Difuzijski modeli u turizmu

Lustek, Matea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Lustek

DIFUZIJSKI MODELI U TURIZMU: BASSOV MODEL DIFUZIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr.sc. Kristina Šorić, p.v.š.

Zagreb, studeni, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Turističko tržište je vrlo osjetljivo pa turistička poduzeća i ostali akteri na njemu moraju optimalno rasporediti sve svoje resurse ako žele privući klijente. Jedan od načina je i izučavati plasiranje informacije o novoj usluzi ili proizvodu koje se može odvijati putem promocije ili prijenosom informacija sa starih na nove klijente. U tom izučavanju može se koristiti i Bassov difuzijski model, kao i njegova verzija, što je slučaj u ovom radu.

Ovaj je diplomski rad detaljnija obrada postojećeg članka čiji su autori *James Po-Hsun Hsiao*, *Chyi Jaw* te *Tzung-Cheng Huan*. Ime članka je *"Information diffusion and new product consumption: A Bass model application to tourism facility management"* što u prijevodu glasi: *"Difuzija informacija i konzumacija novog proizvoda: primjena Bassovog modela u upravljanju turističkim objektima"* (vidi [10]).

Prvo poglavlje opisuje područje istraživanja provedenog u članku. Autori članka su u suradnji s upravom jednog od tematskih parkova na Tajvanu odlučili provesti istraživanje dinamike posjećenosti novog festivala održanog u tom tematskom parku. Pri tom se koristi Bassov model difuzije i njegova verzija koja uključuje utjecaj promocije. Modeli su definirani i izvedeni u drugom poglavlju.

U trećem su poglavlju navedeni i definirani matematički alati korišteni u ovom radu.

Četvrto poglavlje opisuje podatke korištene u istraživanju i strategiju istraživanja. Podaci o broju posjetitelja i troškovima promocije su dobiveni od tematskog parka. Autori su u dogovoru s upravom te zbog potreba istraživanja neke podatke korigirali, radili hipotetske serije te modificirali modele u svrhu što bolje aproksimacije stvarnosti. Istraživanje se provodi postavljanjem hipoteza.

U ovom se radu detaljnije analiziraju rezultati koje su dobili provoditelji istraživanja te opisuju matematički alati koje su pritom koristili. Dana je matematička i ekonomska interpretacija postojećih rezultata. Rezultati i diskusija nedostataka i prednosti ovog istraživanja nalaze se u petom poglavlju rada.

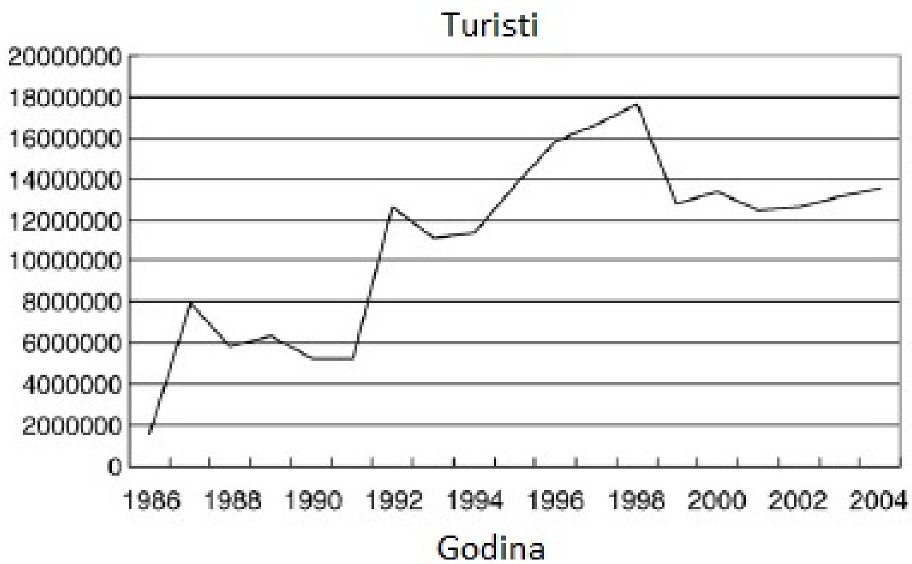
Predmet ovog rada je pokušati shvatiti kako difuzija informacija utječe na posjećenost inovativnog događaja koji je osmišljen kako bi potaknuo dugoročnu posjećenost destinacije. Uprava tematskog parka je priželjkivala modele koji bi im bili korisni u predviđanju budućih događanja te dovoljno dobri za donošenje poslovnih odluka. Zadnje poglavlje donosi zaključak.

Poglavlje 1

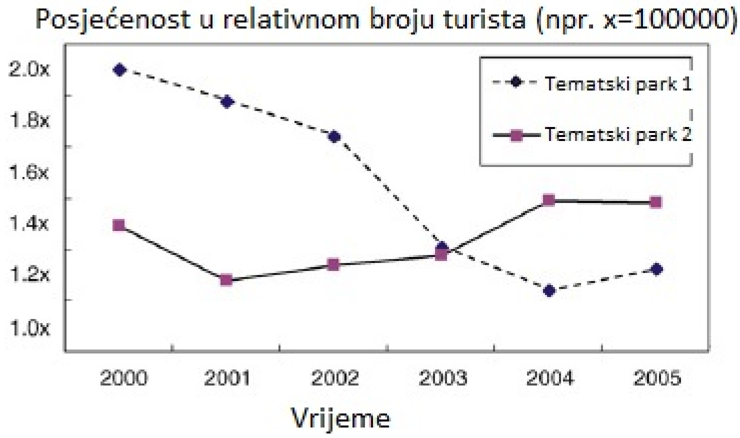
Područje istraživanja

1.1 Tematski parkovi

Tajvan je djelomično priznata država koja se većim dijelom nalazi na otoku Tajvan u istočnoj Aziji. Većinu stanovništva čine Kinezi. Tijekom većeg dijela 20. stoljeća tajvansko je gospodarstvo bilježilo visoki, često i spektakularan rast. Na početku 21. stoljeća velik dio BDP-a ostvaruje upravo uslužni sektor.



Slika 1.1: Trend u broju turista na Tajvanu od 1986. do 2004., *Taiwan tourism Bureau (2004)* (vidi [6])



Slika 1.2: Relativna posjećenost velikih tematskih parkova sa (1) i bez (2) upoznavanja s projektom održavanja novog festivala

2003. godine je procijenjeno da tematski parkovi čine 70 % tajvanske turističke industrije. Od 1997. godine velik broj privatnih poduzeća gradi tematske parkove na Tajvanu. Do 2003. godine njihov je broj porastao s 18 na 45 (*Annual report on tourism 2004, Republic of China* , vidi [7]). Obilježje turističke industrije je velika promjenjivost. Graf 1.1 prikazuje trend pada i rasta broja turista.

Tijekom cjelokupnog industrijskog pada, poduzeća tipično zaustavljaju proizvodnju (npr. zatvore tematski park) ili nastavljaju rad s minimalnim ulaganjima. Treća alternativa je pokušati obuhvatiti proporcionalno velik udio tržišta koje se smanjuje. Ako je tematski park u relativno dobrom stanju, uprava može implementirati inovacije kako bi privukla posjetitelje i time potaknula povećanje posjećenosti u njihovom parku u odnosu na druge tematske parkove.

Na grafu 1.2 je prikazana divergirajuća posjećenost za dva tematska parka na Tajvanu. Rukovoditelji tematskog parka broj dva su htjeli stati na kraj opadanju posjećenosti parka. Korist kreativnosti i ideja u oživljavanju posjećenosti opisuje se u mnogobrojnoj literaturi (npr. vidi [13]). Savjetnici i stručnjaci parka su predlagali širok spektar inovativnih usluga kojima bi se moglo privući posjetitelje (npr. nove i poboljšane vožnje). Uprava parka je na kraju odlučila održati novi *festival kave* u trajanju od 20 tjedana. Smatrali su kako bi on mogao osvojiti naklonost javnosti, poboljšati općenitu ponudu parka te doprinjeti regionalnoj turističkoj ponudi. Prema članku (vidi [10]), kava je glavni usjev regije u kojoj se nalazi taj tematski park.

Uprava parka je festival odlučila održati i provesti utemeljeno uglavnom na osnovi vlastite intuicije. Nisu imali nikakve informacije o tome kako bi održavanje vremenski ograničenog festivala moglo utjecati na dugoročnu posjećenost parka. Pokazalo se da je željeni utjecaj festivala bio pozitivan. Stoga su u parku održana još tri različita festivala kojima uprava parka broj dva, u usporedbi s parkom broj jedan, pripisuje porast posjećenosti.

Razmišljanje i smišljanje mogućih inovacija je relativno jeftino, ali implementacija nekog većeg projekta uglavnom nije. Suočeni s opadajućom posjećenošću, a s velikom željom da se ista poveća, uprava parka broj dva je odlučila provesti konkretne mjere. Htjeli su neki alat koji bi u budućnosti mogli koristi za donošenje odluka i predviđanja, sama intuicija nije im bila dovoljna.

1.2 Inovativne ponude

Za dugoročno je povećanje posjećenosti parka potrebno smisleno donositi odluke u upravljanju i razumijeti ponašanje posjetitelja. Mjerenje difuzije informacija među klijentima je po Stamboulisu i Skayannisu ([17]) ključno za optimizaciju resursa. Stoga se u ovom istraživanju koristi jedna od tehnika procjene turističke potražnje, a to je korištenje modela koji utjelovljuju Bassov model difuzije. Ono pomaže pri procjeni utjecaja novih ponuda na ponašanje turista. Ako informacije od starih prema novim klijenatima o nekom novom događaju ili proizvodu, kao što je i festival u tematskom parku, zainteresiraju populaciju i postanu predmet razgovora, ljudi će vjerojatno posjetiti taj događaj ili kupiti proizvod.

Trgovci turističkom ponudom bore se za naklonost turista i žude za komunikacijom s potencijalnim kupcima. Borba između mase informacija o različitim destinacijama rezultira čak i prevelikom količinom informacija koju turisti mogu i stignu razmotriti, sagledati. Ipak, na kraju se odlučuju za jednu lokaciju. Opisano je nekoliko modela koji objašnjavaju zašto će između nekoliko sličnih alternativa biti odabrana ona jedna. Prema Woodsideu i Sherrellu (1997, [20]) destinacije između kojih će posjetitelji birati možemo u grubo podijeliti u dva skupa koja ovdje definiramo i kao takve dalje koristimo u radu.

Definicija 1.2.1. ***Evocirani skup*** *je skup destinacija (proizvoda, brandova) između kojih će posjetitelj (kupac) razmatrati koja je bolja i smatrati ih mogućim odabirom.*

Inertan skup *je skup destinacija (proizvoda, brendova) prema kojima je posjetitelj ravnodušan i za koje ne gaji pretjerani interes.*

Širenje informacija od usta do usta, ili sa starih na nove klijente, uvelike utječe na mišljenja populacije. Na primjer, posjetitelji koji su i ranije posjećivali tematski park će uz nove informacije "osvježiti" svoj interes za njega, dok će novi posjetitelji možda nakon prvog posjeta postati redoviti posjetitelji. Drugim riječima, dolazak na neki novi događaj može potaknuti nove posjetitelje da dolaze opet, odnosno da ta destinacija za njih postane dio evociranog skupa takvih destinacija. Za posjetitelje koji su nakon nekog vremena povodom novog događaja ponovno posjetili destinaciju, ta destinacija može postati dio njihovog evociranog skupa umjesto inertnog skupa takvih destinacija.

Pitanje na koje je uprava tematskog parka htjela odgovor jest *kako je festival kave utjecao na dugoročnu posjećenost tematskog parka.* Shvaćanje dinamike posjećenosti *festivala kave* je korak prema razumijevanju dugoročne posjećenosti tematskog parka. Ta posjećenost je modelirana u ovom radu, objašnjeni su parametri odabranih modela, rezultati procjena modela te korist ili nedostatak provedenog istraživanja.

