SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Laštro

GEOMETRIJSKA MJESTA TOČAKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Maja Starčević

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Mojim voljenima...

Sadržaj

Uvod

Geometrijsko mjesto točke je put kojim se točka kreće prema nekom zadanom uvjetu ili skupu uvjeta, odnosno skup svih točaka (ravnine) koje zadovoljavaju neki uvjet ili skup uvjeta.

Geometrijsko mjesto točaka nije uobičajena cjelina koja se obrađuje u osnovnoj ili srednjoj školi, ali ipak se proteže kroz cijelo osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje u sklopu geometrije u nastavi matematike. Već u nižim razredima osnovne škole učenici se susreću s pojmom geometrijskog mjesta točaka koje zadovoljavaju određene uvjete (npr. kružnica je definirana kao skup točaka jednako udaljenih od jedne fiksne točke). U višim razredima osnovne škole učenici se s pojmom geometrijskog mjesta točaka susreću pri opisivanju svojstava simetrale dužine i simetrale kuta, a u srednjoj školi se u gimnazijskom programu i u programima tehničkih škola učenici susreću s pojmom geometrijskog mjesta točaka pri opisivanju konika (elipse, hiperbole, parabole). Geometrijska mjesta točaka imaju veliku primjenu u geometrijskim konstrukcijama, preciznije kod metode geometrijskog mjesta, odnosno metode presjeka. Taj način primjene geometrijskog mjesta se proučava u sklopu kolegija "Konstruktivne metode u geometriji" na nastavničkom smjeru preddiplomskog studija Matematike na PMF-u.

U ovom diplomskom radu ćemo predstaviti i usporediti različite načine određivanja geometrijskih mjesta točaka. Navest ćemo osnovne teoreme geometrijskih mjesta točaka te ćemo rješavati zadatke u kojima ih primjenjujemo. Opisat ćemo kako do rješenja možemo doći i analitičkim putem koji zahtijeva manje zornosti. Proučavat ćemo i primjenu geometrijskih mjesta točaka u geometrijskim konstrukcijama te ćemo opisati kako alati dinamičke geometrije mogu pomoći u rješavanju problema pronalaženja geometrijskog mjesta točaka. Na kraju ovog rada, definirat ćemo neke poznate krivulje kao geometrijska mjesta točaka zadana nekim uvjetom.

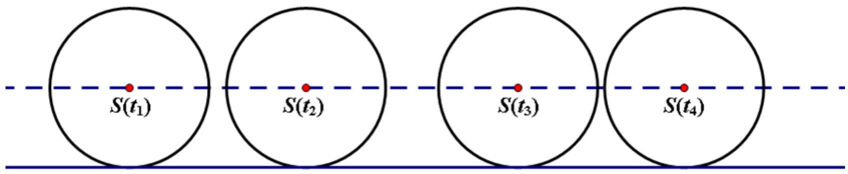
Poglavlje 1

Geometrijsko mjesto točaka

1.1 Mjesto točaka

Definicija 1.1.1. *Geometrijsko mjesto točke je put kojim se točka kreće prema nekom zadanom uvjetu ili skupu uvjeta, odnosno skup svih točaka (ravnine) koje zadovoljavaju neki uvjet ili skup uvjeta.*

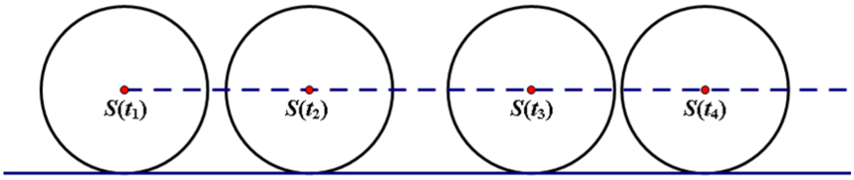
Razmotrit ćemo položaje središta kotača koji se kreće duž ravne ceste u nekoliko vremenskih trenutaka, npr. u t_1, t_2, t_3, t_4 i ucrtat ćemo te točke. Nazovimo ih $S(t_1), S(t_2), S(t_3)$ i $S(t_4)$. Primjećujemo da se one sve nalaze na pravcu koji je paralelan cesti (Slika 1.1).



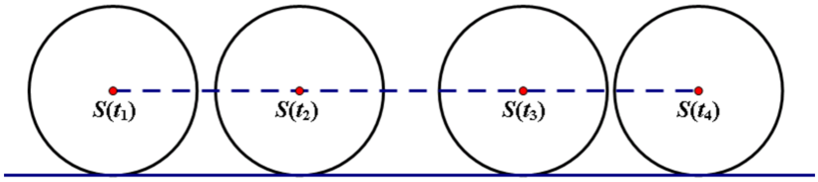
Slika 1.1: Gibanje središta kotača

Ako promatramo gibanje kotača od nekog određenog trenutka, onda se zapravo radi o polupravcu paralelnom s cestom (Slika 1.2), a ako imamo zadano konačno vrijeme kretanja, onda imamo dužinu paralelnu cesti (Slika 1.3).

U sva tri slučaja krivulju kojom se kreće središte kotača nazivamo "mjesto središta kotača dok se kotač kreće cestom". Krivulju mjesta središta ćemo crtati dugim isprekidanim crticama kako bi ga razlikovali od danih i konstruiranih linija.



Slika 1.2: Gibanje središta kotača od početnog trenutka



Slika 1.3: Gibanje središta kotača u konačnom vremenu

Kao drugi primjer mjesta točaka razmotrimo kružnicu. Sama definicija kružnice je povezana s opisom mjesta točaka, tj. pod kružnicom podrazumijevamo da se radi o skupu točaka koje su jednako udaljene od neke fiksne točke koju zovemo središte kružnice. Kad počinjemo s obradom kružnice u školi, možemo zadati zadatak da učenici iscrtavaju razne točke na nekoj udaljenosti od zadane točke, da nacrtaju što više takvih točaka, da ih redom spoje te da primijete da su dobili nešto kružnog oblika, jer bi dotad već trebali imati osjećaj kako izgleda taj oblik. To onda može biti motivacija za precizno definiranje kružnice na navedeni način i onda je možda i veća vjerojatnost da će se učenici kasnije sjećati te definicije.

Točke koje su unutar kružnice isto imaju svoj geometrijski opis. One su od središta kružnice udaljene za duljinu koja je strogo manja od radijusa, dok su one točke izvan kružnice udaljene za više od tog radijusa.

Time smo dobili primjer geometrijskih mjesta točaka od kojih je jedno krivulja u ravnini, a druga dva skupa nisu ravninske krivulje. Primijetimo da su dva geometrijska mjesta omeđeni skupovi, a jedno je neomeđen skup.

Kako bi dokazali da je neki skup traženo geometrijsko mjesto točaka zadano nekim uvjetom ili skupom uvjeta, potrebno je dokazati sljedeće dvije tvrdnje (neovisno kojim poretkom):

1) Svaka točka koja pripada tom skupu zadovoljava dani uvjet ili skup uvjeta. (1)

2) Svaka točka koja zadovoljava dani uvjet ili skup uvjeta pripada tom skupu ili svaka točka koja ne pripada tom skupu ne zadovoljava dani uvjet ili skup uvjeta. (2)

Jedan od načina određivanja geometrijskog mjesta je korištenje empirijskog pristupa koji zahtjeva geometrijski zor. Dakle, crtamo što više slučajeva konkretnih točaka i pokušavamo vidjeti u kakvoj su one vezi. Takvu metodu određivanja geometrijskog mjesta točaka čine sljedeći koraci:

1) Konstruiramo nekoliko točaka koje zadovoljavaju dane uvjete.

2) Pokušavamo primijetiti kojem skupu pripadaju nacrtane točke, radi li se o krivulji, geometrijskom liku ili nekoj drugoj vrsti skupa. Pritom ćemo u nekim slučajevima do zaključka moći doći spajanjem dobivenih točaka.

3) Precizno opisujemo skup koji smo pronašli u prethodnom koraku (npr. ako je u pitanju kružnica, određujemo gdje joj je središte i koliki je radijus).

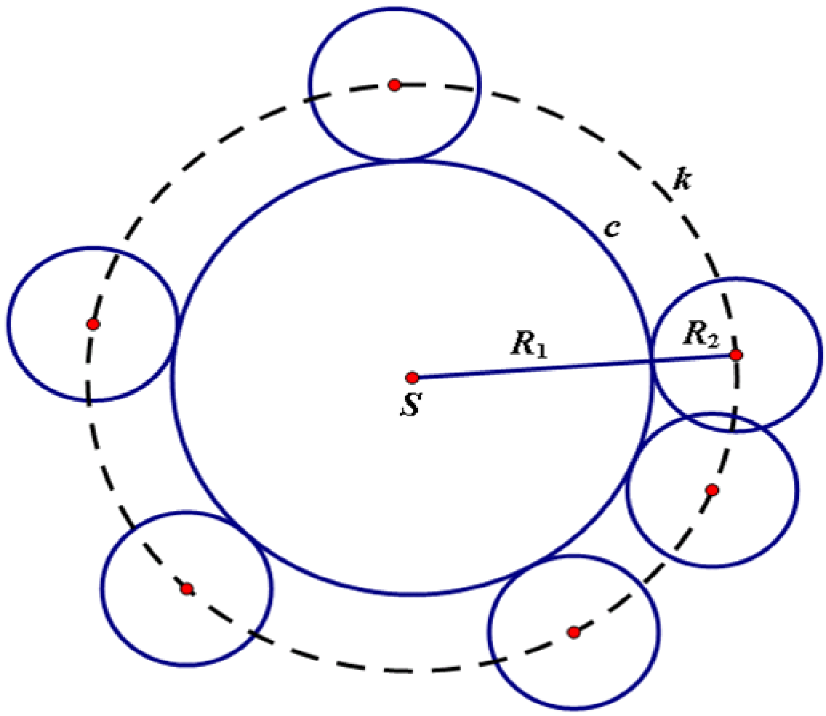
4) Potvrđujemo svoj zaključak dokazujući da taj skup zadovoljava dvije karakteristike pod (1) i (2).

Napomenimo da je crtanje slučajeva ponekad dosta složeno jer geometrijski uvjet može biti jako kompliciran za crtanje. Tada ćemo nacrtati manje točaka koje zadovoljavaju uvjete. Ukoliko je iz nacrtanih točaka teško odrediti što bi moglo biti geometrijsko mjesto, pokušavamo riješiti problem analitičkim putem ili crtamo sliku u nekom od programa dinamičke geometrije.

Na sljedećim primjerima ćemo vidjeti kako naslutiti što je geometrijsko mjesto točaka i vidjeti kako se provodi precizan dokaz.

Primjer 1.1.2. *Što je geometrijsko mjesto središta kruga radijusa R_2 koji kruži oko drugog kruga radijusa R_1?*

Najprije ćemo nacrtati krug radijusa R_1 sa središtem u S (omeđen kružnicom koju ćemo zvati c) i nekoliko položaja kruga radijusa R_2 koji kruži oko kruga radijusa R_1. Iz skice (spajanjem središta) zaključujemo da bi traženo geometrijsko mjesto mogla biti kružnica radijusa $R_1 + R_2$ sa središtem u S koju ćemo nazvati k (Slika 1.4).



Slika 1.4: Primjer 1.1.2.

Dokaz.

1. DIO: Primijetimo da ako imamo proizvoljnu točku P na kružnici k, onda možemo konstruirati pravac p kroz točku P i točku S. Označimo presjek pravca p i kružnice c s A. Kružnica kojoj je središte u P, a prolazi kroz A dodiruje kružnicu c i radijusa je R_2. Znači točka P zadovoljava uvjet zadatka.

2. DIO: Ako je točka R središte kružnice radijusa R_2 koja dodiruje kružnicu c izvana, onda je očito $|SR| = R_1 + R_2$ pa je R na kružnici k.

Time smo dokazali da je k uistinu geometrijsko mjesto opisanih točaka. □

1.2 Osnovni teoremi geometrijskih mjesta točaka

Teorem 1.2.1. *Geometrijsko mjesto točaka ravnine koje su jednako udaljene od dvije zadane točke je pravac koji prolazi polovištem spojnice tih dviju točaka i okomit je na tu spojnicu.*

Dokaz.

1. DIO: Želimo dokazati da je svaka točka pravca, koji prolazi polovištem spojnice dviju točaka i okomit je na tu spojnicu, jednako udaljena od tih dviju točaka.

Neka su A i B dvije zadane točke, neka je M polovište dužine $\overline{AB}$, neka je $p \perp \overline{AB}$, neka p prolazi točkom M i neka je P bilo koja točka na pravcu p . Želimo dokazati da je |AP| = |BP| .
Promotrimo trokute $\triangle\, AMP$ i $\triangle\, BMP$ (Slika 1.5).
Točka M je polovište dužine $\overline{AB}$ pa slijedi da je |AM| = |MB|.
Kutovi $\angle\, AMP$ i $\angle\, BMP$ su pravi kutevi jer je $p \perp \overline{AB}$ pa slijedi da je $\angle\, AMP = \angle\, BMP$.
Stranica $\overline{PM}$ je zajednička trokutima $\triangle\, AMP$ i $\triangle\, BMP$.
Budući da su po dvije stranice promatranih trokuta i kut među njima jednakih veličina, zaključujemo da su promatrani trokuti sukladni po SKS poučku o sukladnosti trokuta i pišemo $\triangle\, AMP \cong \triangle\, BMP$.

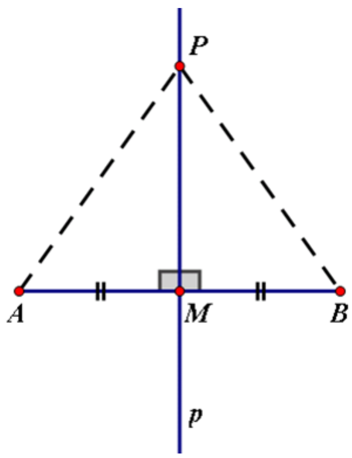
Iz toga slijedi da je |AP| = |BP| što smo i trebali dokazati.

2. DIO: Želimo dokazati da svaka točka, koja je jednako udaljena od dviju zadanih točaka, pripada pravcu koji prolazi polovištem spojnice tih dviju točaka i okomit je na tu spojnicu.

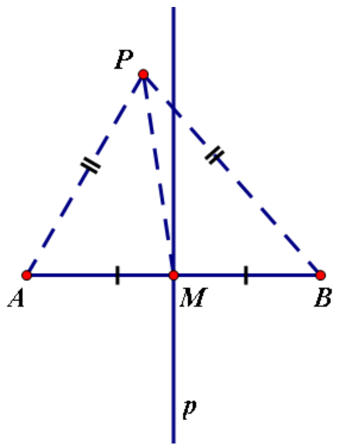
Neka su A i B dvije zadane točke, neka je P točka takva da vrijedi |AP| = |BP|, neka je M polovište dužine $\overline{AB}$, neka je $p \perp \overline{AB}$ i neka p prolazi točkom M . Želimo dokazati da točka P pripada pravcu p .
Promotrimo trokute $\triangle\, AMP$ i $\triangle\, BMP$ (Slika 1.6).
Iz početnih pretpostavki slijedi da je |AP| = |BP|.
Točka M je polovište dužine $\overline{AB}$ pa slijedi da je |AM| = |BM|.
Stranica $\overline{PM}$ je zajednička trokutima $\triangle\, AMP$ i $\triangle\, BMP$.
Budući da su sve tri odgovarajuće stranice promatranih trokuta jednakih veličina, zaključujemo da su promatrani trokuti sukladni po SSS poučku o sukladnosti trokuta i pišemo $\triangle\, AMP \cong \triangle\, BMP$.
Iz toga slijedi da je $\angle\, AMP = \angle\, BMP$. Ta dva kuta su suplementarni, a budući da su jednaki, slijedi da su ti kutevi pravi kutevi, a iz toga slijedi da je $PM \perp \overline{AB}$.

Kako je $p \perp \overline{AB}$ i $PM \perp \overline{AB}$, slijedi da se ta dva pravca podudaraju, odnosno da točka P pripada pravcu p što smo i trebali dokazati.

□



Slika 1.5: Skica za dokaz teorema 1.2.1.



Slika 1.6: Skica za dokaz teorema 1.2.1.

Teorem 1.2.2. *Geometrijsko mjesto točaka ravnine koje su jednako udaljene od krakova zadanog kuta je simetrala tog kuta.*

Dokaz. 1. DIO: Želimo dokazati da je svaka točka, koja pripada simetrali zadanog kuta, jednako udaljena od krakova tog kuta.

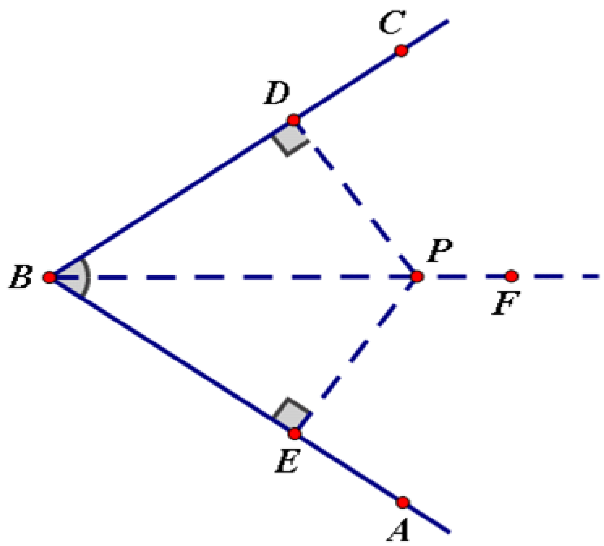
Neka je zadan kut $\angle ABC$, neka je BF simetrala kuta $\angle ABC$, neka točka P pripada polupravcu BF, neka je točka E točka na kraku BA takva da je pravac $PE \perp BA$ i neka je točka D točka na kraku BC takva da je pravac $PD \perp BC$. Želimo dokazati da je |PE| = |PD| .
Promotrimo trokute $\triangle BEP$ i $\triangle BDP$ (Slika 1.7).
Pravac BF je simetrala kuta $\angle ABC$ pa je $\angle DBP = \angle EBP$.
Kutovi $\angle BEP$ i $\angle BDP$ su pravi kutevi jer je $PE \perp BA$ i $PD \perp BC$ pa slijedi da je $\angle BEP = \angle BDP$.
Stranica $\overline{BP}$ je zajednička trokutima $\triangle BEP$ i $\triangle BDP$.
Budući da su po dva kuta promatranih trokuta i stranica nasuprot većeg kuta jednakih veličina, zaključujemo da su promatrani trokuti sukladni po KKS poučku o sukladnosti trokuta i pišemo $\triangle BEP \cong \triangle BDP$.

Iz toga slijedi da je |PE| = |PD| što smo i trebali dokazati.

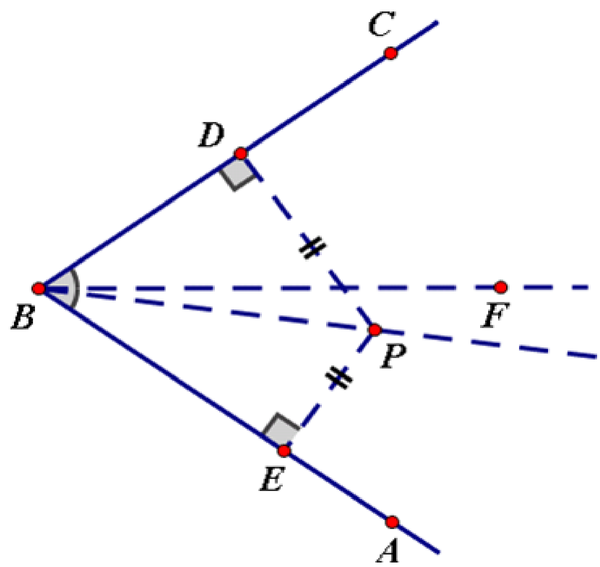
2. DIO: Želimo dokazati da svaka točka, koja je jednako udaljena od krakova zadanog kuta, pripada simetrali tog kuta.

