Izračunljivi topološki prostori

Lijović, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Lijović

IZRAČUNLJIVI TOPOLOŠKI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, Rujan 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučava se pojam izračunljivog topološkog prostora te pojmovi s tim u vezi. Poseban naglasak stavlja se na izračunljive metričke prostore i neka njihova svojstva koja služe kao motivacija za uvođenje izračunljivih topoloških prostora.

U prvom poglavlju navode se osnovni pojmovi izračunljivosti, pročavaju se rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te se dokazuju rezultati vezani za te funkcije koji su potrebni u nastavku rada.

Drugo poglavlje svodi se na proučavanje metričkih i topoloških prostora. Dokazani su određeni rezultati vezani uz pojam neprekidnosti, konvergencije niza, kompaktnosti, Hausdorffovog prostora te uz pojam baze topologije.

U trećem poglavlju uvodi se pojam izračunljivog metričkog prostora. Proučavaju se racionalne kugle u izračunljivim metričkim prostorima te njihove efektivne enumeracije. Uvodi se pojam formalne disjunktnosti te formalne sadržanosti te se ispituju razna svojstva tih relacija. Nakon toga, definira se izračunljiv topološki prostor te se proučavaju neka njegova svojstva.

Poglavlje 1

Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

1.1 Osnovni pojmovi teorije rekurzivnih funkcija

Definicija 1.1.1. *Funkciju $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu sa*

$$Z(x) = 0$$

*nazivamo **nul-funkcija**.*
Funkciju $\mathrm{Sc} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu sa

$$\mathrm{Sc}(x) = x + 1$$

*nazivamo **funkcija sljedbenika**.*
Neka je $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i $k \in \{1, ..., n\}$. Funkciju $I_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definiranu sa

$$I_k^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_k$$

*nazivamo **projekcija**.*
*Funkcije Z, Sc i $I_k^n (n \in \mathbb{N}_{>0}, k \leq n)$ zovemo **inicijalne funkcije**.*

Definicija 1.1.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}_{>0}$ te $S_1, S_2, ..., S_n \subseteq \mathbb{N}^k$. Neka su*

$$\begin{gathered} g_1 : S_1 \to \mathbb{N} \\ g_2 : S_2 \to \mathbb{N} \\ \dots \\ g_n : S_n \to \mathbb{N} \end{gathered}$$

funkcije. Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^n$ te $f : T \to \mathbb{N}$. Definirajmo k-mjesnu funkciju h sa

$$h(\vec{x}) \simeq f(g_1(\vec{x}), ..., g_n(\vec{x})).$$

Drugim riječima: Domena funkcije h je skup:

$$\{\vec{x} \in S_1 \cap .... \cap S_n : (g_1(\vec{x}), ..., g_n(\vec{x})) \in T\}$$

i za $\vec{x}$ iz tog skupa je $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), ..., g_n(\vec{x}))$.
Kažemo da je funkcija h dobivena ***kompozicijom*** *funkcija $f, g_1, ..., g_n$.*

Za $f : S \to \mathbb{N}, S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je totalna ako je $S = \mathbb{N}^k$.

Definicija 1.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka su $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$.*
Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sa:

$$h(0, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \tag{1.1}$$

$$h(y + 1, x_1, ..., x_n) = g(h(y, x_1, ..., x_n), y, x_1, ..., x_n) \tag{1.2}$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena ***primitivnom rekurzijom*** *od funkcija f i g.*

Na prirodan način se definira da je funkcija h dobivena primitivnom rekurzijom funkcija f i g u slučaju kada $f : S \to \mathbb{N}$, a $g : T \to \mathbb{N}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ te $T \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$.

Definicija 1.1.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}_{<0}$ te neka je $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ funkcija. Neka je*

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^n : \textit{postoji } y \in \mathbb{N} \textit{ takav da } g(\vec{x}, y) = 0\}.$$

Definirajmo $f : S \to \mathbb{N}$ sa

$$f(\vec{x}) = \min\{y \in \mathbb{N} : g(\vec{x}, y) = 0\}, \vec{x} \in S.$$

Za f kažemo da je dobivena primjenom μ - operatora na funkciju g. Broj

$$\min\{y \in \mathbb{N} : g(\vec{x}, y) = 0\}$$

označavamo i sa

$$\mu y(g(\vec{x}, y) = 0),$$

za svaki $\vec{x} \in S$.

Na prirodan način definiramo da je f dobivena primjenom μ - operatora na funkciju g ako je $g : T \to \mathbb{N}$, gdje je $T \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$.

Definicija 1.1.5. *Definirajmo skupove $S_n, n \in \mathbb{N}$ na sljedeći način:*

- *Neka je S_0 skup svih inicijalnih funkcija*

- *Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$, te da smo definirali S_n. Tada A definiramo kao skup svih funkcija koje se mogu dobiti kompozicijom i primitivnom rekurzijom od funkcija iz S_n, te definiramo $S_{n+1} = A \bigcup S_n$*

Za uniju $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ kažemo da je klasa primitivno rekurzivnih funkcija, a za elemente tog skupa kažemo da su ***primitivno rekurzivne funkcije****.*

Definicija 1.1.6. *Najmanju klasu funkcija koja sadrži inicijalne funkcije te je zatvorena na kompoziciju, primitivnu rekurziju i μ - operator nazivamo* ***klasa parcijalno rekurzivnih funkcija****, a njene elemente nazivamo parcijalno rekurzivne funkcije.*
One parcijalno rekurzivne funkcije koje su totalne nazivamo ***rekurzivne funkcije****.*

Definicija 1.1.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ te $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za skup S kažemo da je rekurzivan ako je njegova karakteristična funkcija $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna.*

$$\chi_S(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } \vec{x} \in S, \\ 0, & \textit{ako } \vec{x} \notin S. \end{cases}$$

Navedimo sada neke činjenice vezane za rekurzivne funkcije i rekurzivne skupove. Dokazi se mogu naći u [1].

Propozicija 1.1.8. *Sljedeće funkcije su rekurzivne:*

- $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
- $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$
- *funkcija modificiranog oduzimanja sa* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x_1, x_2) \to x_1 \dot{-} x_2$

$$x_1 \dot{-} x_2 = \begin{cases} x_1 - x_2, & x_1 \geq x_2 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

- $\mathrm{abs} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \mathrm{abs}(x_1, x_2) = \left| x - y \right|$
- *funkcije* $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definirane sa:*

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \overline{\mathrm{sg}} = \begin{cases} 0, & x \geq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- *funkcija $(x, i) \mapsto (x)_i$, gdje je $(x)_i$ eksponent uz p_i u rastavu broja x na proste faktore ako je $x \geq 1$, inače $(x)_i = 0$. Pri tome je p_i $(i + 1)$. prost broj.*

Propozicija 1.1.9. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$. Neka su $F_1, F_2, ..., F_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka su $S_1, ..., S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi takvi da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ postoji točno jedan $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $\vec{x} \in S_i$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa:*

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} F_1(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S_1, \\ F_2(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S_2, \\ ... \\ F_n(\vec{x}), & \text{ako je } \vec{x} \in S_n. \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Propozicija 1.1.10. *Neka je $k \geq 1$ te neka su S i T rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su $S^c, S \cap T$ i $S \cup T$ rekurzivni skupovi.*

Napomena 1.1.11. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije.*
Naime, funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

je rekurzivna. Za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f + g)(\vec{x}) = h(f(\vec{x}), g(\vec{x})).$$

Prema tome $f + g$ je kompozicija funkcija h, f i g pa slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija. Analogno dobivamo da je $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija.

1.2 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$

Definicija 1.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Za funkciju f kažemo da je* ***rekurzivna*** *ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x})$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.*

Propozicija 1.2.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Tada je f rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(\vec{x}) = u(\vec{x}) - v(\vec{x})$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f rekurzivna funkcija. Tada postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x})$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.
Neka je $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= \begin{cases} b(\vec{x}), & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ paran} \\ -b(\vec{x}), & \text{ako je } a(\vec{x}) \text{ neparan} \end{cases} \\
&= \begin{cases} b(\vec{x}) - 0, & \text{ako je } a(\vec{x}) \in 2\mathbb{N} \\ 0 - b(\vec{x}), & \text{ako je } a(\vec{x}) \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Definirajmo $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
u(\vec{x}) &= b(\vec{x})\chi_{2\mathbb{N}}(a(\vec{x})), \\
v(\vec{x}) &= b(\vec{x})\chi_{2\mathbb{N}+1}(a(\vec{x})).
\end{aligned}
$$

Očito su funkcije u, v rekurzivne te za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(\vec{x}) = u(\vec{x}) - v(\vec{x})$.

Pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(\vec{x}) = u(\vec{x}) - v(\vec{x})$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Neka je $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$
f(\vec{x}) = \begin{cases} (-1)^0 \left|u(\vec{x}) - v(\vec{x})\right|, & \text{ako je } u(\vec{x}) \geq v(\vec{x}) \\ (-1)^1 \left|u(\vec{x}) - v(\vec{x})\right|, & \text{ako je } u(\vec{x}) < v(\vec{x}) \end{cases}
$$

Definirajmo funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa:

$$
\begin{aligned}
b(\vec{x}) &= \left|u(\vec{x}) - v(\vec{x})\right| \\
a(\vec{x}) &= \begin{cases} 0, & \text{ako je } u(\vec{x}) \geq v(\vec{x}), \\ 1, & \text{ako je } u(\vec{x}) < v(\vec{x}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Tada je jasno da je $f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x})$.

Funkcija b je rekurzivna kao kompozicija funkcija abs, u i v pri čemu je abs $: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\text{abs}(x, y) = \left|x - y\right|$. Funkcija a je rekurzivna jer su skupovi $S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : u(\vec{x}) \geq v(\vec{x})\}$ i $S_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : u(\vec{x}) < v(\vec{x})\}$ rekurzivni ($\chi_{S_1} = \overline{\text{sg}}(v(\vec{x}) \dot{-} u(\vec{x})), S_2 = {S_1}^c$).

Zaključak: f je rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $-f, f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne.*

Dokaz. Budući da su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne, postoje rekurzivne funkcije $a_1, b_1, a_2, b_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x}),$$
$$g(\vec{x}) = (-1)^{a_2(\vec{x})} b_2(\vec{x})$$

za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.
Imamo

$$(-f)(\vec{x}) = -f(\vec{x}) = (-1)^{a_1(\vec{x})+1} b_1(\vec{x})$$

pa je očito $-f$ rekurzivna funkcija.
Nadalje vrijedi

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(\vec{x}) &= f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) \\ &= (-1)^{a_1(\vec{x})} b_1(\vec{x}) (-1)^{a_2(\vec{x})} b_2(\vec{x}) \\ &= (-1)^{(a_1(\vec{x})+a_2(\vec{x}))} b_1(\vec{x}) b_2(\vec{x}) \\ &= (-1)^{(a_1+a_2)(\vec{x})} b_1 b_2(\vec{x})\end{aligned}$$

pa je očito $f \cdot g$ rekurzivna funkcija.
Prema propoziciji 1.2.2 postoje rekurzivne funkcije $u_1, v_1, u_2, v_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da $f(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - v_1(\vec{x})$ i $g(\vec{x}) = u_2(\vec{x}) - v_2(\vec{x})$.
Slijedi

$$\begin{aligned}(f+g)(\vec{x}) &= f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \\ &= (u_1(\vec{x}) + u_2(\vec{x})) - (v_1(\vec{x}) + v_2(\vec{x})) \\ &= (u_1 + u_2)(\vec{x}) - (v_1 + v_2)(\vec{x})\end{aligned}$$

Iz propozicije 1.2.2 slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija. □

Uočimo sljedeće:

Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija, onda je f rekurzivna i kao funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ ($f(\vec{x}) = (-1)^{Z(\vec{x})} f(\vec{x})$).
Nadalje, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija, onda je funkcija $\left|f\right| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna.
Naime $f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} b(\vec{x})$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, gdje su $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije, iz čega slijedi da je $\left|f(\vec{x})\right| = b(\vec{x})$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, tj, $\left|f\right| = b$.

Uočimo i ovo:
Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(\mathbb{N}^k) \subseteq \mathbb{N}$, onda je f rekurzivna i kao funkcija s $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, tj. funkcija $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana s $g(\vec{x}) = f(\vec{x})$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ je rekurzivna.
To naprosto slijedi iz činjenice da je $g = \left|f\right|$.

1.3 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$

Definicija 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Za funkciju f kažemo da je rekurzivna ako postoje funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tako da je $c(\vec{x}) \neq 0$ i*

$$f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$$

Uočimo da je funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ td. $h(\vec{x}) \neq 0$ i $f(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x})}{h(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Propozicija 1.3.2. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije $-f, \left|f\right|, f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$*

Dokaz. Neka su $f_1, g_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $f_2, g_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f_2(\vec{x}) \neq 0, g_2(\vec{x}) \neq 0$ i

$$f(\vec{x}) = \frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})}, g(\vec{x}) = \frac{g_1(\vec{x})}{g_2(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$$

Imamo

$$(-f)(\vec{x}) = -f(\vec{x}) = -\frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} = \frac{-f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} = \frac{(-f_1)(\vec{x})}{f_2(\vec{x})}$$

Budući da je $-f_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija slijedi da je $-f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.
Nadalje

$$\left|f\right|(\vec{x}) = \left|f(\vec{x})\right| = \frac{\left|f_1(\vec{x})\right|}{\left|f_2(\vec{x})\right|} = \frac{\left|f_1(\vec{x})\right|}{f_2(\vec{x})}$$

pa slijedi da je $\left|f\right|$ rekurzivna funkcija.
Imamo

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} + \frac{g_1(\vec{x})}{g_2(\vec{x})} = \frac{f_1(\vec{x})g_2(\vec{x}) + g_1(\vec{x})f_2(\vec{x})}{f_2(\vec{x})g_2(\vec{x})}$$

Koristeći propoziciju 1.2.3 i činjenicu da su f_2 i g_2 rekurzivne i kao funkcije sa $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, zaključujemo da je $f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.
Vrijedi

$$(f \cdot g)(\vec{x}) = f(\vec{x})g(\vec{x}) = \frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} \cdot \frac{g_1(\vec{x})}{g_2(\vec{x})} = \frac{(f_1 \cdot g_1)(\vec{x})}{(f_2 \cdot g_2)(\vec{x})}$$

pa slijedi da je $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.3.3. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Neka je $S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}, T = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : f(\vec{x}) < g(\vec{x})\}$ i $V = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})\}$. Tada su S, T i V rekurzivni skupovi.*

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tvrdimo da su skupovi

$$S' = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : h(\vec{x}) = 0\}$$
$$T' = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : h(\vec{x}) > 0\}$$

rekurzivni.
Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $c(\vec{x}) \neq 0$ i $h(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}$.
Neka je $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$h(\vec{x}) = 0 \iff b(\vec{x}) = 0$$

pa je $\chi_{S'}(\vec{x}) = \overline{\mathrm{sg}}(b(\vec{x}))$.
Iz ovog zaključujemo da je $\chi_{S'}$ kompozicija rekurzivnih funkcija pa je S' rekurzivan skup.