Poglavlje 2

Bassov model difuzije

Difuzijsko se modeliranje koristi za razumijevanje utjecaja difuzije informacija na kupovinu. Ovo istraživanje demonstrira korist difuzijskih modela korištenih na dobrima bez roka trajanja (vidi npr. [11]). Pojedini članci iz turističke literature pokazuju se korisnima za ovo istraživanje. Walle ([19]) i Smith ([16]) u svojim radovima razvijaju ideje o difuziji i inovaciji. No problematika kojom se oni bave tiče se proizvođača i trgovaca koji prihvaćaju ili stvaraju inovacije, a ne govori od difuziji informacija među kupcima što se opisuje u Bassovom modelu. Na primjer Morley (vidi [12]) uzima u obzir kupce i dolazi do formulacije modela koja utjelovljuje Bassov model. On razvija dinamički model za internacionalna putovanja. Prema [12], taj model utjelovljuje Bassov s korekcijom ponavljajućih posjetitelja i pojmovima koji dopuštaju utvrđivanje dohotka i drugih utjecaja. Slična se logika nalazi i u modelima koji se primjenjuju za putovanja na Balearske otoke, o čemu se više može pročitati u radovima Augiló, E. (vidi [1]) i Rosselló, J. (vidi [14]). Turistička je primjena modela koji utjelovljuju Bassov model orijentirana na drugačiju problematiku od problematike destinacija koje koriste vremenski ograničen inovativni događaj kako bi stimulirale dugoročnu posjećenost. Za razumijevanje se dinamike posjećenosti *festivala kave* u ovom radu koriste dva modela: Bassov model (vidi [4]) te verzija Bassovog modela koja u obzir uzima i utjecaj promocije (vidi [8]).

Podaci korišteni za procjenu modela opisani su u poglavlju 4. Osim ovih dvaju modela, autori članka koristili su i modificiranu verziju Bassovog modela koja uključuje utjecaj promocije. Njega nazivaju AM-Bassov model. Kasnije će također biti objašnjeno kako i zašto su to napravili (vidi 5.1).

2.1 Originalan Bassov model: O-Bassov model

Bassovim se modelom opisuje vrijeme prve kupovine novog proizvoda. Osnovna je pretpostavka modela da je prva kupovina novog proizvoda povezana s brojem starih kupaca.

Razliku između kupaca opisivat ćemo terminima inovatora i imitatora koji su definirani dalje u radu. Modelom se dobro može predvidjeti maksimum prodaje i vrijeme kada je do nje došlo.

Definicija 2.1.1. ***Inovatori*** *su dio populacije potencijalnih kupaca koji se na kupovinu odlučuju isključivo zbog informacija dobivenih promocijom proizvoda, neovisno o odlukama ostalih potencijalnih kupaca.*

Imitatori *su dio populacije potencijalnih kupaca koji se na kupovinu odlučuju pod utjecajem inovatora i informacije od usta do usta, odnosno pod utjecajem informacije od starih kupaca.*

Kada kažemo da inovatori ne kupuju pod utjecajem ostalih kupaca u socijalnom sustavu, mislimo da se pritisak na tu skupinu kako bi kupili proizvod ne povećava s brojem novih kupaca, odnosno rastom cijelog procesa usvajanja novog proizvoda. Događa se možda baš suprotno od toga.

Bass definira osnovnu pretpostavku koja kaže da je *vjerojatnost da će se prva kupovina dogoditi u trenutku t, uz pretpostavku da nije bilo prethodnih kupovina, linearna funkcija broja prethodnih kupaca*

$$P(t) = p + \frac{q}{M}N(t) \tag{2.1}$$

gdje su p i $\frac{q}{M}$ konstante, *N(t)* ukupan broj prvih kupaca do trenutka t, a t je vrijeme. U trenutku t=0 ukupan broj novih kupaca je 0, odnosno *N(0)*=0. Uvrštavanjem t=0 u jednadžbu (2.1) te koristeći *N(0)=0*, dobijemo sljedeće:

$$P(0) = p + \frac{q}{M}N(0) = p$$

p je vjerojatnost prve kupovine u *t=0* i njegova vrijednost označava važnost inovatora u socijalnom sustavu. S druge strane, $\frac{q}{M}$ objašnjava pritisak na imitatore vezan uz broj prethodnih kupaca. Ovu ćemo motivaciju iskoristiti kako bismo na sljedećim stranicama rada precizno definirali Bassov model i detaljnije objasnili sve njegove parametre. Potom ćemo i egzaktno izvesti izraz za ukupan broj kupaca do trenutka t, *N(t)*. Neka je:

- M = populacija potencijalnih kupaca, tržišni potencijal
- *N(t)* = ukupan broj prvih kupaca do trenutka t
- *n(t)* = promjena u ukupnom broju prvih kupaca od $t - \Delta$ do t, odnosno $n(t) = \frac{dN(t)}{dt}$
- Δ = vremenski interval
- p = koeficijent inovacija za proizvod, $p \geq 0$
- q = koeficijent imitacija za proizvod, $q \geq 0$

$$N(t) - N(t-\Delta) = n(t) = p(M - N(t)) + \frac{qN(t)(M - N(t))}{M} \tag{2.2}$$

Jednadžba (2.2) predstavlja model prve kupovine koji je 1969. godine razvio Frank M. Bass ([4]). Prvi kupci predstavljaju i prve klijente, prve posjetitelje i tome slično, ovisno o primjeni Bassovog modela. Također, novi proizvodi nekada predstavljaju nove destinacije, novo putovanje, novi događaj ili slično. U turističkom aspektu, izraz $n(t) = N(t) - N(t-\Delta)$ predstavlja nove putnike tijekom jedinične promjene vremena. Jedinica promjene vremena (Δ) ovisi o preferencijama provoditelja istraživanja ili o dostupnosti primjerenih podataka (npr. dani, tjedni, mjeseci). U našem slučaju $n(t)$ predstavlja broj prvih posjetitelja inovativnog festivala od vremena t-Δ do t, odnosno za dovoljno mali Δ broj posjetitelja u trenutku t. Također, uzimamo da je tržišni potencijal M konstanta. Uz ovu pretpostavku broj prvih kupovina znači isto kao broj prvih kupaca.

Bass predlaže dva segmenta. U (2.2) se izraz *p(M-N(t))* odnosi na inovatore čija kupovina novog proizvoda (npr. posjećivanje festivala u tematskom parku) rezultira samo zbog promocije (npr. medijske informacije). Izraz $\frac{qN(t)(M-N(t)}{M}$ se odnosi na imitatore na čije je usvajanje utjecala informacija od starih posjetitelja, odnosno inovatora.

Modela sugerira da brzina i vrijeme prve kupovine ovise o stupnju inovativnosti i stupnju imitacije među populacijom potencijalnih kupaca proizvoda. Raspisivanjem jednadžbe (2.2) dolazimo do formulacije O-Bassovog modela (O dolazi od originalni) iz koje lako možemo procijeniti parametre.

$$\begin{aligned} n(t) &= p(M - N(t)) + \frac{qN(t)(M - N(t))}{M} \\ &= pM - pN(t) + \frac{qN(t)M}{M} - \frac{qN(t)^2}{M} \\ &= pM - pN(t) + qN(t) - (\frac{q}{M})N(t)^2 \\ &= pM + (-p + q)N(t) + (-\frac{q}{M})N(t)^2 \end{aligned}$$

Dakle,

$$n(t) = pM + (-p + q)N(t) + (-\frac{q}{M})N(t)^2 \tag{2.3}$$

Da bi O-Bassov model bio valjan moraju biti zadovoljena tri osnovna uvjeta. Jednadžba (2.2) se odnosi na:

1. prvi zahtjev za kupovinom
2. kupovinu specifične kategorije
3. kupovinu bez restrikcija na opskrbu

Prvi zahtjev za kupovinom znači da Bassovim modelom možemo modelirati isključivo prvu kupovinu nekog proizvoda. Kada se radi o tematskim parkovima modeliramo prvo posjećivanje inovativnog festivala.

Zahtjev za specifičnom kategorijom znači da proizvod mora biti inovativan općenito, a ne samo za tog proizvođača. Ako je festival određenog tematskog parka inovacija samo za taj park (odnosno postoje parkovi koji su već održavali festivale), dio posjetitelja može doći zbog pozitivnog iskustva u drugim parkovima. U tom slučaju drugi zahtjev nije zadovoljen.

Nepostojanje restrikcija na opskrbu predstavlja mogućnost za svakog potencijalnog posjetitelja da kupi proizvod. Za festival u tematskom parku to znači dovoljan broj parkirnih mjesta, dovoljan broj ulaznica i slično. Dakle, kapacitet nije upitan.

Poznavanje vrijednosti tržišnog potencijala M pomaže procijeniti potencijalni prihod od provođenja plana odnosno proizvodnje novog proizvoda. Time pridonosi razumnoj odluci o nastavljanju ili ne nastavljanju sa zamišljenom inovacijom. Maksimiziranje prihoda od prodaje stoga predstavlja optimalnu p-q relaciju za inovativne proizvode.

Zapišimo jednadžbu (2.3) u sljedećem obliku,

$$n(t) = pM + (-p+q)N(t) + (-\frac{q}{M})N(t)^2 = c_o + c_1N(t) + c_2N(t)^2 \tag{2.4}$$

- c_0=pM
- c_1=-p+q
- $c_2 = \frac{-q}{M}$

Opet smo dobili jednadžbu s konstantnim koeficijentima c_0, c_1 i c_2 jer su p, q, M konstante. Jednadžbu $n(t) = c_0 + c_1N(t) + c_2N(t)^2$ svodimo na običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda.

Uvedimo supstituciju $v(t) = c_2N(t)$. Deriviranjem slijedi $v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = c_2\frac{dN(t)}{dt} = c_2n(t)$. U dobiveni izraz ubacimo jednadžbu (2.4).

$$\begin{aligned}
v'(t) &= c_2n(t) \\
&= c_2(c_0 + c_1N(t) + c_2N(t)^2) \\
&= c_0c_2 + c_1c_2N(t) + c_2^2N(t)^2 \\
&= c_0c_2 + c_1c_2N(t) + c_2^2N(t)^2
\end{aligned}$$

Iskoristimo supstituciju $v(t) = c_2N(t)$ i dobijemo sljedeće

$$v'(t) = c_0c_2 + c_1v(t) + v(t)^2 \tag{2.5}$$

(2.5) radi jednostavnosti parametara zapišimo u sljedećem obliku

$$v'(t) = v(t)^2 + Rv(t) + S$$

- R=c_1
- S=$c_o c_2$

Uvedimo supstituciju $v(t) = \frac{-u'(t)}{u(t)}$, gdje je $u(t) \neq 0$. Radi jednostavnosti raspisivanja umjesto $u(t), v(t)$ pišemo samo u,v.

$$v' = v^2 + Rv + S \tag{2.6}$$

Raspišemo koristeći supstituciju $v = \frac{-u'}{u}$,

$$\begin{aligned}
v' &= (\frac{u'}{u})' \\
&= \frac{-u''u + u'u'}{u^2} \\
&= \frac{-u''}{u} + (\frac{u'}{u})^2 \text{ , uvrstimo supstituciju } v = \frac{-u'}{u} \text{ pa je } v^2 = (\frac{u'}{u})^2 \\
&= \frac{-u''}{u} + v^2 \\
&\Rightarrow v^2 - v' = \frac{u''}{u}
\end{aligned}$$

Sada iskoristimo (2.6), $v^2 - v' = -Rv - S$

$\Rightarrow -Rv - S = \frac{u''}{u}$, množimo jednadžbu s $u \neq 0$

$\Rightarrow u'' = -Rvu - Su$, iskoristimo ponovno $v = \frac{-u'}{u}$ pa je $vu = \frac{-u'u}{u}$, odnosno $-Rvu = Ru'$

$\Rightarrow u'' = Ru' - Su$, prebacimo sve na jednu stranu jednakosti

$\Rightarrow u'' - Ru' + Su = 0$

Dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda. Vratimo supstitucije parametara $R = c_1$ te $S = c_o c_2$, a nakon toga uvrstimo $c_0 = pM, c_1 = -p + q$ i $c_2 = \frac{-q}{M}$.

$$\begin{aligned}
&u'' - Ru' + Su = 0 \\
&u'' - c_1 u' + c_0 c_2 u = 0 \\
&u'' - (-p + q)u' + pM(\frac{-q}{M})u = 0 \\
&u'' - (q - p)u' + (-qp)u = 0
\end{aligned}$$