Neka je zadan kut $\angle ABC$, neka je BF simetrala kuta $\angle ABC$, neka je P točka takva da je $PE \perp BA$, $PD \perp BC$ i da vrijedi |PE| = |PD|, pri čemu točka E pripada kraku BA, a točka D pripada kraku BC. Želimo dokazati da točka P pripada simetrali BF .
Promotrimo trokute $\triangle BEP$ i $\triangle BDP$ (Slika 1.8).
Kutovi $\angle BEP$ i $\angle BDP$ su pravi kutevi jer je $PE \perp BA$ i $PD \perp BC$ pa slijedi da je $\angle BEP = \angle BDP$.
Iz početnih pretpostavki slijedi da je |PE| = |PD|.
Stranica $\overline{BP}$ je zajednička trokutima $\triangle BEP$ i $\triangle BDP$.
Budući da su po dvije stranice promatranih trokuta i kut nasuprot veće stranice jednakih veličina, zaključujemo da su promatrani trokuti sukladni po SSK poučku o sukladnosti trokuta i pišemo $\triangle BEP \cong \triangle BDP$.
Iz toga slijedi da je $\angle DBP = \angle EBP$, odnosno da je pravac BP simetrala kuta $\angle ABC$.

Budući da je BP simetrala kuta $\angle ABC$ i BF je simetrala kuta $\angle ABC$, slijedi da se ta dva pravca podudaraju, odnosno da točka P pripada simetrali BF što smo i trebali dokazati. □



Slika 1.7: Skica za dokaz teorema 1.2.2.



Slika 1.8: Skica za dokaz teorema 1.2.2.

Korolar 1.2.3. *Geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od dva pravca koji se sijeku su simetrale kutova koje tvore ta dva pravca.*

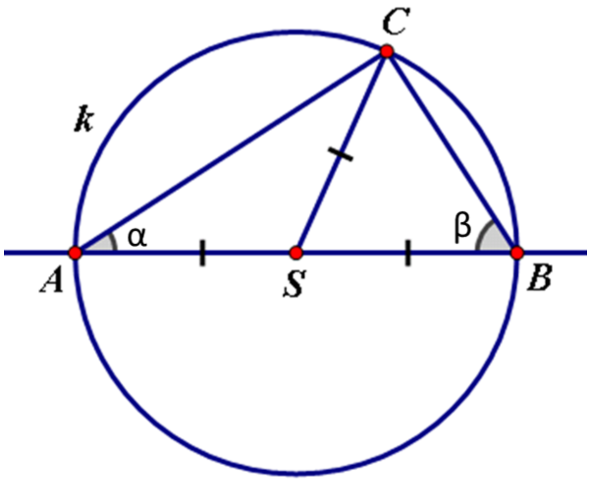
Teorem 1.2.4. *Geometrijsko mjesto vrhova pravih kutova pravokutnih trokuta kojima je zadana dužina $\overline{AB}$ hipotenuza je kružnica kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer, ali bez točaka A i B.*

Dokaz. 1. DIO: Prvo ćemo dokazati da je svaka točka koja pripada kružnici k s promjerom $\overline{AB}$ ujedno i vrh pravog kuta nekog pravokutnog trokuta kojem je $\overline{AB}$ hipotenuza.

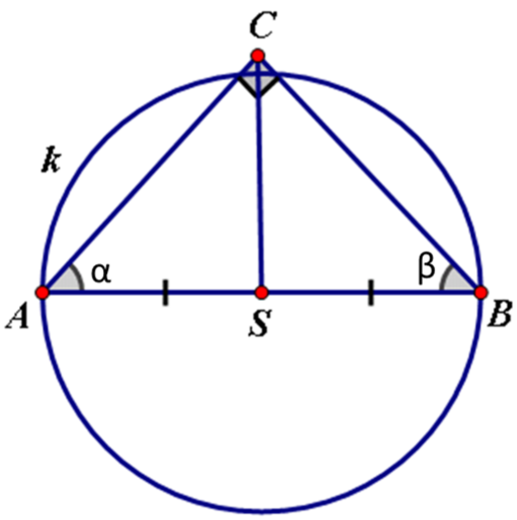
Naime, neka je C proizvoljna točka kružnice k s promjerom $\overline{AB}$, različita od A i B. Označimo s S polovište dužine $\overline{AB}$, odnosno središte kružnice k. Tada je $|AS| = |BS| = |CS|$ pa su trokuti $\triangle\ ASC$ i $\triangle\ BSC$ jednakokračni. Označimo kut $\angle\ SAC$ s α i kut $\angle\ SBC$ s β. Tada je kut $\angle ACB = \angle ACS + \angle BCS = \frac{(180^\circ - \angle CSA)}{2} + \frac{(180^\circ - \angle CSB)}{2} = 180^\circ - \frac{\angle ASB}{2} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ i time smo dokazali da je trokut $\triangle\ ABC$ pravokutan (Slika 1.9).

2. DIO: Želimo dokazati da vrh pravog kuta pravokutnog trokuta kojem je $\overline{AB}$ hipotenuza uvijek leži na kružnici kojoj je $\overline{AB}$ promjer.

Neka je dakle zadana točka C takva da je trokut $\triangle\ ABC$ pravokutan s hipotenuzom $\overline{AB}$ i neka je S polovište dužine $\overline{AB}$. Tada je $|AS| = |BS|$. Pretpostavimo suprotno, da C ne leži na kružnici s promjerom $\overline{AB}$. Tada je ili $|CS| > |AS|$, odnosno $|CS| > |BS|$, ili vrijedi $|CS| < |AS|$, odnosno $|CS| < |BS|$.
Označimo kutove $\angle\ CAB$ i $\angle\ CBA$ s α i β. Znamo da u svakom trokutu vrijedi da se nasuprot manjoj stranici nalazi manji kut. U prvom slučaju iz trokuta $\triangle\ SAC$ onda dobivamo da zbog $|CS| > |AS|$ vrijedi $\alpha > \angle SCA$, a iz trokuta $\triangle\ SBC$ dobivamo analogno $\beta > \angle SCB$. Dakle dobivamo da je $90^\circ = \alpha + \beta > \angle SCA + \angle SCB = \angle ACB = 90^\circ$ i dobili smo kontradikciju. Analogno ćemo dobiti kontradikciju i u drugom slučaju. Znači mora vrijediti $|CS| = |AS| = |BS|$ pa se C nalazi na kružnici s promjerom $\overline{AB}$ (Slika 1.10). □



Slika 1.9: Skica za dokaz teorema 1.2.4.



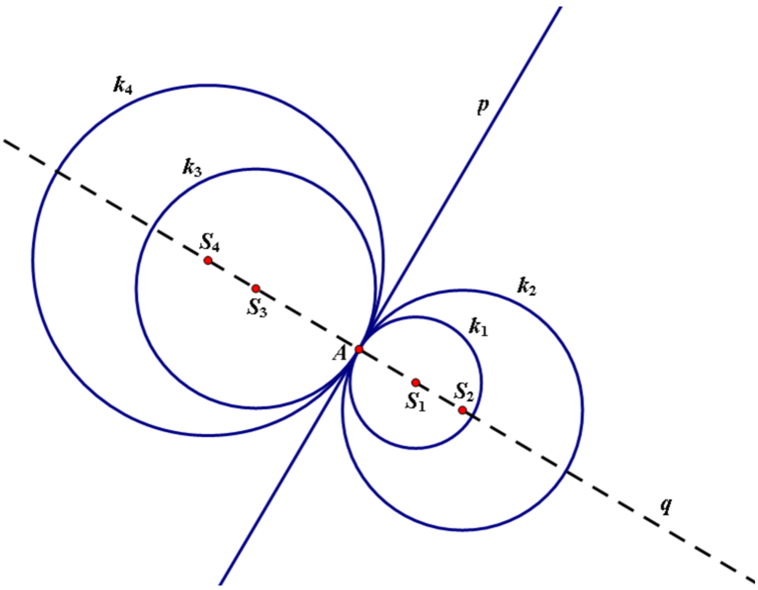
Slika 1.10: Skica za dokaz teorema 1.2.4.

1.3 Pronalaženje geometrijskih mjesta

Pokazat ćemo na još nekoliko primjera kako određujemo geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju dane uvjete.

Primjer 1.3.1. *Nađite geometrijsko mjesto središta kružnica koje dodiruju zadani pravac u zadanoj točki tog pravca.*

Najprije ćemo nacrtati pravac p i na njemu označiti proizvoljnu točku A te ćemo nacrtati nekoliko položaja kružnica koje dodiruju pravac p u točki A. Označit ćemo te kružnice redom s k_1, k_2, k_3 i k_4, a njihova središta sa S_1, S_2, S_3 i S_4. Iz skice (spajanjem središta) zaključujemo da bi traženo geometrijsko mjesto mogao biti pravac, koji prolazi točkom A i okomit je na pravac p. Taj pravac ćemo nazvati pravac q (Slika 1.11).



Slika 1.11: Primjer 1.3.1.

Dokažimo da je pravac q traženo geometrijsko mjesto točaka.

Dokaz.

1. DIO: Neka je zadan pravac p i točka A koja pripada tom pravcu i neka je q pravac koji prolazi točkom A i okomit je na pravac p. Želimo dokazati da je svaka točka koja pripada pravcu q središte kružnice koje odgovara geometrijskom opisu zadatka. Primijetimo da ako imamo proizvoljnu točku B na pravcu q, onda možemo konstruirati kružnicu k sa središtem u točki B i radijusa $r = |\mathrm{AB}|$. U tom slučaju je pravac p tangenta kružnice k s diralištem u točki A što znači da točka B zadovoljava uvjet zadatka.

2. DIO: Ako je točka R središte kružnice koja dodiruje pravac p u točki A, onda je očito $AR \perp p$. Kako je $q \perp p$ i $A \in q$, onda se pravci AR i q podudaraju pa je $R \in q$.

Time smo dokazali da je q uistinu geometrijsko mjesto opisanih točaka. □

Primjer 1.3.2. *Nađite geometrijsko mjesto središta kružnica koje dodiruju dva pravca koji se sijeku.*

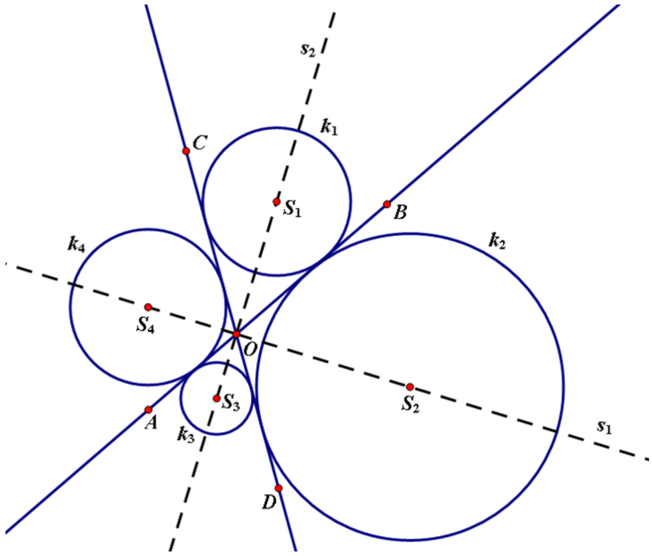
Najprije ćemo nacrtati pravce AB i CD koji se sijeku u točki O i nekoliko položaja kružnica koje dodiruju zadane pravce. Označit ćemo te kružnice redom s k_1, k_2, k_3 i k_4, a njihova središta sa S_1, S_2, S_3 i S_4. Iz skice (spajanjem središta) zaključujemo da bi traženo geometrijsko mjesto mogla biti dva međusobno okomita pravca koja raspolavljaju kutove što ih čine dva dana pravca. Te pravce ćemo nazvati s_1 i s_2 (slika 1.12).

Dokaz.

1. DIO: Neka su zadani pravci AB i CD koji se sijeku u točki O i neka je s_1 simetrala kuta $\angle AOC$, a s_2 simetrala kuta $\angle COB$. Želimo dokazati da je svaka točka koja pripada pravcu s_1 (s_2) središte kružnice koje odgovara zadanom geometrijskom opisu. Primijetimo da ako imamo proizvoljnu točku P na pravcu s_1 (s_2), onda je točka P jednako udaljena od pravaca AB i CD (Teorem 1.2.2.) pa možemo konstruirati kružnicu k sa središtem u točki P i radijusa $r = d(P,AB)$. U tom slučaju kružnica k dodiruje pravce AB i CD što znači da točka P zadovoljava uvjet zadatka.

2. DIO: Ako je točka R središte kružnice koja dodiruje pravce AB i CD, onda je očito $d(R,AB) = d(R,CD)$ pa je prema Teoremu 1.2.2 R na pravcu s_1 ili na pravcu s_2.

Time smo dokazali da su pravci s_1 i s_2 uistinu geometrijsko mjesto opisanih točaka. □



Slika 1.12: Primjer 1.3.2.

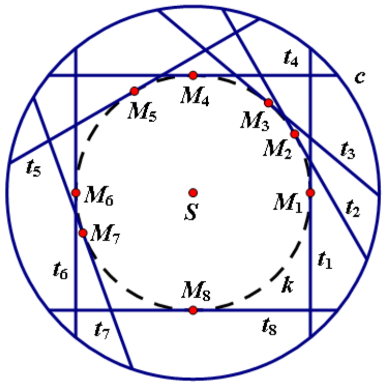
Primjer 1.3.3. *Nađite geometrijsko mjesto polovišta svih tetiva kružnice koje imaju zadanu duljinu.*

Najprije ćemo nacrtati kružnicu c i nekoliko tetiva te kružnice zadane duljine d. Označit ćemo te tetive redom s t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 itd., a njihova polovišta sa M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 itd. Iz skice (spajanjem polovišta) zaključujemo da bi traženo geometrijsko mjesto mogla biti kružnica koja je koncentrična s danom kružnicom i koja dira neku od tih tetiva. Tu kružnicu ćemo nazvati k. Primijetimo da ako radijus kružnice c jednak r, onda je radijus kružnice k jednak $\sqrt{r^2 - (\frac{d}{2})^2}$ (Slika 1.13).

Sada ćemo dokazati da je geometrijsko mjesto polovišta svih tetiva kružnice c, koje su duljine d, kružnica koncentrična kružnici c.

Dokaz.

1. DIO: Neka je zadana kružnica c sa središtem u S radijusa r. Neka je dužina $\overline{AB}$ tetiva te kružnice duljine d. Neka je P polovište tetive $\overline{AB}$. Želimo dokazati da točka P

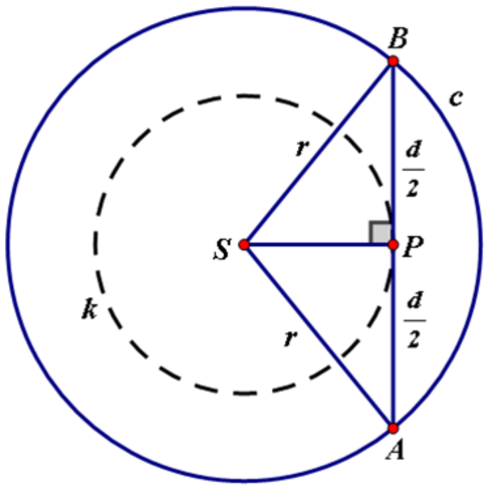


Slika 1.13: Primjer 1.3.3.

pripada kružnici k radijusa $\sqrt{r^2 - (\frac{d}{2})^2}$ koja je koncentrična kružnici c i dodiruje tetivu $\overline{AB}$.

Primijetimo da je trokut $\triangle ASB$ jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AB}$. Tada je visina iz vrha S na osnovicu $\overline{AB}$ dužina $\overline{SP}$. Tada je trokut $\triangle SPB$ pravokutan trokut s katetama $\overline{SP}$ i $\overline{PB}$ i hipotenuzom $\overline{SB}$ (Slika 1.14). Budući da je |SB|=r i |PB|=$\frac{d}{2}$ i trokut $\triangle SPB$ je pravokutan, možemo primijeniti Pitagorin poučak i izračunati da je |SP|= $\sqrt{r^2 - (\frac{d}{2})^2}$. Iz toga slijedi da točka P pripada kružnici k sa središtem u S. Kako je $\overline{SP} \perp \overline{AB}$, slijedi da ta kružnica dodiruje tetivu $\overline{AB}$.

2. DIO: Neka je zadana proizvoljna duljina d i neka je k kružnica sa središtem u S radijusa $\sqrt{r^2 - (\frac{d}{2})^2}$ pri čemu je r radijus kružnice c koncentrične kružnici k. Neka je P proizvoljna točka kružnice k. Želimo dokazati da je točka P polovište tetive kružnice c duljine d.
Spojimo točke S i P i konstruirajmo pravac p kroz točku P okomit na dužinu $\overline{SP}$. Označimo točke presjeka pravca p i kružnice c s A i B. Spojimo točke A i B i dobijemo tetivu kružnice c. Primijetimo da je trokut $\triangle ASB$ jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AB}$ i krakovima duljine r. Dužina $\overline{SP}$ je visina iz vrha S na osnovicu $\overline{AB}$ te je trokut $\triangle SPB$ pravokutan trokut s katetama $\overline{SP}$ i $\overline{PB}$ i hipotenuzom $\overline{SB}$ (Slika 1.14). Budući da je |SP|= $\sqrt{r^2 - (\frac{d}{2})^2}$ i |SB|=r i trokut $\triangle SPB$ je pravokutan, možemo primijeniti Pitagorin poučak i izračunati da je |PB|=$\frac{d}{2}$. Na analogan način možemo izračunati da je i |PA|=$\frac{d}{2}$ iz čega slijedi da je točka P polovište tetive $\overline{AB}$ duljine d kružnice c što smo i htjeli dokazati. $\square$



Slika 1.14: Primjer 1.3.3. - dokaz

1.4 Presjeci geometrijskih mjesta

U ovom radu smo se dosada ograničavali na pronalaženja točaka koje zadovoljavaju samo jedan uvjet. Ponekad točka mora zadovoljiti dva dana uvjeta. U tom slučaju svaki uvjet će određivati traženo mjesto točaka. Tražene točke će tada biti presjek dva geometrijska mjesta jer će jedino te točke pripadati skupu koji predstavlja dva dana uvjeta.

Prema tome, kako bi pronašli točku (ili točke) koje zadovoljavaju dva uvjeta, trebamo nacrtati mjesto točaka za svaki od uvjeta. Točka (ili točke) u kojima se ta dva mjesta presijecaju će biti tražena točka (ili točke).

Pri rješavanju problema koji uključuje presijecanje mjesta točaka, važno je zadane objekte (točke) smjestiti u najopćenitiji položaj kako bi odredili općenito rješenje problema. Nakon toga, u diskusiji koja prati općenito rješenje, razmatramo specijalne položaje danih objekata (točaka) i rješenja tih specijalnih slučajeva.

Primjer 1.4.1. *Pronađite sve točke koje su od fiksne točke A udaljene za danu udaljenost d i koje su jednako udaljene od dviju točaka B i C .*

Dane su točke A, B i C. Tražimo sve točke koje su od točke A udaljene za duljinu d i koje su jednako udaljene od točaka B i C .

1) Pravac s koji je simetrala dužine $\overline{BC}$ je geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od točaka B i C (Teorem 1.2.1.).

2) Kružnica k sa središtem u točki A i radijusa d je geometrijsko mjesto točaka koje su od točke A udaljene za danu udaljenost d.

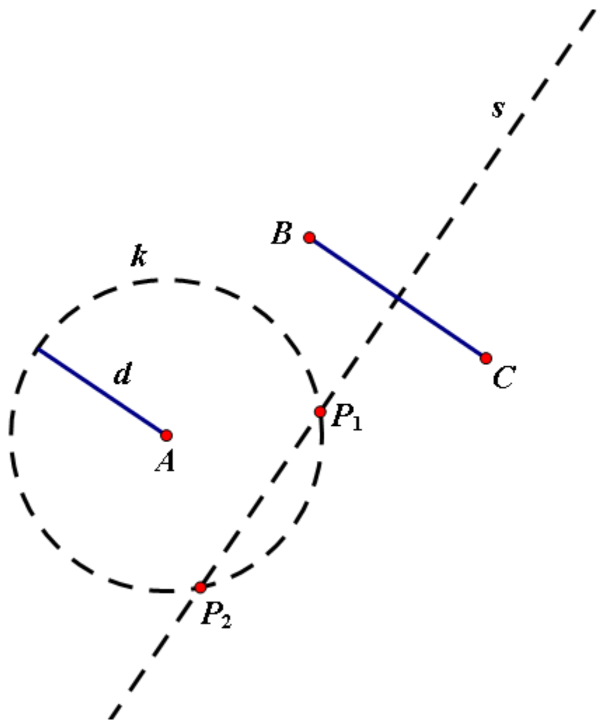
3) Tražene točke su točke P_1 i P_2, točke presjeka simetrale s i kružnice k (Slika 1.15).

