iz  $Y$  možemo dodati isti proizvoljni broj bez da se  $(D_n)_{n=0}^\infty$  promijeni. Zbog uniformne ograničenosti od  $Y$  možemo uzeti dovoljno veliki broj takav da vrijedi  $Y_n \geq 0$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Kako je

$$\mathbb{E}[Y_{n-1}D_n] = \mathbb{E}[Y_{n-1}\mathbb{E}[D_n|\mathcal{F}_{n-1}]] \geq 0$$

imamo

$$\mathbb{E}[Y_n^2] = \mathbb{E}[(Y_{n-1} + D_n)^2] = \mathbb{E}[Y_{n-1}^2] + 2\mathbb{E}[Y_{n-1}D_n] + \mathbb{E}[D_n^2] \leq \mathbb{E}[Y_{n-1}^2] + \mathbb{E}[D_n^2]$$

te rekursivno dobijemo

$$\mathbb{E}[Y_n^2] \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[D_k^2].$$

Neka je

$$\tilde{Y}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{D}_k,$$

gdje je  $\tilde{D}_1 = D_1$  i

$$\tilde{D}_n = D_n - \mathbb{E}[D_n|\mathcal{F}_{n-1}], \quad n \geq 2.$$

Tako definirani  $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_n)_{n=0}^\infty$  je martingal i njegova martingalna transformacija je

$$(H \cdot \tilde{Y})_n = \sum_{k=1}^n H_k \tilde{D}_k.$$

Kako je  $\mathbb{E}[D_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geq 0$ , imamo

$$\mathbb{E}[\tilde{D}_n^2] = \mathbb{E}[(D_n - \mathbb{E}[D_n | \mathcal{F}_{n-1}])^2] \leq \mathbb{E}[D_n^2]$$

te vrijedi

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_n^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[D_k^2] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\tilde{D}_k^2] \leq \mathbb{E}[Y_n^2].$$

Dobivamo da je  $\tilde{Y} \in L^2$  i zbog teorema o konvergenciji martingala (odnosno submartingala) znamo da  $\tilde{Y}$ ,  $(H \cdot \tilde{Y})$  i  $Y$  konvergiraju g.s. Kako je

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[D_k | \mathcal{F}_{k-1}] = Y_n - \tilde{Y}_n$$

znamo da i  $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[D_k | \mathcal{F}_{k-1}]$  konvergira g.s. Zbog nenegativnosti svakog sumanda tada konvergira i  $\sum_{k=1}^n H_n \mathbb{E}[D_k | \mathcal{F}_{k-1}]$  g.s. Martingalnu transformaciju  $H \cdot Y$  možemo zapisati kao

$$(H \cdot Y)_n = (H \cdot \tilde{Y})_n + \sum_{k=1}^n H_k \mathbb{E}[D_k | \mathcal{F}_{k-1}], \quad n \geq 2$$

te imamo da i  $(H \cdot Y)$  konvergira g.s.

Pretpostavimo sada da je  $Y \in L^1$ . Prema prethodnoj propoziciji možemo  $Y$  rastaviti na  $Y = Y' - Y''$ , gdje su  $Y'$  i  $Y''$  nenegativni martingali. Štoviše vrijedi i

$$H \cdot Y = H \cdot Y' - H \cdot Y''.$$

Nadalje, možemo pretpostaviti da je  $Y \geq 0$ . Ako je  $c > 0$ , tada  $\bar{Y}_n = -\min(Y_n, c)$  definira uniformno ograničeni submartingal. Uzmimo proces  $-H$  i promatramo martingalnu transformaciju od  $\bar{Y}$  po  $-H$ . Prema ranije pokazanom vrijedi da  $((-H) \cdot \bar{Y})$  konvergira g.s. Neka je

$$A_c = \{\omega \in \Omega : \sup_n Y(\omega) < \infty\}.$$

Tada za svaki  $\omega \in A$  vrijedi

$$\begin{aligned} ((-H) \cdot \bar{Y})_n(\omega) &= \sum_{m=1}^n (-H_m)(\bar{Y}_m - \bar{Y}_{m-1})(\omega) \\ &= \sum_{m=1}^n (-H_m)(-Y_m + Y_{m-1})(\omega) \\ &= \sum_{m=1}^n (H_m)(Y_m - Y_{m-1})(\omega) = (H \cdot Y)_n(\omega). \end{aligned}$$

Dobili smo da  $(H \cdot Y)$  konvergira g.s. na skupu  $A_c$ . Zbog konvergencije martingala  $Y$  g.s. vrijedi  $\mathbb{P}(\sup_n Y_n = \infty) = 0$  te uzimanjem da  $c$  teži prema beskonačno dobivamo da  $(H \cdot Y)$  konvergira g.s.

Za dokazati teorem teorem uzimimo  $c > 0$  i definiramo  $\bar{H}_n = \mathbf{1}_{H_n < c} H$ . Promatramo sada martingalnu transformaciju  $(\bar{H} \cdot Y)$ . Znamo da  $(\bar{H} \cdot Y)$  konvergira g.s. te kako je  $(\bar{H} \cdot Y) = (H \cdot Y)$  na skupu  $B_c = \{\omega : \sup_n H_n(\omega) < c\}$  imamo da  $(H \cdot Y)$  konvergira g.s. na  $B_c$ . Uzimanjem da  $c \rightarrow \infty$  dobijemo da  $(H \cdot Y)$  konvergira g.s. na skupu  $\{\omega : \sup_n H_n(\omega) < \infty\}$ .  $\square$

# Bibliografija

- [1] N. Antić, M. Vrdoljak, *Mjera i Integral*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2001.
- [2] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, četvrto izdanje, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [3] R. Kudžma, *Itô's formula for a random walk*, Litovski Matematički Sbornik 22 (1982), 122–127.
- [4] R. Long, *Martingales Spaces and Inequalities*, Springer, Wiesbaden, 1993.
- [5] P. E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, drugo izdanje, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [6] D. Revuz, M. Yor *Continuous martingales and Brownian motion*, treće izdanje, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [7] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska Knjiga, Zagreb, 2002.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu iskazani su i dokazani teoremi reprezentacije martingala s diskretnim vremenom. Glavni rezultati su jednodimenzionalni i višedimenzionalni teorem reprezentacije te apstraktni teorem reprezentacije. Dokazane su i neke od posljedica tih teorema kao što su: diskretna Itôva formula, prikaz varijable pomoću martingalne transformacije slučajne šetnje, Hinčinova nejednakost i konvergencija martingalne transformacije.



# Summary

This thesis states and proves the discrete time martingale representation theorems. The main results are one-dimensional and multidimensional representation theorems and an abstract representation theorem. We also demonstrated some of the consequences of these theorems such as: discrete Itô's formula, representation of variables using martingale transforms of random walks, Hinčin's inequality and the convergence of the martingale transform.

# Životopis

Zovem se Marija Vukić. Rođena sam 31. svibnja 1987. godine u Vinkovcima. Osnovnu školu sam završila u Štitatu, a srednju obrtničko-industrijsku u Županji. Akademske godine 2007./2008. upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij *Matematika*, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Akademske godine 2011./2012. upisala sam Diplomski sveučilišni studij *Matematička statistika*, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.