Općenito, rješenje obične diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima je zbroj komplementarnog i partikularnog rješenja. Komplementarno rješenje je rješenje homogene jednadžbe. Ovisno o svojstvima karakteristične jednadžbe moguća su tri oblika rješenja homogene jednadžbe:

1. $u(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$, λ_1 i $\lambda_2 \in R$ su dva različita korijena karakteristične jednadžbe
2. $u(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{\lambda t}$, $\lambda \in R$ je dvostruki korijen karakteristične jednadžbe
3. $u(t) = e^{ht}(A_1 cos(vt) + A_2 sin(vt))$, $\lambda_{1,2} = h \pm iv$ su konjugirano kompleksni korijeni

Realne konstante A_1 i A_2 određujemo iz početnih uvjeta. Jednadžba (2.7) je homogena, riješit ćemo je pomoću karakteristične jednadžbe uvodeći parametar λ.

$$u'' - (q-p)u' + (-qp)u = 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \\ &a_1 = -(q-p) \\ &a_2 = -qp \end{aligned}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su $\lambda_{1,2} = \frac{q-p\pm\sqrt{(q+p)^2}}{2}$. Budući da su $q, p \geq 0$ (vidi 2.2), izraz ispod korijena je realan nenegativan broj pa dobijemo dva realna korijena karakteristične jednadžbe.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{q-p\pm(q+p)}{2} \\ \lambda_1 &= \frac{q-p+q+p}{2} = q \\ \lambda_2 &= \frac{q-p-q-p}{2} = -p \end{aligned}$$

Stoga se nalazimo u prvom obliku rješenja homogene jednadžbe, odnosno naše rješenje je oblika

$$u(t) = A_1 e^{qt} + A_2 e^{-pt}$$

gdje su A_1 i A_2 realni brojevi. Iz $v(t) = c_2 N(t)$ i $v(t) = \frac{-u'(t)}{u(t)} \Rightarrow N = \frac{-u'(t)}{c_2 u(t)}$. Derivirajmo po t dobiveno rješenje *u(t)*, pa uvrstimo u *N(t)*:

$$\begin{aligned} &u'(t) = A_1 q e^{qt} - A_2 p e^{-pt} \\ &c_2 = \frac{-q}{M} \\ &\Rightarrow N(t) = \frac{M}{q}\frac{A_1 q e^{qt} - A_2 p e^{-pt}}{A_1 e^{qt} + A_2 e^{-pt}} \end{aligned}$$

Početni uvjet pomoću kojeg ćemo odrediti realne brojeve A_1 i A_2 je *N(0)=0*, pa uvrstimo:

$$
\begin{aligned}
N(0) &= \frac{M}{q}\frac{A_1 q - A_2 p}{A_1 + A_2} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{MA_1 q}{q(A_1 + A_2)} = \frac{MA_2 p}{q(A_1 + A_1)} \\
&\Rightarrow A_1 = \frac{p}{q} A_2
\end{aligned}
$$

Relacija između A_1 i A_2 vrijedi za sve realne brojeve takve da $A_1 + A_2 \neq 0$. Radi jednostavnosti uzmimo $A_2 = q$ pa time dobijemo $A_1 = p$. Uvrstimo dobiveno u jednadžbu za $N(t)$ kako bismo dobili izraz za egzaktno rješenje za ukupan broj prvih kupaca do trenutka t u Bassovom modelu.

$$
\begin{aligned}
N(t) &= \frac{M}{q}\frac{pqe^{qt} - qpe^{-pt}}{pe^{qt} + qe^{-pt}} \\
&= \frac{M}{q}\frac{q(pe^{qt} - pe^{-pt})}{pe^{qt} + qe^{-pt}} \\
&= M\frac{pe^{qt} - pe^{-pt}}{pe^{qt} + qe^{-pt}} : \frac{pe^{qt}}{pe^{qt}} \\
&= M\frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}
\end{aligned}
$$

Dakle izraz za ukupan broj prvih kupaca do trenutka t je

$$
N(t) = M\frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}} \tag{2.8}
$$

Deriviranjem izraza (2.8) po jedinici vremena t dobit ćemo izraz za $n(t)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dN(t)}{dt} = n(t) &= M\frac{(p+q)e^{-(p+q)t}(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}) - (1 - e^{-(p+q)t})(\frac{-q(p+q)}{p}e^{-(p+q)t})}{(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^2} \\
&= M\frac{(p+q)e^{-(p+q)t} + \frac{q(p+q)}{p}e^{-2(p+q)t} + \frac{q(p+q)}{p}e^{-(p+q)t} - \frac{q(p+q)}{p}e^{-2(p+q)t}}{(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^2} \\
&= M\frac{e^{-(p+q)t}(p + q + \frac{q(p+q)}{p})}{(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^2} \\
&= M\frac{(p+q)^2}{p}\frac{e^{-(p+q)t}}{(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^2}
\end{aligned}
$$

Slijedi da je broj prvih kupaca u trenutku t jednak

$$n(t) = M\frac{(p+q)^2}{p}\frac{e^{-(p+q)t}}{(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^2} \tag{2.9}$$

Potražimo sada trenutak u kojem je broj prvih kupaca najveći, odnosno maksimum od *n(t)*. *n(t)* je očito $\in C^\infty$. Prvo deriviramo *n(t)*, a zatim derivaciju izjednačimo s 0 kako bismo pronašli stacionarne točke.

$$\begin{aligned}
\frac{dn(t)}{dt} &= M\frac{(p+q)^2}{p}\frac{-(p+q)e^{-(p+q)t}(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^2 - e^{-(p+q)t}2(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})\frac{-q(p+q)}{p}e^{-(p+q)t}}{(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^4}\\
n'(t) &= M\frac{(p+q)^2}{p}(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})\frac{-(p+q)e^{-(p+q)t}(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}) + 2\frac{q(p+q)}{p}e^{-2(p+q)t}}{(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^4}\\
&= M\frac{(p+q)^2}{p}\frac{-(p+q)e^{-(p+q)t} - \frac{q(p+q)}{p}e^{-2(p+q)t} + 2\frac{q(p+q)}{p}e^{-2(p+q)t}}{(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^3}\\
&= M\frac{(p+q)^2}{p}\frac{e^{-(p+q)t}(-(p+q) + \frac{q(p+q)}{p}e^{-(p+q)t})}{(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^3}\\
&= M\frac{(p+q)^3}{p}\frac{e^{-(p+q)t}(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t} - 1)}{(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^3}
\end{aligned}$$

Tražimo stacionarne točke izjednačavanjem $n'(t)$ s 0:

$$\begin{aligned}
&N''(t) = n'(t) = 0\\
&\Leftrightarrow M\frac{(p+q)^3}{p}\frac{e^{-(p+q)t}(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t} - 1)}{(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^3} = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{q}{p}e^{-(p+q)t} - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{q}{p}e^{-(p+q)t} = 1\\
&\Leftrightarrow e^{-(p+q)t} = \frac{p}{q}\\
&\Leftrightarrow -(p+q)t = ln(\frac{p}{q})\\
&\Leftrightarrow t = \frac{-ln(\frac{p}{q})}{p+q}\\
&\Leftrightarrow t = \frac{ln(\frac{q}{p})}{p+q}
\end{aligned}$$

Znamo da u $t^* = \frac{ln(\frac{q}{p})}{p+q}$ može biti lokalni ekstrem zbog Fermatovog teorema:

Teorem 2.1.2 (Fermat)**.** *Neka f : I→ $\mathbb{R}$ u točki c otvorenog intervala I ⊆ $\mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem. Ako je f diferencijabilna u c, onda je f'(c)=0.*

Ovo je jedina stacionarna točka koju smo pronašli i ona je kandidat za globalni ekstrem, odnosno maksimum. Sljedeći teorem nam daje dovoljan uvjet za lokalni maksimum. Ako je t* lokalni maksimum onda je i globalni ukoliko je $n(0) < n(t^*)$ i $n(+\infty) < n(t^*)$.

Teorem 2.1.3 (dovoljan uvjet za lokalni maksimum)**.** *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$. Neka je $c \in I$ stacionarna točka, tj. f'(c)=0. Ako postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da za svaki k∈ {1,...,n} vrijedi $f^k(c) = 0$ i $f^{n+1}(c) \neq 0$, tada u slučaju ako je n+1 paran broj i $f^{n+1}(c) < 0$, f ima strogi lokalni maksimum u c.*

Trebamo pokazati da je $n''(t^*) < 0$. Stavimo da je $\frac{M(p+q)^3}{p} = a$ i *(p+q)=b* radi lakšeg zapisivanja deriviranja $n'(t) = M\frac{(p+q)^3}{p}\frac{e^{-(p+q)t}(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}-1)}{(1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^3}$. Deriviramo $n'(t) = a\frac{e^{-bt}(\frac{q}{p}e^{-bt}-1)}{(1+\frac{q}{p}e^{-bt})^3} = a\frac{(\frac{q}{p}e^{-2bt}-e^{-bt})}{(1+\frac{q}{p}e^{-bt})^3}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{n''(t)}{a} &= \frac{(-2b\frac{q}{p}e^{-2bt} + be^{-bt})(1 + \frac{q}{p}e^{-bt})^3 + 3(\frac{q}{p}e^{-2bt} - e^{bt})(1 + \frac{q}{p}e^{bt})^2\frac{q}{p}be^{-bt}}{(1 + \frac{q}{p}e^{-bt})^6} \\
&= \frac{e^{-bt}(1 + \frac{q}{p}e^{-bt})^2[(-2b\frac{q}{p}e^{-bt} + b)(1 + \frac{q}{p}e^{-bt}) + 3\frac{q}{p}b(\frac{q}{p}e^{-2bt} - e^{-bt})]}{(1 + \frac{q}{p}e^{-bt})^6} \\
&= \frac{e^{-bt}[-2b\frac{q}{p}e^{-bt} - 2b(\frac{q}{p})^2e^{-2bt} + b + b\frac{q}{p}e^{-bt} + 3b(\frac{q}{p})^2e^{-2bt} - 3\frac{q}{p}e^{-bt}]}{(1 + \frac{q}{p}e^{-bt})^4} \\
&= \frac{e^{-bt}[-4\frac{q}{p}be^{-bt} + b(\frac{q}{p})^2e^{-2bt} + b]}{(1 + \frac{q}{p}e^{-bt})^4} \\
&= \frac{e^{-bt}b[1 + (\frac{q}{p})^2e^{-2bt} - 4\frac{q}{p}e^{-bt}]}{(1 + \frac{q}{p}e^{-bt})^4}
\end{aligned}
$$

Pomnožimo cijelu jednadžbu s a i uvrstimo $\frac{M(p+q)^3}{p} = a$ i *(p+q)=b*:

$$
\begin{aligned}
n''(t) &= a\frac{e^{-bt}b[1 + (\frac{q}{p})^2e^{-2bt} - 4\frac{q}{p}e^{-bt}]}{(1 + \frac{q}{p}e^{-bt})^4} \\
&= M\frac{(p+q)^3}{p}\frac{e^{-(p+q)t}(p+q)[1 + (\frac{q}{p})^2e^{-2(p+q)t} - 4\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}]}{(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^4}
\end{aligned}
$$

Time smo dobili izraz za *n"(t)*

$$n''(t) = \frac{M(p+q)^4 e^{-(p+q)t}}{p} \frac{(1 + (\frac{q}{p})^2 e^{-2(p+q)t} - 4\frac{q}{p} e^{-(p+q)t})}{(1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t})^4} \tag{2.10}$$

Primijetimo da je

$$e^{-(p+q)t^*} = e^{-(p+q)\frac{ln(\frac{q}{p})}{p+q}} = e^{-ln(\frac{q}{p})} = e^{ln(\frac{p}{q})} = \frac{p}{q}$$

Uvrstimo t^* u *n"(t)*

$$\begin{aligned} n''(t^*) &= \frac{M(p+q)^4 \frac{p}{q}}{p} \frac{(1 + (\frac{q}{p})^2 (\frac{p}{q})^2 - 4\frac{q}{p}\frac{p}{q})}{(1 + \frac{q}{p}\frac{p}{q})^4} = \frac{M(p+q)^2 q}{p^2} \frac{(1+1-4)}{(1+1)^4} \\ &= -\frac{M(p+q)^2 q}{p^2} \frac{2}{16} = -\frac{M(p+q)^2 q}{8p^2} \end{aligned}$$