Diskusija:

1) Ako je simetrala s tangenta kružnice k, onda će samo jedna točka zadovoljavati tražene uvjete.

2) Ako simetrala s ne dodiruje i ne siječe kružnicu (ako je udaljenost simetrale s od točke A veća od d), onda ne postoje točke koje zadovoljavaju tražene uvjete.

3) Broj točaka koje zadovoljavaju tražene uvjete ne može biti veći od dvije točke.



Slika 1.15: Primjer 1.4.1.

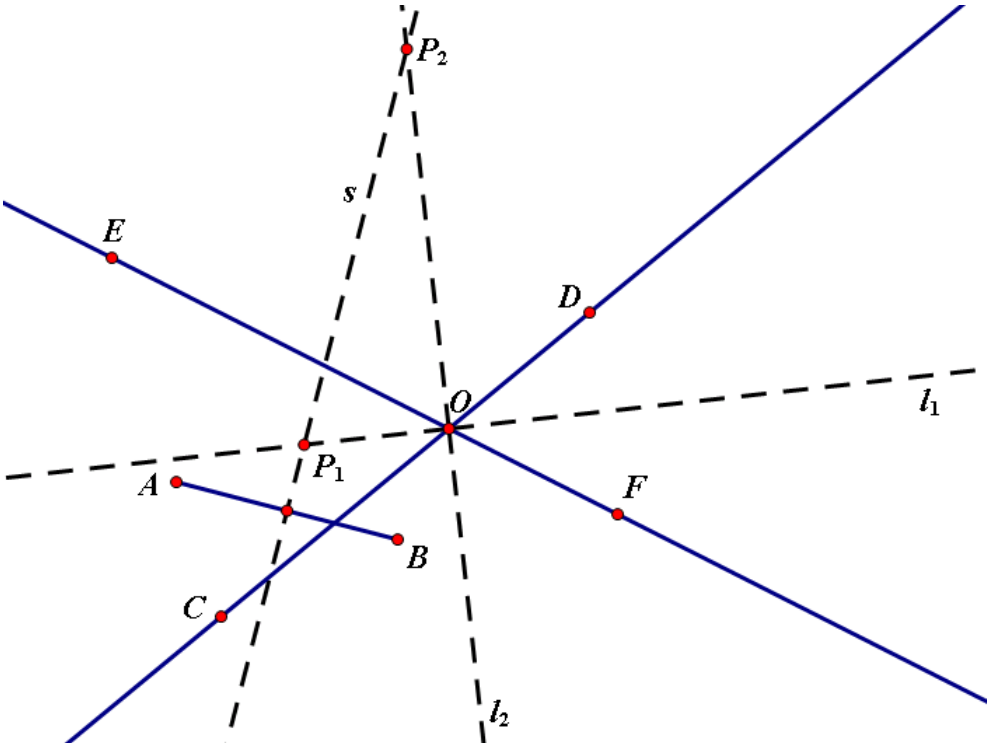
Primjer 1.4.2. *Pronađite sve točke koje su jednako udaljene od dviju fiksnih točaka i jednako udaljene od dvaju pravaca koji se sijeku.*

Dane su točke A i B i pravci CD i EF koji se sijeku u točki O. Tražimo sve točke koje su jednako udaljene od točaka A i B i koje su jednako udaljene od pravaca CD i EF.

1) Pravac s koji je simetrala dužine $\overline{AB}$ je geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od točaka A i B (Teorem 1.2.1.).

2) Geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od pravaca CD i EF je l_1, simetrala kuta $\angle COE$ i l_2, simetrala kuta $\angle EOD$ (Korolar 1.2.3.).

3) Tražene točke su točka P_1, točka presjeka simetrale s i simetrale l_1 i P_2, točka presjeka simetrale s i simetrale l_2 (Slika 1.16).



Slika 1.16: Primjer 1.4.2.

Diskusija:

1) Ako je $s \parallel l_1$ (ili $s \parallel l_2$), onda će tražene uvjete zadovoljavati samo jedna točka.
2) Ako se simetrala s podudara sa simetralom l_1 ili simetralom l_2, onda će tražene uvjete zadovoljavati beskonačno mnogo točaka.
3) U svim ostalim slučajevima će tražene uvjete zadovoljavati dvije točke.

Poglavlje 2

Metoda geometrijskih mjesta u geometrijskim konstrukcijama

2.1 Metoda presjeka

U ovom poglavlju ćemo prikazati jednu od konstruktivnih metoda pri kojoj se traženi objekt konstruira kao presjek geometrijskih mjesta točaka. S tom problematikom smo se već susreli na kraju prvog poglavlja. Geometrijska mjesta potrebna za konstrukciju dobivaju se raščlanjivanjem zadanih uvjeta. Uvjet zadatka se dakle rastavi na više dijelova i onda odredimo geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju svaki od tih uvjeta posebno. Možemo zaključiti da je za primjenu metode presjeka potrebno znati što više teorijskih rezultata o geometrijskim mjestima točaka. Neke od tih rezultata smo dokazali u prvom poglavlju.

U nastavku ćemo navesti geometrijska mjesta točaka koja češće dolaze u zadacima i objasnit ćemo kako se konkretno ti skupovi konstruiraju ravnalom i šestarom.

Primjeri najčešće uporabljenih geometrijskih mjesta točaka:

1) Geometrijsko mjesto točaka ravnine koje su udaljene od neke čvrste točke S za konstantnu duljinu d je kružnica sa središtem u S i polumjerom d. Tu kružnicu konstruiramo tako da konstruiramo polupravac s početkom u točki S, a zatim šestarom nanesemo na taj polupravac, od točke S, dužinu $\overline{SA}$ duljine d. Tražena kružnica je kružnica sa središtem u S koja prolazi točkom A.

2) Geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od dviju čvrstih točaka A i B je simetrala dužine $\overline{AB}$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ je okomica na tu dužinu koja prolazi njenim polovištem. Tu okomicu konstruiramo tako da u otvor šestara uzmemo dužinu duljine d dulju od polovine dužine $\overline{AB}$ i konstruiramo kružnicu k_1 sa središtem u

A radijusa d i kružnicu k_2 sa središtem u B radijusa d. Presjeke kružnica k_1 i k_2 označimo s P_1 i P_2 i konstruiramo pravac s koji prolazi točkama P_1 i P_2. Taj pravac je tražena simetrala dužine $\overline{AB}$.

3) Geometrijsko mjesto točaka koje su sve udaljene od nekog pravca p za duljinu d jesu dva pravca a i b koji su paralelni sa p i od njega na obje strane udaljeni za d. Ta dva pravca konstruiramo tako da na pravcu p odaberemo dvije proizvoljne točke A i B i druge dvije točke C i D. Nakon toga konstruiramo simetralu s_1 dužine $\overline{AB}$ i simetralu s_2 dužine $\overline{CD}$ na način koji je opisan u točki 2). Presjeci simetrala s pravcem p su polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ koja ćemo označiti redom s M_1 i M_2. Nakon toga konstruiramo kružnicu k_1 sa središtem u M_1 radijusa d i k_2 sa središtem u M_2 radijusa d na način koji je opisan u točki 1). Označimo točke presjeka kružnice k_1 i simetrale s_1 s P_1 s jedne strane pravca p i s Q_1 s druge strane pravca p te presjeke kružnice k_2 i simetrale s_2 s P_2 s one strane pravca p na kojoj se nalazi i točka P_1 i s Q_2 s druge strane pravca p. Pravac koji prolazi točkama P_1 i P_2 je traženi pravac a, a pravac koji prolazi točkama Q_1 i Q_2 je traženi pravac b.

4) Geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od dva neparalelna pravca su dva međusobno okomita pravca koja raspolavljaju kutove što ga čine dva dana pravca. Označimo dane pravce s p i q, a njihovo sjecište sa S. Konstruirajmo kružnicu sa središtem u S proizvoljnog radijusa i označimo presjeke te kružnice s pravcem p s A i C, a s pravcem q s B i D. Nakon toga u otvor šestara uzmemo dužinu duljine d koja je dulja od polovine dužine $\overline{AB}$ i konstruiramo kružnicu k_1 sa središtem u A radijusa d i kružnicu k_2 sa središtem u B radijusa d. Označimo presjeke tih dviju kružnica s P_1 i P_2. Zatim u otvor šestara uzmemo dužinu duljine l koja je dulja od polovine dužine $\overline{BC}$ i konstruiramo kružnicu c_1 sa središtem u B radijusa l i kružnicu c_2 sa središtem u C radijusa l. Označimo presjeke tih dviju kružnica s Q_1 i Q_2. Pravac s_1 koji prolazi točkama P_1 i P_2 i pravac s_2 koji prolazi točkama Q_1 i Q_2 su tražena dva međusobno okomita pravca koja raspolavljaju kutove što ga čine dva dana pravca.

5) Geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dana dužina vidi pod danim kutom dva su kružna luka nad danom dužinom takva da je svaki obodni kut nad danom dužinom jednak danom kutu. Ako je dana dužina $\overline{AB}$, tada te lukove najlakše konstruiramo ovako: nanesemo dani kut α tako da mu je A vrh i AB jedan krak. Središte O kružnog luka l_1 se sada nalazi na osi dužine $\overline{AB}$ i na okomici kroz A na drugi krak nanesenog kuta. Očito postoje dva takva kružna luka. Drugi luk l_2 je simetričan luku l_1 s obzirom na dužinu AB.

6) Geometrijsko mjesto polovišta svih međusobno jednakih tetiva dane kružnice je kružnica koja je koncentrična s danom kružnicom i koja dira neku od tih tetiva.

Ako je dana kružnica c sa središtem u S i njezina tetiva $\overline{AB}$ duljine d, onda traženu kružnicu konstruiramo ovako: konstruiramo simetralu tetive $\overline{AB}$ na već poznati način i označimo presjek te simetrale i dužine $\overline{AB}$ s P. Točka P je tada polovište tetive $\overline{AB}$. Kružnica k sa središtem u S koja prolazi točkom P je tražena kružnica.

7) Geometrijsko mjesto točaka iz kojih se dana kružnica k vidi pod danim kutom je kružnica koncentrična sa zadanom kružnicom. Ako se kružnica iz neke točke vidi pod kutom α, onda je kut između tangenti iz te točke na kružnicu jednak α. Ako je dana kružnica k sa središtem u S i kut α, onda tražene točke konstruiramo ovako: konstruiramo proizvoljan radijus kružnice k i presjek tog radijusa i kružnice označimo s A. Zatim nanesemo kut veličine $180° - \alpha$ tako da mu jedan krak bude dužina $\overline{SA}$, a drugi krak mu je dužina $\overline{SB}$ pri čemu je B točka kružnice k. Konstruiramo tangente na kružnicu k u točkama A i B i označimo ih redom s t_1 i t_2. Označimo presjek tangenti t_1 i t_2 s P. Traženo mjesto je kružnica sa središtem u S koja prolazi točkom P.

8) Geometrijsko mjesto točaka za koje udaljenosti do dvije čvrste točke stoje u omjeru $m : n \neq 1$ je kružnica. Ta se kružnica konstruira tako da se odrede točke P i Q koje iznutra i izvana dijele $\overline{AB}$ u omjeru $m : n$. Kružnica kojoj je $\overline{PQ}$ promjer je tražena kružnica.

9) Geometrijsko mjesto središta kružnica koje imaju jednake polumjere r i koje presijecaju danu kružnicu k u jednakim tetivama su dvije kružnice koncentrične danoj kružnici. Te kružnice lako konstruiramo ako konstruiramo središta dviju kružnica koje zadovoljavaju dani uvjet. Označimo proizvoljnu točku A na kružnici k i konstruiramo kružnicu c koja ima polumjer jednak duljini zadane tetive. Odaberemo jedno sjecište kružnica k i c te ga označimo s B. Konstruiramo simetralu dužine $\overline{AB}$ te kružnicu k_1 sa središtem u točki A i zadanim radijusom r kružnica čija središta tražimo. Nađemo sjecište k_1 i simetrale i dobili smo dva tražena središta kružnica. Označimo ih sa S_1 i S_2. Ako je O središte kružnice k, onda traženo geometrijsko mjesto čine kružnice sa središtem u O i radijusima $|OS_1|$ i $|OS_2|$.

2.2 Geometrijske konstrukcije

Pogledajmo sada kako metoda geometrijskih mjesta funkcionira na nekoliko jednostavnih primjera.

Primjer 2.2.1. *Konstruirajmo trokut* $\triangle ABC$ *kojemu su zadane duljine sve tri stranice* a, b *i* c.

Lako se konstruiraju vrhovi A i B traženog trokuta na udaljenosti c.
Treći vrh C mora zadovoljavati sljedeća dva uvjeta:

1) Točka C mora biti udaljena od točke A za duljinu b.

2) Točka C mora biti udaljena od točke B za duljinu a.

Skup svih točaka koje zadovoljavaju prvi uvjet je kružnica sa središtem u točki A i polumjera b.
Skup svih točaka koje zadovoljavaju drugi uvjet je kružnica sa središtem u točki B i polumjera a.

Konstrukciju provodimo ovako:

1) Stranica $\overline{AB}$: A, polupravac AD, B=$AD \cap k(A, c)$.

2) Kružnica $k(A, b)$.

3) Kružnica $k(B, a)$.

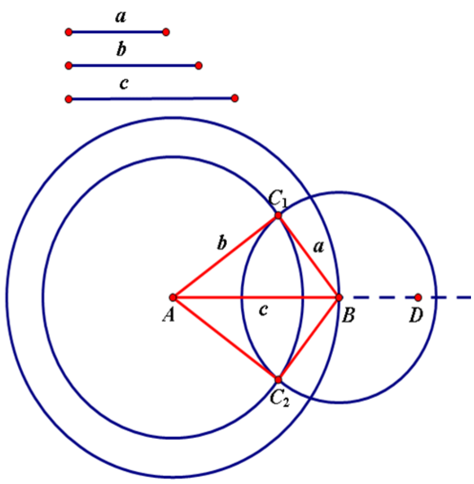
4) Vrh C: $k(A, b) \cap k(B, a)$ (C_1, C_2).

5) Rješenja: trokuti $\triangle ABC_1$ i $\triangle ABC_2$ (Slika 2.1).

Rješenje, odnosno trokut $\triangle ABC$ postoji točno onda ako tri zadane dužine ispunjavaju nejednakost trokuta, tj. ako je

$$c < a + b, a < b + c, b < a + c.$$

Ako je ispunjen taj uvjet, onda se kružnice $k(A, b)$ i $k(B, a)$ sijeku u dvije točke C_1 i C_2 pa možemo reći da uz poznati čvrsti položaj stranice $\overline{AB}$ dobivamo dva trokuta, ali s obzirom



Slika 2.1: Primjer 2.2.1.

da su oni međusobno sukladni, zadatak ima jedno rješenje.
U slučaju $c = a + b$ traženi trokut $\triangle ABC$ degenerira u dužinu $\overline{AB}$, odnosno točka C padne na tu dužinu.

Primjer 2.2.2. *Konstruirajmo trokut $\triangle ABC$ kojemu su zadane duljine dviju njegovih stranica a i b i duljina visine iz vrha A v_a.*

Lako se konstruiraju vrhovi B i C traženog trokuta na udaljenosti a.
Treći vrh A mora zadovoljavati sljedeća dva uvjeta:

1) Točka A mora biti udaljena od točke C za duljinu b.

2) Točka A mora biti udaljena od pravca BC za duljinu v_a.

Skup svih točaka koje zadovoljavaju prvi uvjet je kružnica sa središtem u točki C i polumjera b.
Skup svih točaka koje zadovoljavaju drugi uvjet su dva pravca paralelna s pravcem BC i od njega udaljena za v_a.

Konstrukciju provodimo ovako:

1) Stranica $\overline{BC}$: B, polupravac BD, C=$BD \cap k(B, a)$.

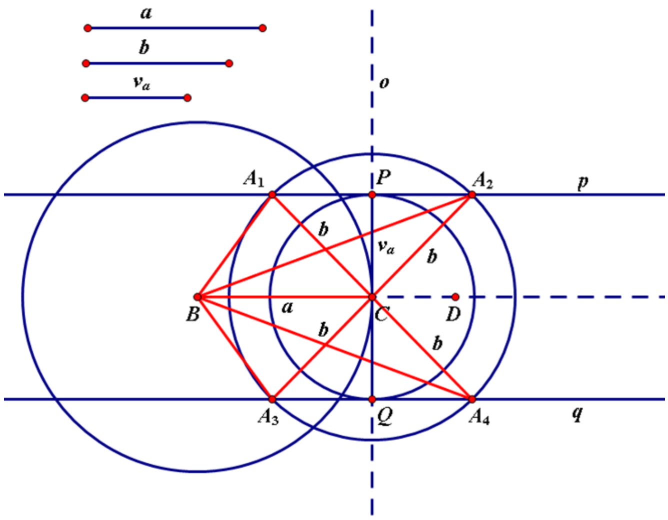
2) Kružnica $k(C, b)$.

3) Okomica o točkom C na pravac BC, P, $Q \in o \cap k(C, v_a)$.

4) Pravci p i q točkama P i Q paralelni s pravcem BC.

5) Vrh A: $p \cap k(C, b)$, $q \cap k(C, b)$ (A_1, A_2, A_3, A_4).

6) Rješenja: trokuti $\triangle\ BCA_1$, $\triangle\ BCA_2$, $\triangle\ BCA_3$, $\triangle\ BCA_4$ (Slika 2.2).



Slika 2.2: Primjer 2.2.2.

Zadatak ima 0, 2 ili 4 rješenja, već prema tome je li b manji, jednak ili veći od v_a. U slučaju kad zadatak ima dva ili četiri rješenja, po dva rješenja su sukladna, što znači da zadatak ima jedno ili dva bitno različita rješenja.

Primjer 2.2.3. *Zadana je točka A na pravcu a i točka P različita od A. Konstruirajmo kružnicu k koja prolazi točkom P i dira pravac a u točki A.*

Razlučimo i ovdje dva nezavisna uvjeta:

1) Geometrijsko mjesto središta svih kružnica koje diraju pravac a u točki A je okomica l kroz A na pravac a.

2) Geometrijsko mjesto središta svih kružnica koje prolaze točkama P i A je simetrala s dužine $\overline{PA}$.

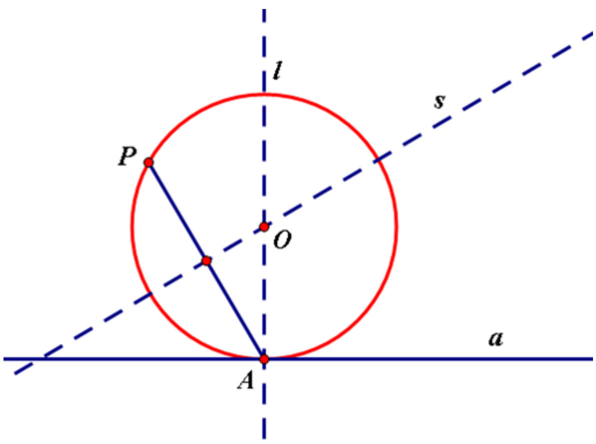
Konstrukciju provodimo ovako:

1) Konstruiramo okomicu l kroz A na pravac a.

2) Konstruiramo simetralu s dužine $\overline{PA}$.

3) Odredimo sjecište O pravaca l i s.

4) Konstruiramo traženu kružnicu sa središtem u O i polumjerom |OP| (ili |OA|) (Slika 2.3).



Slika 2.3: Primjer 2.2.3.

Uz uvjet da točka P ne pripada pravcu a, postoji uvijek jedno rješenje.

