

# Multigrid metoda za numeričko rješavanje Poissonove jednačbe

---

Lužanac, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:400565>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2023-05-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ivan Lužanac

**MULTIGRID METODA ZA**  
**NUMERIČKO RJEŠAVANJE**  
**POISSONOVE JEDNADŽBE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Nela Bosner

Zagreb, Rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Opći pojmovi</b>	<b>2</b>
<b>2 Poissonova jednačba</b>	<b>6</b>
2.1 Klasifikacija Poissove jednačbe . . . . .	6
<b>3 Multigrid metoda</b>	<b>9</b>
3.1 Motivacija . . . . .	9
3.2 Osnovne iterativne metode . . . . .	13
3.3 Elementi Multigrida . . . . .	17
3.4 Algoritam . . . . .	23
3.5 Rezultati . . . . .	25
<b>Bibliografija</b>	<b>30</b>

# Uvod

Dva ključna pojma, na kojima se zasniva ovaj rad su Multigrid metoda, te Poissonova jednačba. Poveznicu između njih čini numerika, tj. aproksimativno rješavanje promatrane jednačbe zadanom metodom uz pomoć računala.

Za dobivanje aproksimacija rješenja koristit ćemo standardnu metodu konačnih diferencija, te ćemo diskretizacijom dobiti sustav linearnih jednačbi, kod kojeg matrica sustava ima specijalan oblik. Obzirom da nam je za finiju aproksimaciju potrebna gušća mreža točaka, to će rezultirati većom dimenzijom matrice sustava, što implicitno povlači lošiju uvjetovanost matrice. Potrebno je dakle biti vrlo pažljiv pri odabiru metode za rješavanje sustava, jer bi u protivnom mogli dobiti "loše" aproksimacije rješenja. Upravo su nam svi prijašnji nabrojani uvjeti motivacija za korištenje promatrane metode - Multigrid.

Cilj će biti usporediti Multigrid metodu sa ostalim poznatim metodama za numeričko rješavanje Poissonove jednačbe, te numerički dokazati sve prednosti i nedostatke Multigrid metode u odnosu na ostale metode. Također ćemo pomoću Multigrid metode pokušati definirati riječ "loše" rješenje, koje će u narednom kontekstu biti svako rješenje, koje će se bitnije razlikovati od aproksimativnog rješenja dobivenog Multigrid metodom. Program koji će uspoređivati Multigrid metodu sa ostalim metodama, na našoj konkretnoj jednačbi, biti će pisan i izvođen u programskom jeziku MATLAB, koji je standardna okolina za numeričko programiranje, te vizualizaciju rezultata.

# Poglavlje 1

## Opći pojmovi

**Definicija 1.0.1.** Neka su  $X$  i  $Y$  vektorski prostori nad poljem  $\mathbb{R}$ . Preslikavanje  $A: X \rightarrow Y$  naziva se linearni operator ako vrijedi:

$$(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X)(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \quad A(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) = \alpha_1 A(\vec{x}_1) + \alpha_2 A(\vec{x}_2)$$

$L(X, Y)$  nam označava skup svih linearnih operatora sa  $X$  u  $Y$ .

**Definicija 1.0.2.** Neka je  $X$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  i  $S \subseteq X, S \neq \emptyset$ . Linearna ljuska skupa  $S$  označava se simbolom  $[S]$  i definira kao

$$[S] = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, a_j \in S \right\}$$

**Definicija 1.0.3.** Neka je  $X$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  i  $S = \{a_1, \dots, a_k\}$  konačan skup vektora iz  $X$ . Kažemo da je  $S$  linearno nezavisan ako vrijedi

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

**Definicija 1.0.4.** Neka je  $X$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  i  $S \subseteq X$ . Kažemo da je  $S$  sistem izvodnica ako vrijedi  $[S] = X$ .  $X$  je konačnodimenzionalan ako postoji neki konačan sistem izvodnica za  $X$ .

**Definicija 1.0.5.** Konačan skup  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  u vektorskom prostoru  $X$  se naziva baza za  $X$  ako je  $S$  linearno nezavisan sistem izvodnica za  $X$ .

**Definicija 1.0.6.** Neka su  $X$  i  $Y$  konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem  $\mathbb{R}$ . Neka je  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  baza za  $X$  i  $f = \{f_1, \dots, f_m\}$  baza za  $Y$ .

Matrica linernog operatora  $A : X \rightarrow Y$  jednaka je

$$A_{fe} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

gdje su elementi matrice određeni sa

$$Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m$$

$$Ae_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m$$

.

$$Ae_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m$$

Matrica  $A_{fe}$  naziva se matrica operatora  $A$  u paru baza  $f$  i  $e$ . Na taj način, dolazimo do identifikacije

$$A \leftrightarrow A_{fe}, \quad L(X, Y) \leftrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}.$$

**Definicija 1.0.7.** Neka je  $A : X \rightarrow Y$  linearan operator. Potprostori  $ImA = \{Av : v \in X\} \leq Y$  i  $KerA = \{x \in X : Ax = 0\} \leq X$  zovu se slika, odnosno jezgra operatora. Kada su  $X$  i  $Y$  konačnodimenzionalni, definiramo rang i defekt operatora  $A$  kao brojeve  $r(A) = \dim(ImA)$ , te  $d(A) = \dim(KerA)$ .

Za više detalja, pogledaj u [4]

**Definicija 1.0.8.** Neka nam je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (Kvadratna matrica dimenzije  $n$  sa realnim koeficijentima). Ako  $\lambda \in \mathbb{R}$  i  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ , zadovoljavaju  $Ax = \lambda x$ , tada  $\lambda$  zovemo svojstvena vrijednost matrice  $A$ . Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice  $A$  označavamo sa  $\sigma(A)$  i nazivamo spektar.