Vidimo da je $n''(t^*) < 0$ pa zaključujemo da se u $t^* = \frac{ln(\frac{q}{p})}{p+q}$ postiže lokalni maksimum funkcije *n(t)* po teoremu 2.1.3. Maksimum će postojati za $q > p$ jer je inače $ln(\frac{q}{p}) < 0 \Rightarrow t < 0$, a jedinica vremena t mora biti veća ili jednaka 0. Uvrštavanjem $t*$ u jednadžbu (2.9) dobijemo

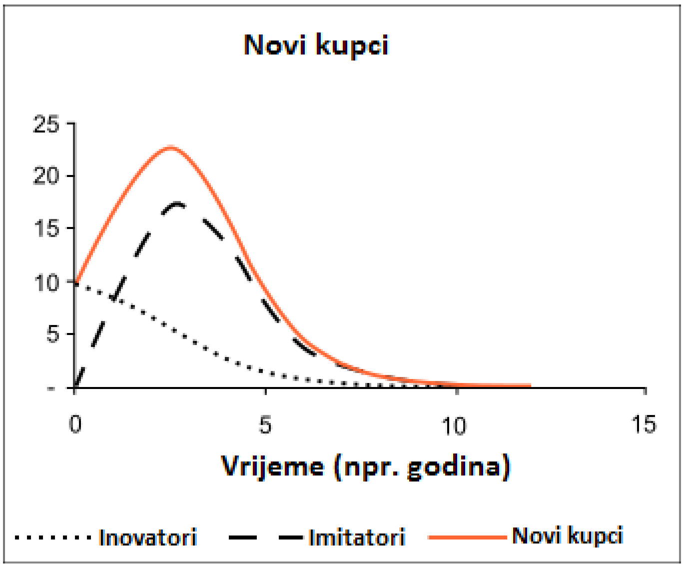
$$\begin{aligned} n(t^*) &= M\frac{(p+q)^2}{p} \frac{e^{-(p+q)t^*}}{(1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t^*})^2} = M\frac{(p+q)^2}{p} \frac{e^{-(p+q)\frac{ln(\frac{q}{p})}{p+q}}}{(1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)\frac{ln(\frac{q}{p})}{p+q}})^2} \\ &= M\frac{(p+q)^2}{p} \frac{e^{-ln(\frac{q}{p})}}{(1 + \frac{q}{p} e^{-ln(\frac{q}{p})})^2} = M\frac{(p+q)^2}{p} \frac{\frac{p}{q}}{(1 + \frac{q}{p}\frac{p}{q})^2} \\ &= M\frac{(p+q)^2}{p} \frac{p}{4q} = M\frac{(p+q)^2}{4q} \end{aligned}$$

Pokažimo da je $n(0) = pM < n(t^*)$,

$$pM < M\frac{(p+q)^2}{4q} \Leftrightarrow 4pq < (p+q)^2 \Leftrightarrow 0 < (p-q)^2$$

Ako je i $n(+\infty) < n(t^*)$, u t^* se postiže globalni maksimum.

$$\lim_{t\to\infty} n(t) = \lim_{t\to\infty} M\frac{(p+q)^2}{p} \frac{e^{-(p+q)t}}{(1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)})^2} = M\frac{(p+q)^2}{p} \frac{0}{1} = 0 < M\frac{(p+q)^2}{4q}$$



Slika 2.1: Primjer krivulje novih kupaca u trenutku t za Bassov model

$\Rightarrow$ maksimalan broj prvih kupaca je $M\frac{(p+q)^2}{4q}$.
Primjetimo da je $N(t^*) = \frac{M}{2}(1 - \frac{p}{q})$,

$$
\begin{aligned}
N(t^*) &= M\frac{1 - e^{-(p+q)\frac{ln(\frac{q}{p})}{p+q}}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)\frac{ln(\frac{q}{p})}{p+q}}} \\
&= M\frac{1 - e^{-ln(\frac{q}{p})}}{1 + \frac{q}{p}e^{-ln(\frac{q}{p})}} \\
&= M\frac{1 - \frac{p}{q}}{1 + \frac{q}{p}\frac{p}{q}} \\
&= \frac{M}{2}(1 - \frac{p}{q})
\end{aligned}
$$

što implicira da je za uspješne proizvode uobičajeno koeficijent imitacija mnogo veći nego koeficijent inovacija, a broj novih kupaca će biti maksimalan otprilike u trenutku kada je ukupan broj novih kupaca jednak $\frac{M}{2}$ [4].
Na slici 2.1 vidimo primjer krivulje Bassovog modela. Ova se krivulja u literaturi često naziva S-krivulja (*S-curve*) i sugerira da prodaja novog proizvoda u početku ubrzano raste do nekog trenutka kada počinje opadati te nakon toga bilježi konstantan pad.

2.2 Utjecaj difuzije i promocije na kupovinu: A-Bassov model

Pretpostavimo sada da je vjerojatnost da će se prva kupovina novog proizvoda dogoditi u trenutku t, uz pretpostavku da nije bilo prethodnih kupovina, jednaka *P(t)* u sljedećem obliku:

$$P(t) = \alpha + \beta \ln(A(t)) + \gamma N(t) \tag{2.11}$$

gdje je:

- α = opći, vremenski neovisni stupanj informacija o proizvodu prenesen na inovatore preko medija
- β = koeficijent utjecaja medijske promocije na inovatore
- γ = koeficijent imitacije, mjera informacija prenesena s inovatora na imitatore
- *A(t)* = troškovi promocije proizvoda u trenutku t
- *N(t)* = ukupan broj novih kupaca do trenutka t

Koristeći *P(t)* formuliramo jednadžbu kupovine. Ako je *N(t)* ukupan broj kupaca do trenutka t, kao i u O-Bassovom modelu tržišni potencijal je M, tada je ukupan broj preostalih potencijalnih kupaca *M-N(t)*. Množeći s *P(t)* dobijemo izraz za broj kupaca u trenutku t kao i u O-Bassovom modelu.

$$n(t) = \frac{dN(t)}{dt} = P(t)(M - N(t) \tag{2.12}$$

Kombiniranjem jednadžbi (2.11) i (2.12) dobijemo *n(t)*,

$$n(t) = \frac{dN(t)}{dt} = [\alpha + \beta\ ln(A(t)) + \gamma N(t)](M - N(t)) \tag{2.13}$$

Jednadžba (2.13) definira A-Bassov model (A dolazi od *Advertising*, u prijevodu promocija ili reklama). Stavimo li da je $\Lambda = \alpha + \beta \ln(A(t))$ i pretpostavimo da je Λ konstanta, tada je (2.13) zapravo O-Bassov model.

$$\begin{aligned} n(t) &= (\Lambda + \gamma N(t))(M - N(t)) \\ &= \Lambda M - \Lambda N(t) + \gamma M N(t) - \gamma N(t)^2 \\ &= \Lambda M + (\gamma M - \Lambda) N(t) + (-\gamma) N(t)^2 \end{aligned}$$

Autori članka navode da se za potrebe procjene regresijom pretpostavlja da je Λ konstanta. Važnost A-Bassovog modela je upravo u slučajevima kada Λ nije konstanta. Ovaj je model koristan za ispitivanje utjecaja promocije u različitim trenucima tijekom vremena (npr.

prateći uzorak definiran s *A(t)*. Kada promocija potakne inovatore da kupe određeni proizvod, oni postaju prenosioci informacije o tom proizvodu. Više prenositelja informacije od usta do usta u početku znači da i više potencijalnih kupaca dolazi do informacije, pa tako broj imitatora raste. No kako je tržišni potencijal konstanta, ukupan broj potencijalnih kupaca pada. Broj imitatora koje bi inovatori mogli "stvoriti" također opada. Također, zbog transformacije *A(t)* prirodnim logaritmom (2.13) dodatno ulaganje u promociju, na primjer jednog dolara, u nekim modelima znači ponekad manji utjecaj nego prethodno ulaganje, odnosno jedan dolar manje. Provoditelji istraživanja su ovaj model modificirali te i njega procijenili na različitim podacima iz tematskog parka. Taj model nazivaju AM-Bassov model (M dolazi od modificirani). U tom modelu pretpostavljaju da je $\alpha \equiv 0$ pa jednadžba koja definira model izgleda kao $n(t) = \frac{dN(t)}{dt} = [\beta ln(A(t)) + \gamma(M - N(t)](M - N(t))$. Detaljnije se može vidjeti u poglavlju 5.1.

Poglavlje 3

Procjena parametara modela

Primjena Bassovog modela zahtjeva izradu procjene. U svojoj literaturi Bernhardt i Mackenzie (vidi [5]) opisuju problematiku izrade procjena pri korištenju Bassovog modela. Dva kriterija za izražavanje pouzdanosti procjene modela koje koriste provoditelji ovog istraživanja su MAPE i MAD. Ta dva pokazatelja su najčešće korištena u predviđanjima ([18]).

Definicija 3.0.1. ***MAPE*** *(Mean absolute percentage error) ili srednja apsolutna postotna greška je statistička mjera ispravnosti predviđanja izražena u postocima, računa se kao:*

$$MAPE = \frac{\sum \frac{|O-P|}{O}}{n} \tag{3.1}$$

gdje su O=opažene vrijednosti, P=predviđene vrijednosti, n=broj opažanja.

Problem kod MAPE pokazatelja je u podacima koji u opaženim vrijednostima imaju 0 ili su jako blizu 0. Tada MAPE vrijednost ili ne može biti izračunata (0 je u nazivniku) ili je ta vrijednost jako velika, neprirodna.

Definicija 3.0.2. ***MAD*** *(Mean absoulte deviation) ili srednja apsolutna devijacija je statistička mjera ispravnosti predviđanja izražena u mjernim jedinicama, računa se kao:*

$$MAD = \frac{\sum |O-P|}{n} \tag{3.2}$$

Poslovne bi odluke trebale biti utemeljene na dovoljno malim marginama pogreške (npr. unutar 5 % procijenjene vrijednosti greške) pa je potrebna prikladno mala MAPE vrijednost. Ako se procjena puno razlikuje od predviđanja (npr. više od 8000) znači da model sistematski nije dobro prilagođen podacima ili je potrebno u model dodati neke varijable. Takve promjene pokazuje MAD vrijednost. Sistematske pogreške najčešće dolaze zbog loše prilagođenosti modela. Ako se pokaže neuspjeh u prilagodbi baš kod određenih podataka, razlog mogu biti unutarnji ili vanjski utjecaji koji uzrokuju anomalije. Tada je potrebno otkriti vanjske ili unutarnje utjecaje. Opažene vrijednosti u istraživanju koje je provedeno u članku su podaci koje su autori članka dobili iz tematskog parka, a predviđene su vrijednosti one koje su izračunali pomoću procijenjenih modela.

U članku se navodi da se za procjenu parametara modela koristila regresija. Regresijske nam tehnike omogućuju da kvantitativno izrazimo zavisnost među varijablama te dobiveni model koristimo za predviđanja koja su nam potrebna ([21]). To je matematički postupak za pronalazak krivulje koja prolazi kroz zadani skup točaka uz minimiziranje sume kvadrata odstupanja zadanih točaka i krivulje. Prisjetimo se regresijske analize kako bismo lakše pratili rezultate navedene u članku.

Linearna regresija, višestruka linearna regresija

Definicija 3.0.3. ***Zavisna varijabla*** *u regresijskom modelu predstavlja vrijednost pojave čije se varijacije objašnjavaju modelom.*

Definicija 3.0.4. ***Nezavisne varijable*** *su stvarne vrijednosti pojava kojima se objašnjavaju varijacije zavisne varijable.*

Kod jednostavne linearne regresije promatramo linearnu zavisnost jedne varijable (y) o jednoj nezavisnoj varijabli (x), gdje su $a, b \in R$

$$y = a + bx$$

Višestruka linearna regresija pokazuje zavisnost jedne varijable o više nezavisnih (x_i), $a_i \in R$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ...$$

Polinomna regresija pokazuje polinomnu zavisnost među varijablama. Ona se u rješavanju najčešće svodi na višestruku linearnu regresiju ako varijable promatramo kao zasebne i neovisne. To je slučaj kod naše regresije. Vrijedi $c_i \in R$,

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 ...$$

Sada ćemo se ukratko na našem primjeru prisjetiti postupka linearne regresije te definirati statističke pokazatelje koje su bili korišteni u članku za analizu procjene modela. Danas se regresijska analiza naravno provodi računalno koristeći statističke programe u kojima su implementirani svi testovi i pokazatelji.