Primjer 2.2.4. *Dane su dvije točke A i B. Konstruirajmo kružnicu k danog polumjera r koja prolazi točkom A, a iz točke B se vidi pod kutom α.*

Razlučimo i ovdje dva nezavisna uvjeta:

1) Skup svih točaka iz kojih se dana kružnica s sa središtem u O vidi pod kutom α je kružnica sa središtem u O, radijusa $|OP|$, gdje je P neka točka iz koje se kružnica s vidi pod kutom α.

2) Skup svih središta kružnica radijusa r koje prolaze točkom A je kružnica l sa središtem u A radijusa r.

Konstrukciju provodimo ovako:

1) Konstruiramo najprije kružnicu $s(O, r)$ u bilo kojem položaju i neku točku P iz koje se ta kružnica vidi pod danim kutom α na način koji je opisan u točki 7) na početku ovog poglavlja (Slika 2.4 a). Sve takve točke P se tada nalaze na kružnici polumjera |OP| koncentričnoj kružnici s.

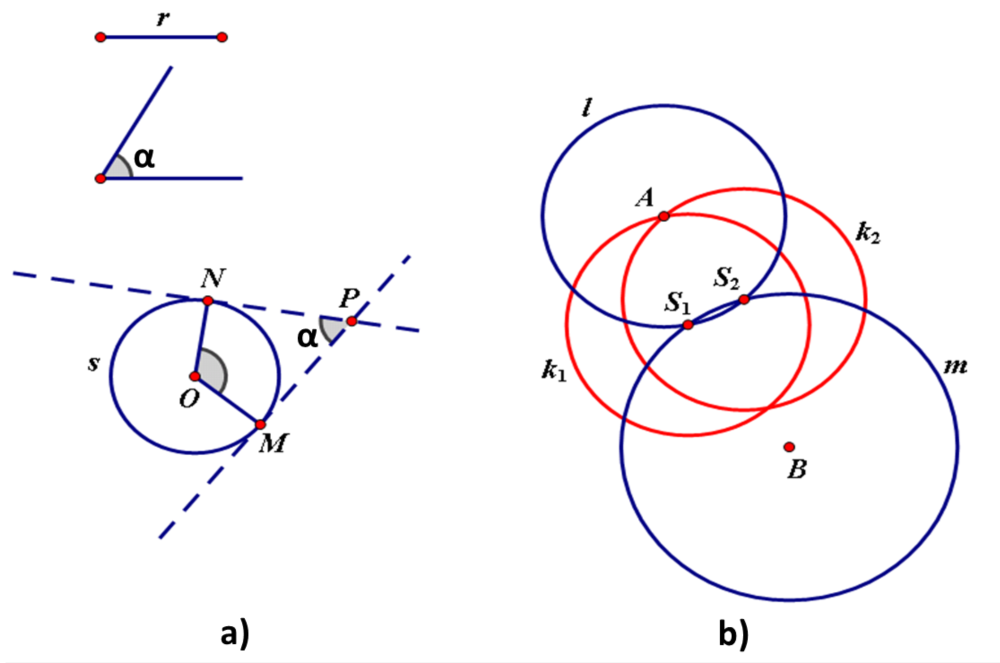
2) Konstruiramo kružnicu $l(A, r)$.

3) Konstruiramo kružnicu $m(B,$|OP|$)$.

4) Odredimo sjecišta S_1 i S_2 kružnica l i m.

5) Konstruiramo tražene kružnice k_1 i k_2 sa središtima u S_1 i S_2 i polumjerom r (Slika 2.4 b).

Ako je |AB| < r+|OP|, tada je iz slike vidljivo da postoje dva rješenja (središta S_1 i S_2). Ako je |AB|=r+|OP|, tada postoji samo jedno rješenje, a ako je |AB| > r+|OP|, ne postoje rješenja.



Slika 2.4: Primjer 2.2.4.

Poglavlje 3

Geometrijska mjesta u programima dinamičke geometrije

U prvom poglavlju ovog rada smo napomenuli da možemo naslutiti koji bi skup mogao biti traženo geometrijsko mjesto točaka tako da prostoručno nacrtamo nekoliko pojedinačnih slučajeva i procijenimo o kojem bi se skupu moglo raditi. S obzirom da je geometrijski uvjet ponekad presložen za crtanje, možemo se poslužiti i nekim od programa dinamičke geometrije. Alati dinamičke geometrije koji se najčešće koriste u školi su GeoGebra i Sketchpad. U ovom poglavlju ćemo objasniti kako pronalazimo geometrijsko mjesto točaka pomoću programa Sketchpad.

Geometrijsko mjesto smo već definirali kao skup svih mogućih pozicija objekta koji zadovoljava neke specifične uvjete. U Sketchpadu pomoću naredbe „Locus" možemo konstruirati skup svih mogućih položaja objekta koji ovisi o točki koja se pomiče duž generirajuće staze ili nekom parametru.
Točka koja se kreće stazom ili parametar koji varira zove se generator.
Put kojim se kreće točka (generator) ili numerička domena unutar koje parametar varira naziva se generirajuća staza.
Objekt koji se dobiva iz generatora nekim pravilom zove se generirani objekt.

Za opće matematičke lokuse, broj mogućih pozicija je beskonačan. Stvaranje takvog lokusa u Sketchpadu bi potrajalo dugo vremena i zahtjevalo bi puno memorije, pa se korištenjem Sketchpadovog alata „Locus" generira konačan (ali potencijalno velik) broj pozicija objekta. Svaka pozicija u ovom skupu se zove uzorak.

Kako bi konstruirali lokus, prvo moramo konstruirati generirani objekt, odnosno objekt čiji lokus želimo konstruirati, i to na takav način da on ovisi o generatoru. Ako je generator točka na stazi, domena generatora je ta staza (ako je ona konačne duljine) ili podskup staze (ako je staza beskonačna). Ako je generator parametar, onda moramo odrediti domenu kada konstruiramo lokus. Kada smo konstruirali sve potrebne objekte, tada geometrijsko mjesto dobivamo na sljedeći način:

1) Označimo generator i generirani objekt.

2) U izborniku "Construct" odaberemo alat "Locus".

Geometrijsko mjesto točaka možemo promatrati i pomoću traga i animiranja i to na sljedeći način:

1) Označimo generirani objekt (objekt čiji lokus tražimo) i u izborniku "Display" odaberemo alat "Trace point".

2) Označimo generator i u izborniku "Display" odaberemo alat "Animate".

3) Trag kojeg ostavlja generirani objekt je traženo geometrijsko mjesto.

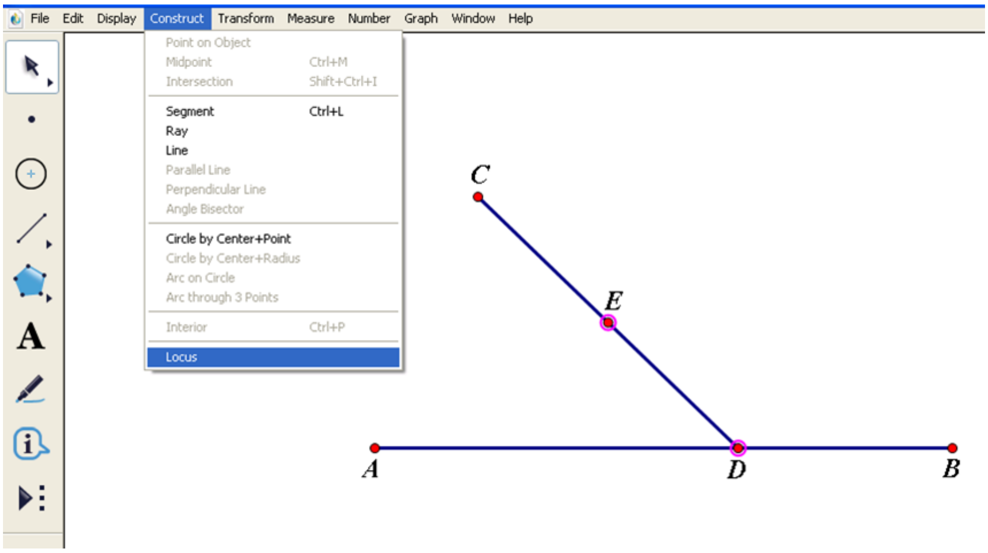
Pogledajmo kako funkcionira pronalaženje geometrijskog mjesta točaka pomoću alata dinamičke geometrije, u ovom slučaju pomoću Sketchpada, na nekoliko primjera:

Primjer 3.0.5. *Nacrtajmo dužinu $\overline{AB}$ i točku C izvan te dužine. Neka je D proizvoljna točka dužine $\overline{AB}$ i E polovište dužine $\overline{CD}$. Odredimo sve moguće položaje točke E.*

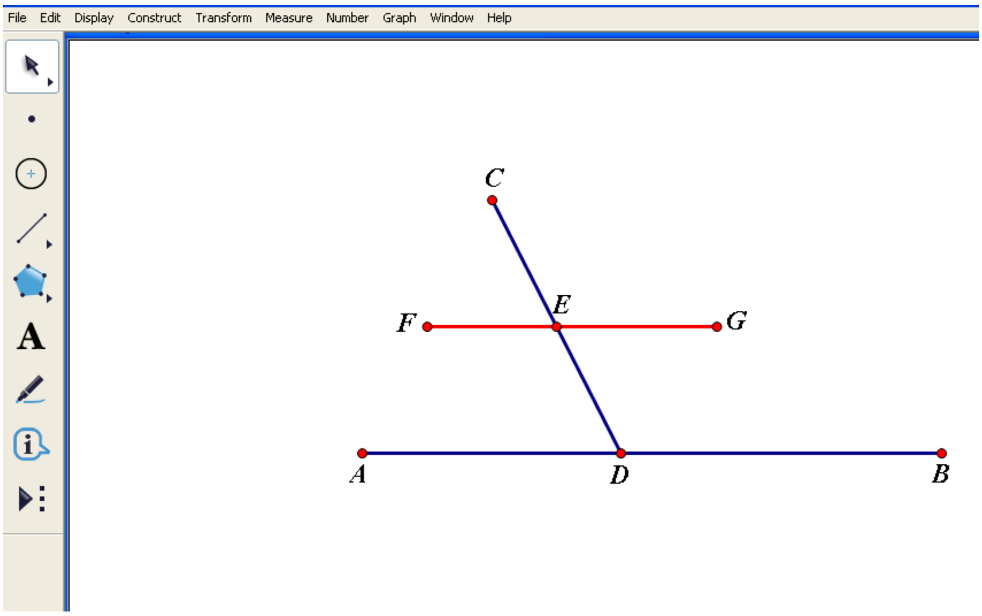
Najprije ćemo nacrtati dužinu $\overline{AB}$ i točku C izvan te dužine. Zatim odaberemo proizvoljnu točku D na $\overline{AB}$ (mora se moći po njoj pomicati) i konstruiramo točku E koja je polovište dužine $\overline{CD}$. Označimo točke D i E i možemo primijeniti alat "Locus" (Slika 3.1). Dobije se dužina $\overline{FG}$ koja je paralelna s dužinom $\overline{AB}$ (Slika 3.2). Ako izmjerimo te dvije dužine, zaključujemo da je |AB| = 2|FG|. Analogno rješenje bi dobili da smo uključili trag točke E i animirali točku D. Matematički to možemo opravdati na sljedeći način.

1. DIO: Točke F i G koje su polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ zadovoljavaju dani geometrijski opis. Neka je D točka na $\overline{AB}$ koja se ne podudara s A i B i neka je E polovište dužine $\overline{CD}$. Onda je $\overline{FE}$ srednjica trokuta $\triangle ADC$ pa je E na dužini $\overline{FG}$ (Slika 3.3).

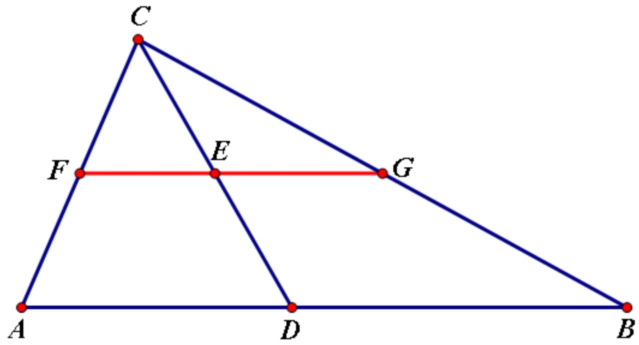
2. DIO: Neka su F i G polovišta $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, neka je E na $\overline{FG}$ i neka je točka D presjek pravca CE i dužine $\overline{AB}$ (Slika 3.3). Onda je $\overline{FG}$ srednjica u trokutu $\triangle ABC$ i $\overline{FG} \| \overline{AB}$. Onda su i trokuti $\triangle FCE$ i $\triangle ACD$ slični pa iz omjera dobivamo da je $|CD| = 2|CE|$ pa je E polovište od $\overline{CD}$.



Slika 3.1: Primjer 3.0.5.



Slika 3.2: Primjer 3.0.5.



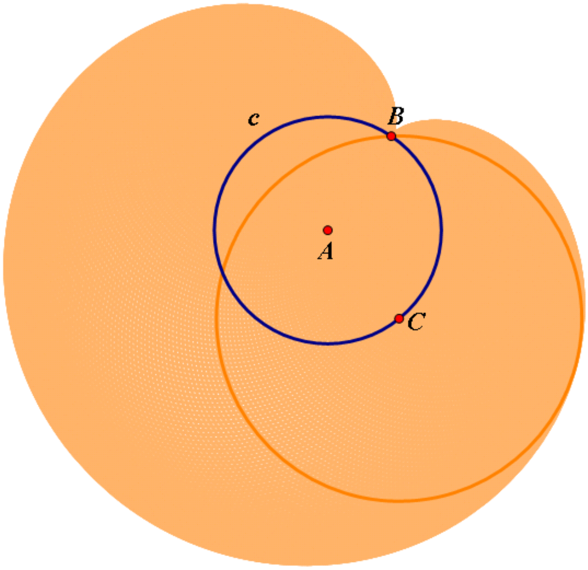
Slika 3.3: Primjer 3.0.5.

Primjer 3.0.6. *Zadane su točke A i B i kružnica c sa središtem u A koja prolazi točkom B. Neka je C proizvoljna točka kružnice c. Konstruirajmo kružnicu k sa središtem u točki C koja prolazi kroz točku B. Konstruirajmo sve takve kružnice k.*

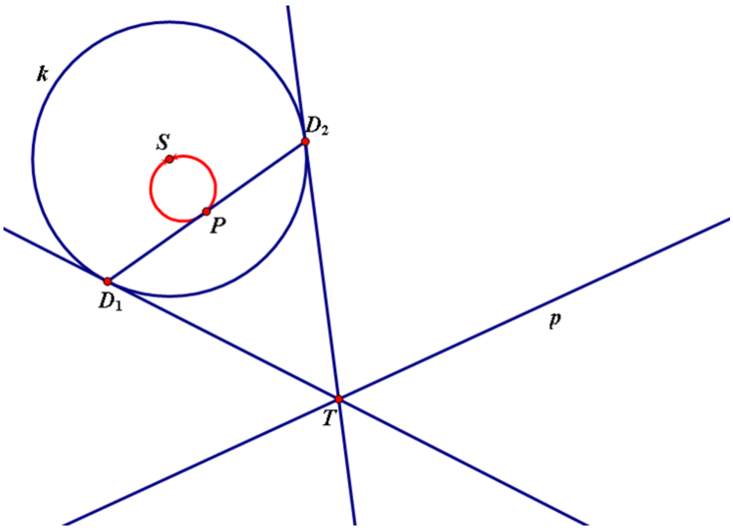
Najprije ćemo nacrtati kružnicu c sa središtem u A koja prolazi točkom B. Zatim odaberemo proizvoljnu točku C na kružnici c (mora se moći po njoj pomicati) i konstruiramo kružnicu k sa središtem u točki C koja prolazi kroz točku B. Označimo točku C i kružnicu k i možemo primijeniti alat "Locus" (Slika 3.4). Na slici vidimo geometrijsko mjesto svih položaja kružnice k. Analogno rješenje bi dobili da smo uključili trag kružnice k i animirali točku C.

Primjer 3.0.7. *Nacrtajmo pravac p, točku T na pravcu p i kružnicu k. Konstruirajmo točku P koja je polovište dužine $\overline{D_1D_2}$ pri čemu su D_1 i D_2 dirališta tangenti na kružnicu k iz točke T. Odredimo lokus tog polovišta.*

Najprije ćemo nacrtati pravac p i kružnicu k sa središtem u S. Zatim odaberemo proizvoljnu točku T na pravcu p (mora se moći po njemu pomicati). Konstruiramo dužinu $\overline{ST}$ i njezino polovište M, a nakon toga konstruiramo kružnicu sa središtem u točki M koja prolazi točkama S i T. Presjeci te kružnice i kružnice k su točke D_1 i D_2 koje su dirališta tangenti na kružnicu k iz točke T. Konstruiramo točku P koja je polovište dužine $\overline{D_1D_2}$. Označimo točku T i točku P i možemo primijeniti alat "Locus". Dobije se kružnica koja prolazi središtem S kružnice k (Slika 3.5). Analogno rješenje bi dobili da smo uključili trag točke P i animirali točku T.



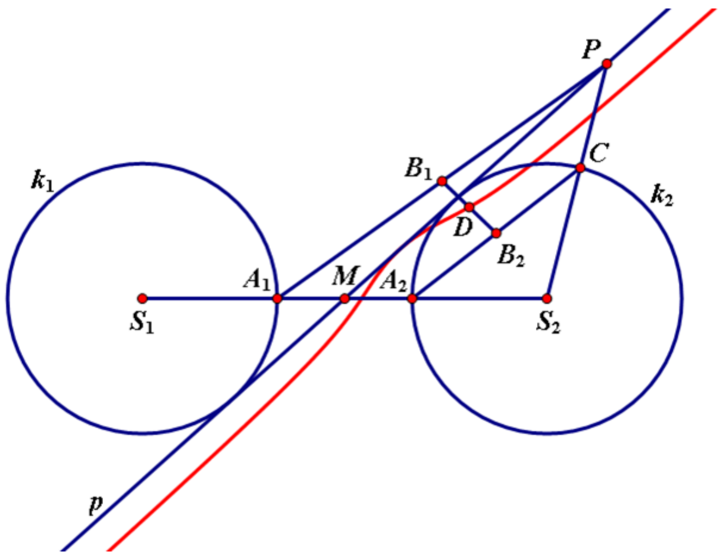
Slika 3.4: Primjer 3.0.6.



Slika 3.5: Primjer 3.0.7.

Primjer 3.0.8. *Konstruirajmo dvije kružnice k_1 i k_2 radijusa 3 sa središtima S_1 i S_2 čija su središta udaljena za 9 i pravac p koji prolazi polovištem dužine $\overline{S_1S_2}$ i dodiruje obje kružnice. Dužina $\overline{S_1S_2}$ siječe kružnice redom u točkama A_1 i A_2. Neka je P proizvoljna točka pravca p. Označimo s B_1 polovište dužine $\overline{PA_1}$, a s B_2 polovište dužine $\overline{A_2C}$ pri čemu je točka C presjek kružnice k_2 i dužine $\overline{PS_2}$. Odredimo sve moguće položaje točke D koja je polovište dužine $\overline{B_1B_2}$ kad se P pomiče po pravcu p.*

Najprije ćemo nacrtati kružnice k_1 i k_2 sa središtima S_1 i S_2 te ćemo konstruirati dužinu $\overline{S_1S_2}$ i njezino polovište M. Točke u kojima dužina $\overline{S_1S_2}$ siječe kružnice k_1 i k_2 označimo redom s A_1 i A_2. Zatim spojimo točku M sa središtem S_2 i konstruiramo polovište te dužine te konstruiramo kružnicu sa središtem u tom polovištu koja prolazi kroz točku M. Ta kružnica siječe kružnicu k_2 u dvjema točkama. Odaberemo jednu od tih točki i konstruiramo pravac koji prolazi kroz tu odabranu točku i polovištem M. Na taj način smo dobili pravac p. Zatim odaberemo proizvoljnu točku P na pravcu p (mora se moći po njemu pomicati) i konstruiramo dužinu $\overline{PA_1}$ i njezino polovište B_1. Konstruiramo dužinu $\overline{PS_2}$ i njezin presjek s kružnicom k_2 označimo s C. Konstruiramo dužinu $\overline{CA_2}$ i njezino polovište B_2 te polovište dužine $\overline{B_1B_2}$ označimo s D. Označimo točku P i točku D i možemo primijeniti alat "Locus". Na slici vidimo geometrijsko mjesto svih položaja točke D kad se P pomiče po pravcu p (Slika 3.6). Analogno rješenje bi dobili da smo uključili trag točke D i animirali točku P.