Nadalje za $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $h(\vec{x}) > 0$ ako i samo ako $a(\vec{x}) \in 2\mathbb{N}$ i $b(\vec{x}) > 0$. Stoga je $\chi_{T'}(\vec{x}) = \mathrm{sg}(b(\vec{x}))\chi_{2\mathbb{N}}(a(\vec{x}))$, pa slijedi da je funkcija $\chi_{T'}$ rekurzivna kao produkt rekurzivnih funkcija.
Dakle T' je rekurzivan skup.

Definirajmo sada $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ sa $h(\vec{x}) = g(\vec{x}) - f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Funkcija h je rekurzivna prema propoziciji 1.3.2 jer je $h = g + (-f)$.
Za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \iff g(\vec{x}) - f(\vec{x}) = 0 \iff h(\vec{x}) = 0$$

te

$$f(\vec{x}) < g(\vec{x}) \iff g(\vec{x}) - f(\vec{x}) > 0 \iff h(\vec{x}) > 0$$

Prema tome

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : h(\vec{x}) = 0\}$$
$$T = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : h(\vec{x}) > 0\}$$

Prema dokazanom, skupovi T i S su rekurzivni. Rekurzivnost skupa V slijedi iz činjenice da je $V = S \cup T$. □

Definicija 1.3.4. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$, te neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$. Za funkciju g kažemo da je rekurzivna ako su komponentne funkcije od g rekurzivne, tj. ako su rekurzivne funkcije $a_1, a_2, ..., a_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$g(\vec{x}) = (a_1(\vec{x}), a_2(\vec{x}), ..., a_n(\vec{x}))$$

za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Uočimo sljedeće: Ako su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije, onda je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija.
Naime, neka su $a_1, ..., a_n$ komponentne funkcije od g. Tada za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(a_1(\vec{x}), ..., a_n(\vec{x}))$$

Iz ovog zaključujemo da je $f \circ g$ dobivena kompozicijom funkcija $f, a_1, a_2, ..., a_n$. Stoga je $f \circ g$ rekurzivna funkcija.

Propozicija 1.3.5. *Neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $c(\vec{x}) \neq 0$ i $f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n$.Vrijedi

$$(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = (-1)^{a(g(\vec{x}))} \frac{b(g(\vec{x}))}{c(g(\vec{x}))} = (-1)^{(a \circ g)(\vec{x})} \frac{(b \circ g)(\vec{x})}{(c \circ g)(\vec{x})}$$

Iz činjenice da su $a \circ g, b \circ g, c \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije, slijedi da je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. □

Lema 1.3.6. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tako da je $\left|f(\vec{x})\right| < H(\vec{x})$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije takve da je $c(\vec{x}) \neq 0$ i $f(\vec{x}) = (-1)^{a(\vec{x})} \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})}$, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.
Definirajmo $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, H(\vec{x}) = b(\vec{x}) + 1$. Funkcija H je očito rekurzivna i za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\left|f(\vec{x})\right| = \frac{b(\vec{x})}{c(\vec{x})} \leq b(\vec{x}) < H(\vec{x}).$$

□

1.4 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

Definicija 1.4.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$, te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je rekurzivna ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ tako da je*

$$\left|f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i)\right| < 2^{-i}$$

za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Za F kažemo da je rekurzivna aproksimacija od f.

Lema 1.4.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da postoje rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $M \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$\left| f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i) \right| \leq M \cdot 2^{-i}$$

za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Odaberimo broj $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{i_0} > M$. Tada je $\frac{M}{2^{i_0}} < 1$. Neka su $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\left| f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i + i_0) \right| \leq M \cdot 2^{-(i+i_0)} = M \cdot 2^{-i} \cdot 2^{-i_0} = \frac{M}{2^{i_0}} \cdot 2^{-i} < 2^{-i}$$

Dakle,

$$\left| f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i + i_0) \right| < 2^{-i} \tag{1.3}$$

Neka je $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa $G(\vec{x}, i) = F(\vec{x}, i + i_0)$. Iz (1.3) slijedi da je

$$\left| f(\vec{x}) - G(\vec{x}, i) \right| < 2^{-i}, \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ako dokažemo da je G rekurzivna, onda smo gotovi. Imamo $G = F \circ \varphi$, gdje je $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, ..., i) = (x_1, x_2, ..., x_k, i + i_0)$$

Neka su $\varphi_1, ..., \varphi_{k+1}$ komponentne funkcije od φ. Tada je

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= I_1^{k+1}, \\ \varphi_2 &= I_2^{k+1}, \\ &... \\ \varphi_k &= I_k^{k+1}. \end{aligned}$$

a φ_{k+1} je zbroj funkcija I_{k+1}^{k+1} i konstantne fukcije $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ s vrijednošću i_0. Prema tome, φ je rekurzivna funkcija pa iz $G = F \circ \varphi$ i propozicije 1.3.5 slijedi da je G rekurzivna.

□

Propozicija 1.4.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada su i $-f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ i $f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Neka su $F, G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne aproksimacije od f i g. Za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left| f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i) \right| < 2^{-i}.$$

No,

$$\left| f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i) \right| = \left| -f(\vec{x}) + F(\vec{x}, i) \right| = \left| -f(\vec{x}) - (-F(\vec{x}, i)) \right| = \left| (-f)(\vec{x}) - (-F)(\vec{x}, i) \right|.$$

Dakle,

$$\left| (-f)(\vec{x}) - (-F)(\vec{x}, i) \right| < 2^{-i}$$

za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Iz ovoga slijedi da je $-F$ rekurzivna aproksimacija od $-f$, prema tome $-f$ je rekurzivna funkcija.

Neka su $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\left| (f + g)(\vec{x}) - (F + G)(\vec{x}, i) \right| &= \left| f(\vec{x}) + g(\vec{x}) - F(\vec{x}, i) - G(\vec{x}, i) \right| \\
&= \left| f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i) + g(\vec{x}) - G(\vec{x}, i) \right| \\
&\leq \left| f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i) \right| + \left| g(\vec{x}) - G(\vec{x}, i) \right| \\
&< 2^{-i} + 2^{-i} = 2 \cdot 2^{-i}
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\left| (f + g)(\vec{x}) - (F + G)(\vec{x}, i) \right| < 2 \cdot 2^{-i}.$$

Iz leme 1.4.2 i propozicije 1.3.2 slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.4.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Budući da je f rekurzivna, postoji $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$\left| f(y) - F(y, i) \right| < 2^{-i},$$

za svaki $y \in \mathbb{N}^n$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Stoga za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left| f(g(\vec{x})) - F(g(\vec{x}), i) \right| < 2^{-i}. \tag{1.4}$$

Definirajmo funkciju $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$H(x_1, ..., x_k, i) = F(g(x_1, ..., x_k), i).$$

Prema (1.4), za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left| (f \circ g)(\vec{x}) - H(\vec{x}, i) \right| < 2^{-i}.$$

Stoga je dovoljno dokazati da je H rekurzivna funkcija.
Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{n+1}$ sa

$$G(x_1, ..., x_k, i) = (g(x_1, ..., x_k), i).$$

Neka su $g_1, ..., g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od g. Neka su $G_1, ..., G_{n+1} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od G. Imamo:

$$G(x_1, ..., x_k, i) = (g_1(x_1, ..., x_k), ..., g_n(x_1, ..., x_k), i).$$

Iz ovoga je jasno da je $G_{n+1} = I^{k+1}_{k+1}$. Nadalje, neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Tada je

$$G_i(x_1, ..., x_k, i) = g_i(x_1, ..., x_k),$$

pa je G_i kompozicija funkcija $g_i, I^{k+1}_1, ..., I^{k+1}_k$ što povlači da je G_i rekurzivna funkcija.
Slijedi da je G rekurzivna funkcija.
Iz definicije funkcije G jasno je da je $H = F \circ G$, pa iz propozicije 1.3.5 slijedi da je H rekurzivna funkcija.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Napomena 1.4.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada je f rekuzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.*
Naime, definirajmo $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$F(x_1, ..., x_k, i) = f(x_1, ..., x_k).$$

Imamo $F = f \circ g$, pri čemu je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa

$$g(x_1, ..., x_k, i) = (x_1, ..., x_k).$$

Očito je g rekurzivna funkcija pa iz propozicije 1.3.5 slijedi da je funkcija F rekurzivna. Za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left| f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i) \right| = 0 < 2^{-i},$$

pa zaključujemo da je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.

1.5 Rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 1.5.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za S kažemo da je rekurzivno prebrojiv skup ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takava da je $S = f(\mathbb{N})$.*

Propozicija 1.5.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{k>0}$ te neka je S rekurzivan podskup od $\mathbb{N}^k$. Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je S neprazan. Odaberimo $s_0 \in S$. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$g(\vec{x}) = ((x)_0, (x)_1, ..., (x)_{k-1}).$$

Podsjetimo se da smo u uvodu definirali broj $(x)_i$ za $x, i \in \mathbb{N}$. Očito su komponentne funkcije od g rekurzivne, dakle g je rekurzivna. Funkcija g je surjekcija, naime ako je $(a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{N}^k$ onda je

$$g(p_0^{a_1} \cdot p_1^{a_2} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{a_k}) = (a_1, a_2, ..., a_k).$$

Definiramo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ako je } g(x) \in S, \\ s_0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Tvrdimo da je $f(\mathbb{N}) = S$.
Ako je $x \in \mathbb{N}$, onda je očito $f(x) \in S$.
Obratno, ako je $s \in S$, onda zbog činjenice da je g surjekcija postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $s = g(x)$. Iz definicije funkcije f je tada jasno da je $f(x) = s$. Time smo dokazali da je $f(\mathbb{N}) = S$.
Preostaje pokazati da je f rekurzivna funkcija. Imamo

$$s_0 = (s_1, ..., s_k)$$

gdje su $s_1, ..., s_k \in \mathbb{N}$. Neka su $f_1, ..., f_k$ komponentne funkcije od f. Prema (1.5) vrijedi

$$(f_1(x), ..., f_k(x)) = \begin{cases} ((x)_0, ..., (x)_{k-1}), & \text{ako je } g(x) \in S, \\ (s_1, ..., s_k), & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Tada je

$$f_i(x) = \begin{cases} (x)_{i-1}, & \text{ako je } g(x) \in S, \\ s_i, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je

$$T = \{x \in \mathbb{N} : g(x) \in S\}.$$

Tada je $\chi_T(x) = \chi_S(g(x))$, tj. $\chi_T = \chi_S \circ g$, iz čega slijedi da je χ_T rekurzivna funkcija. Dakle T je rekurzivan skup i vrijedi:

$$f_i(x) = \begin{cases} (x)_{i-1}, & \text{ako je } x \in T, \\ s_i, & \text{inače.} \end{cases}$$

Iz propozicije 1.1.9 slijedi da je f_i rekurzivna funkcija. Prema tome $f_1, ..., f_k$ su rekurzivne funkcije pa zaključujemo da je f rekurzivna. □

Neka su $n, m, k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivne funkcije. Neka su $f_1, f_2, ..., f_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f.
Funkcije $f_1, ..., f_m$ su rekurzivne i za svaki $\vec{y} \in \mathbb{N}^n$ vrijedi

$$f(\vec{y}) = (f_1(\vec{y}), ..., f_m(\vec{y})).$$

Stoga za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi (za $y = g(\vec{x})$)

$$f(g(\vec{x})) = (f_1(g(\vec{x})), ..., f_m(g(\vec{x})))$$

tj.

$$(f \circ g)(\vec{x}) = ((f_1 \circ g)(\vec{x}), ..., (f_m \circ g)(\vec{x})).$$

Iz ovoga slijedi da su $f_1 \circ g, ..., f_m \circ g$ komponentne funkcije od $f \circ g$. Stoga je $f \circ g$ rekurzivna funkcija.

Napomena 1.5.3. *Ako su S, T i V skupovi te $f : S \to T$ i $g : T \to V$ funkcije, onda za svaki $A \subseteq S$ vrijedi*

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Naime neka je $z \in (g \circ f)(A)$. Tada je $z = (g \circ f)(x)$ za neki $x \in A$. Slijedi da je $z = g(f(x))$. Označimo $y = f(x)$. Imamo $y \in f(A)$ (jer je $x \in A$) i $z \in g(f(A))$.

Obratno, neka je $z \in g(f(A))$. Tada je $z = g(y)$ za neki $y \in f(A)$. Slijedi da je $y = f(x)$ za neki $x \in A$. Imamo $z = g(f(x))$, tj. $z = (g \circ f)(x)$. Prema tome $z \in (g \circ f)(A)$.

Propozicija 1.5.4. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada je $g(S)$ rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, onda je $g(S) = \emptyset$ pa je tvrdnja jasna.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $f(\mathbb{N}) = S$. Funkcija $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ je rekurzivna.
Prema napomeni 1.5.3 vrijedi

$$(g \circ f)(\mathbb{N}) = g(f(\mathbb{N})) = g(S).$$

Prema tome, $g(S)$ je rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 1.5.5. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka je T rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^{k+n}$. Neka je*

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : \textit{postoji } \vec{y} \in \mathbb{N}^n \textit{takav da je } (\vec{x}, \vec{y}) \in T\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka je $\pi : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ projekcija na prvih k koordinata, odnosno funkcija takva da je

$$\pi(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+n}) = (x_1, ..., x_k).$$

Funkcija π je rekurzivna. Naime komponentne funkcije od π su $I_1^{k+n}, ..., I_k^{k+n}$.
Tvrdimo da je $\pi(T) = S$.
Neka je $\vec{x} \in \pi(T)$. Tada postoji $\vec{z} \in T$ takav da je $\vec{x} = \pi(\vec{z})$. Imamo $\vec{z} = (\vec{a}, \vec{b})$, gdje su $\vec{a} \in \mathbb{N}^k$ i $\vec{b} \in \mathbb{N}^n$. Tada je $\pi(\vec{z}) = \vec{a}$, pa slijedi $\vec{a} = \vec{x}$. Dakle $\vec{z} = (\vec{x}, \vec{b})$, pa je $(\vec{x}, \vec{b}) \in T$. Slijedi, $\vec{x} \in S$.