Procjenjujemo koeficijente modela $n(t) = c_o + c_1 N(t) + c_2 N(t)^2$ iz (2.4). Zavisna varijabla u slučaju Bassovog modela je $n(t)$, a varijable $x_1 = N(t)$, $x_2 = N(t)^2$ razmatramo kao zasebne, neovisne varijable te provodimo višestruku linearnu regresiju. Prisjetimo se kako matrično izgleda sustav kojeg rješavamo:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_n. & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Vektor pogrešaka relacije ε izražava nepoznate komponente greške dodane na vezu, to je vektor slučajnih varijabli normalne razdiobe za koje pretpostavljamo da imaju očekivanje 0 i istu varijancu σ^2 i da je $E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0$, za sve $i, j \in N$, odnosno nisu korelirane.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Procjena je u ovom istraživanju napravljena dobro poznatom metodom najmanjih kvadrata. U rezultatima istraživanja opisan je odnos među varijablama, utvrđena statistička ovisnost te su navedeni pokazatelji jakosti te ovisnosti. Koriste se metode regresijske i korelacijske analize. Zadaća regresijske analize je pronaći analitičko-matematički oblik veze između zavisne i nezavisnih varijabli. Procijenjeni model označavamo s $\hat{y} = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 x + \hat{c}_2 x^2$.
Jednadžbu *ST=SP+SR* zovemo jednadžbom analize varijance, komponente su:

SP, odstupanje protumačeno modelom, suma kvadrata odstupanja regresijskih vrijednosti od prosjeka.

$$SP = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \tag{3.5}$$

ST, ukupno odstupanje, zbroj kvadrata odstupanja varijable y od prosjeka.

$$ST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \tag{3.6}$$

SR, neprotumačeno odstupanje, odnosno rezidualno odstupanje.

$$SR = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{3.7}$$

Pokazatelji koje koristimo u interpretaciji procjene modela su sljedeći:

Definicija 3.0.5. ***Procijenjena varijanca regresije*** *je rezidualna suma podijeljena s n-k, gdje je k broj stupnjeva slobode protumačeno modelom, n duljina uzorka.*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k} \tag{3.8}$$

Definicija 3.0.6. ***Procijenjena standardna devijacija*** *regresije je apsolutni pokazatelj reprezentativnosti regresijskog modela, a pokazuje prosječni stupanj varijacije stvarnih vrijednosti ovisne varijable u odnosu na očekivane regresijske vrijednosti,*

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k}} \tag{3.9}$$

Definicija 3.0.7. ***Koeficijent determinacije*** *(R^2) predstavlja omjer protumačenih i ukupnih odstupanja, računa se kao*

$$R^2 = \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{ST}} \tag{3.10}$$

Visina koeficijenta determinacije R^2 govori o reprezentativnosti modela, model je reprezentativniji što je R^2 bliže 1:

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

R^2 statistika pokazuje koliko je dobro slaganje između vrijednosti izračunatih modelom i izmjerenih vrijednosti, ali nam daje tek djelomične informacije o uspješnosti regresije u smislu objašnjavanja korelacije između zavisne i nezavisne varijable.

Regresijom pokazujemo statistički odnos među pojavama, korelacijom pokazujemo uzajamnu ovisnost, povezanost varijabli. Korelacija po smjeru može biti negativna i pozitivna. Pozitivna korelacija je prisutna kada rast jedne varijable prati rast druge, odnosno pad jedne prati pad druge varijable. Negativna korelacija je prisutna kada rast jedne varijable prati pad druge.

Važno sredstvo u regresijskoj analizi je korelacijska matrica, koja pruža uvid u linearnu povezanost varijabli. Ta matrica sadrži koeficijente linearne korelacije između svih parova varijabli uključenih u regresijski model.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & . & . & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & . & . & r_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ r_{k1} & r_{k2} & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica R prikazuje povezanost između k podataka u uzorku, gdje je r_{ij} uzorački koeficijent korelacije,

$$r_{ij} = \frac{S_{x_i x_j}}{\sqrt{S_{x_i} S_{x_j}}} = r_{ji} \tag{3.11}$$

a S_{xy} i S_x su uzoračka kovarijanca i uzoračka varijanca za svaki par varijabli x, y i svaku varijablu x, te se računaju kao

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{3.12}$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{3.13}$$

Za koeficijente korelacije vrijedi

$$-1 \leq r_{ij} \leq 1$$

Ako je r_{ij}=0 tada kažemo da su varijable x_i i x_j nekorelirane, odnosno nepovezane.

Često se koriste statistički testovi i hipoteze kako bi se izrazio *goodness of fit* (npr. F-test koji koriste autori članka). Goodness of fit ("dobrota pristajanja") znači koliko uspješno model opisuje zavisnost (korelaciju) između zavisne i nezavisne/ih varijable/a.

F-test

Za naš model, vrijednost k iz (3.0.5) iznosi 3. Uz pretpostavke regresijskih modela (vidi [2]) vrijedi:

$$F = \frac{\frac{SP}{k-1}}{\frac{SR}{n-k}} \tag{3.14}$$

ima Fisherovu distribuciju *F(k-1,n-3)*. Test veličina 3.14 koristi se za testiranje pretpostavke o parametrima

$$H_0 : c_1 = c_2 = 0$$
$$H_1 : \exists c_i \neq 0$$

Uz zadanu razinu značajnosti α, hipoteza H_0 se odbacuje ako je empirijski omjer F veći od $F^{\alpha}_{(2;n-3)}$ ili ako je *p-vrijednost* veća od zadane razine značajnosti. Više se može pročitati ovdje [9].

Durbin-Watson test

Jedan od uvjeta koji mora biti zadovoljen kod modela višestruke linearne regresije je da su greške relacije međusobno nekorelirane ([2]). Ako postoji zavisnost, javlja se autokorelacija. Durbin-Watsonovim testom provjeravamo postoji li problem autokorelacije prvog reda. Ako su greške relacije autokorelirane onda za komponente vektora ε iz 3.4 vrijedi

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \tag{3.15}$$

Empirijska test veličina za Durbin-Watson test je

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} (\hat{\varepsilon}_t)^2}$$

Ispitujemo hipotezu

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

Raspisivanjem se može primjetiti da je DW $\approx$ 2(1-ρ) [3], pa ako je $\rho \approx 0$ tada je DW $\approx$ 2.

Standardne pogreške, t-statistika

Pod pretpostavkom da je naša regresija točna, procjene koeficijenata su nepristrane i njihove standardne pogreške su normalno distribuirane. Da bismo dobili standardnu pogrešku svakog koeficijenta podijelimo standardnu pogrešku modela $\hat{\sigma}$ s uzoračkom devijacijom varijable uz taj koeficijent. Dakle za koeficijent c_i standardna je pogreška definirana s

$$\hat{\sigma}_{c_i} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{i_j} - \bar{x}_i)^2}} \tag{3.16}$$

T-testom testiramo statističke značajnosti regresijskih parametara. Testna statistika za svaki parametar c_i čiju značajnost ispitujemo je t,

$$t = \frac{\hat{c}_i}{\hat{\sigma}_{c_i}} \tag{3.17}$$

koja ima studentovu distribuciju $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k)$), gdje je k isti kao i u F-testu ranije definiranom (3). Testiranje hipoteza o parametrima moguće je provesti pomoću dvosmjernog ili pomoću jednosmjernih testova. Testna veličina je uvijek ista. U članku je korišten dvosmjerni test,

$$H_0 : c_i = 0$$
$$H_1 : c_i \neq 0$$

Hipotezu H_0 odbacujemo u jednoj od sljedeće 2 situacije:

- $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k) \Leftrightarrow |\hat{c}_i| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k)\hat{\sigma}_{c_i}$

- $p - vrijednost < \alpha$, gdje je $p - vrijednost = 2 * P(t > t_{emp})$.

Ako testovi pokažu da podaci nisu u skladu s odabranim modelom, model je neprihvatljiv i treba ga zamijeniti novim modelom.

Nelinearna regresija

Često se nelinearna zavisnost među varijablama može matematičkim operacijama prevesti u linearnu zavisnost. Međutim, postoji i nelinearna regresija [21]. Prilikom korištenja metode najmanjih kvadrata kod linearne regresije javljali su se samo linearni oblici parametara c_i. Kod nelinearne regresije, prilikom korištenja metode najmanjih kvadrata javljaju se nelinearni oblici parametara c_i (npr. c_i^2, e^{c_i} i slično). Dobije se skup jednadžbi koje nemaju jedinstveno rješenje. Za rješavanje takvih sustava potrebno je napraviti početne procjene parametara te ih zatim iteracijskim postupkom poboljšati. Koristi se neka od numeričkih metoda kako bi se iteracijskim postupkom odredili parametri c_i. Pritom je važno imati čim bolju početnu procjenu parametara i adekvatan iteracijski kriterij. Problemi koji nastupaju su postojanje više rješenja, problemi konvergencije i tome slično. U većini slučajeva se nelinearne zavisnosti nastoje linearizirati te provesti linearna regresija. U članku se nelinearna regresija provodi u SAS-u (*Statistical Analysis Software*, [15]). Izlaz procjene su i svi pokazatelji kvalitete procjene te realizacije testnih statistika. Autori u članku navode te rezultate.

Poglavlje 4

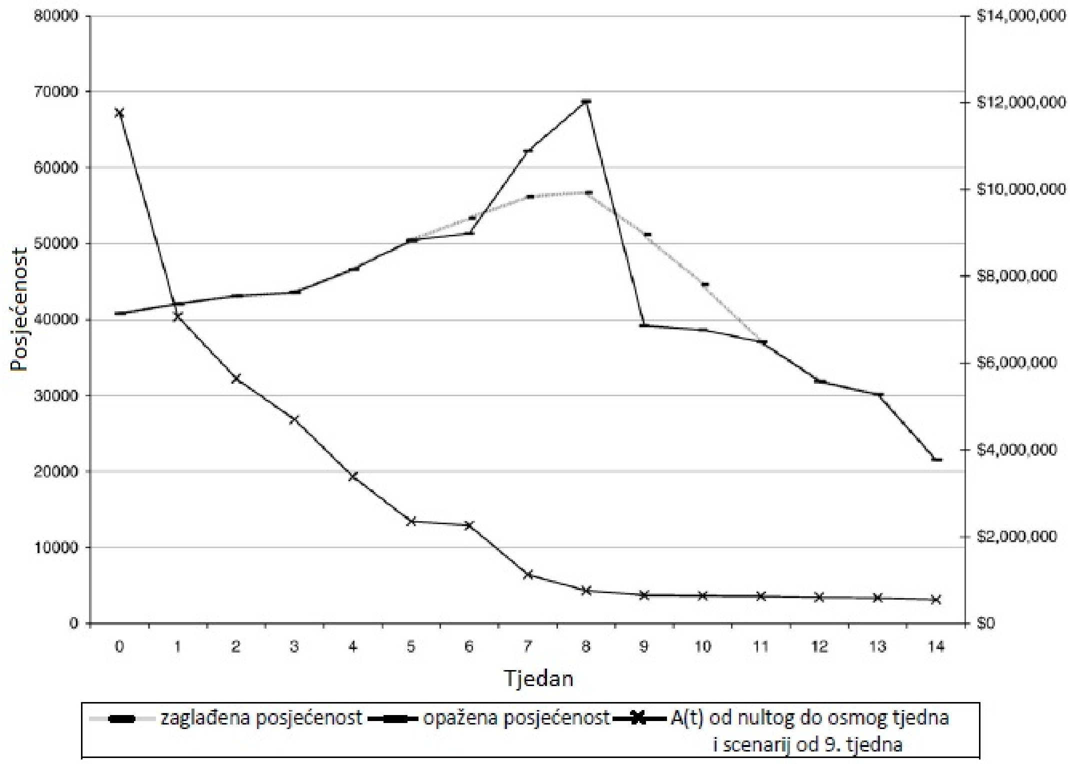
Podaci za istraživanje i strategija

Podaci

Podaci koji se koristi u istraživanju pri procjeni modela su ukupna posjećenost i troškovi promocije za festival kave u tematskom parku na Tajvanu. Autori članka su samo opisali različite serije podataka koje su koristili pa se u ovom radu navode njihova objašnjenja. Posjećenost predstavljaju tjedni podaci za 20 festivalskih tjedana. Broj posjećenosti se odnosi na broj plaćenih ulaznica za odrasle osobe.