Slika 3.6: Primjer 3.0.8.

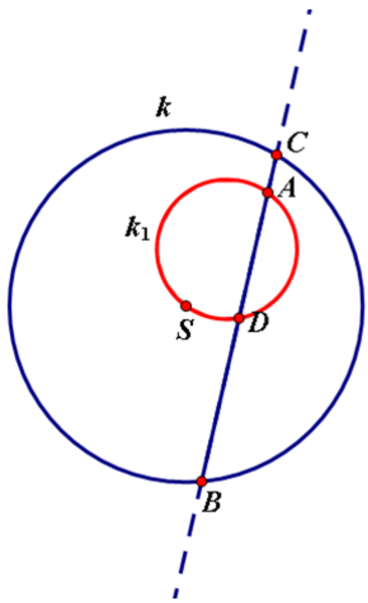
Poglavlje 4

Računsko određivanje geometrijskog mjesta

U prethodnim poglavljima smo pronalazili geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju neke zadane uvjete tako da bismo naslutili što bi bilo rješenje, a zatim precizno dokazali tu slutnju. Ukoliko su uvjeti zadatka bili komplicirani i nismo mogli naslutiti što je traženo geometrijsko mjesto točaka, koristili smo program dinamičke geometrije Sketchpad. U ovom poglavlju ćemo se baviti analitičkim nalaženjem mjesta točaka, odnosno pokazat ćemo na nekoliko primjera kako se može odrediti geometrijsko mjesto točaka koristeći koordinatni zapis. U tom načinu rješavanja zadataka nije potrebno crtati neke specijalne slučajeve, već se sve izvodi računski. U sljedeća dva primjera ćemo najprije pomoću programa dinamičke geometrije naslutiti traženo geometrijsko mjesto i precizno dokazati tu slutnju, a onda ćemo pokazati kako te zadatke riješiti koristeći koordinatni zapis.

Primjer 4.0.9. *Nađite geometrijsko mjesto polovišta svih tetiva zadane kružnice koje prolaze kroz zadanu točku.*

Nacrtat ćemo kružnicu k sa središtem u S i neku točku A unutar nje. Odaberemo proizvoljnu točku B na kružnici (mora se moći po njoj pomicati) i konstruiramo pravac kroz nju i kroz točku A. Drugi presjek pravca i kružnice označimo s C. Tako dobijemo proizvoljnu tetivu $\overline{BC}$ kroz A. Nađemo joj polovište i neka je to točka D. Označimo točke B i D i možemo primijeniti alat "Locus". Dobije se kružnica k_1 koja prolazi kroz ishodište zadane kružnice k (Slika 4.1). Može se primijetiti da je k_1 kružnica s promjerom $\overline{SA}$. Naime, tetiva koja prolazi kroz A, a okomita je na $\overline{SA}$, ima polovište baš u točki A, pa je A dio traženog geometrijskog mjesta. S druge strane, promjer kružnice koji sadrži i S i A (i također je tetiva kružnice k) ima središte u S pa ista tvrdnja vrijedi i za točku S.



Slika 4.1: Primjer 4.0.9.

Sada ćemo precizno dokazati da je k_1 traženo geometrijsko mjesto točaka.

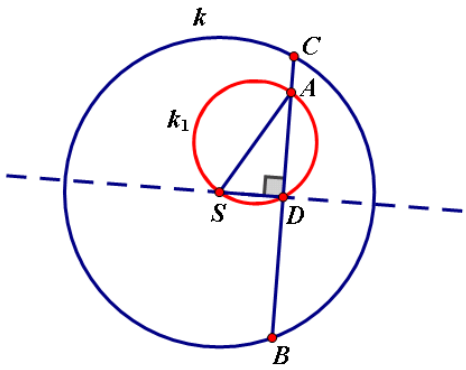
Dokaz.

1. DIO: Trebamo dokazati da svaka točka koja zadovoljava zadani geometrijski uvjet pripada kružnici k_1.
Neka je zadana kružnica k sa središtem u točki S i točka A unutar te kružnice. Neka je $\overline{BC}$ tetiva te kružnice koja prolazi kroz točku A, a točka D njezino polovište. Kako je $\overline{BC}$ tetiva kružnice k, a D njezino polovište, onda za središte S vrijedi da je pravac SD okomit na $\overline{BC}$. Kako je i A na $\overline{BC}$, vrijedi da je kut $\angle ADS$ pravi. Dakle, prema Talesovom teoremu svaka točka D se nalazi na kružnici s promjerom $\overline{AS}$ (Slika 4.2).

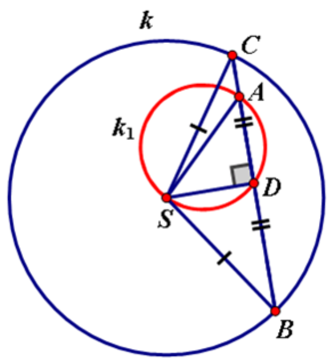
2. DIO: Trebamo dokazati da ako imamo točku D na kružnici k_1 (s promjerom $\overline{AS}$), onda je točka D polovište tetive $\overline{BC}$ kružnice k sa središtem u S pri čemu tetiva $\overline{BC}$ prolazi točkom A.
Ako imamo točku D na kružnici k_1 (s promjerom $\overline{AS}$), onda je kut $\angle ADS$ pravi prema Talesovom teoremu. Konstruiramo tetivu $\overline{BC}$ koja prolazi kroz D i okomita je na $\overline{SD}$. Očito je A na toj tetivi. Trokut $\triangle SCB$ je jednakokračan (zbog |SC| = |SB|) i $\overline{SD}$ je njegova

visina i očito zbog sukladnosti trokuta $\triangle SCD$ i $\triangle SBD$ vrijedi |BD| = |DC|, odnosno D je polovište neke tetive koja prolazi kroz A pa zadovoljava geometrijski uvjet problema (Slika 4.3).

Time smo dokazali da je kružnica k_1 (s promjerom $\overline{AS}$) uistinu geometrijsko mjesto opisanih točaka. □



Slika 4.2: Skica za dokaz primjera 4.0.9.



Slika 4.3: Skica za dokaz primjera 4.0.9.

Ovaj zadatak ćemo riješiti i analitički, odnosno koristeći koordinatni zapis:

Neka je koordinatni sustav postavljen tako da je središte kružnice k u ishodištu koordinatnog sustava i neka je kružnica radijusa R. Očito je iz postavke zadatka da je odabir koordinatnog sustava proizvoljan. Točka A neka ima koordinate (a,b). Uzmimo proizvoljnu točku B na kružnici k s koordinatama (x_B,y_B). Točka C koja je presjek kružnice k i pravca AB, a različita je od B, neka ima koordinate (x_C,y_C). Kako su točke A, B i C na istom pravcu, iz parametarskih jednadžbi pravca znamo da postoji neki $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$x_C = a + t(x_B - a),$$

$$y_C = b + t(y_B - b).$$

Kako su i B i C na kružnici k, vrijedi

$$x_B^2 + y_B^2 = R^2,$$

$$x_C^2 + y_C^2 = R^2.$$

Iz druge jednakosti slijedi

$$[a + t(x_B - a)]^2 + [b + t(y_B - b)]^2 = R^2.$$

Ovu jednakost možemo shvatiti kao jednu kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom t. Očito je da je $t = 1$ (koji odgovara točki B) jedno rješenje jednadžbe. Drugo rješenje nam daje t koji odgovara točki C. Jednadžbu možemo zapisati i u obliku

$$[(x_B - a)^2 + (y_B - b)^2]t^2 + 2t[a(x_B - a) + b(y_B - b)] + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Dakle, umnožak rješenja je jednak $\frac{A}{B}$ gdje je $A = a^2 + b^2 - R^2$, a $B = [(x_B - a)^2 + (y_B - b)^2]$. Konačno parametar t za koji dobivamo točku C je prema tome jednak $\frac{A}{B}$.

Polovište tetive $\overline{BC}$ ima koordinate $D = (x_D, y_D) = (\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2})$. Računamo za $t = \frac{A}{B}$:

$$\left(x_D - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_D - \frac{b}{2}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{t}{2}(x_B - a) + \frac{x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}(y_B - b) + \frac{y_B}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{t^2}{4}[(x_B - a)^2 + (y_B - b)^2] + \frac{t}{2}[x_B(x_B - a) + y_B(y_B - b)] + \left(\frac{x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{2}\right)^2 =$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{A^2}{4B^2}\cdot B+\frac{A}{2B}(x_B^2-ax_B+y_B^2-by_B)+\frac{R^2}{4}=\\
&\frac{A}{4B}[A+2(x_B^2-ax_B+y_B^2-by_B)]+\frac{R^2}{4}=\\
&\frac{A}{4B}(a^2+b^2-R^2+2R^2-2ax_B-2by_B)+\frac{R^2}{4}=\\
&\frac{A}{4B}(a^2+b^2+R^2-2ax_B-2by_B)+\frac{R^2}{4}=\\
&\frac{A}{4B}[(x_B-a)^2+(y_B-b)^2-x_B^2-y_B^2+R^2]+\frac{R^2}{4}=\\
&\frac{A}{4B}[(x_B-a)^2+(y_B-b)^2]+\frac{R^2}{4}=\\
&\frac{A}{4B}\cdot B+\frac{R^2}{4}=\\
&\frac{A}{4}+\frac{R^2}{4}=\\
&\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Neka je P polovište dužine $\overline{OA}$, gdje je O ishodište koordinatnog sustava. Označimo s r udaljenost točke P od središta kružnice k, odnosno do ishodišta O. Tada vrijedi

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=r^2.$$

Dakle,

$$\left(x_D-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y_D-\frac{b}{2}\right)^2=r^2.$$

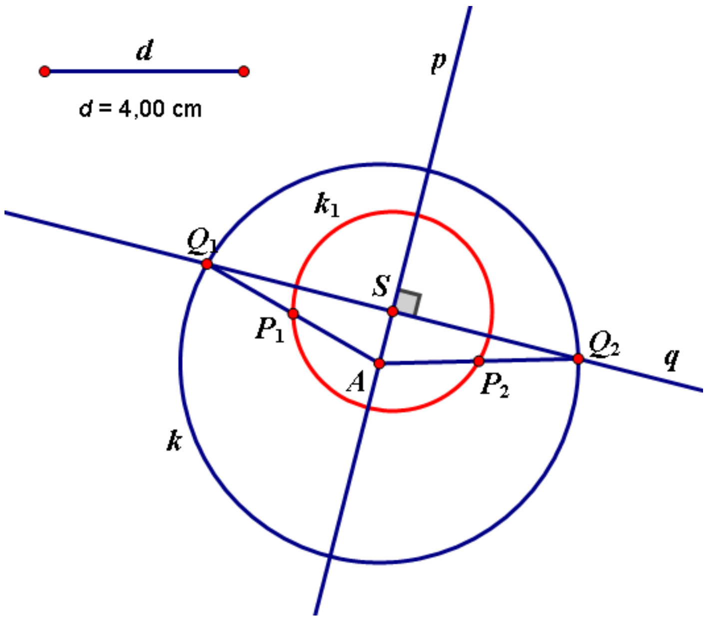
Zaključujemo da sve točke koje zadovoljavaju zadani geometrijski uvjet leže na kružnici sa središtem u točki $P=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ koja je radijusa r. Nazovimo ju k_1.

Trebamo diskutirati i obrat, odnosno zadovoljavaju li baš sve točke s kružnice k_1 geometrijski opis iz zadatka. Naime, ako imamo neku točku D s kružnice k_1, onda možemo konstruirati tetivu kružnice k koja prolazi kroz A i D. Kao i prije, možemo izračunati da se polovište te tetive, označimo ga s D_1 nalazi na kružnici k_1. Kako se nalazi i na pravcu AD, onda je to neka od točaka presjeka kružnice k_1 i pravca AD, dakle to mogu biti samo točke A i D. Lako je vidjeti da se može raditi o točki A samo ako je $D=A$. Dakle $D_1=D$ i time smo dokazali tvrdnju.

Možemo zaključiti da u ovom primjeru nije posve jednostavno dokazati tvrdnju pomoću koordinatnog zapisa, ako već prije nismo naslutili što bi moglo biti rješenje.

Primjer 4.0.10. *Nađite geometrijsko mjesto polovišta dužina zadane duljine čiji su rubovi na dva zadana okomita pravca.*

Nacrtat ćemo okomite pravce p i q koji se sijeku u točki S. Odaberemo proizvoljnu točku A na pravcu p i konstruiramo kružnicu k sa središtem u A radijusa duljine d. Točke presjeka kružnice k i pravca q označimo s Q_1 i Q_2. Konstruiramo dužine $\overline{AQ_1}$ i $\overline{AQ_2}$ te označimo njihova polovišta redom s P_1 i P_2. Označimo točke A i P_1 i možemo primijeniti alat "Locus". Zatim označimo točke A i P_2 i opet primijenimo alat "Locus". Dobije se kružnica k_1 sa središtem u točki S koja prolazi kroz točke P_1 i P_2 (Slika 4.4). Istu kružnicu dobijemo ako odaberemo proizvoljnu točku na pravcu q i ponovimo analogni postupak. Može se primijetiti da je k_1 kružnica s radijusom duljine $\frac{d}{2}$. Naime, ukoliko je $A=S$, tada je P_1 polovište dužine $\overline{SQ_1}$ pa je radijus kružnice k_1 duljine $|SP_1|=\frac{|SQ_1|}{2}=\frac{d}{2}$.



Slika 4.4: Primjer 4.0.10.

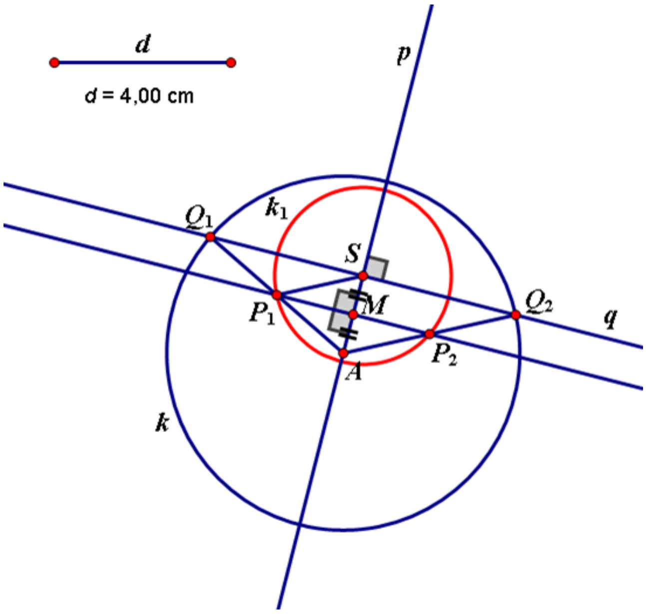
Sada ćemo precizno dokazati da je k_1 traženo geometrijsko mjesto točaka.

Dokaz.

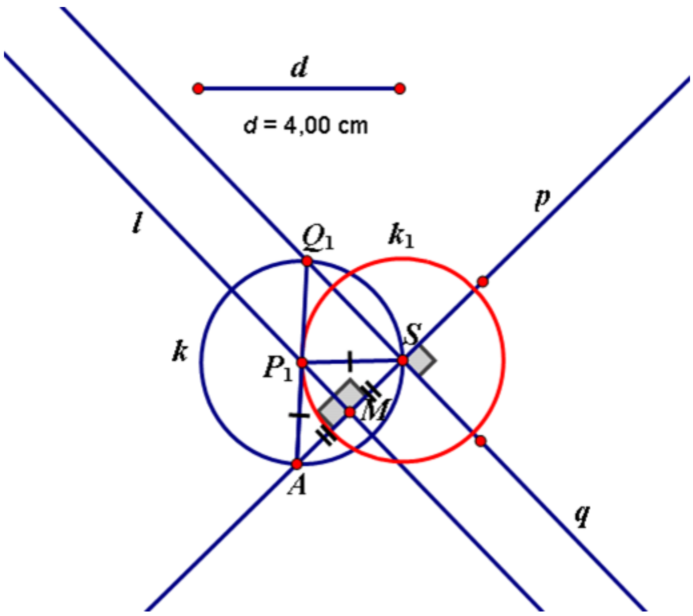
1. DIO: Trebamo dokazati da svaka točka koja zadovoljava zadani geometrijski uvjet pripada kružnici k_1.
Neka su zadani pravci p i q koji su okomiti i sijeku se u točki S. Neka je dužina $\overline{AQ_1}$ takva da je $|AQ_1|=d$ pri čemu točka A pripada pravcu p, a točka Q_1 pripada pravcu q. Neka je P_1 polovište dužine $\overline{AQ_1}$. Kako je P_1 polovište dužine $\overline{AQ_1}$, tada je $|AP_1|=|P_1Q_1|=\frac{d}{2}$. Promotrimo trokut $\triangle\ Q_1AS$ i konstruirajmo paralelu sa stranicom $\overline{SQ_1}$ kroz polovište P_1 stranice $\overline{AQ_1}$. Označimo presjek te paralele i stranice $\overline{AS}$ s M. Tada je dužina $\overline{P_1M}$ srednjica trokuta $\triangle\ Q_1AS$ paralelna sa stranicom $\overline{SQ_1}$ pa iz toga slijedi da je točka M polovište dužine $\overline{AS}$. Sada promotrimo trokute $\triangle\ AMP_1$ i $\triangle\ SMP_1$. Točka M je polovište dužine $\overline{AS}$ pa slijedi da je $|AM|=|SM|$. Stranica $\overline{P_1M}$ je zajednička promatranim trokutima. Ta stranica pripada pravcu paralelnom pravcu q (kojem pripada stranica $\overline{SQ_1}$), a stranica $\overline{AS}$ pripada pravcu p. Budući da su ta dva pravca okomita, slijedi da su kutovi $\angle\ AMP_1$ i $\angle\ SMP_1$ pravi, odnosno jednaki su. Budući da su po dvije stranice trokuta $\triangle\ AMP_1$ i $\triangle\ SMP_1$ i kut među njima jednakih veličina, slijedi da su ti trokuti sukladni po SKS poučku o sukladnosti trokuta. Iz toga slijedi da je $|SP_1|=|AP_1|=\frac{d}{2}$, a iz toga slijedi da točka P_1 pripada kružnici sa središtem u točki S radijusa duljine $\frac{d}{2}$ što smo i trebali dokazati. (Slika 4.5)

2. DIO: Trebamo dokazati da ako imamo točku P_1 na kružnici k_1 sa središtem u točki S radijusa $\frac{d}{2}$, onda je točka P_1 polovište dužine duljine d čiji su rubovi na pravcima p i q redom koji se sijeku u točki S.
Imamo dva okomita pravca p i q i točku P_1 na kružnici k_1 sa središtem u točki S radijusa $\frac{d}{2}$. Konstruiramo kružnicu k sa središtem u P_1 radijusa $\frac{d}{2}$. Ta kružnica siječe pravac p u dvije točke, jedna je S, a drugu označimo s A. Onda konstruiramo pravac AP_1 i sjecište tog pravca s pravcem q označimo s Q_1. Neka je pravac l okomit na pravac p, tj. dužinu $\overline{AS}$ i neka on siječe $\overline{AS}$ u točki M. Onda su trokuti $\triangle\ P_1AM$ i $\triangle\ P_1SM$ sukladni (zbog jednakih duljina hipotenuze, jedne zajedničke stranice i pravog kuta) pa je onda i $|AM| = |MS|$. Kako su pravci l i q paralelni, trokuti $\triangle\ AP_1M$ i $\triangle\ AQ_1S$ su slični pa je $\frac{|AQ_1|}{|AP_1|}=2$ te je onda P_1 polovište od $\overline{AQ_1}$ i duljina od $\overline{AQ_1}$ je d (Slika 4.6).

Time smo dokazali da je kružnica k_1 sa središtem u točki S radijusa $\frac{d}{2}$ uistinu geometrijsko mjesto opisanih točaka. □



Slika 4.5: Skica za dokaz primjera 4.0.10.