Obratno, neka je $\vec{x} \in S$.
Tada postoji $\vec{y} \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(\vec{x}, \vec{y}) \in T$. Imamo $\vec{x} = \pi(\vec{x}, \vec{y})$. Stoga je $x \in \vec{\pi}(T)$.
Time smo dokazali da je $\pi(T) = S$.
Iz propozicije 1.5.4 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Napomena 1.5.6. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Tada je*

$$\left|x - y\right| < r \iff y \in \langle x - r, x + r\rangle.$$

Naime

$$\begin{aligned} \left|x - y\right| < r &\iff x - y < r \text{ i } -(x - y) < r \\ &\iff x - r < y \text{ i } y < x + r \\ &\iff y \in \langle x - r, x + r\rangle. \end{aligned}$$

Teorem 1.5.7. *Neka je $k \in N_{>0}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je skup $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : f(\vec{x}) > 0\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Označimo ovaj skup sa S.
Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. Tada je

$$\left|f(\vec{x}) - F(\vec{x}, i)\right| < 2^{-i} \tag{1.6}$$

za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Neka je $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Pretpostavimo da je $f(\vec{x}) > 0$. Tada je $\frac{f(\vec{x})}{2} > 0$ pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{f(\vec{x})}{2} > 2^{-i}.$$

Slijedi

$$f(\vec{x}) > 2 \cdot 2^{-i}, \text{ pa je } f(\vec{x}) - 2^{-i} > 2^{-i}.$$

Prema (1.6) i napomeni 1.5.6 vrijedi

$$F(\vec{x}, i) \in \langle f(\vec{x}) - 2^{-i}, f(\vec{x}) + 2^{-i} \rangle$$

pa je

$$F(\vec{x}, i) > f(\vec{x}) - 2^{-i}.$$

Stoga je

$$F(\vec{x}, i) > 2^{-i}.$$

Dakle, ako je $f(\vec{x}) > 0$ onda postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $F(\vec{x}, i) > 2^{-i}$.

Obratno, pretpostavimo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $F(\vec{x}, i) > 2^{-i}$. Tada je

$$F(\vec{x}, i) - 2^{-i} > 0.$$

Iz (1.6) i napomene 1.5.6 slijedi

$$f(\vec{x}) \in \langle F(\vec{x}, i) - 2^{-i}, F(\vec{x}, i) + 2^{-i} \rangle$$

pa je

$$f(\vec{x}) > F(\vec{x}, i) - 2^{-i}.$$

Stoga je $f(\vec{x}) > 0$. Dakle, vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$f(\vec{x}) > 0 \iff \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } F(\vec{x}, i) > 2^{-i}. \tag{1.7}$$

Neka je

$$T = \{(\vec{x}, i) \in \mathbb{N}^{k+1} : F(\vec{x}, i) > 2^{-i}\}.$$

Skup T je rekurzivan prema propoziciji 1.3.3 jer je

$$T = \{(\vec{x}, i) \in \mathbb{N}^{k+1} : F(\vec{x}, i) > G(\vec{x}, i)\}$$

pri čemu je $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa

$$G(\vec{x}, i) = \frac{1}{2^i}.$$

Stoga je T i rekurzivno prebrojiv. Iz 1.7 slijedi da je

$$\vec{x} \in S \iff \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (\vec{x}, i) \in T.$$

Iz teorema 1.5.5 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. $\square$

Korolar 1.5.8. *Neka je $k \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je skup*

$$\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : f(\vec{x}) < g(\vec{x})\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$h(\vec{x}) = g(\vec{x}) - f(\vec{x}), \text{ za svaki } \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Iz propozicije 1.4.3 slijedi da je h rekurzivna funkcija (naime $h = g + (-f)$).
Za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$f(\vec{x}) < g(\vec{x}) \iff 0 < f(\vec{x}) - g(\vec{x}) \iff 0 < h(\vec{x}).$$

Stoga je

$$\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : f(\vec{x}) < g(\vec{x})\} = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : 0 < h(\vec{x})\}$$

pa iz prethodnog teorema slijedi tvrdnja korolara. $\square$

Poglavlje 2

Metrički i topološki prostori

2.1 Metrički prostori

Definicija 2.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za sve $x, y, z \in X$ vrijedi sljedeće:*

1. $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

*Tada za d kažemo da je **metrika** na skupu X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je **metrički prostor**.*

Primjer 2.1.2. *Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = \left|x - y\right|.$$

Očito je da d zadovoljava svojstva 1 i 2 iz definicije metrike. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tada je

$$d(x, y) = \left|x - y\right| = \left|x - z + z - y\right| \leq |x - z| + \left|z - y\right| = d(x, z) + d(z, y).$$

*Dakle, d je metrika na $\mathbb{R}$. Za d kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbb{R}$.*

Podsjetimo se da je **norma** na realnom vektorskom prostoru $(V, +, \cdot)$ funkcija $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto ||x||$, koja ima sljedeća svojstva:

1. $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

za sve $x, y \in V$, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primjer 2.1.3. *Neka je norma $\|\cdot\|$ na vektorskom prostoru $(V, +, \cdot)$. Neka je $d : V \times V \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Tvrdimo da je d metrika na V. Očito je $d(x, y) \geq 0$ za sve $x, y \in V$. Nadalje vrijedi

$$d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| \iff x - y = \vec{0} \iff x = y.$$

Za sve $x, y \in V$ vrijedi:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\,\|y - x\| = 1 \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Neka su $x, y, z \in V$. Imamo

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

*Dakle, d je metrika na V. Za d kažemo da je **metrika inducirana normom** $\|\cdot\|$.*

Primjer 2.1.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Neka je $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|.$$

Tada je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$.
Naime svojstva 1 i 2 iz definicije norme su očita, a što se tiče svojstva 3 imamo:

$$\begin{aligned}
\|(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\|_1 &= \|(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)\|_1 \\
&= \left|x_1 + y_1\right| + ... + \left|x_n + y_n\right| \\
&\leq (|x_1| + \left|y_1\right|) + ... + (|x_n| + \left|y_n\right|) \\
&= \|(x_1, ..., x_n)\|_1 + \|(y_1, ..., y_n)\|_1
\end{aligned}$$

Neka je d metrika na $\mathbb{R}^n$ inducirana normom $\|\cdot\|_1$. Tada vrijedi

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \|(x_1, ..., x_n) - (y_1, ..., y_n)\|_1 = \|(x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)\|_1 = \left|x_1 - y_1\right| + ... + \left|x_n - y_n\right|.$$

Dakle,

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \left|x_1 - y_1\right| + ... + \left|x_n - y_n\right|.$$

Podsjetimo se da je **skalarni produkt** na realnom vektorskom prostoru $(V, +, \cdot)$ funkcija $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto \langle x \mid y \rangle$ takva da za sve $x, y, z \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:

1. $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$;
2. $\langle \lambda \cdot x \mid y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$;
3. $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$;
4. $\langle x \mid x \rangle \geq 0$, $\langle x \mid x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$.

Pretpostavimo da je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $(V, +, \cdot)$. Definirajmo funkciju $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ sa

$$\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}.$$

Tvrdimo da je $\|\cdot\|$ norma na $(V, +, \cdot)$. Očito je da $\|\cdot\|$ zadovoljava svojstvo (1) iz definicije norme. Neka su $x \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\|\lambda \cdot x\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot x \mid \lambda \cdot x \rangle} = \sqrt{\lambda \langle x \mid \lambda \cdot x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x \mid x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = |\lambda|\, \|x\|.$$

Preostaje dokazati da vrijedi svojstvo (3) iz definicije norme.
Neka su $x, y \in V$. Tada je

$$\begin{aligned}
\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&\iff \langle x + y \mid x + y \rangle \leq \langle x \mid x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y \mid y \rangle \\
&\iff \langle x \mid x \rangle + 2\langle x \mid y \rangle + \langle y \mid y \rangle \leq \langle x \mid x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y \mid y \rangle \\
&\iff \langle x \mid y \rangle \leq \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y \mid y \rangle}.
\end{aligned}$$

Stoga je dovoljno dokazati da vrijedi

$$\left| \langle x \mid y \rangle \right| \leq \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y \mid y \rangle},$$

tj.

$$\langle x \mid y \rangle^2 \leq \langle x \mid x \rangle \cdot \langle y \mid y \rangle. \tag{2.1}$$

Ako je $y = \vec{0}$, jasno je da vrijedi (2.1).
Pretpostavimo da je $y \neq \vec{0}$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(t) = \langle x + ty \mid x + ty \rangle.$$

Očito je $f(t) \geq 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Nadalje, za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(t) = \langle x \mid x \rangle + 2t\langle x \mid y \rangle + t^2 \langle y \mid y \rangle,$$

tj.

$$f(t) = at^2 + bt + c.$$

gdje je

$$a = \langle y \mid y \rangle,$$
$$b = 2\langle x \mid y \rangle,$$
$$c = \langle x \mid x \rangle.$$

Dakle, f je kvadratna funkcija takva da je $f(t) \geq 0$, za svaki $t \in \mathbb{R}$. Stoga je diskriminanta od f manja ili jednaka nuli, tj. $b^2 - 4ac \leq 0$, odnosno $b^2 \leq 4ac$, pa je

$$4\langle x \mid y \rangle^2 \leq 4\langle y \mid y \rangle \cdot \langle x \mid x \rangle,$$

iz čega slijedi (2.1).
Zaključujemo da je $\|\cdot\|$ norma na V i za $\|\cdot\|$ kažemo da je **norma inducirana skalarnim produktom** $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Primjer 2.1.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka je $\langle \cdot | \cdot \rangle$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ definiran sa*

$$\langle (x_1, ..., x_n) | (y_1, ..., y_n) \rangle = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n.$$

*Neka je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$ inducirana ovim skalarnim produktom. Za $\|\cdot\|$ kažemo da je **euklidska norma na** $\mathbb{R}^n$.*
Za sve $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{\langle (x_1, ..., x_n) | (x_1, ..., x_n) \rangle},$$

tj.

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Neka je d metrika na $\mathbb{R}^n$ inducirana ovom normom. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Tada je

$$d(x, y) = \|x - y\| = |(x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)\|,$$

pa je

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

*Za d kažemo da je **euklidska metrika na** $\mathbb{R}^n$.*

Definicija 2.1.6. *Neka je (X,d) metrički prostor. Neka je $x_0 \in X$ te $r \in \mathbb{R}^+$. Definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

*Za $K(x_0, r)$ kažemo da je **otvorena kugla** (ili naprosto samo kugla) oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d).*
Pišemo i $K_{(X,d)}(x_0, r)$.

2.2 Otvoreni skupovi u metričkom prostoru

Definicija 2.2.1. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u metričkom prostoru (X,d) ako*

$$\forall x \in U\ \exists r > 0 \text{ takav da je } K(x, r) \subseteq U.$$

Primjer 2.2.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ te $r > 0$. Tada je*

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle. \tag{2.2}$$

Dokažimo to.
Neka je $x \in \mathbb{R}$. Koristeći 1.5.6 dobivamo

$$\begin{aligned} x \in K(x_0, r) &\iff d(x, x_0) < r \\ &\iff |x - x_0| < r \\ &\iff x \in \langle x_0 - r, x_o + r\rangle. \end{aligned}$$

Dakle vrijedi (2.2).
Nadalje, ako su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, onda je $a = x_0 - r$ i $b = x_0 + r$, pri čemu je $x_0 = \frac{a+b}{2}$ i $r = \frac{b-a}{2}$. Prema tome

$$\langle a, b\rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle,$$

tj.

$$\langle a, b\rangle = K(x_0, r).$$

Skup $[0, \infty\rangle$ nije otvoren u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Naime ne postoji $r > 0$ takav da je $K(0, r) \subseteq [0, \infty\rangle$ jer je $K(0, r) = \langle -r, r\rangle$, te imamo $\frac{-r}{2} \in \langle -r, r\rangle$, no $\frac{-r}{2} \notin [0, \infty\rangle$.
S druge strane skup $\langle 0, \infty\rangle$ je otvoren u $(\mathbb{R}, d)$. Naime za svaki $x \in \langle 0, \infty\rangle$ možemo uzeti $r = x$, tada je $r > 0$ i vrijedi

$$K(x, r) = \langle x - r, x + r\rangle = \langle 0, 2x\rangle \subseteq \langle 0, \infty\rangle,$$

dakle

$$K(x, r) \subseteq \langle 0, \infty\rangle.$$

Propozicija 2.2.3. *Neka je (X,d) metrički prostor, $x_0 \in X$, te $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X,d).*

Dokaz. Neka je $x \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x, x_0) < r$, pa je $r - d(x, x_0) > 0$.
Odaberimo $s > 0$ takav da je

$$s < r - d(x, x_0).$$

Tada je
$$s + d(x, x_0) < r.$$
Tvrdimo da je
$$K(x, s) \subseteq K(x_0, r). \tag{2.3}$$
Neka je $x' \in K(x, s)$. Tada je $d(x, x') < s$. Imamo
$$d(x', x_0) \leq d(x', x) + d(x, x_0) < s + d(x, x_0) < r.$$
Dakle $d(x', x_0) < r$, pa je
$$x' \in K(x_0, r).$$
Time smo dokazali da vrijedi (2.3) pa zaključujemo da je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d). □

Primjetimo da obrat prethodne propozicije ne vrijedi, Naime, ako je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, onda je $\langle 0, \infty\rangle$ otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$ no $\langle 0, \infty\rangle$ nije otvorena kugla u $(\mathbb{R}, d)$.

Napomena 2.2.4. *Neka je X skup. Za funkciju $U : A \to P(A)$, pri čemu je A neki skup, kažemo da je* ***indeksirana familija*** *podskupova od X. Pišemo $U = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$.*
(Npr. funkcija $U : \mathbb{Q} \to P(\mathbb{R})$, $U_q = \langle q - 1, q + 1\rangle$, $q \in \mathbb{Q}$ je inducirana familija podskupova od $\mathbb{R}$.

Propozicija 2.2.5. *Neka je (X,d) metrički prostor.*

1. *$\emptyset$ i X su otvoreni skupovi u (X,d);*

2. *ako je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija otvorenih podskupova metričkog prostora (X,d), onda je $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ otvoren podskup od (X,d);*

3. *ako su U i V otvoreni skupovi u (X,d), onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X,d).*

Dokaz.
1. Za svaki $x \in X$ i za svaki $r > 0$ očito vrijedi $K(x, r) \subseteq X$. Prema tome X je otvoren u (X, d).
   Prazan skup je trivijalno otvoren u (X, d).

2. Neka je $x \in \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$. Budući da je U_{α_0} otvoren podskup metričkog prostora (X, d), postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U_{\alpha_0}$. Slijedi
$$K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha.$$
   Prema tome, $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d).

3. Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Budući da su U i V otvoreni skupovi u (X, d), postoje pozitivni brojevi r_1, r_2 takvi da je
$$K(x, r_1) \subseteq U$$
i
$$K(x.r_2) \subseteq V.$$
Neka je $r = \min\{r_1, r_2\}$.
Tada je $r > 0$ i $r \leq r_1, r \leq r_2$, iz čega slijedi
$$K(x, r) \subseteq K(x, r_1)$$
i
$$K(x, r) \subseteq K(x, r_2).$$
Stoga je $K(x, r) \subseteq U$ i $K(x, r) \subseteq V$, tj.
$$K(x, r) \subseteq U \cap V.$$
Prema tome $U \cap V$ je otvoren skup u (X, d).