Vrijeme održavanja festivala se poklopilo s Kineskom novom godinom (CNY, *Chinese New Year*) pa se visoka posjećenost u jednom trenutku pripisuje tom vanjskom utjecaju. Autori članka su stoga modificirali podatke zaglađivanjem ekstrema oko perioda Kineske nove godine. Time su htjeli omogućiti ispitavanje osjetljivosti procjene i za taj period. Tako modificirane podatke nazivaju "CNY fix" podaci. Prikaz prikupljenih podatka i troškova promocije se može vidjeti na grafu 4.1. Autorima su informacije iz ugovora o promoviranju, koje su dobili od uprave parka, omogućile kreiranje serije promotivnih troškova koju označavamo s *A(t)*. Od nultog do devetog tjedna se bilježeni troškovi promocije vežu uz svaki pojedini tjedan. Autori navode postojanje nejasnoća u alokaciji novca za promidžbu od devetog do četrnaestog tjedna. Stoga koriste i procjenjuju tri serije troškovnih podataka kojima su obuhvatili moguće razlike za te tjedne. Te tri serije označavaju s "Std 1", "Std 2" i "Std 3".

Tjedne promidžbene procjene nisu napravljene za zadnjih 5 festivalskih tjedana. Bitno promoviranje festivala počelo je 7 tjedana prije početka festivala (tzv. prerelease advertising). U članku se navodi da su računovodstvene evidencije dale grubu procjenu troškova promidžbe prije početka samog festivala. Prijevremene rezervacije i prodaja karata nisu bili mogući pa ne postoje podaci o kupovini za period prije početka festivala. Uzmimo za primjer i odluke o putovanjima, one se također uglavnom donose unaprijed iz mnogo razloga (odsutnost s posla, koordinacija s ostalim putnicima te drugi razlozi). Rezervacije također ne bi puno pomogle u saznanju kada se kupac baš odlučio za kupovinu. Uostalom, kada



Slika 4.1: Podaci posjećenosti tematskog parka i troškovi promocije. Zaglađena krivulja predstavlja posjećenost "ispravljanjem" anomalija u podacima uzrokovanih Kineskom novom godinom. Podaci su proporcionalni stvarnim mjerenjima kako bi se sačuvala povjerljivost.

opskrba (broj karata za festival) nije ograničena, rezervacije nam nisu ni potrebne. Kako je ovo istraživanje provedeno na dobivenim podacima o posjećenosti, nije bilo moguće ispitati ljude kada su donijeli odluku da će posjetiti *festival kave*. Autori navode da su u suradnji s upravom parka napravljene dvije hipotetske serije promotivnih troškova *A(t)* za period 7 tjedana prije početka festivala. Navode da se serije temelje na preraspodjeli troškova unaprijed, koju su napravili u dogovoru s upravom parka. Provoditelji su istraživanja pretpostavili da ljudi donose odluke o kupovini prije dostupnosti proizvoda (početka festivala). Modeli su procijenjeni za hipotetske serije podataka. Te serije podataka zovemo "Pre 1" i "Pre 2". U članku se pretpostavlja da je svaka kupljena ulaznica za odrasle osobe rezultat svojevoljne odluke.

Strategija istraživanja

Strategija istraživanja je postavljanje hipoteza koje se prihvaćaju ili odbijaju, sukladno s pokazateljima koje smo ranije definirali u poglavlju 3. Prvo što treba provjeriti je pruža li O-Bassov model statistički prihvatljivo objašnjenje za podatke s festivala kave. Prva hipoteza koju se ispituje je:

H_1: O-Bassov model objašnjava pitanje prve kupovine tijekom odvijanja inovativnog festivala u tematskom parku

Rezultati regresije, kao što je statistički značajna F-vrijednost i značajni parametri, mogu podržati dobru prilagođenost modela podacima. Nažalost, model još uvijek može biti nedovoljno dobar za korištenje u poslovnom planiranju i upravljanju destinacijom. Na primjer, nije dobro kada se predviđene vrijednosti razlikuju relativno mnogo od opaženih (npr. 20 %). Nužno je uspoređivanje predviđanja modela s opažanjima. Druga hipoteza je:

H_2 : procjene utemeljene na O-Bassovom modelu su dovoljno pouzdane za korištenje u analizama pomoću kojih se donose poslovne odluke

O-Bassov model ne uključuje utjecaj promidžbenog budžeta na kupovinu pa nema korisnih i potrebnih informacija o utjecaju promocije. Procjenjivanje A-Bassovog modela pomaže odrediti utjecaj promoviranja. Hipoteza H_3 je:

H_3 : A-Bassov model objašnjava posjećenost festivala kave

Provodeći istraživanje pojavili su se problemi u procjenjivanju A-Bassovog modela. Provoditelji su odlučili napraviti neke modifikacije modela pa su sukladno s time definirali hipotezu H_4:

H_4 : A-Bassov model se može modificirati kako bismo dobili razumno objašnjenje promatranog ponašanja

Modificirani A-Bassov model može pokazivati dobru statističku prilagođenost podacima. Međutim, prilagođenost može biti nedovoljno dobra za praktičnu primjenu. Stoga je definirana i hipoteza H_5:

H_5 : modificirana verzija A-Bassovog modela je dovoljno dobro prilagođena podacima i opravdava korištenje modela u planiranju i upravljanju

Poglavlje 5

Rezultati istraživanja

Rezultati istraživanja se objašnjavaju za svaku hipotezu postavljenu u poglavlju 4. Nakon toga su napravljene procjene za dodatne serije podataka i detaljnije prokomentirani dobiveni rezultati istraživanja.

5.1 Hipoteze

Hipoteza H_1

U tablici 5.1 su prikazani podaci procjene za O-Bassov model. Procjena se provodi metodom običnih najmanjih kvadrata. Rezultati procjene i formule za procjenu koeficijenata modela iz koeficijenata regresije su prikazani u tablici. Koeficijenti linearne regresije su statistički značajni.

$$|c_0| = 28459 > 5.5 * 5093 = 28011.5$$
$$|c_1| = 0.1732 > 5.5 * 0.003 = 0.0165$$
$$|c_2| = 2.7 * 10^{-7} > 7.2 * 3.7 * 10^{-8} = 2.664 * 10^{-7}$$

Više se može pročitati u poglavlju 3 gdje se prisjećamo t-testa. Nalazimo se u prvoj situaciji kada je $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}(n-k)}$. Iznad su izračunate te nejednakosti. Durbin-Watson statistika pokazuje nisku vjerojatnost autokorelacije, iznosi $DW = 1.96$. Konačno, velika vrijednost koeficijenta determinacije ($R^2 = 0.848$) indicira da O-Bassov model 84.8 % objašnjava podatke, što je vrlo visoka prilagođenost. Procjene parametara modela nelinearnom regresijom (NLIN u SAS-u) su konzistentne s procjenama linearne regresije. Ove procjene i njihove standardne pogreške prikazane su u tablici 5.1.

⇒ Prilagodba podataka bazirana na kvaliteti testova prilagodbe i značajnim parametrima opravdava prihvaćanje hipoteze H_1.

Model (procjene utemeljene na linearnoj regresiji)	Koeficijenti	Procjena	Standardne pogreške	t (a)	Procjene nelinearnom regresijom (b)
O-Bassov model ($F_{2,17}$=54) p<0.0001 DW=1.96 (c) R^2=0.848	c_0	28459	5093	5.5	
	c_1	0.16237	0.003	5.5	
	c_2	-2.7E-7	3.70E-08	-7.2	
	M (d)	765556	15.846 (b)		766326
	p=c_2/M	0.037	0.0064 (b)		0.037
	q=-Mc_0	0.204	0.025 (b)		0.204

(a) t-vrijednost, koeficijenti regresije imaju vjerojatnost od 0.0001 da su 0
(b) standardna pogreška iz nelinearne regresije (SAS), stupnjevi slobode od F su 2 i 17
(c) Durbin-Watson statistika, nema autokorelacije
(d) M=$\frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1{}^2 - 4c_0c_2}}{2c_0}$

Tablica 5.1: Koeficijenti regresije i izvedeni koeficijenti modela za O-Bassov model

Model	MAPE (%)	MAD	Proporcija inovatora
O-Bassov model	12	4260	0.33
AM-Bassov model („9 tjedana")	15	8307	0.72
AM-Bassov model (prosjek „Std serija" iz tablice 5.4)	9.7	4635	0.41
AM-Bassov model (prosjek „Pre serija" podataka)	12.1	3545	0.097
AM-Bassov model za „CNY fix" podatke	6.6	2800	0.42

Tablica 5.2: MAPE i MAD vrijednosti O-Bassovog i AM-Bassovih modela

Hipoteza H_2

U tablici 5.2 su prikazane MAPE (12 %) i MAD (4260) vrijednosti za procjenu O-Bassovog modela. Autori članka navode da se na krivulji posjećenosti pojavljuje rezidual od približno 19 uzrokovan Kineskom novom godinom (graf 4.1, tjedan osam). Zbog tog je reziduala MAD vrijednost veća za otprilike 1000 (je što povećanje od oko 30 %). Rezidual ima ograničeni utjecaj na MAPE vrijednost jer je broj podataka dosta mali i ta vrijednost nije pouzdana. Uprava tematskog parka smatra modele za njihove potrebe korisnima sve dok je $MAD < 5000$ i $MAPE \leq 10\%$. Oni pružaju podršku prihvaćanju hipoteze H_2.

Hipoteza H_3

A-Bassovog modela uključuje i podatke o troškovima promocije. Procjena je modela opisanog jednadžbom (2.13) napravljena korištenjem nelinearne procedure (NLIN) u SAS-

Približne matrice korelacije za A-Bassov i AM-Bassov model					
Matrica	-	M	α	β	γ
A-Bass	M	1.00	-0.63	0.68	0.41
	α	-0.63	1.00	-0.99	-0.92
	β	0.68	-0.99	1.00	0.88
	γ	0.41	-0.92	0.33	1.00
AM-Bass	M	1.00		0.33	-0.29
	β	0.33		1.00	-0.49
	γ	-0.29		-0.49	1.00

Tablica 5.3: Približne matrice korelacije za A-Bassov i AM-Bassov model

u. Korišteni podaci su posjećenost i tri serije podatkovnih troškova koje smo spomenuli u poglavlju 4. Te podatke nazivamo "Std serije" podataka. Rezultati procjene serija su razočaravajući. Autori navode da je opsežno mrežno pretraživanje (*Extensive grid searching*, SAS ([15]) za male vrijednosti, koje bi mogle biti valjane procjene, dalo 0. Regresija izbacuje neprikladne negativne vrijednosti za α, β ili γ. Izlaz procjene uključuje i matricu korelacije koja se može vidjeti na slici 5.3. Korelacije između α, β i γ pokazuju čvrstu vezu između α i β (r=-0.99), α i γ (r=-0.92) te između β i γ (r=0.88). Multikolinearnost nam sugerira da procjena nije smislena. Želi se izbjeći međusobni utjecaj jedne nezavisne varijable na drugu. Iz tog razloga hipoteza H_3 nije podržana.