Slika 4.6: Skica za dokaz primjera 4.0.10.

Ovaj zadatak ćemo riješiti i analitički, odnosno koristeći koordinatni zapis:

Neka je koordinatni sustav postavljen tako da se pravac p podudara s x-osi, a pravac q s y-osi. Očito je iz postavke zadatka da je odabir koordinatnog sustava proizvoljan. Neka je $\overline{AQ}$ dužina duljine d takva da je A na pravcu p, a Q na pravcu q. Onda su koordinate točke A oblika $(x,0)$, a koordinate točke Q su $(0,y)$. Točka P je polovište dužine $\overline{AQ}$ pa su njezine koordinate $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$. Izračunamo udaljenost od A do Q koja je jednaka

$$\sqrt{x^2 + y^2} = d$$

pa vrijedi

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{d^2}{4}.$$

Tada za P=(x_P, y_P) vrijedi

$$(x_P)^2 + (y_P)^2 = \frac{d^2}{4},$$

odnosno sve točke P leže na kružnici sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, odnosno u točki S, radijusa $\frac{d}{2}$.

Još neki primjeri zadataka u kojima se bavimo analitičkim nalaženjem mjesta točaka koristeći koordinatni zapis su zadaci s jednadžbama i nejednadžbama s kompleksnim brojevima čija rješenja kad se ucrtaju u kompleksnu ravninu predstavljaju neki od skupova koji se ponekad može lako opisati, npr. dobije se kružnica, poluravnina ili nešto slično. U tom načinu rješavanja zadataka nije potrebno crtati neke specijalne slučajeve, već se sve izvodi računski. Riješit ćemo nekoliko kompleksnih jednadžbi i nejednadžbi i opisati dobivene skupove kad se rješenja prikažu u kompleksnoj ravnini.

Primjer 4.0.11. *Nađite geometrijsko mjesto točaka u $\mathbb{C}$ za koje vrijedi:* $\left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right|$=1.

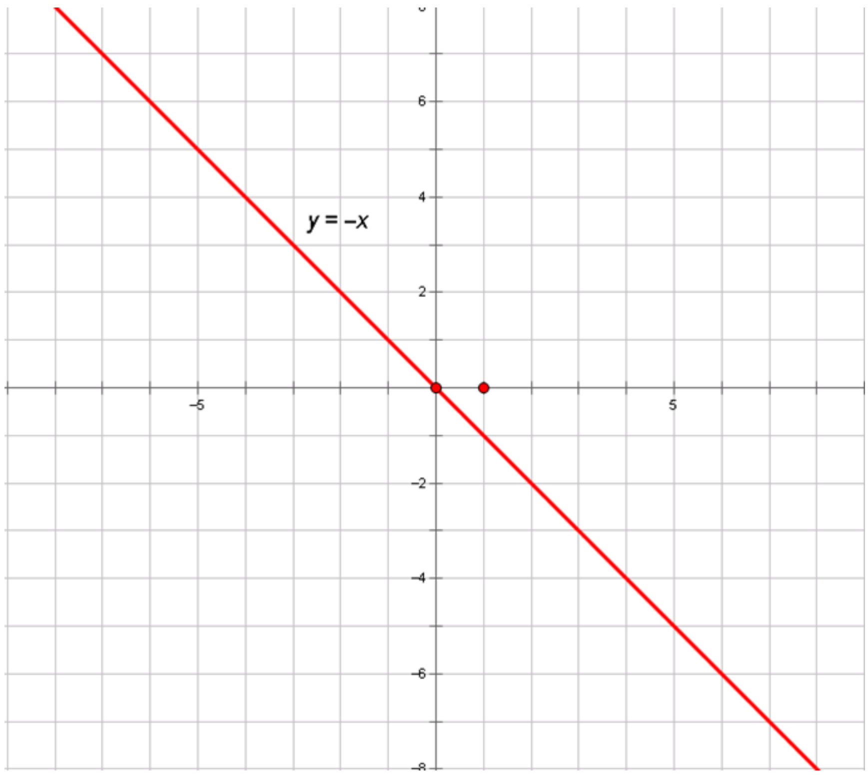
Rješenje tražimo u obliku $z = x+iy$ pri čemu su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica.

Dakle imamo

$$\begin{aligned} \left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right| &= 1 \\ \Leftrightarrow \left|\frac{x+iy+1+i}{x+iy-1-i}\right| &= 1 \\ \Leftrightarrow |x+1+(y+1)i| &= |x-1+(y-1)i| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \\
&\Leftrightarrow 4x + 4y = 0 \\
&\Leftrightarrow x + y = 0 \\
&\Leftrightarrow y = -x.
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da koordinate x i y zadovoljavaju jednadžbu pravca $y{=}-x$ (Slika 4.7).



Slika 4.7: Primjer 4.0.11.

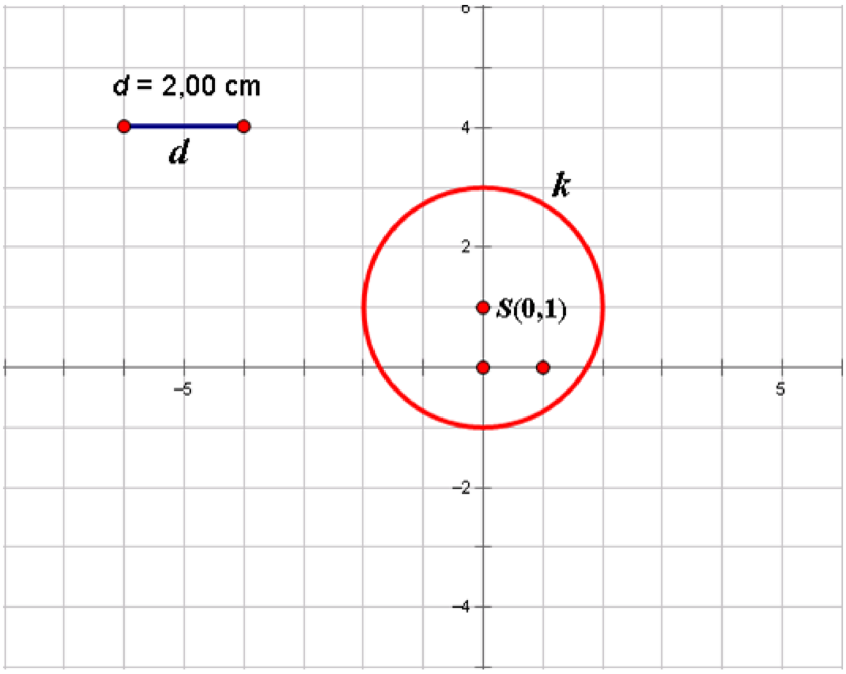
Primjer 4.0.12. *Nađite geometrijsko mjesto točaka u $\mathbb{C}$ za koje vrijedi:* $|z-i|=2$.

Rješenje tražimo u obliku $z = x+iy$ pri čemu su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica.

Dakle imamo

$$
\begin{aligned}
|z-i| &= 2 \\
\Leftrightarrow |x+iy-i| &= 2 \\
\Leftrightarrow |x+(y-1)i| &= 2 \\
\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} &= 2 \\
\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 &= 4.
\end{aligned}
$$

Odavde vidimo da koordinate x i y zadovoljavaju jednadžbu kružnice $x^2+(y-1)^2 = 4$ sa središtem u (0,1) radijusa 2 (Slika 4.8).



Slika 4.8: Primjer 4.0.12.

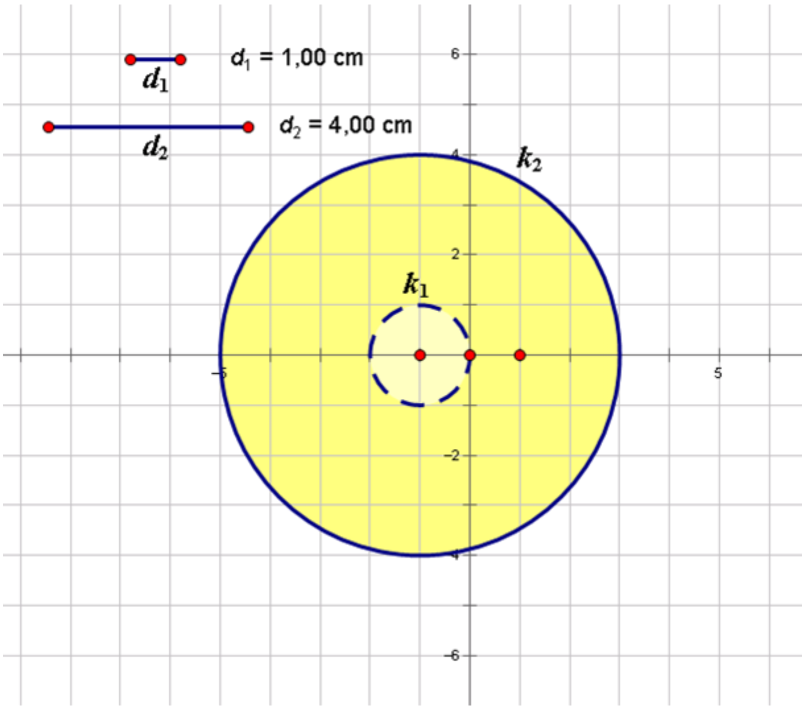
Primjer 4.0.13. *Nađite geometrijsko mjesto točaka u* $\mathbb{C}$ *za koje vrijedi:* $1 < |z + 1| \leq 4$.

Rješenje tražimo u obliku $z = x + iy$ pri čemu su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica.

Dakle imamo

$$\begin{aligned} 1 &< |z + 1| \leq 4, \\ \Leftrightarrow 1 &< |x + iy + 1| \leq 4 \\ \Leftrightarrow 1 &< |(x + 1) + iy| \leq 4 \\ \Leftrightarrow 1 &< \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \leq 4 \\ \Leftrightarrow 1 &< (x + 1)^2 + y^2 \leq 16. \end{aligned}$$

Odavde vidimo da je traženo geometrijsko mjesto kružni vijenac omeđen koncentričnim kružnicama sa središtem u (-1,0) radijusa 1 i 4 uključivo s točkama kružnice radijusa 4 (Slika 4.9).



Slika 4.9: Primjer 4.0.13.

Poglavlje 5

Poznate krivulje

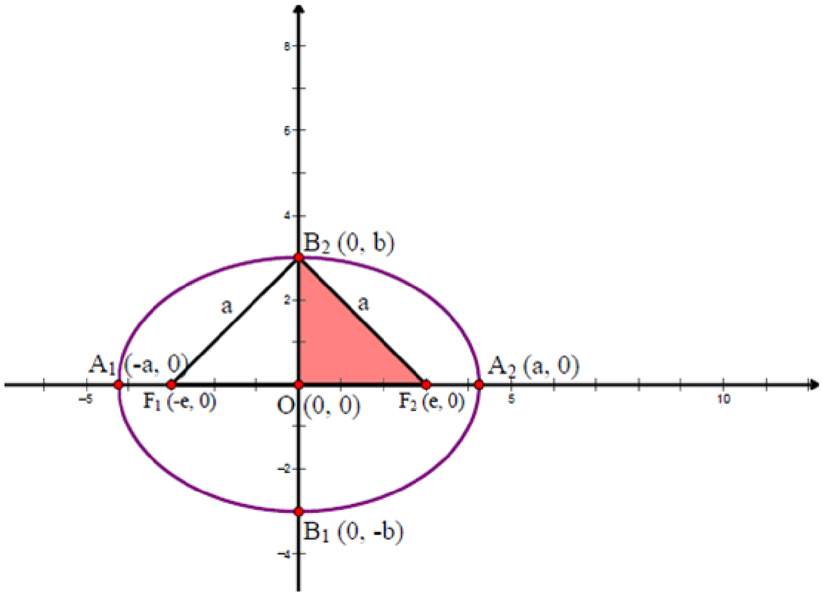
Neke poznate krivulje su definirane kao geometrijska mjesta točaka zadana geometrijskim uvjetom. To su npr. konike (elipsa, hiperbola i parabola), lemniskata i krivulja Marie Agnesi.

5.1 Elipsa

Definicija 5.1.1. *Elipsa E u ravnini M s fokusima (ili žarištima) u točkama F_1 i F_2 je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti do fokusa F_1 i F_2 konstantan.*
Možemo zapisati E=$\{T \in M : d(F_1,T)+d(F_2,T)=konst.\}$.
Dužine $\overline{F_1T}$ i $\overline{F_2T}$ i njihove pripadne vektore $\overrightarrow{F_1T}$ i $\overrightarrow{F_2T}$ zovemo radijus-vektori točke T.

Elipsa ima dvije osi simetrije koje su međusobno okomite. Zovemo ih glavna i sporedna os elipse. S obzirom na to, elipsu možemo smjestiti u koordinatni sustav tako da je glavna os elipse na osi x, a sporedna os na osi y (Slika 5.1). Tada je središte elipse (presjek glavne i sporedne osi elipse) ujedno i ishodište koordinatnog sustava pa su njegove koordinate $O(0,0)$. Točke u kojima elipsa siječe koordinatne osi, A_1, A_2, B_1, B_2 , nazivamo vrhovi ili tjemena elipse. Dužinu između točaka A_1 i A_2 nazivamo velika os elipse, a dužinu između točaka B_1 i B_2 nazivamo mala os elipse. Udaljenost fokusa od ishodišta koordinatnog sustava zove se linearni ekscentricitet i označava slovom e, pa su koordinate fokusa jednake $F_1(-e,0)$ i $F_2(e,0)$. Isto tako, znamo da udaljenost točaka A_1 i A_2 od ishodišta obično označavamo s a pa su koordinate lijevog i desnog tjemena elipse jednake $A_1(-a,0)$ i $A_2(a,0)$. Sada elipsu možemo opisati na sljedeći način:
Elipsa E s fokusima (ili žarištima) u točkama F_1 i F_2 i velikom poluosi a je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti do fokusa F_1 i F_2 jednak $2a$.
Preostaje nam još odrediti koordinate tjemena B_1 i B_2. Promotrimo tjeme B_2. Iz definicije elipse imamo $d(B_2,F_1)$ + $d(B_2,F_2)$=$2a$, a kako je trokut $\triangle\ F_1F_2B_2$ jednakokračan (zbog

simetrije s obzirom na y-os), slijedi da je $|F_1B_2|$=$|B_2F_2|$=a. Vidimo da je x koordinata tih točaka jednaka 0. Sada moramo izračunati udaljenost „sporednih" tjemena elipse od središta elipse, odnosno $|OB_1|$ i $|OB_2|$. Uočavamo pravokutni trokut $\triangle\ OF_2B_2$. Primjenom Pitagorinog teorema na taj trokut imamo: $|OB_2|^2 = |F_2B_2|^2$ - $|OF_2|^2 = a^2$ - e^2. Dakle, $|OB_2| = \sqrt{a^2 - e^2}$, odnosno tome je jednaka y koordinata točke B_2. Tu koordinatu obično označavamo s b i zovemo duljina male poluosi. Zbog simetrije je y koordinata točke B_1 jednaka $-b$. Sada imamo i koordinate tjemena B_1 i B_2.



Slika 5.1: Elipsa u koordinatnom sustavu

Sada kad smo odredili koordinate važnih točaka elipse, želimo otkriti što vrijedi za svaku točku T elipse. Označimo koordinate te točke s $T(x,y)$. Po definiciji elipse vrijedi da je zbroj udaljenosti te točke od fokusa jednak $2a$. Dakle, imamo:

$$d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(-e-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(e-x)^2 + (0-y)^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow (x+e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + (e-x)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xe + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2xe + x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xe + e^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2xe + x^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - xe = a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$
$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2xe + (xe)^2 = a^2[(e-x)^2 + y^2]$$
$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2xe + (xe)^2 = a^2e^2 - 2a^2xe + a^2x^2 + a^2y^2$$
$$\Leftrightarrow a^2(a^2 - e^2) = x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2.$$

Budući da je $a^2 - e^2 = b^2$, imamo:

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2,$$

odnosno

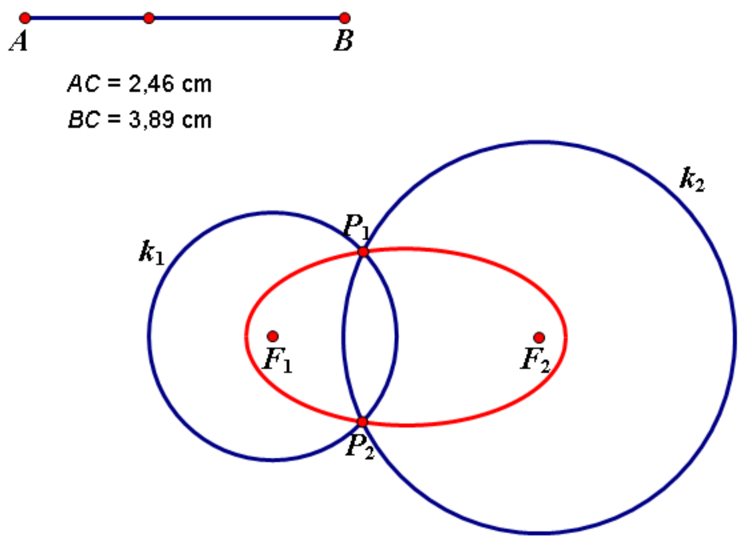
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dakle, ako točka $T(x,y)$ pripada elipsi sa središtem u ishodištu, velikom poluosi duljine a te malom poluosi duljine b, onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tu jednadžbu nazivamo kanonska jednadžba elipse.

Budući da smo neka geometrijska mjesta točaka promatrali u alatu dinamičke geometrije Sketchpadu, promotrimo kako bi se mogla nacrtati elipsa u Sketchpadu pomoću alata "Locus".

Elipsa se dobiva kao skup sjecišta kružnica sa središtima u točkama F_1 i F_2 i polumjerima $|AC|$ i $|BC|$, gdje je C točka koja "klizi" dužinom $\overline{AB}$ pri čemu je duljina dužine $\overline{AB}$ jednaka $2a$. Dakle, najprije konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ i na njoj označimo proizvoljnu točku C (mora se moći po njoj pomicati). Nakon toga konstruiramo kružnicu k_1 radijusa $|AC|$ sa središtem u F_1 i kružnicu k_2 radijusa $|BC|$ sa središtem u F_2. Označimo presjeke tih dviju kružnica s P_1 i P_2. Označimo točke C i P_1 i možemo primijeniti alat "Locus". Zatim označimo točke C i P_2 i opet primijenimo alat "Locus". Dobije se elipsa sa fokusima F_1 i F_2 (Slika 5.2). Analogno rješenje bi dobili da smo uključili trag točaka P_1 i P_2 i animirali točku C. U tom slučaju se točka C zaista giba po dužini $\overline{AB}$, a točke P_1 i P_2 pritom "pišu" elipsu. Usput izmjerene duljine radij vektora se mijenjaju, ali ne i njihov zbroj, koji je uvijek jednak duljini $|AB|$.

Sada kada smo definirali elipsu i pokazali kako se pomoću te definicije dobiva jednadžba elipse u koordinatnom sustavu te pokazali kako se crta elipsa u Sketchpadu, pokazat ćemo kako otkriti kako izgleda krivulja koju zovemo elipsa ako znamo samo početnu definiciju i ne znamo koordinatni zapis (i kako bi to sve vidjeli nakon što nađemo koordinatni zapis).



Slika 5.2: Crtanje elipse u Sketchpadu

Poznata nam je jednadžba elipse. Ukoliko je pravokutni koordinatni sustav zadan tako da x-os odgovara pravcu koji prolazi kroz žarišta elipse, a y-os prolazi kroz polovište spojnice žarišta, tada ona glasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdje je a duljina velike poluosi, dok je b duljina male poluosi. Veličine a i b su povezane preko udaljenosti fokusa F_1 i F_2, tj. vrijedi a^2-b^2=$(\frac{d(F_1,F_2)}{2})^2$. Nakon što odaberemo žarišta elipse, očito je da je dovoljno odabrati veličinu a da bi elipsa bila dobro definirana.