□

Korolar 2.2.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $n \in \mathbb{N}$ i $U_0, ..., U_n$ otvoreni skupovi u (X, d). Tada je $U_0 \cap ... \cap U_n$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazujemo indukcijom po n.
Za $n = 0$, tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $U_0, ..., U_{n+1}$ otvoreni skupovi u (X, d). Tada je
$$U_0 \cap ... \cap U_{n+1} = (U_0 \cap ... \cap U_n) \cap U_{n+1}.$$
Iz induktivne pretpostavke slijedi da je $U_0 \cap ... \cap U_n$ otvoren skup u (X, d) pa iz propozicije 2.2.5 (3) slijedi da je $(U_0 \cap ... \cap U_n) \cap U_{n+1}$ otvoren skup u (X, d). Prema tome $U_0 \cap ... \cap U_{n+1}$ je otvoren u (X, d).
Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi za $n + 1$, čime je propozicija dokazana. □

Primjer 2.2.7. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz podskupova od $\mathbb{R}$ definiran sa*
$$U_n = \langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rangle.$$
Tada je (U_n) niz otvorenih skupova u $(\mathbb{R}, d)$, no $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ nije otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$.

Dokažimo to.

Tvrdimo da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$. *Jasno je da je* $\{0\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
Obratno, uzmimo da je $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. *Pretpostavimo da* $x \notin \{0\}$, *tj.* $x \neq 0$. *Tada je* $0 < |x|$ *pa postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$\frac{1}{n_0} < |x| \tag{2.4}$$

Iz $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *slijedi da je*

$$x \in \langle -\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0} \rangle,$$

tj.

$$x \in K(0, \frac{1}{n_0})$$

(primjer 2.2.2). Stoga je

$$d(x, 0) < \frac{1}{n_0}, \text{ tj. } |x| < \frac{1}{n_0},$$

što je u kontradikciji sa (2.4). Prema tome $x \in \{0\}$, *čime smo dokazali da je*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \{0\}.$$

Zaključak: vrijedi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$.
Jasno je da $\{0\}$ *nije otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$, *dakle* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *nije otvoren skup u* $(\mathbb{R}, d)$.

Propozicija 2.2.8. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Neka je* $U \subseteq X, U \neq \emptyset$. *Tada je* U *otvoren u* (X, d) *ako i samo ako je* U *unija otvorenih kugla, tj. ako postoji indeksirana familija* $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ *otvorenih kugla u* (X, d) *takva da je* $U = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$.

Dokaz. Ako je U unija otvorenih kugla, onda iz propozicije 2.2.3 i iz propozicije 2.2.5 slijedi da je U otvoren skup.
Obratno, pretpostavimo da je U otvoren skup. Tada za svaki $x \in U$ postoji $r_x > 0$ takav da je $K(x, r_x) \subseteq U$.
Tada je $U = \bigcup_{x\in U} K(x, r_x)$. □

Definicija 2.2.9. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori. Neka je* $f : X \to Y$ *funkcija te neka je* $x_0 \in X$. *Kažemo da je funkcija* ***f neprekidna u točki*** x_0 *s obzirom na metrike* d, d' *ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in X$ *vrijedi implikacija*

$$d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Ako je funkcija f neprekidna u točki x_0 *s obzirom na metrike d i d' za svaki* $x_0 \in X$, *onda kažemo da je f neprekidna s obzirom na metrike d i d'.*

Primjer 2.2.10. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $y_0 \in Y$. Neka je $f : X \to Y$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = y_0,$$

za svaki $x \in X$. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike d i d'.
Naime, neka je $x_0 \in X$ i $\epsilon > 0$. Tada za svaki $\delta > 0$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

jer je

$$d'(f(x_0), f(x)) = d'(y_0, y_0) = 0, \text{ za svaki } x \in X.$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0. Dakle, f je neprekidna.

Primjer 2.2.11. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $f : X \to X$ identiteta na X, tj. funkcija definirana sa*

$$f(x) = x,$$

za svaki $x \in X$. Tada je f neprekidna s obzirom na metriku d (tj. obzirom na metrike d i d).
Naime, neka je $x_0 \in X$ te neka je $\epsilon > 0$. Uzmimo $\delta = \epsilon$ (ili $\delta \in \langle 0, \epsilon]$). Tada za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta \implies d(x, x_0) < \epsilon.$$

Dakle, f je neprekidna u x_0.
Zaključak: f je neprekidna.
Uočimo sljedeće:
Ako su (X,d) i (Y,d') metrički prostori, $f : X \to Y$ funkcija te $x_0 \in X$, onda je f neprekidna u x_0 s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi impilkacija

$$x \in K_{(X,d)}(x_0, \delta) \implies f(x) \in K_{(Y,d')}(f(x_0), \epsilon),$$

što je ekvivalentno s tim da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je

$$\{f(x) : x \in K_{(X,d)}(x_0, \delta)\} \subseteq K_{(Y,d')}(f(x_0), \epsilon).$$

Teorem 2.2.12. *Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako za svaki otvoren skup V u (Y,d') vrijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna. Neka je V otvoren skup u (Y, d'). Želimo dokazati da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d).
Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$, pa budući da je V otvoren skup u (Y, d') postoji $r > 0$ takav da je

$$K_{(Y,d)}(f(x), r) \subseteq V.$$

Budući da je f neprekidna u x postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $y \in K_{(X,d)}(x, \delta)$ vrijedi

$$f(y) \in K_{(Y,d')}(f(x), r).$$

Prema tome, za svaki $y \in K_{(X,d)}(x, \delta)$ vrijedi $f(y) \in V$, iz čega slijedi $y \in f^{-1}(V)$. Prema tome

$$K_{(X,d)}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V).$$

Zaključak: $f^{-1}(V)$ je otvoren skup u (X, d).
Obratno, pretpostavimo da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d) za svaki otvoren skup V u (Y, d').
Pokažimo da je f neprekidna.
Neka je $x_0 \in X$ te neka je $\epsilon > 0$. Neka je

$$V = K_{(Y,d')}(f(x_0), \epsilon).$$

Tada je V otvoren skup u (Y, d'). Stoga je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d). Uočimo da je $x_0 \in f^{-1}(V)$ (jer je $f(x_0) \in V$), što povlači da postoji $\delta > 0$ takav da je

$$K_{(X,d)}(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(V).$$

Iz ovoga zaključujemo da za svaki $x \in K_{(X,d)}(x_0, \delta)$ vrijedi $f(x) \in V$, tj.

$$f(x) \in K_{(Y,d')}(f(x_0), \epsilon).$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0.
Zaključak: f je neprekidna. $\square$

Definicija 2.2.13. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Za niz (x_n) kažemo da teži (konvergira) prema a u metričkom prostoru (X, d) i pišemo $x_n \to a$, ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi*

$$d(x_n, a) < \epsilon.$$

Uočimo da (x_n) teži prema a ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in K(a, \epsilon)$.

Propozicija 2.2.14. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Tada $x_n \to a$ ako i samo ako za svaki otvoren skup u (X, d), takav da je $a \in U$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $x_n \to a$.
Neka je U otvoren skup u (X, d) takav da je $a \in U$. Slijedi da postoji $\epsilon > 0$ takav da

$$K(a, \epsilon) \subseteq U.$$

Zbog $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vijedi

$$x_n \in K(a, \epsilon).$$

Stoga za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.
Obratno, pretpostavimo da za svaki otvoren skup U u (X, d), takav da je $a \in U$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.
Želimo dokazati da $x_n \to a$.
Neka je $\epsilon > 0$. Tada je $K(a, \epsilon)$ otvoren skup u (X, d) (propozicija 2.2.3) te je očito $a \in K(a, \epsilon)$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in K(a, \epsilon)$.
Dakle, $x_n \to a$. □

Propozicija 2.2.15. *Neka je (X, d) metrički prostor te $a, b \in X, a \neq b$. Tada postoje otvoreni skupovi U i V u (X, d) takvi da je $a \in U, b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Dokaz. Budući da je $a \neq b$ vrijedi $d(a, b) > 0$. Neka je

$$r = \frac{d(a, b)}{2}.$$

Očito je $r > 0$. Neka su

$$U = K(a, r),$$
$$V = K(b, r).$$

Očito je da su U i V otvoreni skupovi u (X, d) te da je $a \in U, b \in V$.
Dokažimo da je $U \cap V = \emptyset$.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $x \in X$ takav da je $x \in U$ i $x \in V$. Dakle $x \in K(a, r)$ i $x \in K(b, r)$ pa je $d(x, a) < r$ i $d(x, b) < r$. Vrijedi

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(b, x) < r + r = 2r = d(a, b),$$

tj.

$$d(a, b) < d(a, b),$$

što je kontradikcija.
Dakle, $U \cap V = \emptyset$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 2.2.16. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Za a kažemo da je limes niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d) ako niz (x_n) teži prema a u metričkom prostoru (X, d).*

Propozicija 2.2.17. *(JEDINSTVENOST LIMESA NIZA) Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj $a \neq b$.
Tada prema propoziciji 2.2.15 postoje skupovi U i V takvi da je $a \in U, b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.
Iz $a \in U$ i $x_n \to a$ slijedi (prema propoziciji 2.2.14) da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \in U$, za svaki $n \geq n_0$. Iz $b \in V$ i $x_n \to b$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in V$, za svaki $n \geq m_0$. Neka je

$$n = \max\{n_0, m_0\}.$$

Tada je $n \geq m_0$ i $n \geq n_0$ pa je $x_n \in U$ i $x_n \in V$, tj.

$$x_n \in U \cap V,$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je $U \cap V = \emptyset$.
Dakle, $a = b$. □

Primjer 2.2.18. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Tvrdimo da je d metrika na X.
Svojstva (1) i (2) iz definicije metrike su očito zadovoljena. Preostaje provjeriti svojstvo (3).
Neka su $x, y, z \in X$. Nejednakost

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

je očita u slučaju kada je $x = y$, a ako je $x \neq y$ onda je $z \neq x$ ili $z \neq y$, pa je $d(x,z) = 1$ ili $d(z,y) = 1$, pa nejednakost vrijedi.
*Za d kažemo da je **diskretna metrika** na X.*

Neka je $x_0 \in X$. Tada je

$$K(x_0, \frac{1}{2}) = \{x \in X : d(x, x_0) < \frac{1}{2}\} = \{x_0\}$$

i

$$K(x_0, 2) = \{x \in X : d(x, x_0) < 2\} = X.$$

Općenito, ako je $r > 0$, onda je

$$K(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, & r \leq 1, \\ X, & r > 1. \end{cases}$$

Neka je $U \subseteq X$. Tvrdimo da je U otvoren skup u (X, d).
Neka je $x \in U$. Tada je

$$K(x, \frac{1}{2}) = \{x\},$$

pa je očito

$$K(x, \frac{1}{2}) \subseteq U.$$

Dakle, U je otvoren skup.

Primjer 2.2.19. *Neka je X skup koji ima barem 2 elementa. Neka je d diskretna metrika na X te neka je $p : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$p(x, y) = \begin{cases} 2, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Na isti način kao u prethodnom primjeru zaključujemo da je p metrika na X.

Neka je $U \subseteq X$. Neka je $x \in U$. Vrijedi

$$K_{(X,p)}(x, 1) = \{x\},$$

pa je

$$K_{(X,p)}(x, 1) \subseteq U.$$

Prema tome U je otvoren skup u metričkom prostoru (X, p).
Iz prethodnog primjera znamo da je U otvoren i u metričkom prostoru (X, d). Dakle, familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d) je jednaka familiji svih otvorenih skupova u metričkom prostori (X, p), no $d \neq p$ (naime postoje $x, y \in X$ takvi da je $x \neq y$ pa je $d(x, y) = 1, p(x, y) = 2$ tj. $d(x, y) \neq p(x, y)$).

2.3 Topološki prostori

Definicija 2.3.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{T}$;*

2. *ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je $U_\alpha \in \mathcal{T}$, za svaki $\alpha \in A$, onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ (tj. $\mathcal{T}$ je familija zatvorena na proizvoljne unije);*

3. *ako su $U, V \in \mathcal{T}$, onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.*

Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je ***topologija*** *na skupu X, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***topološki prostor****.*

Primjer 2.3.2. *Neka je (X,d) metrički prostor. Označimo sa $\mathcal{T}_d$ familiju svih $U \subseteq X$ takvih da je skup U otvoren u metričkom prostoru (X, d). Vrijedi sljedeće:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$ jer su $\emptyset$ i X otvoreni skupovi u (X,d)*

2. *Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je $U_\alpha \in \mathcal{T}_d$, za svaki $\alpha \in A$. To znači da je U_α otvoren skup u (X, d), za svaki $\alpha \in A$, pa iz propozicije* 2.2.5 *slijedi da je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d), dakle $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_d$*

3. *Ako su $U, V \in \mathcal{T}_d$, onda iz propozicije* 2.2.5 *slijedi da je $U \cap V \in \mathcal{T}_d$*

Zaključak: $\mathcal{T}_d$ je topologija na X.
Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je ***topologija inducirana metrikom*** *d.*

Definicija 2.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $U \subseteq X$. Za U kažemo da je* ***otvoren skup u topološkom prostoru*** *$(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*

Primjer 2.3.4. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$, te neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$. Tada je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X.*
Očito su $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
Pretpostavimo da je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je $U_\alpha \in \mathcal{T}$, za svaki $\alpha \in A$.
Ako postoji $\alpha_0 \in A$ takva da je $U_{\alpha_0} = X$, onda je

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X.$$

Pretpostavimo da je $U_\alpha \neq X$, za svaki $\alpha \in A$.
Ako postoji $\alpha_0 \in A$ takva da je $U_{\alpha_0} = \{1\}$, onda je

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{1\}.$$

Inače vrijedi

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset.$$

U svakom slučaju, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
Nadalje, ako su $U, V \in \mathcal{T}$, onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$. Naime, ako je $U = \emptyset$ ili $V = \emptyset$, onda je

$$U \cap V = \emptyset.$$

Ako je $U = X$ ili $V = X$ onda je

$$U \cap V = V$$

ili

$$U \cap V = U,$$

a inače vrijedi $U = V = \{1\}$ pa je

$$U \cap V = \{1\}.$$

U svakom slučaju, $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Skup $\{1\}$ je otvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Skup $\{2\}$ nije otvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ($\{2\} \notin \mathcal{T}$).

Primjer 2.3.5. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\mathcal{P}(X)$ topologija na X. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je* ***diskretna topologija*** *na X.*
Nadalje, $\{\emptyset, X\}$ je također topologija na X. Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je ***indiskretna topologija*** *na X.*

Uočimo: Ako je (X, d) metrički prostor i $U \subseteq X$, onda je U otvoren u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je U otvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{d}})$.