Iako hipoteza H_3 nije podržana autori ne odbacuju verziju modela koja uključuje utjecaj promocije, model koju predlažu Horsky i Simon (vidi [8]). Problem su multikolinearnosti riješili tako da su jednadžbu (2.11) proizvoljno zamijenili jednadžbom (5.1) u kojoj se α ne pojavljuje.

$$P(t) = \beta ln(A(t)) + \gamma N(t) \tag{5.1}$$

Jednadžba (5.1) je specijalan slučaj kada je $\alpha \equiv 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. $P(t) > 0$ i uz tu modifikaciju. Jednadžba modela koju procjenjuju u istraživanju je (5.2). Takav model nazivaju modificirani A-Bassov model (AM-Bassov model) kojeg smo ranije spominjali.

$$n(t) = \frac{dN(t)}{dt} = (\beta ln(A(t)) + \gamma(M - N(t)))(M - N(t)) \tag{5.2}$$

Hipoteza H_4

Sada su napravili procjenu AM-Bassovog modela za "Std serije" podataka. U tablici 5.4 se mogu vidjeti procjene parametara. Standardne su devijacije za M, β, γ redom $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$. Dobivene su kao izlaz nelinearne regresije. Te procjene paramatara su prilično pouzdane.

Procjene parametara A_M-Bassovog modela								
Klasa podataka (a)	F (sve vjerojat. <0.0001)	Stupnjevi slobode od F (b)	Procjene parametara			Standardne pogreške parametara		
			M	β	γ	M	β	γ
9 tjedana	48	3,6	2618207	0.00083	2.70E-08	2.87E7	0.00892	4.0E-07
„Std 1"	208	3,12	728646	0.00298	2.83E-07	31912	0.00036	5.2E-08
„Std 2"	207	3,12	731082	0.00297	2.83E-07	33065	0.00035	5.3E-08
„Std 3"	206	3,12	729259	0.00297	2.84E-07	32401	0.00036	5.3E-08
„CNY fix"	765	3,12	747034	0.00293	2.64E-07	19247	0.00018	2.7E-08
„Pre 1"	340	3,19	713614	0.00046	4.33E-07	14298	0.00020	3.2E-08
„Pre 2"	337	3,19	712808	0.00042	3.37E-07	14147	0.00018	3.2E-08
(a) Serije podataka su opisane u tekstu								

Tablica 5.4: Procjene parametara AM-Bassovog modela

Da dobra prilagođenost modela podacima nije slučajnost, potvrđuje i vrijednost F-testa koja prelazi 200 ($p < 0.0001$). Stupnjevi slobode [1] za taj test su navedeni u tablici. Ova saznanja podržavaju prihvaćanje hipoteze H_4, odnosno modifikacije A-Bassovog modela.

Hipoteza H_5

Potencijalnu korist modela u praktičnoj primjeni izražavaju MAPE i MAD vrijednosti. Procjena "Std serija" podataka dala je MAPE vrijednost od 9.7% (prosjek za te tri serije, vidi 5.2). Ovaj rezultat je bolji nego MAPE vrijednost od 12 % dobivena procjenom O-Bassovog modela, iako se tamo tolika MAPE vrijednost pripisivala malom broju podataka. U O-Bassovom modelu je relativno velika MAD vrijednost bila uzrokovana atipičnom posjećenošću povodom Kineske nove godine. Stoga je AM-Bassov model procijenjen i za "CNY fix" podatke (vidi 4). Procjene parametara za ove podatke razlikuju se jako malo od procjena za "Std serije" podataka. No standardne pogreške su za "CNY fix" podatke zato puno manje (skoro upola manja za M te $\frac{2}{3}$ manje za β i γ, tablica 5.4). MAPE i MAD vrijednosti su također manje. Ovo sugerira da procjene parametara nisu osjetljive na anomalije, ali prisutnost anomalija utječe na pouzdanost prilagodbe, mjereno s MAPE i MAD vrijednostima. Na temelju dobivenih rezultata uprava tematskog parka i provoditelji istraživanja smatrali su da je model dovoljno dobar za korištenje. Stoga se hipoteza H_5 prihvaća.

[1] Mentorica rada smatra da bi prvi stupanj slobode trebao biti 2, jer je broj procijenjenih parametara 3. Brojevi stupnjeva slobode u F-testu su 3-1=2 i n-3, gdje je n ukupan broj podataka

5.2 Istraživanje nakon hipoteza

Autori nisu završili istraživanje prihvaćanjem hipoteze H_5. Procjena AM-Bassovog modela provedena je i na najpouzdanijim podacima. To su nekorigirani podaci dobiveni od uprave parka (npr. podaci posjećenosti i troškova promocije od nultog do devetog tjedna). Rezultati procjene mogu se vidjeti u tablicama 5.4 i 5.2 pod nazivom ”9 tjedana”. Vrijednost F-testa je visoka ($F = 48$, $p < 0.0001$). MAPE vrijednost iznosi 15 % a MAD iznosi 8307. Standardne pogreške procijenjenih parametara su veće nego same vrijednosti parametara. Činjenica je da je količina korištenih podataka manja i svakako je potrebno više opažanja kako bi vrijednosti parametara modela mogle biti određene s malom varijabilnošću. Zaključak autora članka je da mjerenje prilagođenosti modela samo s F-vrijednosti te MAPE i MAD vrijednostima nije dovoljno. Da bi se model koristio s pouzdanošću, parametri modela moraju imati ograničenu varijabilnost.

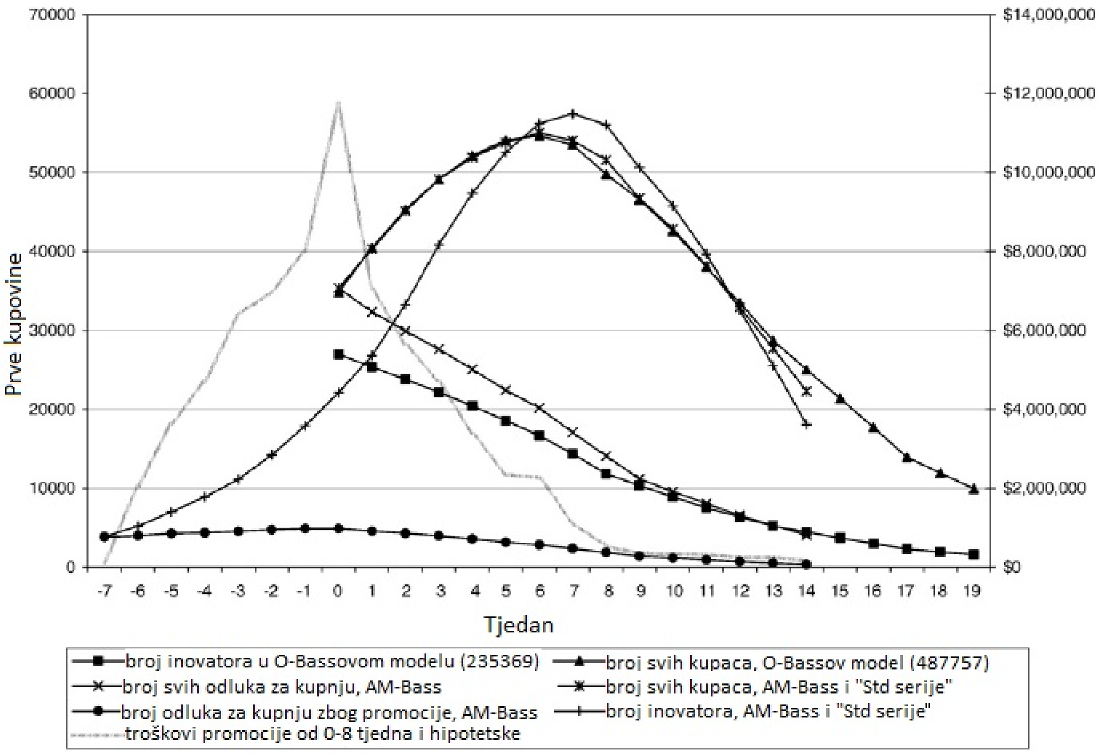
Bitna komponenta, koju također treba uzeti u obzir, je promoviranje prije početka festivala. Promoviranje festivala počelo je sedam tjedana prije njegovog početka. Model je procijenjen za hipotetske serije podataka opisane u poglavlju 4. Te podatke i rezultate procjene zovemo ”Pre 1” i ”Pre 2”. Tablica 5.4 pokazuje velike F-vrijednosti (čak iznad 300). Standardne pogreške parametara M i γ su manje. β je dva puta veći od svoje standardne pogreške, ali sama vrijednost parametra β je mala, približno $\frac{1}{6}$ vrijednosti istog parametra kod procjena modela za ”Std serije” podataka i ”CNY fix” podatke. Struktura modela se dosta promijenila. Umjesto 35 % inovatora nakon tjedna 15, rezultati pokazuju samo oko 10 %[2].

Kada se u obzir uzme promocija prije početka festivala, hipoteze H_1 i H_4 treba interpretirati s oprezom. O-Bassov i A-Bassov model su bili dobro prilagođeni podacima iako nije bilo uključeno promoviranje prije početka festivala. Stoga, modeli koji su dobro prilagođeni podacima svejedno mogu biti loša aproksimacija stvarnosti.

5.3 Diskusija rezultata

Temelj ovog istraživanja je održavanje inovativnog događaja (*festivala kave*) kako bi se privukli redoviti posjetitelji na destinaciju njegovog održavanja (u našem slučaju tematski park). Interes uprave tematskog parka je poboljšanje dugoročne posjećenosti tematskog parka. Na promociju nekog događaja može biti potrošena velika svota novca pa je jedna od ključnih stvari u efektivnom upravljanu razumijeti ponašanje dugoročnih potrošača. Razumijevanje dinamike posjećenosti događaja je korak prema razumijevanju dinamike dugoročne posjećenosti. Autori članka uočavaju probleme korištenja modela koji utjelovljuju

[2]Omjer sume broja inovatora do petnaestog tjedna $\sum_{i=1}^{15} p(M - N(i))$ i ukupnog broja kupaca *N(15)*



Slika 5.1: Procjene AM-Bassovih modela s troškovima promocije kao drugom ordinatom

Bassov model. Na primjer, O-Bassov model i AM-Bassov model su oba bili prihvaćeni iako se AM-Bassov ne reducira do O-Bassovog modela (Λ iz (2.13) nije konstanta).

Tržišni potencijal i relativan broj inovatora

Unatoč razlikama u strukturi O-Bassovog i AM-Bassovog modela dobivamo slične tržišne potencijale i razvoj broja inovatora i imitatora. Razlike se primjećuju kada se modelira s hipotetskim podacima ("Pre" serije). Procjene vrijednosti parametara M su:

- za "Std serije" podataka: $M \approx 730000$
- za "CNY fix" podatke: $M \approx 750000$
- u O-Bassovom modelu: $M \approx 766000$

Razlike nisu značajne jer se standardne pogreške u procjenama M malo razlikuju (vidi 5.1 i 5.4). Na grafu 5.1 se može vidjeti kako se posjećenost za O-Bassov model mijenja kroz vrijeme. Za $M = 765556$ u prvom tjednu kupuje oko 27000 inovatora i 8000 imitatora (tako su izračunali autori članka, otprilike možemo prepoznati tu razliku na grafu). Broj inovatora vremenom konstantno opada. Do tjedna 9 broj inovatora se smanjio na otprilike 10000 dok se broj imitatora povećava. Od 6. tjedna populacija potencijalnih prvih kupaca se smanjuje. Kada broj ukupnih kupovina u tjednu počne opadati, broj kupovina imitatora i dalje može rasti (razlika između krivulje inovatora i ukupnih kupovina).

AM-Bassov model u početku nema imitatora. Za "Std serije" podataka i "CNY fix" podatke krivulje AM-Bassovog modela brzo postaju slične krivuljama O-Bassovog modela. Takav tijek krivulja sugerira da plaćanje promocije nije isplativo nakon 6. ili 7. tjedna! Izračunate vrijednosti pokazuju da su proporcije inovatora između 30 % i 45 % (osim za "Pre serije"). Autori zaključuju da plaćanje promocije stječe manjinu inovatora.

Za upravitelje tematskog parka je bitno dobivanje sličnih vrijednosti za M, sličnih krivulja i proporcija inovatora. Konzistencija je bitan rezultat. Sveukupno su dobivene prihvatljive procjene tržišnog potencijala i korisne informacije za alokaciju promotivnog budžeta.

Nedostaci i potrebe istraživanja

Iako su upravitelji parka zadovoljni s nekim rezultatima ovog istraživanja, postoje pitanja o kojima treba raspraviti. Procjena nije baš dobro funkcionirala za pouzdane podatke iz prvih devet tjedana. Više podataka očigledno vodi pouzdanijim procjenama, ali nekonzistentnim modelima. Autori navode da prihvaćanje i O-Bassovog i AM-Bassovog modela nije logično jer $\Lambda = \beta ln(A(t))$ nije konstanta. Sugeriraju da bi razumna opcija bila procjena polinoma od *A(t)*, kako bi se odredila najbolje prilagođena funkcija. Problem s procjenom polinoma je u često velikoj varijabilnosti podataka.