Time se vraćamo na uobičajenu definiciju elipse koja se definira kao skup točaka T za koje vrijedi relacija

$$d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a.$$

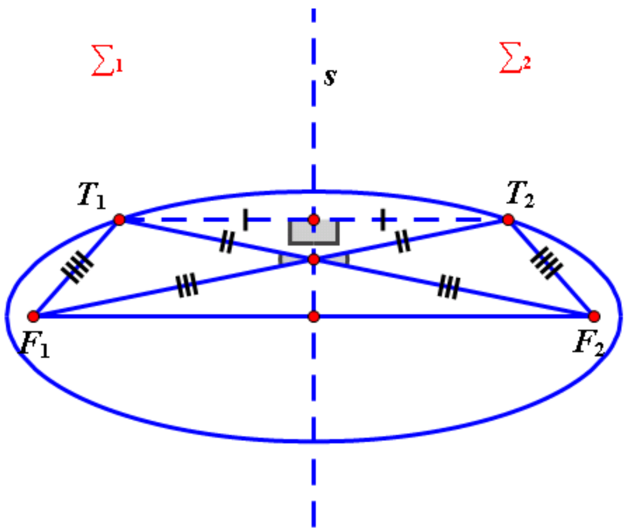
Nakon uvođenja definicije elipse, običaj je u nastavi matematike vrlo brzo prijeći na pripadni koordinatni zapis koji se koristi pri rješavanju svih problema, zbog čega prvotna definicija vrlo često odlazi u zaborav. Ta definicija lakše ostaje u sjećanju ako je učenicima pokazan način konstruiranja elipse gdje se za konstrukciju koristi upravo relacija iz originalne definicije elipse. Konkretno definiciju koristimo za popularno nazvanu "vrtnu konstrukciju", ali nam je korisna i kod konstruiranja elipse u programima dinamičke geometrije što smo već vidjeli na primjeru konstrukcije elipse u Sketchpadu.

Cilj nam je usporediti ta dva načina pogleda na elipsu. Istražit ćemo koja se svojstva mogu iščitati iz originalne definicije tj. izbjegavajući prelazak na koordinate. Do svakog zaključka ćemo nakon toga doći i pomoću koordinatnog zapisa te ćemo usporediti ta dva pristupa.

Prvo što primjećujemo je simetričnost pri definiciji elipse, u smislu da su udaljenosti do oba fokusa zastupljene na jednak način. Ako podijelimo ravninu na dva dijela Σ_1 i Σ_2 pravcem s koji je simetrala spojnice žarišta, svakoj točki T_1 koja se nalazi na elipsi i u poluravnini Σ_1, možemo pridružiti njezinu sliku T_2 dobivenu zrcaljenjem preko pravca s. Zbog sukladnosti trokuta $\triangle F_1F_2T_1$ i $\triangle F_2F_1T_2$ dobivamo

$$d(T_2, F_1) + d(T_2, F_2) = d(T_1, F_2) + d(T_1, F_1) = 2a,$$

zbog čega zaključujemo da se T_2 također nalazi na elipsi. Time smo zaključili da je elipsa krivulja koja je simetrična s obzirom na pravac s (Slika 5.3).
Slično dobivamo i kad podijelimo ravninu pravcem p koji prolazi kroz žarišta elipse pa vidimo da je elipsa simetrična i s obzirom na taj pravac.



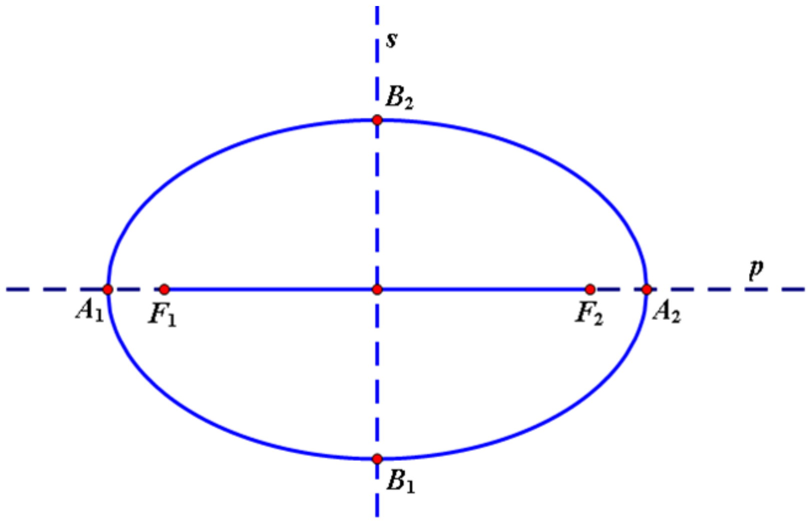
Slika 5.3: Simetričnost elipse

Pitamo se dalje postoji li točka elipse na pravcu p. Ukoliko se nalazi na dužini $\overline{F_1F_2}$, tada vrijedi $d(F_1, T) + d(F_2, T) = d(F_1, F_2)$. Ovaj uvjet je ispunjen ako i samo ako je $d(F_1, F_2) = 2a$. U tom slučaju sve točke na dužini $\overline{F_1F_2}$ pripadaju krivulji definiranoj s

$d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a$. Nijedna točka izvan dužine $\overline{F_1F_2}$ ne može pripadati krivulji zadanoj s $d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a$. Naime, ukoliko se točka nalazi izvan pravca p, zbog nejednakosti trokuta vrijedi $d(T, F_1) + d(T, F_2) > d(F_1, F_2) = 2a$. S druge strane, ukoliko je točka T na pravcu p, izvan dužine $\overline{F_1F_2}$ (npr. bliže točki F_1), onda vrijedi $d(T, F_1) + d(T, F_2) = d(T, F_1) + (d(T, F_1) + d(F_1, F_2)) > 2a$. Dakle, krivulja zadana s $d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a$ je u slučaju $d(F_1, F_2) = 2a$ dužina $\overline{F_1F_2}$. Analogno dobivamo da je u slučaju $2a < d(F_1, F_2)$ skup zadan s $d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a$ prazan. Stoga od sada nadalje zadajemo uvjet $d(F_1, F_2) < 2a$.

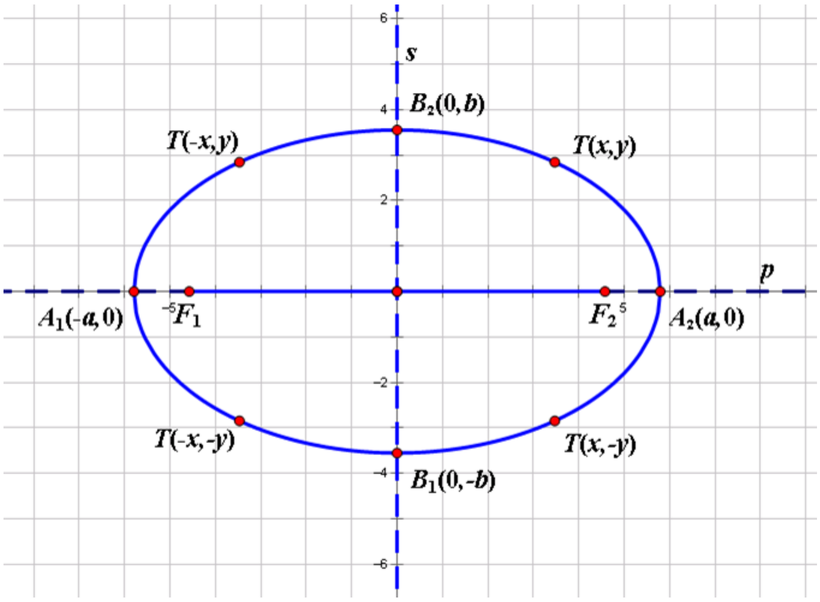
Ako je dakle $d(F_1, F_2) < 2a$, onda imamo dvije točke na pravcu p koje pripadaju elipsi, obje izvan dužine $\overline{F_1F_2}$. Za točku koja je bliža žarištu F_1, iz prethodnog vidimo da je određena s $d(T, F_1) = \frac{1}{2}(2a - d(F_1, F_2))$. Označimo te dvije točke s A_1 i A_2.

Ako se točka elipse nalazi na simetrali s, onda znamo da je jednako udaljena od oba žarišta. Zbog $d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a$ onda vrijedi $d(T, F_1) = d(T, F_2) = a$, odnosno imamo samo dvije takve točke, po jednu sa svake strane pravca p i one su simetrične s obzirom na pravac p. Nazovimo ih B_1 i B_2 (Slika 5.4).



Slika 5.4: Simetričnost elipse

Pomoću koordinatnog prikaza elipse možemo također dosta jednostavno riješiti zadane probleme. Vidimo da ukoliko je točka s koordinatama (x, y) na elipsi, onda se lako provjeri da i točke $(x, -y), (-x, y), (-x, -y)$ zadovoljavaju jednadžbu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Točke koje se nalaze na pravcu koji prolazi kroz žarišta imaju drugu koordinatu nula pa lako izračunamo da su jedine takve točke $(-a, 0)$ i $(a, 0)$. Analogno točke koje pripadaju simetrali dužine $\overline{F_1F_2}$ su samo točke $(0, -b)$ i $(0, b)$. Te četiri točke su tjemena elipse (Slika 5.5).



Slika 5.5: Simetričnost elipse

Zaključujemo da je podjednako jednostavno iz definicije i iz koordinatnog zapisa doći do činjenice da elipsa mora biti krivulja koja je osno simetrična s obzirom na dva okomita pravca s tim da je prvi pristup geometrijski, a drugi više računski. Također, iz definicije $d(F_1, T) + d(T, F_2) = 2a$ je očito da zbog $d(F_2, T) > 0$ mora biti $d(F_1, T) < 2a$. Time dolazimo do zaključka da je elipsa ograničena krivulja.

Sljedeći problem je kakav je zapravo oblik krivulje unutar svakog od dijelova ravnine dobivenih podjelom pravcima s i p. Ako koristimo koordinatni zapis, onda zaključujemo da dio elipse koji pripada prvom kvadrantu koordinatnog sustava možemo poistovjetiti s grafom funkcije $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, definirane s

$$f(x) = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}.$$

Očito je iz definicije funkcije f da kako se x povećava, y pada, odnosno da je f padajuća funkcija na intervalu $[0, a]$. Drugim riječima, što je točka elipse u tom kvadrantu dalje od osi y, bliža je osi x.

Pogledajmo kako bismo mogli izvesti istu činjenicu bez prijelaza na koordinatni zapis. Neka su T_1 i T_2 dvije točke elipse koje se nalaze u desnom gornjem dijelu ravnine (nazovimo ga Σ) nakon što ravninu podijelimo na četiri dijela pravcima s i p. Pretpostavimo da se te točke nalaze na istoj udaljenosti od pravca p. Tada su površine trokuta $\triangle F_1F_2T_1$ i trokuta $\triangle F_1F_2T_2$ jednake. Označimo redom duljine stranica tih trokuta s $|F_1F_2|=d$, $|F_1T_1|=e_1$, $|F_2T_1|=f_1$, $|F_1T_2|=e_2$, $|F_2T_2|=f_2$. Označimo s s_1 i s_2 poluopsege tih trokuta. Prema Heronovoj formuli slijedi

$$\sqrt{s_1(s_1-d)(s_1-e_1)(s_1-f_1)} = \sqrt{s_2(s_2-d)(s_2-e_2)(s_2-f_2)}. \tag{5.1}$$

Iz definicije elipse $d(F_1,T)+d(T,F_2)=2a$ vidimo da je s_1=s_2, pa iz (5.1)slijedi

$$(s_1-e_1)(s_1-f_1)=(s_2-e_2)(s_2-f_2),$$

odnosno

$$(-e_1+f_1+d)(e_1-f_1+d)=(-e_2+f_2+d)(e_2-f_2+d).$$

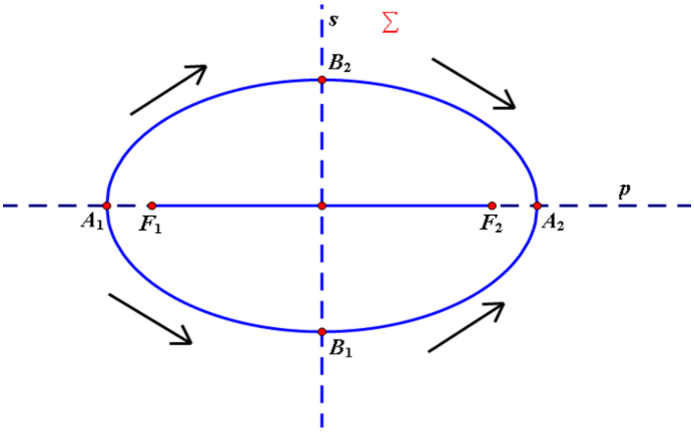
Raspisivanjem prethodne jednakosti dobivamo $(e_1-f_1)^2=(e_2-f_2)^2$ pa je $e_1-f_1=e_2-f_2$ ili $e_1-f_1=f_2-e_2$. Kako je $e_1+f_1=e_2+f_2$, prva mogućnost daje $e_1=e_2$ i $f_1=f_2$, a druga $e_1=f_2$ i $f_1=e_2$. S obzirom da su $T_1,T_2\in\Sigma$, može vrijediti samo prva mogućnost pa zaključujemo da se te točke podudaraju. Ako intuitivno shvatimo da je elipsa neprekidna krivulja, možemo zaključiti sljedeće. Kad po elipsi idemo od gornjeg tjemena do desnog tjemena elipse, odnosno od točke B_2 do točke A_2, udaljenost do pravca p točaka elipse iz toga dijela ravnine uvijek strogo pada jer bi u protivnom dobili barem dvije točke elipse u Σ koje su jednako udaljene od pravca p što je prema prethodnom računu nemoguće.

Zbog simetričnosti krivulje možemo izvesti analogne tvrdnje za sve dijelove elipse (Slika 5.6).

Na sam oblik krivulje uvelike utječe i svojstvo konveksnosti ili konkavnosti krivulje. Preciznije, neka su T_1 i T_2 točke elipse iz Σ na udaljenosti v_1 i v_2 od pravca p, te neka je točka T točka elipse koja se nalazi na pravcu PN gdje je točka P polovište dužine $\overline{T_1T_2}$, a N nožište okomice na pravac p iz točke P. Točka T se nalazi na udaljenosti v od pravca p. Oblik elipse dosta ovisi o tome vrijedi li $v<\frac{v_1+v_2}{2}$ ili $v>\frac{v_1+v_2}{2}$.

Primjećujemo da je udaljenost točke P od pravca p jednaka $\frac{v_1+v_2}{2}$. Označimo li $e=d(P,F_1), f=d(P,F_2)$ možemo iz nejednakosti trokuta (nadopunjavanjem pripadnih trokuta $\triangle F_1T_1T_2$ i $\triangle F_2T_1T_2$ do paralelograma) zaključiti da vrijedi

$$2e<e_1+e_2, 2f<f_1+f_2,$$



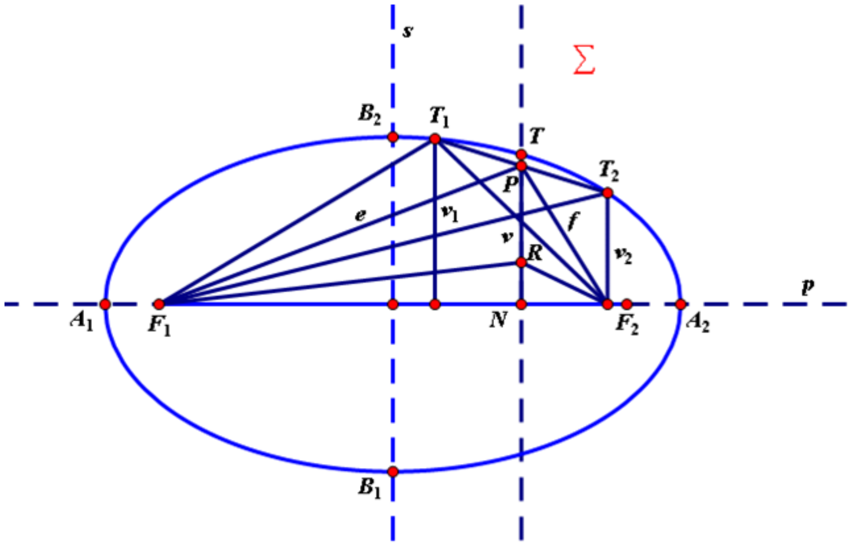
Slika 5.6: Elipsa strogo pada od tjemena B_2 do A_2 i od tjemena A_1 do B_1 a strogo raste od tjemena A_1 do B_2 i od tjemena B_1 do A_2.

odnosno zbrajanjem dobivamo $e + f < 2a$. Lako se vidi da je analogan zbroj manji od $2a$ za svaku točku dužine $\overline{PN}$. Naime neka je $R \in \overline{PN}$. Tada je $d(R, F_1) < d(P, F_1)$ i $d(R, F_2) < d(P, F_2)$ pa je $d(R, F_1) + d(R, F_2) < 2a$. Dakle, točka T se mora nalaziti iznad točke P, odnosno vrijedi $v > \frac{v_1+v_2}{2}$.

Iz koordinatnog zapisa se također može iščitati prethodna činjenica. Naime, pitamo se je li funkcija definirana s $f(x) = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$ konkavna na $[0, a]$. Možemo to provjeriti računajući drugu derivaciju funkcije. Konkretno vrijedi

$$f''(x) = -\frac{2b^4}{a^2} \cdot \frac{x}{(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Kako je $x > 0$, slijedi $f''(x) < 0$ pa je funkcija f uistinu konkavna, što odgovara rezultatu koji smo izveli geometrijski.



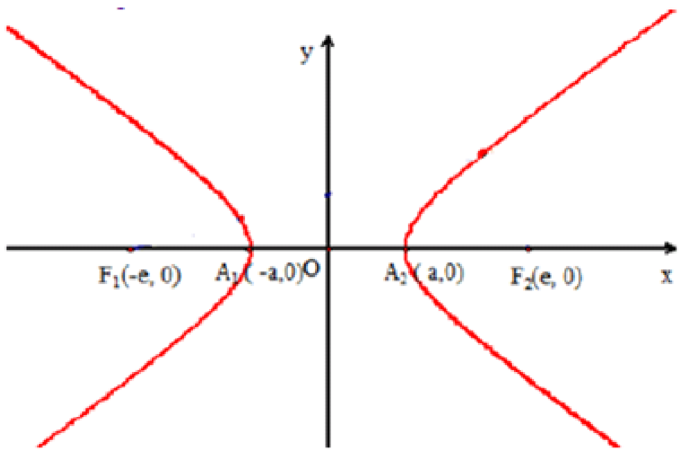
Slika 5.7: Konkavnost elipse na intervalu $[0, a]$

5.2 Hiperbola

Definicija 5.2.1. *Skup svih točaka T ravnine M kojima je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dviju zadanih (fiksnih ili čvrstih) točaka uvijek ista zove se hiperbola.*
Fiksne (čvrste točke) nazivamo žarišta (fokusi) hiperbole i najčešće ih označavamo s F_1 i F_2.
Možemo zapisati H=$\{T \in M : |d(F_1, T) - d(F_2, T)|$=$konst.\}$.
Vektore $\overrightarrow{F_1T}$ i $\overrightarrow{F_2T}$ zovemo radij-vektorima hiperbole (ponekad radijvektorima ne nazivamo vektore, nego dužine $\overline{F_1T}$ i $\overline{F_2T}$).

Hiperbola s fokusima F_1 i F_2 ima dvije međusobno okomite osi simetrije. S obzirom na to, hiperbolu možemo smjestiti u koordinatni sustav tako da se pravac koji prolazi fokusima hiperbole podudara s x-osi, a simetrala dužine, čije su krajnje točke fokusi, podudara se s y-osi. Tada je središte hiperbole, odnosno ishodište koordinatnog sustava, presjek dužine čije su krajnje točke fokusi i njezine simetrale. Označimo to središte s O čije koordinate su $O(0,0)$. Točke u kojima hiperbola siječe x-os, A_1 i A_2, nazivamo vrhovi ili tjemena hiperbole. Dužinu $\overline{A_1A_2}$ nazivamo velika os hiperbole. Udaljenost fokusa od ishodišta koordinatnog sustava zove se linearni ekscentricitet i označava slovom e, pa su koordinate fokusa jednake $F_1(-e,0)$ i $F_2(e,0)$. Isto tako, znamo da udaljenost točaka A_1 i A_2 od ishodišta obično označavamo s a pa su koordinate tjemena hiperbole jednake $A_1(-a,0)$ i $A_2(a,0)$. Sada hiperbolu možemo opisati na sljedeći način:
Hiperbola H s fokusima (ili žarištima) u točkama F_1 i F_2 i velikom poluosi a je skup svih

točaka ravnine kojima je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od fokusa F_1 i F_2 jednaka $2a$.