Definicija 2.3.6. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***metrizabilan*** *ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Primjer 2.3.7. *Neka je X neprazan skup. Tada je topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ metrizabilan. Naime, neka je d diskretna metrika na X. Vidjeli smo da je tada svaki podskup od X otvoren u metričkom prostoru (X, d). To znači da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.*

Primjer 2.3.8. *Neka je X skup koji ima bar dva elementa, Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije metrizabilan.*
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji metrika d na X takva da je $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d$.
Prema pretpostavci postoje $a, b \in X$, takvi da je

$$a \neq b.$$

Tada prema propoziciji 2.2.15 postoje otvoreni skupovi U i V u metričkom prostoru (X, d) takvi da je

$$a \in U, b \in V \text{ i } U \cap V = \emptyset.$$

Slijedi da su $U, V \in \mathcal{T}_d$ pa su $U, V \in \{\emptyset, X\}$.
Očito su U i V neprazni skupovi pa slijedi

$$U = X \text{ i } V = X,$$

što je u kontradikciji s činjenicom da su U i V disjunktni.
Zaključak: topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije metrizabilan.

2.4 Hausdorffovi prostori

Definicija 2.4.1. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **Hausdorffov** ako za sve $a, b \in X, a \neq b$ postoje otvoreni skupovi U i V u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je*

$$a \in U, b \in V \text{ i } U \cap V = \emptyset.$$

Uočimo da topološki prostor iz primjera 2.3.8 nije Hausdorffov.

Propozicija 2.4.2. *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika d takva da je

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathrm{d}}.$$

Uzmimo $a, b \in X, a \neq b$.
Prema propoziciji 2.2.15 postoje otvoreni skupovi U i V u (X, d) takvi da je

$$a \in U, b \in V \text{ i } U \cap V = \emptyset.$$

Tada su U i V otvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{d}})$, dakle u $(X, \mathcal{T})$.
Zaključak: $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffov topološki prostor. $\square$

Definicija 2.4.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoren skup U u topološkom porstoru $(X, \mathcal{T})$, takav da je $a \in U$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ je $x_n \in U$.*

Uočimo sljedeće:
Ako je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$, onda niz (x_n) teži prema a u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako (x_n) teži prema a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{d}})$ (ovo slijedi iz propozicije 2.2.14).
Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$ točka takva da (x_n) teži prema a, onda pišemo $x_n \to a$ i kažemo da je a limes niza (x_n) u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Primjer 2.4.4. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ te neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$. Neka je (x_n) niz u X definiran sa*

$$x_n = 1, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Tada $x_n \to 1$ i $x_n \to 2$.
Nadalje, neka je (y_n) niz u X definiran sa

$$y_n = 2, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Tada $y_n \to 2$, ali $y_n \nrightarrow 1$.

Prethodni primjer pokazuje da limes niza u topološkom prostoru ne mora biti jedinstven.
Ovo također vidimo i na primjeru indiskretne topologije. Naime, ako je X neprazan skup, onda svaki niz u X konvergira svakoj točki u X u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$.

Propozicija 2.4.5. *(Jedinstvenost limesa niza u Hausdorffovom prostoru)*
Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor, (x_n) niz u X te $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \neq b$.
Tada postoje otvoreni skupovi U i V u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $a \in U, b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.
Zbog $x_n \to a$ i $a \in U$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je

$$x_n \in U.$$

Također $x_n \to b$ i $b \in V$ pa postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi da je

$$x_n \in V.$$

Neka je

$$n = \max\{n_0, m_0\}.$$

Tada je $n \geq m_0$ i $n \geq n_0$ pa je $x_n \in V$ i $x_n \in U$, tj.

$$x_n \in U \cap V,$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je $U \cap V = \emptyset$.
Zaključak: $a = b$. □

Korolar 2.4.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$ u metričkom prostoru (X, d). Tada je $a = b$.*

Dokaz. Ovu smo tvrdnju već dokazali (propozicija 2.2.17), no sada ćemo je jednostavno dokazati koristeći prethodnu propoziciju.
Iz prethodne propozicije slijedi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_\mathrm{d})$. Očito je $(X, \mathcal{T}_\mathrm{d})$ metrizabilan prostor pa je i Hausdorffov i sada iz prethodne propozicije slijedi $a = b$. □

2.5 Baza topologije

Definicija 2.5.1. *Neka je X skup, $\mathcal{T}$ topologija na X te $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da vrijedi sljedeće:*

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$;
2. *svaki neprazan element od $\mathcal{T}$ može se napisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, tj. ako je U neprazan element od $\mathcal{T}$, onda postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.*

Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je baza topologije $\mathcal{T}$.

Primjer 2.5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je*

$$\mathcal{B} = \{K(x, r) : x \in X, r > 0\}.$$

Da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$ slijedi iz propozicije 2.2.3, a da se svaki neprazan element od $\mathcal{T}_d$ može napisati kao unija elemenata od $\mathcal{B}$ slijedi iz propozicije 2.2.8. Dakle, $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}_d$.

Primjer 2.5.3. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na X. Tada je $\mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$.*

Primjer 2.5.4. *Neka je X neprazan skup, te neka je*

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{P}(X)$.

Propozicija 2.5.5. *Neka je X skup, $\mathcal{T}$ topologija na X te $\mathcal{B}$ familija podskupova od X. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako vrijedi sljedeće:*

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$;
2. *za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Očito je tada $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Pretpostavimo da je $U \in \mathcal{T}$ te $x \in U$. Tada postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Iz $x \in U$ slijedi da postoji $\alpha_0 \in A$ tako da je $x \in B_{\alpha_0}$. Očito je $B_{\alpha_0} \subseteq U$.
Dakle, $B_{\alpha_0} \in \mathcal{B}$ i $x \in B_{\alpha_0} \subseteq U$.
Obratno, pretpostavimo da vrijede svojstva (1) i (2).

Dokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$. Prema svojstvu (2) za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subseteq U$. Tada je $(B_x)_{x \in U}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{B}$ i vrijedi

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Prema tome, $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$. □

2.6 Kompaktnost

Definicija 2.6.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $K \subseteq X$. Neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}, \mathcal{U} \neq \emptyset$. Za $\mathcal{U}$ kažemo da je* ***otvoreni pokrivač*** *skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je*

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Definicija 2.6.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}_{>0}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je* ***euklidska topologija*** *na $\mathbb{R}^n$.*
Dakle, euklidska topologija na $\mathbb{R}^n$ je topologija inducirana euklidskom metrikom.

Primjer 2.6.3. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je*

$$\mathcal{U} = \{\langle -\infty, 1\rangle, \langle 0, \infty\rangle\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa $\mathbb{R}$ u topološkom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Zapravo $\mathcal{U}$ je otvoreni pokrivač skupa K u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ za svaki $K \subseteq \mathbb{R}$.
Naime, očito je $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ jer je

$$\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle = \mathbb{R}.$$

Zašto je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$, tj. zašto je $\langle -\infty, 1\rangle, \langle 0, \infty\rangle \in \mathcal{E}$?
Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Vrijedi:

$$\langle -\infty, 1\rangle = \bigcup_{a<1} \langle a, 1\rangle.$$

Prema primjeru 2.2.2 skup $\langle a, 1\rangle$ je otvoren u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, za svaki $a < 1$, stoga je $\langle -\infty, 1\rangle$ otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$, tj. $\langle -\infty, 1\rangle \in \mathcal{E}$.
Posve analogno dobivamo da je $\langle 0, \infty\rangle \in \mathcal{E}$.

Primjer 2.6.4. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je*

$$\mathcal{U} = \{\langle -a, a\rangle : a > 0\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $\mathbb{R}$ u topološkom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.
Neka je

$$\mathcal{V} = \{\langle -a, a\rangle : a \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

Tada je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač skupa $\langle -1, 1\rangle$ u topološkom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Jasno je da je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$.
Dokažimo da je

$$\langle -1, 1\rangle \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V,$$

tj.

$$\langle -1, 1\rangle \subseteq \bigcup_{a\in\langle 0,1\rangle} \langle -a, a\rangle.$$

Uzmimo $x \in \langle -1, 1\rangle$. Tada je $|x| < 1$. Odaberimo $a \in \mathbb{R}$ takav da je

$$|x| < a < 1.$$

Očito je $a \in \langle 0, 1\rangle$ i $x \in \langle -a, a\rangle$. Dakle, $\mathcal{V}$ je zaista otvoreni pokrivač od $\langle -1, 1\rangle$ u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Uočimo da $\mathcal{V}$ nije otvoreni pokrivač od $[-1, 1]$ u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, jer je $1 \in [-1, 1]$, no

$$1 \notin \bigcup_{a\in\langle 0,1\rangle} \langle -a, a\rangle.$$

Definicija 2.6.5. *Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od X u $(X, \mathcal{T})$ onda naprosto kažemo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija 2.6.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $K \subseteq X$. Za K kažemo da je* ***kompaktan*** *skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_0, ..., U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_0 \cup ... \cup U_n$.*

Primjer 2.6.7. *Skup $\mathbb{R}$ nije kompaktan u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, gdje je $\mathcal{E}$ euklidska topologija.*
Naime, u primjeru 2.6.4 smo vidjeli da je familija $\mathcal{U}$ definirana sa

$$\mathcal{U} = \{\langle -a, a\rangle : a > 0\}$$

otvoreni pokrivač topləškog prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, no ne postoji konačno mnogo članova od $\mathcal{U}$ koji prekrivaju $\mathbb{R}$, jer bi u suprotnom postojao $n \in \mathbb{N}$ i pozitivni brojevi $a_0, ..., a_n$ takvi da je

$$\mathbb{R} \subseteq \langle -a_0, a_0\rangle \cup ... \cup \langle -a_n, a_n\rangle,$$

što je nemoguće jer broj

$$x = \max\{a_0, ..., a_n\}$$

nije element od $\langle -a_0, a_0\rangle \cup ... \cup \langle -a_n, a_n\rangle$.

Primjer 2.6.8. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Neka je* K *konačan podskup od* X*. Tada je* K *kompaktan skup u* $(X, \mathcal{T})$*.*
Ovo je očito ako je $K = \emptyset$*.*
Ako je $K \neq \emptyset$ *onda je* $K = \{a_0, ..., a_n\}$*, pri čemu je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $a_0, ..., a_n \in X$*.*
Neka je $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač od* K*. Neka je* $i \in \{1, ..., n\}$*. Imamo*

$$a_i \in K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

pa postoji $U_i \in \mathcal{U}$ *takav da je* $a_i \in U_i$*.*
Dakle, $U_0, ..., U_n \in \mathcal{U}$ *i*

$$\{a_0, ..., a_n\} \subseteq U_0 \cup ... \cup U_n,$$

tj.

$$K \subseteq U_0 \cup ... \cup U_n.$$

Prema tome, K *je kompaktan skup u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$*.*

Primjer 2.6.9. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor takav da je* $\mathcal{T}$ *konačan skup. Tada je svaki podskup od* X *kompaktan u* $(X, \mathcal{T})$*.*
Ovo slijedi iz činjenice da je svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ *svakog podskupa od* X *već sam po sebi konačan (jer je* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$*).*

Primjer 2.6.10. *Neka je* X *neprazan skup te neka je* $K \subseteq X$*. Tada je* K *kompaktan skup u topološkom prostoru* $(X, \{\emptyset, X\})$*.*
Posebno $\mathbb{N}$ *je kompaktan u topološkom prostoru* $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ *što pokazuje da kompaktan skup ne mora biti konačan.*

Definicija 2.6.11. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te neka je* $F \subseteq X$*. Za* F *kažemo da je* ***zatvoren skup*** *u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$ *ako je* F^c *otvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$*, tj.* $F^c \in \mathcal{T}$*.*

Isto tako definiramo pojam zatvorenog skupa u metričkom prostoru, dakle ako je (X, d) metrički prostor i $F \subseteq X$ onda kažemo da je F zatvoren u (X, d) ako je F^c otvoren u (X, d). Uočimo sljedeće, ako je (X, d) metrički prostor i $F \subseteq X$, onda je F zatvoren u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je F zatvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Propozicija 2.6.12. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Tada vrijedi:*

1. $\emptyset, X$ *su zatvoreni skupovi u* $(X, \mathcal{T})$*;*

2. *ako je* $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija zatvorenih skupova u* $(X, \mathcal{T})$ *onda je* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *zatvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$*;*

3. *ako su* F *i* G *zatvoreni skupovi, onda je i* $F \cup G$ *zatvoren skup.*

Dokaz. 1. Vrijedi $\emptyset^{\mathsf{c}} = X, X^{\mathsf{c}} = \emptyset$, dakle $\emptyset^{\mathsf{c}}, X^{\mathsf{c}} \in \mathcal{T}$ pa je tvrdnja jasna

2. Vrijedi
$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^{\mathsf{c}} = \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^{\mathsf{c}} \in \mathcal{T}$$
jer je $F_\alpha^{\mathsf{c}} \in \mathcal{T}$ za svaki $\alpha \in A$.
Dakle $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ je zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.

3. Imamo
$$(F \cup G)^{\mathsf{c}} = F^{\mathsf{c}} \cap F^{\mathsf{c}} \in \mathcal{T},$$
pa zaključujemo da je $F \cup G$ zatvoren skup.

□

Napomena 2.6.13. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$ i $U_0, ..., U_n \in \mathcal{T}$. Tada je $U_0 \cap ... \cap U_n \in \mathcal{T}$.*
To lako dobivamo indukcijom po n iz svojstva (3) iz definicije topološkog prostora (slično kao u dokazu korolara 2.2.6).