U svakom slučaju, fokusiranje na troškove *A(t)* samo za $t \geq 0$ bi bilo ignoriranje utjecaja promocije koja se događa prije početka događaja i njenih često velikih troškova. Ako je simuliranje s "Pre serijama" podataka realno, tada O-Bassov i AM-Bassov model daju iskrivljenu sliku kupovnog ponašanja. Autori naglašavaju da rezultati ovog istraživanja nisu toliko sigurni kao što sugeriraju F-vrijednosti i dobra prilagođenost modela.

Rezultati ovog istraživanja demonstriraju probleme s procjenom ali i s korištenjem modela koji ne opisuju nužno važne aspekte potrošačkog ponašanja. Nije logično pretpostaviti da promocija utječe samo na inovatore. Imitator može čuti/vidjeti reklamu ali reagirati pozitivno samo na poticaj inovatora.

Festival kave je potaknuo bolju generalnu posjećenost tematskog parka. To je motiviralo upravu da održi još tri festivala, svaki je imao drugačiju temu. Ostali festivali nisu bili "inovativni proizvodi" pa su narušeni uvjeti koji moraju biti zadovoljeni da bi se primijenio Bassov model (vidi 2.1). Ono što je poželjno od istraživanja je shvaćanje kako posjećivanjem vremenski ograničenog događaja na nekoj destinaciji, destinacija za posjetitelja postaje dio *evociranog* skupa. Na primjer, poželjne su vjerojatnosti koje su pokazatelj kako posjećivanje tog događaja utječe na buduće posjećivanje destinacije.

Tematski park je bio dobra lokacija za prikupljanje podataka o utjecaju novog događaja ograničenog trajanja. Svejedno je bilo potrebno simulirati neke podatke te smo pretpostavili da su svi posjetitelji svojevoljno došli. Kako bi se olakšalo praćenje broja posjetitelja kroz vrijeme, jedna od mogućnosti je djeljenje nekih kupona za popust. Također, dolaskom u park mogla bi im biti postavljena neka pitanja pomoću kojih bismo dobili informacije potrebne za raumijevanje njihovog ponašanja. Rasprava s upravom o navedenim prijedlozima završila je fokusiranjem na gubicima i dobicima od usporavanja rada, davanja popusta i potencijalnog nerviranja posjetitelja. Već smo spomenuli da uprava parka smatra da je dosadašnje istraživanje Bassovog modeliranja korisno, ali također se slažu da su potrebni bolji modeli prije konkretnog prikupljanja bilo kakvih podataka. Da bi nastavili istraživanje, uprava parka želi profinjenije modele kako istraživanje nebi postalo teret niti za njihov park niti za posjetitelje. Ovo istraživanje dalo je očiti dokaz da prihvaćanje određenih hipoteza i statistička prilagođenost ne osiguravaju da će model dobro i kvalitetno aproksimirati stvarnost. Provoditelji istraživanja i uprava parka su se složili da je zbog svih nesigurnosti na koje su naišli potrebno poboljšati istraživanje .

Poglavlje 6

Zaključak

Planiranje i upravljanje u turizmu korištenjem modela koji utjelovljuju Bassov model je korisno. Iz pozitivne perspektive, ovo istraživanje promiće izgradnju teorije i metodološke inovacije. Da bi izgradnja teorije bila efektivna, potrebno je više od prihvaćnja postavljenih hipoteza.

U ovom je radu ilustrirano da oslanjanje na kriterije, kao što su MAPE, MAD vrijednosti i F-test, može potaknuti prihvaćanje hipoteza koje logički nisu konzistentne. Također, pronađena je pogreška u načinu računanja F-vrijednosti. Možda su autori slučajno napisali krivi broj stupnjeva slobode, a računali ispravno.

Nekoliko verzija Bassovog modela imalo je drugačiju strukturu, a izražavalo dobru prilagođenost podacima. Pokazuje se da promocija festivala prije njegovog početka ima velik utjecaj na kasniji razvoj posjećenosti. A-Bassov model je modificiran proizvoljnim uvođenjem pretpostavke da je $\alpha \equiv 0$. Uvođenje takve pretpostavke bez ikakve interpretacije ne daje sigurnost u model. Također, podaci na kojima se provodila procjena modela nisu bili najpouzdaniji.

Na kraju, prihvaćanje modela koji je najbolji među alternativama nije uvijek najbolje rješenje. Za razvoj teorije i praktičnu primjenu bitno je da model bude dobra aproksimacija stvarnosti. Uprava parka je također zaključila da modeli za njih mogu biti korisni, ali su ipak nedovoljno precizni i konzistentni za donošenje bitnih poslovnih odluka. Dobra prilagođenost je bitna, ali za turističku su primjenu potrebni alternativni modeli i nove formulacije istraživanja kako bismo bolje opisivali stvarnost.

Bibliografija

[1] E. Aguiló, A. Riera i J. Rosselló, *The short-term price effect of a tourist tax through a dynamic demand model: the case of the Balearic Islands*, 2005.

[2] Vesna Bahovec, *Model višestruke linearne regresije*, posjećeno u listopadu 2015. godine, `http://web.efzg.hr/dok/sta/vbahovec//10-PREDAVANJE_Model%20vi%C5%A1estruke%20linearne%20regresije%20STAT%206.pdf`.

[3] ———, *Problem autokorelacije grešaka relacije u regresijskom modelu*, posjećeno u listopadu 2015. godine, `http://web.efzg.hr/dok/sta/vbahovec//Problem%20autokorelacije%20gre%C5%A1aka%20relacije%20u%20regresijskom%20modelu.pdf`.

[4] F. M. Bass, *A new product growth for model consumer durables*, 1969.

[5] I. Bernhardt i K. M. Mackenzie, *Some problems in using diffusion models for new products*, 1972.

[6] Taiwan Tourism Bureau, *Annual report on tourism 2003 Republic of China*, Taipei, Taiwan, 2004.

[7] ———, *Annual report on tourism 2004 Republic of China*, Taipei, Taiwan, 2005.

[8] D. Horsky i L. S. Simon, *Advertising and the diffusion of new products*, 1983.

[9] Miljenko Huzak, *Vjerojatnost i matematička statistika*, posjećeno u listopadu 2015. godine, `http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/vms.pdf`.

[10] Po Hsun Hsiao James, Jaw Chyi i Huan Tzung-Cheng, *Information diffusion and new product consumption: A Bass model application to tourism facility management*, Journal of Business Research, 2008.

[11] V. Mahajan, E. Muller i FM. Bass, *New product diffusion models in marketing: a review and directions for research*, 1990.

[12] C. L. Morley, *A dynamic international demand model*, 1998.

[13] G. Richards i J. Wilson, *Developing creativity in tourist experiences: a solution to the serial reproduction of culture?*

[14] J. Rosselló, E. Aguiló i A. Riera, *Modeling tourism demand dynamics*, 2005.

[15] SAS, *The NLIN Procedure*, https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63347/HTML/default/viewer.htm#nlin_toc.htm.

[16] W. L. Smith, *Understanding diffusion of technology (internet/e-mail usage) in rural bed and breakfast operations: a three-year longitudinal study*, 2006.

[17] Y. Stamboulis i Skayannis P., *Innovation strategies and technology for experience-based tourism*, 2003.

[18] Eric Stellwagen, *A Guide to Forecast Error Measurement Statistics and How to Use Them*, http://www.forecastpro.com/Trends/forecasting101August2011.html.

[19] A. H. Walle, *Tourism and the internet: opportunities for direct marketing*, 1996.

[20] A. G. Woodside i D. Sherrell, *Traveler ewoked, inept, and inert sets of vacation destinations*, 1997.

[21] PMF Zagreb, *Regresijska analiza*, posjećeno u listopadu 2015. godine, https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/PREDAVANJE11.pdf.

Sažetak

U ovom radu proučavamo primjenu Bassovog difuzijskog modela i njegove verzije koja uključuje utjecaj promocije u turizmu. Proučavamo plasiranje informacija o novom proizvodu putem promocije i sa starih na nove klijente.

Rad je detaljnija obrada postojećeg članka čiji su autori *James Po-Hsun Hsiao*, *Chyi Jaw* te *Tzung-Cheng Huan*. Ime članka je *"Information diffusion and new product consumption: A Bass model application to tourism facility management"* što u prijevodu glasi: *"Difuzija informacija i konzumacija novog proizvoda: primjena Bassovog modela u upravljanju turističkim objektima"*.

U prvom je poglavlju opisano kako i gdje je nastala ideja za provođenjem istraživanja korištenjem Bassovih modela. Područje istraživanja je tematski park na Tajvanu, a novi događaj je festival koji se u njemu organizira.

U drugom su poglavlju definirani Bassov difuzijski model i njegova verzija koja uzima u obzir utjecaj promocije. Izvedene su egzaktne formule Bassovog modela i objašnjena njegova svojstva. Spominje se verzija modela koju su proizvoljno modificirali provoditelji istraživanja.

U trećem poglavlju definiramo matematičke alate koji su korišteni u istraživanju. Prisjećamo se potrebnih termina iz regresijske i korelacijske analize.

U četvrtom poglavlju opisujemo podatke na kojima su modeli procijenjeni te strategiju istraživanja. Istraživanje se provodi postavljanjem hipoteza.

U petom poglavlju iznose se i detaljnije diskutiraju dobiveni rezultati u članku. Navodi se pogreška pronađena u članku. Definira se modificirani model verzije Bassovog modela koja uključuje utjecaj promocije. Pokazuje se korist promocije festivala prije njegovog početka.

Šesto poglavlje daje zaključak. Pokazuje se potreba za boljim modelima, koji bi realnije opisivali stvarnost.

Summary

The subject of this paper is application of a Bass diffusion model and its version which includes the impact of promotion in tourism. In this study we try to understand the information diffusion about a new product through the promotion and from old to new customers.

The paper is more detailed analysis of the existing article named *"Information diffusion and new product consumption: A Bass model application to tourism facility management"*, whose authors are James Po-Hsun Hsiao, Chyi Jaw and Tzung-Cheng Huan.

The first chapter describes the need for research using Bass models. The area of the research is a theme park in Taiwan and a innovative festival held there.

The second chapter defines the Bass diffusion model and its version that takes into account the impact of promotion. It is given the exact formula of a Bassov model and are explained its properties. The modified version which was defined by researchers was here mentioned.

In the third chapter we define the mathematical tools that were used in the study. We recall the necessary terms of regression and correlation analysis.

The fourth chapter describes the data used in model estimation and the strategy of the research. The research was conducted by setting hypothesis.

In the fifth chapter are given the research results from the article, which were analyzed here more detailed. The error found in the article was here aswell mentioned. The modified version of the Bass model suggested by the researchers is here defined. Results imply effectiveness of front loaded advertising.

The conclusion is given in the sixth chapter. It shows the need for better models that are more realistic.

Životopis

Rođena sam 20. studenog 1991. godine u Zagrebu. Završila sam osnovnu školu Mihaela Šiloboda u Svetom Martinu pod Okićem, grad Samobor. Nakon završetka osnovne škole upisala sam IV. jezičnu gimnaziju u Zagrebu. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja završila sam B2 stupanj njemačkog jezika i dobila FCE diplomu iz engleskog jezika. Njemački sam jezik nastavila učiti tijekom fakulteta. Kao najbolja učenica u razredu 2009. godine sam nagrađena putovanjem na Floridu. 2010. godine sam maturirala te iste godine upisala Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, smjer Matematika. Tijekom studija imala sam brojne izvannastavne aktivnosti kao što su davanje instrukcija iz matematike, aktivno bavljenje sportom, rad na raznolikim studentskim poslovima, odlazak na nekoliko putovanja od kojih je jedno boravak i sezonski rad u SAD-u, New York 2 mjeseca tijekom ljetnih praznika. Nakon završene tri godine preddiplomskog studija Matematike upisala sam diplomski studij Poslovne i financijske matematike.