Slika 5.8: Hiperbola u koordinatnom sustavu

Sada kad smo odredili koordinate važnih točaka hiperbole, želimo otkriti što vrijedi za svaku točku T hiperbole. Označimo koordinate te točke s $T(x,y)$. Po definiciji hiperbole vrijedi da je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti točke T od fokusa F_1 i F_2 jednaka $2a$. Dakle, imamo:

$$
\begin{aligned}
|d(F_1,T) - d(T,F_2)| &= 2a\\
\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2} &= \pm 2a\\
\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+e)^2+y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-e)^2+y^2}\\
\Leftrightarrow\ (x+e)^2+y^2 &= (2a)^2 \pm 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + (x-e)^2+y^2\\
\Leftrightarrow\ x^2+2xe+e^2+y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + x^2-2xe+e^2+y^2\\
\Leftrightarrow\ ex - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-e)^2+y^2}\\
\Leftrightarrow\ e^2x^2 - 2ea^2x + a^4 &= a^2(x^2-2xe+e^2+y^2)\\
\Leftrightarrow\ (e^2-a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(e^2-a^2).
\end{aligned}
$$

Označimo: $(e^2-a^2) = b^2$. Slijedi $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, odnosno

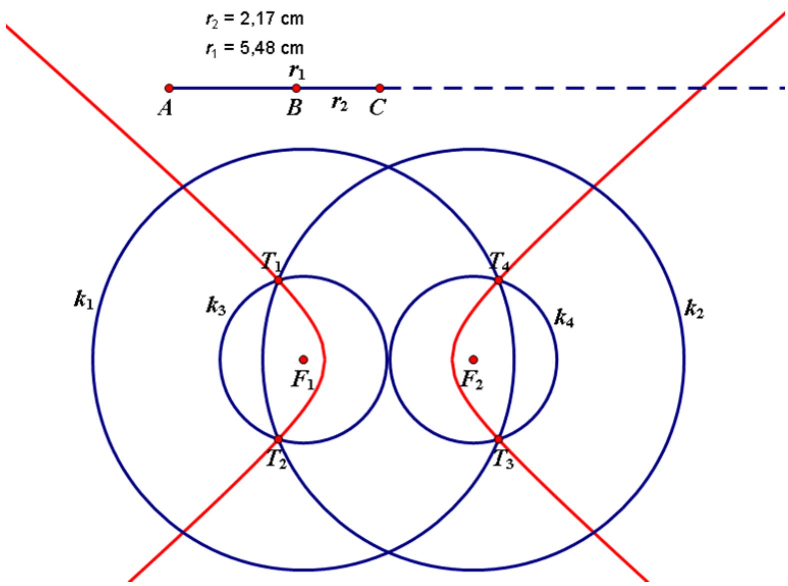
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dakle, ako točka $T(x,y)$ pripada hiperboli sa središtem u ishodištu, velikom poluosi duljine

a i malom poluosi duljine b, onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tu jednadžbu nazivamo kanonska jednadžba hiperbole.

Neka geometrijska mjesta točaka smo promatrali u alatu dinamičke geometrije Sketchpadu pa ćemo, kao i kod elipse, promotriti kako bi se mogla nacrtati hiperbola u Sketchpadu pomoću alata "Locus".

Konstruiramo proizvoljni polupravac s početkom u proizvoljnoj točki A, dužinu $\overline{AB}$ proizvoljne duljine tako da pripada polupravcu i dvije točke F_1 i F_2 koje ne pripadaju tom polupravcu. Na polupravcu označimo proizvoljnu točku C tako da je $|AC| > |AB|$. Neka je $d(A, C) = r_1$ i $d(B, C) = r_2$. Konstruiramo kružnice: $k_1(F_1, r_1)$, $k_2(F_2, r_1)$, $k_3(F_1, r_2)$, $k_4(F_2, r_2)$. Označimo presjeke kružnica k_2 i k_3 redom s T_1, T_2, a presjeke kružnica k_1 i k_4 redom s T_3, T_4. Označimo točke C i T_1 i možemo primijeniti alat "Locus". Zatim ponovimo isti postupak s točkama T_2, T_3, T_4. Dobije se hiperbola sa fokusima F_1 i F_2 (Slika 5.9). Analogno rješenje bi dobili da smo uključili trag točaka T_1, T_2, T_3 i T_4 i animirali točku C. U tom slučaju se točka C zaista giba po polupravcu, a točke T_1, T_2, T_3 i T_4 pritom "pišu" hiperbolu. Pritom se izmjerene duljine radij vektora mijenjaju, ali ne i apsolutna vrijednost njihove razlike, koja je uvijek jednaka duljini $|AB|$.



Slika 5.9: Crtanje hiperbole u Sketchpadu

5.3 Parabola

Definicija 5.3.1. *Skup svih točaka ravnine π koje su jednako udaljene od jednog fiksnog (čvrstog) pravca $d \subset \pi$ i jedne fiksne (čvrste) točke F u toj ravnini, koja ne pripada tom pravcu, zove se parabola.*
Možemo zapisati $P=\{T \in \pi : d(T,d) = d(T,F)\}$.
Fiksni (čvrsti) pravac nazivamo ravnalica (direktrisa) parabole.
Fiksnu (čvrstu) točku nazivamo žarište (fokus) parabole.
Udaljenost fokusa do direktrise nazivamo poluparametar parabole.

Točka parabole koja je najbliža direktrisi, odnosno fokusu parabole naziva se tjeme parabole.
Udaljenost tjemena parabole od direktrise, odnosno fokusa parabole jednaka je polovini poluparametra.
Pravac koji prolazi fokusom parabole i okomit je na direktrisu naziva se os parabole.

Parabola s fokusom F ima jednu os simetrije, os parabole. S obzirom na to, parabolu možemo smjestiti u koordinatni sustav tako da se tjeme parabole podudara s ishodištem koordinatnog sustava, os parabole se podudara s x-osi, a pravac okomit na os parabole u tjemenu parabole podudara se s y-osi. Tada su koordinate tjemena parabole $T(0,0)$. Udaljenost između fokusa i direktrise je jednaka duljini poluparametra p pa fokus parabole ima koordinate $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, a jednadžba direktrise je $x = -\frac{p}{2}$.

Sada kad smo odredili koordinate važnih točaka parabole i jednadžbu direktrise, želimo otkriti što vrijedi za svaku točku A parabole. Označimo koordinate te točke s $A(x,y)$. Tada je udaljenost točke A od direktrise jednaka $d(A,d) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$. Po definiciji parabole znamo da je ta udaljenost jednaka udaljenosti točke A od fokusa parabole. Dakle, imamo:

$$d(A,F) = d(A,d)$$

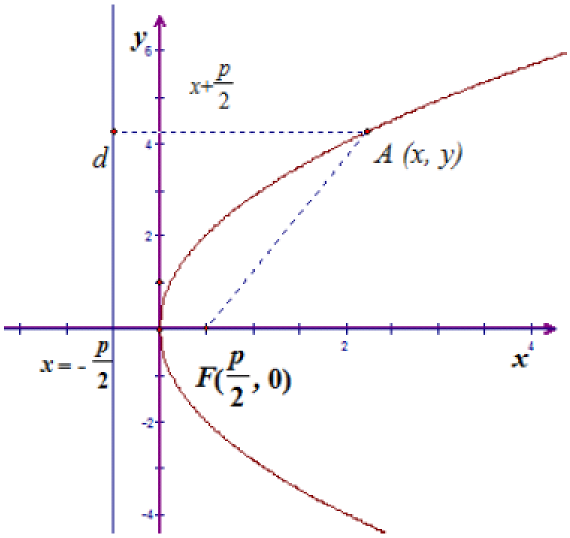
$$\Leftrightarrow d(A,F) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Znači, jednadžba parabole je $y^2 = 2px$, gdje je p poluparametar parabole.

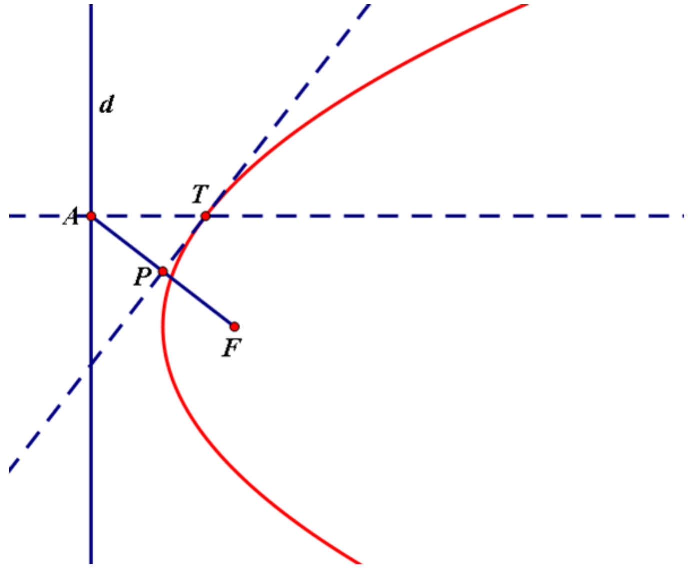


Slika 5.10: Parabola u koordinatnom sustavu

Dakle, točka pripada paraboli ako njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu $y^2 = 2px$.

Budući da smo neka geometrijska mjesta točaka promatrali u programu dinamičke geometrije Sketchpadu i budući da smo elipsu i hiperbolu crtali u Sketchpadu, promotrimo kako bi se mogla nacrtati parabola u Sketchpadu pomoću alata "Locus".

Konstruiramo proizvoljni pravac d i točku F koja ne pripada tom pravcu. Na pravcu d označimo proizvoljnu točku A koja se može pomicati po pravcu d. Konstruiramo polovište P dužine $\overline{AF}$. Konstruiramo okomicu na dužinu $\overline{AF}$ u točki P i okomicu na pravac d u točki A te označimo presjek tih dviju okomica s T. Označimo točke A i T i možemo primijeniti alat "Locus". Dobije se parabola s fokusom F i direktrisom d (Slika 5.11.). Analogno rješenje bi dobili da smo uključili trag točke T i animirali točku A. U tom slučaju se točka A zaista giba po pravcu d, a točka T pritom "piše" parabolu. Pri tome je udaljenost točke T od fokusa i od direktrise jednaka što i odgovara definiciji parabole.



Slika 5.11: Crtanje parabole u Sketchpadu

5.4 Još neke krivulje

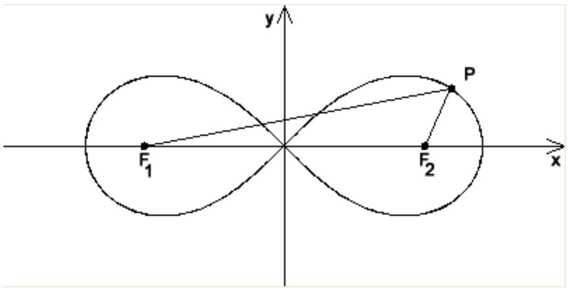
Još neke krivulje osim konika koje imaju geometrijski opis su Bernoullijeva lemniskata i krivulja Marie Agnesi.

Bernoullijeva lemniskata je algebarska krivulja u obliku položene osmice. Kod Bernoullijeve lemniskate su fokusi u točkama koje su udaljene za $2a$, a točke P na lemniskati imaju svojstvo da je $|PF_1||PF_2| = a^2$. Ukoliko lemniskatu smjestimo u koordinatni sustav tako da se pravac koji prolazi fokusima podudara s x-osi, a simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$ se podudara s y-osi, tada su koordinate fokusa lemniskate jednake F_1(-a,0) i F_2(a,0) (Slika 5.12). Želimo otkriti što vrijedi za svaku točku P lemniskate. Označimo koordinate te točke s $P(x,y)$. Tada je umnožak udaljenosti točke P od fokusa konstantan i jednak a^2. Dakle, imamo:

$$|PF_1||PF_2| = a^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} = a^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{[(x+a)^2+y^2] \cdot [(x-a)^2+y^2]} = a^2$$
$$\Leftrightarrow [(x+a)^2+y^2] \cdot [(x-a)^2+y^2] = a^4$$
$$\Leftrightarrow (x+a)^2(x-a)^2 + (x+a)^2y^2 + (x-a)^2y^2 + y^4 = a^4$$
$$\Leftrightarrow (x^2+2ax+a^2)(x^2-2ax+a^2) + (x^2+2ax+a^2)y^2 + (x^2-2ax+a^2)y^2 + y^4 = a^4$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + 2ax^3 - 4a^2x^2 + 2a^3x + a^2x^2 - 2a^3x + a^4 + \\
&+x^2y^2 + 2axy^2 + a^2y^2 + x^2y^2 - 2axy^2 + a^2y^2 + y^4 = a^4 \\
&\Leftrightarrow x^4 - 2a^2x^2 + a^4 + 2x^2y^2 + 2a^2y^2 + y^4 = a^4 \\
&\Leftrightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 2a^2x^2 - 2a^2y^2 \\
&\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).
\end{aligned}$$

Dakle, točka pripada lemniskati ako njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.



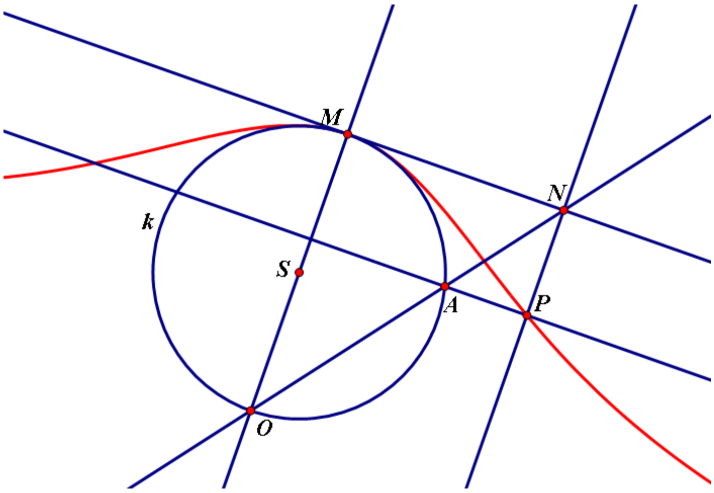
Slika 5.12: Lemniskata u koordinatnom sustavu

Krivulja Marie Agnesi ima zanimljiv geometrijski opis kako se dobivaju njezine točke. Opisat ćemo kako se dobivaju točke te krivulje u programu dinamičke geometrije Sketchpadu.

Konstruirat ćemo proizvoljnu kružnicu k sa središtem u točki S i odabrati proizvoljnu točku O na toj kružnici. Odaberemo još jednu točku A na kružnici k i konstruiramo sekantu OA. Konstruiramo pravac OS i označimo drugi presjek tog pravca i kružnice k s M. Konstruiramo tangentu u točki M na kružnicu k i označimo presjek te tangente i pravca OA s N. Zatim konstruiramo pravac koji je paralelan s pravcem OM i prolazi točkom N i pravac koji je okomit na pravac OM i prolazi kroz točku A te označimo njihov presjek s P. Označimo točke A i P i možemo primijeniti alat "Locus". Na taj način se dobije krivulja Marie Agnesi (Slika 5.13).

Ako krivulju Marie Agnesi smjestimo u koordinatni sustav tako da se točka O nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, a točka M na pozitivnom dijelu y-osi te ako pretpostavimo da je radijus kružnice jednak a, onda jednadžba ove krivulje glasi:

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}.$$



Slika 5.13: Crtanje krivulje Marie Agnesi u Sketchpadu

Ako je $a = \frac{1}{2}$, tada je ta jednadžba jednostavnija i glasi

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Bibliografija

[1] E.M. Hemmerling, College plane geometry, John Wiley and Sons, 1958.

[2] D. Palman, Geometrijske konstrukcije, Element, Zagreb, 1996.

[3] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola, Element, Zagreb, 2000.

[4] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, Element, Zagreb, 2013.

[5] Seminar ”Krivulje drugog reda” iz kolegija ”Metodika nastave matematike 4” kod profesorice Aleksandre Čižmešije, Zagreb, 2014.

[6] Konstruktivne metode u geometriji, skripta, preuzeto s http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/skripta.pdf

[7] Predavanja i vježbe iz kolegija ”Primjena računala u nastavi matematike” kod profesorice Maje Starčević, Zagreb, 2013.

[8] Š. Šuljić, Čunjosječnice, Miš - Matematika i škola, broj 11, godina 2001.

[9] D. Krizmanić, Žene u matematici, Miš - Matematika i škola, broj 25, godina 2004.

[10] Z. Kurnik, Konstruktivne metode, Miš - Matematika i škola, broj 30, godina 2005.

Sažetak

U ovom radu proučavaju se geometrijska mjesta točaka. Rad je podijeljen na pet poglavlja. U prvom poglavlju upoznajemo se s definicijom geometrijskog mjesta točaka te osnovnim teoremima vezanima uz geometrijska mjesta točaka. Također, u prvom poglavlju se upoznajemo s jednim od načina određivanja geometrijskog mjesta, a to je korištenje empirijskog pristupa koji zahtjeva geometrijski zor te na nekoliko primjera pokazujemo kako određujemo i precizno dokazujemo da je određeni skup traženo geometrijsko mjesto točaka koje zadovoljavaju određene uvjete. U drugom poglavlju se upoznajemo s jednom od konstruktivnih metoda pri kojoj se traženi objekt konstruira kao presjek geometrijskih mjesta točaka. U tom poglavlju navodimo koji su skupovi geometrijska mjesta za neke jednostavnije, opće poznate situacije i primijenjujemo to u složenijim konstrukcijama. U trećem poglavlju ovog rada opisujemo kako nam program dinamičke geometrije pomaže u određivanju geometrijskog mjesta točaka ukoliko je geometrijski uvjet presložen za prostoručno crtanje. Konkretno, u ovom poglavlju objašnjavamo kako pronalazimo geometrijsko mjesto točaka pomoću programa Sketchpad. U četvrtom poglavlju se bavimo analitičkim nalaženjem mjesta točaka, odnosno pokazujemo na nekoliko primjera kako se može odrediti geometrijsko mjesto točaka koristeći koordinatni zapis. U petom poglavlju opisujemo poznate krivulje koje su definirane kao geometrijska mjesta točaka zadana geometrijskim uvjetom kao što su konike (elipsa, hiperbola i parabola) te lemniskata i krivulja Marie Agnesi.

Summary

In this work we analyze the geometric loci of points. The work is divided into five chapters. In the first chapter we are introduced to the definition of the locus of points and basic theorems related to loci of points. Also, in the first chapter, we meet one of the ways of determining the geometric places, which is the use of an empirical approach that requires geometric view. We give a few examples showing how to determine and accurately prove that a certain set is the required geometric place of the points that meet certain conditions. In the second chapter we meet with one of the constructive methods whereby the requested object is constructed as the intersection of some loci of points. In this section, we provide loci for some simple, widely known situations and apply that to the more complex structures. In the third section of this work we describe how a dynamic geometry program helps us in determining the locus of points when the geometric condition is too complicated for freehand drawing. Specifically, this chapter explains how to find geometric places of points using Sketchpad. The fourth chapter deals with the analytical finding of geometric loci and shows a few examples of how we can determine the geometric place of points using coordinates. The fifth chapter describes some famous curves that are defined as loci of points, such as the conic sections (ellipse, hyperbola and parabola), the lemniscate and the Witch of Agnesi.

Životopis

Zovem se Ivana Laštro. Rođena sam 28.04.1990. u Banja Luci (BiH), a trenutno živim u malom selu Smrtić, nedaleko od Nove Gradiške. Završila sam Osnovnu školu "Okučani" u Okučanima, a zatim Opću gimnaziju "Nova Gradiška" u Novoj Gradiški. Trenutno studiram matematiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.