Propozicija 2.6.14. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor, K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te $x \in X$ točka takva da $x \notin K$. Tada postoje otvoreni skupovi $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U, K \subseteq V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ onda možemo uzeti $U = X$ i $V = \emptyset$.
Pretpostavimo da je K neprazan.
Neka je $y \in K$. Tada je $x \neq y$, pa postoje otvoreni skupovi U_y i V_y takvi da je
$$x \in U_y, y \in V_y \text{ i } U_y \cap V_y = \emptyset.$$
Neka je
$$\mathcal{U} = \{V_y : y \in K\}.$$
Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan, postoji konačno mnogo članova od $\mathcal{U}$ koji prekrivaju K, tj. postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_0, ..., y_n \in K$ takvi da je
$$K \subseteq V_{y_0} \cup ... \cup V_{y_n}.$$
Uočimo da je
$$x \in U_{y_0} \cap ... \cap U_{y_n}$$
te da je $U_{y_0} \cap ... \cap U_{y_n}$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ (napomena 2.6.13).
Primjetimo da su skupovi $U_{y_0} \cap ... \cap U_{y_n}$ i $V_{y_0} \cup ... \cup V_{y_n}$ disjunktni. Naime, ako je
$$x \in U_{y_0} \cap ... \cap U_{y_n},$$

onda je

$$x \in U_{y_i}, \text{ za svaki } i \in \{1, ..., n\}$$

pa

$$x \notin V_{y_i}, \text{ za svaki } i \in \{1, ..., n\}$$

jer je $U_y \cap V_y = \emptyset$ za svaki $y \in K$. Dakle

$$x \notin V_{y_0} \cup ... \cup V_{y_n}.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana i traženi skupovi su

$$U_{y_0} \cap ... \cap U_{y_n} \text{ i } V_{y_0} \cup ... \cup V_{y_n}.$$

□

Teorem 2.6.15. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je K zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Dokažimo da je K^C otvoren skup.
To je jasno ako je $K^C = \emptyset$. Pretpostavimo da je $K^C \neq \emptyset$.
Neka je $x \in K^C$. Slijedi $x \notin K$, pa prema propoziciji 2.6.14 postoje U i V takvi da $K \subseteq V, x \in U$ i $U \cap U = \emptyset$.
Iz ovoga slijedi da je $K \cap V = \emptyset$ pa je $U \subseteq K^C$. Dakle, za svaki $x \in K^C$ postoji otvoren skup U_x takav da je

$$x \in U_x \subseteq K^C.$$

Iz ovog zaključujemo da je

$$K^C = \bigcup_{x \in K^C} U_x,$$

a ovo povlači da je K^Cotvoren skup (prema svojstvu (2) iz definicije topološkog prostora).
Zaključak: K je zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Primjer 2.6.16. *Odaberimo skupove K i X takve da je $K \subseteq X$ i $K \neq \emptyset, K \neq X$. Skup K je kompaktan u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$, no K nije zatvoren skup u ovom topološkom prostoru.*
Naime, kada bi K bio zatvoren onda bi K^C bio otvoren skup, tj vrijedilo bi $K^C \in \{\emptyset, X\}$, odnosno $K^C = X$ ili $K^C = \emptyset$, a to bi povlačilo $K = \emptyset$ ili $K = X$, što je nemoguće.

Propozicija 2.6.17. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te neka su K i L kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $K \cap L = \emptyset$. Tada postoje otvoreni skupovi U i V takvi da je $K \subseteq U, L \subseteq V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ onda je tvrdnja jasna (možemo uzeti $U = \emptyset$ i $V = X$). Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$.
Neka je $x \in K$. Tada $x \notin L$ pa prema propoziciji 2.6.14 postoje otvoreni skupovi U_x i V_x takvi da je $x \in U_x, L \subseteq V_x$ i $U_x \cap V_x = \emptyset$. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_x : x \in K\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K pa budući da je K kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, ..., x_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq U_{x_0} \cup ... \cup U_{x_n}.$$

Neka je

$$W = V_{x_0} \cap ... \cap V_{x_n}.$$

Tada je $L \subseteq W$ i W je otvoren skup. Nadalje, W i $U_{x_0} \cup ... \cup U_{x_n}$ su disjunktni skupovi. Naime, ako je

$$y \in U_{x_0} \cup ... \cup U_{x_n}$$

onda je $y \in U_{x_i}$, za neki $i \in \{0, ..., n\}$ pa slijedi da je $y \notin V_{x_i}$. Stoga $y \notin W$.
Dakle, W i $U_{x_0} \cup ... \cup U_{x_n}$ su dva disjunktna skupa, prvi sadrži L, a drugi K. $\square$

Poglavlje 3

Izračunljivi topološki prostori

3.1 Izračunljivi metrički prostori

Definicija 3.1.1. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $D \subseteq X$. *Za* D *kažemo da je* ***gust skup u metričkom prostoru*** (X, d) *ako za svaki* $x \in X$ *i* $\epsilon > 0$ *postoji* $y \in D$ *takav da je* $d(x, y) < \epsilon$.
Uočimo sljedeće. Ako je (X, d) *metrički prostor onda je* X *gust skup u* (X, d).

Primjer 3.1.2. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Tada je* $\mathbb{Q}$ *gust skup u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}, d)$.
Dokažimo to.
Neka su $x \in \mathbb{R}$ *i* $\epsilon > 0$. *Tada je* $x < x + \epsilon$ *pa postoji* $q \in \mathbb{Q}$ *takav da je*

$$x < q < x + \epsilon.$$

Iz ovoga slijedi

$$0 < q - x < \epsilon$$

pa je

$$d(q, x) = \left|q - x\right| = q - x < \epsilon.$$

Dakle, $d(q, x) < \epsilon$.
Prema tome, $\mathbb{Q}$ *je gust u* $(\mathbb{R}, d)$.

Definicija 3.1.3. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* (x_n) *niz u* X. *Za* (x_n) *kažemo da je* ***gust niz*** *u metričkom prostoru* (X, d) *ako je slika tog niza, tj. skup* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *gust u* (X, d).

Definicija 3.1.4. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, te neka je* α *niz gust u metričkom prostoru* (X, d) *takav da je funkcija* $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ *definirana sa* $\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j)$ *rekurzivna.*
Tada za uređenu trojku (X, d, α) *kažemo da je* ***izračunljiv metrički prostor***.

Primjer 3.1.5. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$\alpha(i) = (-1)^{(i)_0} \frac{(i)_1}{(i)_2 + 1}.$$

Tada je α rekurzivna kao funkcija sa $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Tvrdimo da je

$$\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \tag{3.1}$$

Očito je $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Obratno, ako je $q \in \mathbb{Q}$ onda je

$$q = (-1)^n \frac{k}{l+1},$$

gdje su $n, l, k \in \mathbb{N}$. Definiramo

$$i = {p_0}^n \cdot {p_1}^k \cdot {p_2}^l.$$

Očito je $(i)_0 = n, (i)_1 = k, (i)_2 = l$, pa je $\alpha(i) = q$.
Prema tome, tvrdnja (3.1) vrijedi.
Iz (3.1) i činjenice da je $\mathbb{Q}$ gust u $(\mathbb{R}, d)$ slijedi da je α gust niz u $(\mathbb{R}, d)$.
Neka je $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j).$$

Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi $\gamma(i, j) = \left|\alpha_i - \alpha_j\right|$. Neka su $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa:

$$f(i, j) = \alpha(i),$$
$$g(i, j) = \alpha(j).$$

Očito je

$$f = \alpha \circ {I_1}^2,$$
$$g = \alpha \circ {I_2}^2,$$

pri čemu ovdje na α gledamo kao funkciju sa $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, pa iz propozicije 1.3.5 slijedi da su f i g rekurzivne funkcije. Tada je po propoziciji 1.3.2 rekurzivna i funkcija $\left|f + (-g)\right| : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.
Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\left|f + (-g)\right|(i, j) = \left|f(i, j) - g(i, j)\right| = \left|\alpha_i - \alpha_j\right| = \gamma(i, j),$$

dakle

$$\left|f + (-g)\right|(i, j) = \gamma(i, j).$$

Ovo znači da je γ, kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, jednaka $\left|f + (-g)\right|$ pa je γ rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$. Stoga je γ rekurzivna (kao i funkcija sa $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$).
Zaključak: $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor.

Definicija 3.1.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $x \in X$. Za x kažemo da je* ***izračunljiva točka*** *u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.*

Uočimo sljedeće: Ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, onda je α_i izračunljiva točka u (X, d, α) za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Naime, vrijedi

$$d(\alpha_i, \alpha_{f(k)}) = 0 < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, pri čemu je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću i.

3.2 Racionalne kugle

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $i \in \mathbb{N}$ te neka je $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Tada za $K(\alpha_i, r)$ kažemo da je* ***racionalna kugla*** *u (X, d, α).*

Fiksirajmo rekurzivne funkcije $\xi_1, \xi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $Im\zeta = \mathbb{Q} \cap \langle 0, \infty \rangle$
2. $\{\xi_1(i), \xi_1(i)) : i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$

Takve funkcije sigurno postoje, npr. možemo uzeti:

$$\zeta(i) = \frac{(i)_0 + 1}{(i)_1 + 1}$$
$$\xi_1(i) = (i)_0$$
$$\xi_2(i) = (i)_1,$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je B racionalna kugla u (X, d, α). Tada postoje $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$B = K(\alpha_n, \zeta_m).$$

Nadalje, postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(n, m) = (\xi_1(i), \xi_2(i)),$$

stoga je

$$B = (\alpha_{\xi_1(i)}, \zeta_{\xi_2(i)}).$$

Definicija 3.2.2. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor. Za* $i \in \mathbb{N}$ *definiramo*

$$I_i = K(\alpha_{\xi_1(i)}, \zeta_{\xi_2(i)}).$$

Uočimo, za svaki $i \in \mathbb{N}$ *skup* I_i *je racionalna kugla u* (X, d, α) *i obratno, svaka racionalna kugla u* (X, d, α) *je oblika* I_i*, za neki* $i \in \mathbb{N}$.
Za $i \in \mathbb{N}$ *neka je*

$$\lambda_i = \alpha_{\xi_1(i)}$$

te

$$\rho_i = \zeta_{\xi_2(i)}.$$

Dakle,

$$I_i = K(\lambda_i, \rho_i).$$

Propozicija 3.2.3. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* $a, b \in X$ *i* $r, s > 0$ *takvi da je* $r + s \leq d(a, b)$*. Tada*

$$K(a, r) \cap K(b, s) = \emptyset.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $x \in K(a, r) \cap K(b, s)$.
Tada je $x \in K(a, r)$ i $x \in K(b.s)$, pa je $d(a, x) < r$ i $d(b, x) < s$. Imamo:

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + s$$

tj.

$$d(a, b) < r + s$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije.
Prema tome $K(a, r) \cap K(b, s) = \emptyset$. □

Primjer 3.2.4. *Neka je* X *skup te neka su* $a, b \in X, a \neq b$*. Neka je* d *diskretna metrika na* X*. Tada je*

$$K(a, 1) = \{a\},$$
$$K(b, 1) = \{b\},$$

pa je $K(a, 1) \cap K(b, 1) = \emptyset$*. No očito ne vrijedi*

$$1 + 1 \leq d(a, b).$$

Dakle, ne vrijedi obrat prethodne propozicije.

3.3 Formalna disjunktnost i formalna sadržanost

Definicija 3.3.1. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor. Neka su* $i, j \in \mathbb{N}$. *Kažemo da brojevi* i, j *predstavljaju* ***formalno disjunktne kugle*** *ako je*

$$\rho_i + \rho_j < d(\lambda_i, \lambda_j).$$

Ako i, j *predstavljaju formalno disjunktne kugle, onda ćemo kraće govoriti da su* I_i *i* I_j ***formalno disjunktni*** *i pisati* $I_i \diamond I_j$.
Uočimo sljedeće: Ako su I_i *i* I_j *formalno disjunktni, onda prema propoziciji 3.2.3 vrijedi:*

$$I_i \cap I_j = \emptyset.$$

Primjetimo da obrat gore navedene tvrdnje ne mora vrijediti. To ćemo pokazati sljedećim primjerom.

Primjer 3.3.2. *Neka je* d *diskretna metrika na* $\mathbb{N}$ *te neka je* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$\alpha(i) = i, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Tada je $(\mathbb{N}, d, \alpha)$ *izračunljiv metrički prostor.*
Naime, α *je očito gust niz u* $(\mathbb{N}, d)$. *S druge strane, funkciju* $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ *definiranu sa* $\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j)$ *vrijedi:*

$$\gamma(i, j) = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

tj.

$$\gamma(i, j) = \mathrm{sg}\big|i - j\big|$$

iz čega zaključujemo da je γ *rekurzivna kao funkcija sa* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, *pa i kao funkcija sa* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$.
Odaberemo $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b$ *te* $k \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\zeta_k = 1$.
Nadalje, odaberimo $i, j \in \mathbb{N}$ *takve da je*

$$(a, k) = (\xi_1(i), \xi_2(i)),$$
$$(b, k) = (\xi_1(j), \xi_2(j)).$$

Tada je

$$I_i = K(\alpha_{\xi_1(i)}, \zeta_{\xi_2(i)}) = K(\alpha_a, \zeta_k) = K(a, 1) = \{a\},$$
$$I_j = K(\alpha_{\xi_1(j)}, \zeta_{\xi_2(j)}) = K(\alpha_b, \zeta_k) = K(b, 1) = \{b\}.$$

Stoga je $I_i \cap I_j = \emptyset$.
S druge strane,

$$\rho_i + \rho_j = 1 + 1 = 2,$$

a

$$d(\lambda_i, \lambda_j) = d(\alpha_a, \alpha_b) = d(a, b) = 1$$

pa zaključujemo da I_i *i* I_j *nisu formalno disjunktni.*

Propozicija 3.3.3. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor. Neka je*

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : I_j \text{ i } I_j \text{ formalno disjunktni}\}.$$

Tada je S *rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka su $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa:

$$f(i, j) = \rho_i + \rho_j,$$
$$g(i, j) = d(\lambda_i, \lambda_j).$$

Imamo:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \rho_i + \rho_j < d(\lambda_i, \lambda_j)\}$$

tj.

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : f(i, j) < g(i, j)\}.$$

Stoga je prema korolaru 1.5.8 dovoljno pokazati da su funkcije f i g rekurzivne.
Neka su $f_1, f_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa:

$$f_1(i, j) = \rho_i, f_2(i, j) = \rho_j.$$

Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f_1(i, j) = \zeta(\xi_2(i)) = \zeta((\xi_2 \circ I_1^2)(i, j)).$$

Stoga je $f_1 = \zeta \circ (\xi_2 \circ I_1^2)$, pa iz propozicije 1.3.5 slijedi da je f_1 rekurzivna funkcija.
Analogno dobivamo da je f_2 rekurzivna funkcija, stoga je i $f_1 + f_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija.
za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(i, j) = (f_1 + f_2)(i, j),$$

pa je stoga f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$. Prema tome f je rekurzivna (kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$). Neka je $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j).$$

Tada je γ rekurzivna funkcija po definiciji izračunljivog metričkog prostora.
Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$g(i, j) = d(\lambda_i, \lambda_j) = d(\alpha_{\xi_1(i)}, \alpha_{\xi_2(j)}) = \gamma(\xi_1(i), \xi_2(j)).$$

Dakle,

$$g(i, j) = \gamma(\xi_1(i), \xi_2(j)) \tag{3.2}$$

Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ sa

$$G(i, j) = (\xi_1(i), \xi_2(i)).$$

Očito je G rekurzivna funkcija, a prema (3.2) vrijedi

$$g = \gamma \circ G.$$

Sada iz propozicije 1.4.4 slijedi da je g rekurzivna funkcija.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x, y \in X$ te $r, s > 0$ takvi da je*

$$d(x, y) + s \leq r.$$

Tada je $K(y, s) \subseteq K(x, r)$.

Dokaz. Uzmimo $z \in K(y, s)$. Tada je $d(y, z) < s$. Vrijedi

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s \leq r,$$

tj.

$$d(x, z) < r,$$

odnosno $z \in K(x, r)$. □

Definicija 3.3.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Kažemo da je I_i* ***formalno sadržan*** *u I_j i pišemo $I_i \subseteq_F I_j$ ako je*

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j.$$

Uočimo da prema propoziciji 3.3.4 vrijedi sljedeća implikacija:

$$I_i \subseteq_F I_j \implies I_i \subseteq I_j.$$

Propozicija 3.3.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je*

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : I_i \subseteq_F I_j\}.$$

Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka su $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa:

$$f(i, j) = \rho_j - \rho_i$$
$$g(i, j) = d(\lambda_i, \lambda_j)$$

Analogno kao u dokazu propozicije 3.3.3 zaključujemo da je f rekurzivna funkcija. Nadalje, u dokazu propozicije 3.3.3 smo vidjeli da je i g rekurzivna funkcija.
Imamo

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : d(\lambda_i, \lambda_j) < \rho_j - \rho_i\}$$

tj.

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : g(i, j) < f(i, j)\}$$

pa iz koroloara 1.5.8 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 3.3.7. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x, y, z \in X$. Tada je*

$$\left| d(x, z) - d(y, z) \right| \leq d(x, y).$$

Dokaz. Imamo

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

pa je

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y) \tag{3.3}$$

Nadalje

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$$

pa je

$$d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x),$$

tj.

$$-(d(x, z) - d(y, z)) \leq d(x, y). \tag{3.4}$$

Sada iz (3.3) i (3.4) slijedi tvrdnja leme.

□

Propozicija 3.3.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $I_i \subseteq_F I_j$ te $I_j \subseteq_F I_k$. Tada je $I_i \subseteq_F I_k$.*

Dokaz. Imamo

$$d(\lambda_i, \lambda_j) < \rho_j - \rho_i$$
$$d(\lambda_j, \lambda_k) < \rho_k - \rho_j$$

pa zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + d(\lambda_j, \lambda_k) < \rho_k - \rho_i. \tag{3.5}$$

S druge strane, prema nejednakosti trokuta vrijedi:

$$d(\lambda_i, \lambda_k) \leq d(\lambda_i, \lambda_j) + d(\lambda_j, \lambda_k)$$

što zajedno sa (3.5) povlači:

$$d(\lambda_i, \lambda_k) < \rho_k - \rho_i.$$

Dakle, $I_i \subseteq_F I_k$. □

Propozicija 3.3.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka su $i, j, k \in N$ takvi da je $I_i \subseteq_F I_j$ te da je $I_j \diamond I_k$. Tada je $I_i \diamond I_k$.*

Dokaz. Iz $I_i \subseteq_F I_j$ slijedi

$$d(\lambda_i, \lambda_j) < \rho_j - \rho_i$$

pa je

$$\rho_i - \rho_j < -d(\lambda_i, \lambda_j).$$

Nadalje vrijedi

$$\rho_k + \rho_j < d(\lambda_k, \lambda_j).$$

Zbrajanjem dviju posljednjih nejednakosti dobivamo

$$\rho_k + \rho_i < d(\lambda_k, \lambda_j) - d(\lambda_i, \lambda_j). \tag{3.6}$$

Prema lemi 3.3.7 vrijedi:

$$d(\lambda_k, \lambda_j) - d(\lambda_i, \lambda_j) \leq \left| d(\lambda_k, \lambda_j) - d(\lambda_i, \lambda_j) \right| \leq d(\lambda_k, \lambda_i). \tag{3.7}$$

Iz (3.6) i (3.7) slijedi:

$$\rho_k + \rho_i < d(\lambda_k, \lambda_i).$$

Dakle $I_i \diamond I_k$. □

Propozicija 3.3.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $x, y \in X$, $x \neq y$. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$, $y \in I_j$ i $I_i \diamond I_j$.*

Dokaz. Odaberimo pozitivan racionalan broj r takav da je $r < \frac{d(x,y)}{4}$ (to možemo jer je $d(x, y) > 0$).
Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $r = \zeta_k$.
Budući da je α gust niz u (X, d) postoje $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$d(x, \alpha_n) < r,$$
$$d(y, \alpha_m) < r$$

odnosno,

$$x \in K(\alpha_n, r) \text{ i } y \in K(\alpha_m, r). \tag{3.8}$$

Znamo da postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$(n, k) = (\xi_1(i), \xi_2(i)),$$
$$(m, k) = (\xi_1(j), \xi_2(j)).$$

Imamo:

$$\lambda_i = \alpha_{\xi_1(i)} = \alpha_n,$$
$$\lambda_j = \alpha_{\xi_1(j)} = \alpha_m,$$
$$\rho_i = \zeta_{\xi_2(i)} = \zeta_k = r,$$
$$\rho_j = \zeta_{\xi_2(j)} = \zeta_k = r$$

Stoga je prema (3.8)

$$x \in K(\lambda_i, \rho_i),$$
$$y \in K(\lambda_j, \rho_j),$$

tj.

$$x \in I_i,$$
$$y \in I_j.$$

Tvrdimo da je $I_i \diamond I_j$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $d(\lambda_i, \lambda_j) \leq \rho_i + \rho_j$ pa je

$$d(\lambda_i, \lambda_j) \leq 2r.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\le d(x,\lambda_i) + d(\lambda_i, y)\\
&\le d(x,\lambda_i) + d(\lambda_i,\lambda_j) + d(\lambda_j, y) = d(x,\alpha_n) + d(\lambda_i,\lambda_j) + d(\alpha_m, y)\\
&< r + 2r + r = 4r\\
&< 4\cdot \frac{d(x,y)}{4} = d(x,y).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$d(x,y) < d(x,y),$$

što je kontradikcija.
Prema tome, $I_i \Diamond I_j$. ◻

Propozicija 3.3.11. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor te neka su $x \in X$ i $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i \cap I_j$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_k$ te $I_k \subseteq_F I_i$ i $I_k \subseteq_F I_j$.*

Dokaz. Imamo $x \in I_i$ i $x \in I_j$, tj. $x \in K(\lambda_i,\rho_i)$ i $x \in K(\lambda_j,\rho_j)$ pa je $d(\lambda_i,x) < \rho_i$ i $d(\lambda_j,x) < \rho_j$.
Slijedi da su brojevi

$$\frac{\rho_i - d(\lambda_i,x)}{2},\quad \frac{\rho_j - d(\lambda_j,x)}{2}$$

pozitivni.
Odaberimo racionalan broj r takav da je

$$0 < r < \min\{\frac{\rho_i - d(\lambda_i,x)}{2}, \frac{\rho_j - d(\lambda_j,x)}{2}\}. \tag{3.9}$$

Budući da je α gust niz u (X,d) postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x,\alpha_n) < r. \tag{3.10}$$

Odaberimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $r = \zeta_m$ te odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(\xi_1(k), \xi_2(k)) = (n,m).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \alpha_{\xi_1(k)} = \alpha_n,\\
\rho_k &= \zeta_{\xi_2(k)} = \zeta_m = r.
\end{aligned}$$

Iz (3.10) slijedi da je
$$d(x, \lambda_k) < \rho_k,$$
tj. $x \in I_k$.
Dokažimo da je $I_k \subseteq_F I_i$. Uočimo da iz (3.9) slijedi da je
$$\rho_k < \frac{\rho_i - d(\lambda_i, x)}{2}$$
pa je
$$d(\lambda_i, x) + 2\rho_k < \rho_i.$$
Koristeći prethodnu nejednakost dobivamo:
$$\begin{aligned} d(\lambda_i, \lambda_k) + \rho_k &\leq d(\lambda_i, x) + d(x, \lambda_k) + \rho_k \\ &< d(\lambda_i, x) + \rho_k + \rho_k = d(\lambda_i, x) + 2\rho_k \\ &< \rho_i. \end{aligned}$$
Dakle
$$d(\lambda_i, \lambda_k) + \rho_k < \rho_i,$$
odnosno
$$I_k \subseteq_F I_i.$$
Analogno dobivamo da je $I_k \subseteq_F I_j$. □

Propozicija 3.3.12. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $\mathcal{B}$ familija svih racionalnih kugla u (X, d, α). Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*

Dokaz. Svaka otvorena kugla u (X, d) je otvoren skup u (X, d), stoga je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$.
Neka su $U \in \mathcal{T}_d$ i $x \in U$. Tada je U otvoren skup u (X, d), pa postoji $r > 0$ takav da
$$K(x, r) \subseteq U.$$
Odaberimo racionalan broj s takav da je
$$0 < s < \frac{r}{2}.$$
Nadalje, odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $d(\alpha_n, x) < s$ (to možemo jer je α gust niz u (X, d)).
Očito je $x \in K(\alpha_n, s)$. Tvrdimo da je
$$K(\alpha_n, s) \subseteq K(x, r). \tag{3.11}$$

Neka je $y \in K(\alpha_n, s)$. Tada je $d(\alpha_n, y) < s$. Imamo

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,\alpha_n) + d(\alpha_n, y) \\ &< s + s = 2s \\ &< r. \end{aligned}$$

tj.

$$d(x,y) < r$$

pa je $y \in K(x,r)$.
Vidimo da vrijedi (3.11), pa zaključujemo da je $K(\alpha_n, s) \subseteq U$. Dakle,

$$K(\alpha_n, s) \in \mathcal{B} \text{ i } x \in K(\alpha_n, s) \subseteq U.$$

Iz propozicije 2.5.5 slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$. □

Uočimo da iz prethodne propozicije slijedi: Ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, onda je

$$\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$$

baza topologije $\mathcal{T}_d$.

3.4 Izračunljivi topološki prostori

Definicija 3.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{T}$ takav da je $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Za uređenu trojku $(X, \mathcal{T}, (I_i)_{i \in \mathbb{N}})$ kažemo da je* ***izračunljiv topološki prostor*** *ako postoje rekurzivno prebrojivi skupovi $C, D \subseteq \mathbb{N}^2$ takvi da vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $(i, j) \in D \implies I_i \cap I_j = \emptyset$;

(2) $(i, j) \in C \implies I_i \subseteq I_j$;

(3) $(i, j) \in D \implies (j, i) \in D$;

(4) $(i, j) \in C, (j, k) \in C \implies (i, k) \in C$;

(5) $(k, i) \in C, (i, j) \in D \implies (k, j) \in D$;

(6) *ako su $x, y \in X, x \neq y$ onda postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$x \in I_i, y \in I_j \text{ i } (i, j) \in D;$$

(7) *ako su* $i, j \in \mathbb{N}$ *te* $x \in I_i \cap I_j$ *onda postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x \in I_k, (k, i) \in C$ *i* $(k, j) \in C$.

Za D, C *kažemo da su karakteristični skupovi za* $(X, \mathcal{T}, (I_i)_{i\in\mathbb{N}})$.

Primjer 3.4.2. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor. Tada je* $(X, \mathcal{T}_d, (I_i)_{i\in\mathbb{N}})$ *izračunljiv topološki prostor.*
Dokažimo to.
Prema propoziciji 3.3.12 familija $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ *je baza topologije* $\mathcal{T}_d$. *Neka je*

$$C = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : I_i \subseteq_F I_j\},$$
$$D = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : I_i \diamond I_j\}.$$

Prema propozicijama 3.3.3 i 3.3.6 skupovi C i D su rekurzivno prebrojivi.
Dokažimo da za ovako definirane skupove C i D vrijede svojstva $(1) - (7)$ *iz definicije izračunljivog topološkog prostora.*
Očito je da svojstva $(1) - (3)$ *vrijede. Pretpostavimo da su* $i, j, k \in \mathbb{N}$ *takvi da* $(i, j) \in C$ *i* $(j, k) \in C$. *Tada je*

$$I_i \subseteq_F I_j,$$
$$I_j \subseteq_F I_k$$

pa je prema propoziciji 3.3.8

$$I_i \subseteq_F I_k,$$

odnosno $(i, k) \in C$.
Dakle vrijedi svojstvo (4).
Neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $(k, i) \in C$ *i* $(i, j) \in D$. *Tada je*

$$I_k \subseteq_F I_i \text{ i } I_i \diamond I_j$$

pa je prema propoziciji 3.3.9

$$I_k \diamond I_j,$$

odnosno $(k, j) \in D$.
Time smo dokazali da vrijedi svojstvo (5).
Neka su $x, y \in X, x \neq y$. *Prema propoziciji 3.3.10 postoje* $i, j \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $x \in I_i, y \in I_j$ *i* $I_i \diamond I_j$, *tj.* $(i, j) \in D$.
Prema tome, vrijedi svojstvo (6) *iz definicije izračunljivog topološkog prostora.*
Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ *te* $x \in X$ *takav da je* $x \in I_i \cap I_j$. *Prema propoziciji 3.3.11 postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$x \in I_k,$$
$$I_k \subseteq_F I_i \text{ i}$$
$$I_k \subseteq_F I_j,$$

tj.

$$(k, i) \in C \ i \ (k, j) \in C.$$

Prema tome $(X, \mathcal{T}_d, (I_i)_{i\in\mathbb{N}})$ *je izračunljiv topološki prostor.*

Propozicija 3.4.3. *Neka je* $(X, \mathcal{T}, (I_i)_{i\in\mathbb{N}})$ *izračunljiv topološki prostor. Tada je* $(X, \mathcal{T})$ *Hausdorffov prostor.*

Dokaz. Neka su $x, y \in X, x \neq y$. Neka su D, C karakteristični skupovi za $(X, \mathcal{T}_d, (I_i)_{i\in\mathbb{N}})$. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_i$ i $y \in I_j$ te

$$(i, j) \in D.$$

Slijedi $I_i \cap I_j = \emptyset$, a očito su $I_i, I_j \in \mathcal{T}$.
Dakle, $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffov topološki prostor. □

Lema 3.4.4. *Neka su* $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$ *te neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ *rekurzivne funkcije. Neka je*

$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : f(\vec{x}) = g(\vec{x})\}.$$

Tada je Ω *rekurzivan skup.*

Dokaz. Neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $g_1, ..., g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f i g. Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Definiramo

$$\Omega_i = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : f_i(\vec{x}) = g_i(\vec{x})\}.$$

Funkcije $f_i, g_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ su rekurzivne pa su rekurzivne i kao funkcije sa $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Stoga je Ω_i, prema propoziciji 1.3.3 rekurzivan.
Neka je $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in \Omega &\iff f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \\
&\iff (f_1(\vec{x}), ..., f_n(\vec{x})) = (g_1(\vec{x}), ..., g_n(\vec{x})) \\
&\iff f_1(\vec{x}) = g_1(\vec{x}), ..., f_n(\vec{x}) = g_n(\vec{x}) \\
&\iff \vec{x} \in \Omega_1, \vec{x} \in \Omega_2, ..., \vec{x} \in \Omega_n \\
&\iff \vec{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap ... \cap \Omega_n
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap ... \cap \Omega_n$$

pa je Ω rekurzivan kao presjek konačno mnogo rekurzivnih skupova. □

Propozicija 3.4.5. *Neka je* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ *te neka su* $S, T \subseteq \mathbb{N}^k$ *rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada su* $S \cup T$ *i* $S \cap T$ *rekurzivno prebrojivi skupovi.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da su S i T neprazni. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takve da je

$$f(\mathbb{N}) = S \text{ i } g(\mathbb{N}) = T.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$\vec{x} \in S \cap T \iff \vec{x} \in S \text{ i } \vec{x} \in T \iff \exists\, i, j \in \mathbb{N} \text{ td. } \vec{x} = f(i) \text{ i } \vec{x} = g(j) \tag{3.12}$$

Neka je

$$\Omega = \{(x_1, ..., x_k, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} : (x_1, ..., x_k) = f(i)\}$$

te

$$\Gamma = \{(x_1, ..., x_k, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} : (x_1, ..., x_k) = g(j)\}.$$

Dokažimo da je Ω rekurzivan skup.
Definirajmo funkcije $v, w : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}^k$ sa

$$v(x_1, ..., x_k, i, j) = (x_1, ..., x_k)$$
$$w(x_1, ..., x_k, i, j) = f(i).$$

Funkcija v je rekurzivna jer su joj komponentne funkcije očito rekurzivne, a rekurzivnost funkcije w slijedi iz

$$w = f \circ I^{k+2}_{k+1}.$$

Iz definicije skupa Ω je jasno da je

$$\Omega = \{(x_1, ..., x_k, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} : v(x_1, ..., x_k, i, j) = w(x_1, ..., x_k, i, j)\}$$

pa iz leme 3.4.4 slijedi da je Ω rekurzivan skup.
Posve analogno zaključujemo da je Γ rekurzivan skup.
Iz (3.12) slijedi da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in S \cap T &\iff \exists\, i, j \in \mathbb{N} \text{ td. } (\vec{x}, i, j) \in \Omega \text{ i } (\vec{x}, i, j) \in \Gamma \\ &\iff \exists\, i, j \in \mathbb{N} \text{ td. } (\vec{x}, i, j) \in \Omega \cap \Gamma \end{aligned}$$

Dakle,

$$S \cap T = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : \exists\, (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ td. } (\vec{x}, i, j) \in \Omega \cap \Gamma\}. \tag{3.13}$$

Skup $\Omega \cap \Gamma$ je rekurzivan pa je prema propoziciji 1.5.2 i rekurzivno prebrojiv. Iz (3.13) i teorema 1.5.5 slijedi da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Imamo:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in S \cup T &\iff \vec{x} \in S \text{ ili } \vec{x} \in T \\ &\iff \exists\, i, j \in \mathbb{N} \text{ td. } \vec{x} = f(i) \text{ ili } \vec{x} = g(j) \\ &\iff \exists\, i, j \in \mathbb{N} \text{ td. } (\vec{x}, i, j) \in \Omega \text{ ili } (\vec{x}, i, j) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\vec{x} \in S \cup T \iff \exists\, (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ td. } (\vec{x}, i, j) \in \Omega \cup \Gamma$$

pa analogno kao u slučaju skupa $S \cap T$ zaključujemo da je $S \cup T$ rekurzivno prebrojiv skup. □

Propozicija 3.4.6. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prerbrojiv skup. Tada je $f^{\leftarrow}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^k$*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je očita.
Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\kappa}$ takva da je $h(\mathbb{N}) = S$.
Neka je

$$\Omega = \{(x_1, ..., x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} : f(x_1, ..., x_k) = h(i)\}.$$

Dokažimo da je Ω rekurzivan skup.
Definirajmo funkcije $v, w : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^n$ sa

$$v(x_1, ..., x_k, i) = f(x_1, ..., x_k)$$
$$v(x_1, ..., x_k, i) = h(i).$$

Funkcije v, w su rekurzivne kao kompozicije rekurzivnih funkcija. Imamo:

$$\Omega = \{(x_1, ..., x_k, i) \in \mathbb{N}^{k+1} : v(x_1, ..., x_k, i) = w(x_1, ..., x_k, i)\}$$

pa iz leme 3.4.4 slijedi da je Ω rekurzivan skup.
Neka je $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$\begin{aligned} \vec{x} \in f^{\leftarrow}(S) &\iff f(\vec{x}) \in S \\ &\iff \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ td. } f(\vec{x}) = h(i) \\ &\iff \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ td. } (\vec{x}, i) \in \Omega. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\vec{x} \in f^{\leftarrow}(S) \iff \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ td. } (\vec{x}, i) \in \Omega.$$

Prema tome,

$$f^{\leftarrow}(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k : \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ td. } (\vec{x}, i) \in \Omega\}.$$

Iz teorema 1.5.5 slijedi da je $f^{\leftarrow}(S)$ rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 3.4.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{T}$ takav da je $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ baza topologije $\mathcal{T}$). Neka su D, C rekurzivno prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^2$ za koje vrijede svojstva (1), (2), (3), (4), (6), (7) iz definicije izračunljivog topološkog prostora.*
Tada je $(X, \mathcal{T}_d, (I_i)_{i \in \mathbb{N}})$ izračunljiv topološki prostor.
Štoviše, postoji rekurzivno prebrojiv skup $D' \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je $D \subseteq D'$ te da su D', C karakteristični skupovi za $(X, \mathcal{T}_d, (I_i)_{i \in \mathbb{N}})$.

Dokaz. Neka je

$$D'' = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 : \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ td. } (k, i) \in C \text{ i } (i, j) \in D\}.$$

Dokažimo da je D'' rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je

$$\Omega_1 = \{(k, j, i) \in \mathbb{N}^3 : (k, i) \in C\},$$
$$\Omega_2 = \{(k, j, i) \in \mathbb{N}^3 : (i, j) \in D\}.$$

Neka je $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana sa:

$$f(k, j, i) = (k, i).$$

Očito je f rekurzivna funkcija.
Imamo

$$\Omega_1 = \{(k, j, i) \in \mathbb{N}^3 : f(k, j, i) \in C\} = f^{\leftarrow}(C)$$

pa je prema prethodnoj propoziciji Ω_1 rekurzivno prebrojiv skup.
Analogno zaključujemo da je Ω_2 rekurzivno prebrojiv.
Prema definiciji skupa D'' vrijedi:

$$D'' = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 : \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ td. } (k, j, i) \in \Omega_1 \text{ i } (k, j, i) \in \Omega_2\}$$

tj.

$$D'' = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 : \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ td. } (k, j, i) \in \Omega_1 \cap \Omega_2\}$$

Prema propoziciji 3.4.5 skup $\Omega_1 \cap \Omega_2$ je rekurzivno prebrojiv pa je prema teoremu 1.5.5 skup D'' rekurzivno prebrojiv.
Neka je

$$D''' = \{(j, k) \in \mathbb{N}^2 : (k, j) \in D''\}.$$

Definiramo funkciju $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ sa

$$g(j, k) = (k, j)$$

Očito je g rekurzivna funkcija te vrijedi:

$$D''' = \{(j, k) \in \mathbb{N}^2 : g(j, k) \in D''\} = g^{\leftarrow}(D'')$$

pa iz prethodne propozicije zaključujemo da je D''' rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je

$$E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \exists\, i', j' \in \mathbb{N} \text{ td. } (i, i') \in C, (j, j') \in C \text{ i } (i', j') \in D\}.$$

Neka je

$$\Gamma_1 = \{(i, j, i', j') \in \mathbb{N}^4 : (i, i') \in C\},$$
$$\Gamma_2 = \{(i, j, i', j') \in \mathbb{N}^4 : (j, j') \in C\},$$
$$\Gamma_3 = \{(i, j, i', j') \in \mathbb{N}^4 : (i', j') \in D\}.$$

Definiramo $h : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}^2$ sa

$$h(i, j, i', j') = (i, i').$$

Očito je h rekurzivna funkcija. Uočimo da je

$$\Gamma_1 = h^{\leftarrow}(C)$$

pa iz prethodne propozicije zaključujemo da je Γ_1 rekurzivno prebrojiv skup.
Analogno dobivamo da su Γ_2 i Γ_3 rekurzivno prebrojivi skupovi.
Prema definiciji skupova $E, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ imamo:

$$E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \exists\, i', j' \in \mathbb{N} \text{ td. } (i, j, i', j') \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3\}.$$

Iz teorema 1.5.5 slijedi da je E rekurzivno prebrojiv skup.
Definiramo

$$D' = D \cup D'' \cup D''' \cup E.$$

Tada je D' rekurzivno prebrojiv skup i očito je $D \subseteq D'$.
Dokažimo da su D' i C karakteristični skupovi za $(X, \mathcal{T}, (I_i)_{i \in \mathbb{N}})$.
Svojstva $(2), (4), (7)$ iz definicije izračunljivog topološkog prostora očito vrijede prema pretpostavci teorema. Dokažimo da vrijedi svojstvo (1) (za D').
Neka je $(i, j) \in D'$. Imamo 4 slučaja:

(a) $(i, j) \in D$. Tada je $I_i \cap I_j = \emptyset$ prema pretpostavci teorema.

(b) $(i, j) \in D''$. Tada postoji $i' \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, i') \in C$ i $(i', j) \in D$. Slijedi $I_i \subseteq I_{i'}$ i $I_{i'} \cap I_j = \emptyset$. Stoga je $I_i \cap I_j = \emptyset$.

(c) $(i, j) \in D'''$. Tada je $(j, i) \in D''$ pa je prema (b) $I_i \cap I_j = \emptyset$.

(d) $(i, j) \in E$. Tada postoje $i', j' \in \mathbb{N}$ takvi da $(i, i') \in C$, $(i', j') \in D$ i $(j, j') \in C$. Slijedi $I_i \subseteq I_{i'}, I_j \subseteq I_{j'}$ i $I_{i'} \cap I_{j'} = \emptyset$. Stoga je $I_i \cap I_j = \emptyset$.

Dakle, vrijedi svojstvo (1). Dokažimo sada da vrijedi svojstvo (3) iz definicije izračunljivog topološkog prostora. Neka je $(i, j) \in D'$. Imamo 4 slučaja:

(a) $(i, j) \in D$. Tada je $(j, i) \in D$ prema pretpostavci teorema. Dakle $(j, i) \in D'$.

(b) $(i, j) \in D''$. Tada je $(j, i) \in D'''$ pa je $(j, i) \in D'$.

(c) $(i, j) \in D'''$. Tada je $(j, i) \in D''$ pa je $(j, i) \in D'$.

(d) $(i, j) \in E$. Tada postoje $i', j' \in \mathbb{N}$ takvi da $(i, i') \in C$ i $(j, j') \in C$ i $(i', j') \in D$. Slijedi $(j, j') \in C$, $(i, i') \in C$ i $(j', i') \in D$. Dakle $(j, i) \in E$, pa je $(j, i) \in D'$.

Prema tome, svojstvo (3) vrijedi.
Dokažimo svojstvo (5).
Pretpostavimo da su $(k, i) \in C$ i $(i, j) \in D'$. Želimo dokazati da je $(k, j) \in D'$.

(a) $(i, j) \in D$. Tada, zbog $(k, i) \in C$, vrijedi $(k, j) \in D$, stoga je $(k, j) \in D'$.

(b) $(i, j) \in D''$. Tada postoji $i' \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, i') \in C$ i $(i', j) \in D$. Zbog $(k, i) \in C$ imamo $(k, i') \in C$. Iz ovoga i $(i', j) \in D$ slijedi $(k, j) \in D''$. Stoga je $(k, j) \in D'$.

(c) $(i, j) \in D'''$. Tada je $(j, i) \in D''$. Tada postoji $j' \in \mathbb{N}$ takav da $(j, j') \in C$, $(j', i) \in D$, tj. $(i, j') \in D$. Zbog ovoga i zbog $(k, i) \in C$ imamo $(k, j) \in E$, pa je $(k, j) \in D'$.

(d) $(i, j) \in E$. Tada postoje $i', j' \in \mathbb{N}$ takvi da $(i, i') \in C$ i $(j, j') \in C$ i $(i', j') \in D$. Zbog $(k, i) \in C$ i $(i, i') \in C$ vrijedi $(k, i') \in C$. Dakle, $(k, i') \in C, (j, j') \in C$ i $(i', j') \in D$ pa $(k, j) \in E$, tj. $(k, j) \in D'$.

Dakle, $(k, j) \in D'$. Prema tome, svojstvo (5) vrijedi.
Dokažimo svojstvo (6).
Neka su $x, y \in X$, $x \neq y$. Tada, prema pretpostavci teorema, postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$x \in I_i, y \in I_j \text{ i } (i, j) \in D.$$

Stoga je $(i, j) \in D'$.
Time smo dokazali da su D', C karakteristični skupovi za $(X, \mathcal{T}, (I_i)_{i \in \mathbb{N}})$, što ujedno znači da je $(X, \mathcal{T}, (I_i)_{i \in \mathbb{N}})$ izračunljiv topološki prostor. $\square$

Bibliografija

[1] M. Vuković, *Izračunljivost*, skripta, PMF-MO, Zagreb 2009.

[2] Z. Iljazović, *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma*, doktorska disertacija, PMF-MO, Zagreb 2009.

[3] K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, Berlin, 2000.

[4] M. B. Pour-El, I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989

[5] K. Weihrauch, T. Grubba, *Elementary Computable Topology*, Journal of Universal Computer Science, 15(6), 1381-1422, 2009.

Sažetak

Ovaj rad podijeljen je na tri glavna poglavlja. Kroz prvo proglavlje navode se osnovni pojmovi izračunljivosti, proučavaju se rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}, \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te se dokazuju rezultati vezani za te funkcije koji su potrebni u nastavku rada. U drugom poglavlju definiraju se metrički i topološki prostori te se dokazuju određeni rezultati vezani uz pojam neprekidnosti, konvergencije niza, kompatnosti, Hausdorffovog prostora te uz pojam baze topologije. Treće poglavlje posvećeno je proučavanju izračunljivih topoloških prostora. Uvođenje izračunljivih topoloških prostora motivirano je proučavanjem izračunljivih metričkih prostora te nekih njegovih važnih svojstava.

Summary

This thesis consists of three main parts. The first part of thesis is devoted to the basic terms of computation, definition of recursive function $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}, \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ and $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ as well as to some important results regarding these recursive functions. The definitions of metric and topological spaces are presented in the second part of thesis. This part states and discusses the main results related to the continuity, convergence of sequence, compactness, Hausdorff spaces as well as to the notion of a basis for a topology. The third part of thesis is dedicated to the computable topological spaces. Introduction of computable topological spaces was motivated by computable metric spaces and some of its important properties.

Životopis

Zovem se Marija Lijović i rođena sam u Zagrebu 25. rujna 1987. godine. Živim u Zagrebu, gdje sam stekla osnovnoškolsko kao i srednjoškolsko obrazovanje. Osnovnu školu pohađala sam u OŠ Brezovica, a ostatak školovanja nastavila sam u XVI. (jezičnoj) gimnaziji. Trenutno sam studentica Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu na matematičkom odsjeku, smjer matematika i računarstvo, kojeg sam upisala u rujnu 2012.godine.