**Definicija 1.0.9.** Spektralni radijus  $spr(A)$  matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je definiran s  $spr(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$

**Definicija 1.0.10.** Neka je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Za  $i = 1, \dots, n$  definiramo Geršgorinove krugeve kao:

$$\mathcal{G}_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho_i\}, \quad \rho_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

**Definicija 1.0.11.** Kažemo da je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , reducibilna ako postoji matrica permutacije  $P$  i  $r \in \{1, \dots, n-1\}$  tako da je

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{[11]} & \tilde{A}_{[12]} \\ 0 & \tilde{A}_{[22]} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{[11]} \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

Za  $n = 1$ ,  $A$  je reducibilna ako je  $A = (0)$ . Matrica  $A$  je ireducibilna ako nije reducibilna.

**Definicija 1.0.12.** Za matricu  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vežemo usmjereni graf  $\Gamma(A)$  koji ima  $n$  vrhova  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  i u kojem postoji usmjereni brid  $\nu_i \vec{\nu}_j$  akko je  $a_{ij} \neq 0$ . Put u  $\Gamma$  od vrha  $\nu_k$  do vrha  $\nu_l$  je niz usmjerenih bridova  $\nu_k \vec{\nu}_{i_1}, \nu_{i_1} \vec{\nu}_{i_2}, \dots, \nu_{i_{j-1}} \vec{\nu}_l$ , pri čemu je  $j$  duljina puta. Kažemo da je  $\Gamma(A)$  jako povezan ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem.

**Propozicija 1.0.13.** Matrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je ireducibilna ako i samo ako je njen graf  $\Gamma(A)$  jako povezan.

*Dokaz.* Dokaz propozicije se nalazi u [6]. □

**Definicija 1.0.14.** Matrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je dijagonalno dominantna ako vrijedi

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Definicija 1.0.15.** Matrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je ireducibilno dijagonalno dominantna ako je ireducibilna, dijagonalno dominantna i za barem jedan indeks  $i$  vrijedi

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

**Teorem 1.0.16.** Neka je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ireducibilna matrica i neka je  $\lambda \in \sigma(A)$  njena svojstvena vrijednost sa svojstvom da nije u unutrašnjosti niti jednog Geršgorinog kruga. Tada je  $\lambda$  sadržana u presjeku svih kružnica  $\partial \mathcal{G}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gdje  $\partial \mathcal{G}_i$  označava rub od  $\mathcal{G}_i$ .

*Dokaz.* Neka je  $v$  pripadni svojstveni vektor,  $Av = \lambda v$ , normiran tako da je  $\|v\|_\infty = 1$ , te neka je  $|v_r| = \|v\|_\infty$ . Sada r-tu jednadžbu u relaciji  $Av = \lambda v$  transformiramo u

$$\lambda - a_{rr} = \sum_{j=1, j \neq r}^n a_{rj} \frac{v_j}{v_r}$$



Zaključujemo koristeći nejednakost trokuta da vrijedi

$$|\lambda - a_{rr}| \leq \sum_{j=1, j \neq r}^n |a_{rj}| |v_j| \leq \sum_{j=1, j \neq r}^n |a_{rj}| = \rho_r,$$

a kako  $\lambda$  nije u unutrašnjosti niti jednog kruga, mora biti  $|\lambda - a_{rr}| = \rho_r$ , tj  $\lambda \in \partial \mathcal{G}_r$ . Sada pokažimo da je za proizvoljan  $p \neq r$  također  $\lambda \in \mathcal{G}_p$ . Koristeći ireducibilnost matrice  $A$  znamo da postoji niz elemenata  $a_{rr_1}, a_{r_1 r_2}, \dots, a_{r_1 p}$ , svi različiti od nule, koji trasira put od  $r$ -tog do  $p$ -tog čvora u  $\Gamma(A)$ . Nadalje, kako su u gornjem iskazu sve nejednakosti zapravo jednakosti, iz  $a_{rr_1} \neq 0$  slijedi  $|v_{r_1}| = 1$ . To znači da možemo provesti isto zaključivanje, ali s  $r_1$  umjesto  $r$  i dobiti  $\lambda \in \mathcal{G}_{r_1}$  i (jer je  $a_{r_1 r_2} \neq 0$ )  $|v_{r_2}| = 1$ . Sada je jasno da na ovaj način, korak po korak, dolazimo do  $p$ -tog čvora i zaključka  $\lambda \in \mathcal{G}_p$   $\square$

**Korolar 1.0.17.** *Ako je  $A$  ireducibilno dijagonalno dominantna, onda je regularna.*

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati da  $0 \notin \sigma(A)$ . Pretpostavimo da to nije istina i odmah uočimo da zbog dijagonalne dominantnosti nula ne može biti u unutrašnjosti niti jednog Geršgorinovog kruga, jer bi tada vrijedilo

$$|a_{ii}| < \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

što je kontradikcija, pa prema Teoremu 1.0.16 mora biti u presjeku svih kružnica,  $\bigcap_{i=1}^n \partial \mathcal{G}_i$ , tj.  $|a_{ii}| = \rho_i$  za sve  $i = 1, \dots, n$ . No, to je u kontradikciji sa slabom dijagonalnom dominantnošću, jer je  $|a_{ii}| > \rho_i$  za barem jedan indeks  $i$ .  $\square$

# Poglavlje 2

## Poissonova jednađžba

### 2.1 Klasifikacija Poissove jednađžbe

Diferencijalna jednađžba je matematička jednađžba koja povezuje neku funkciju sa njezinim derivacijama. Osnovna podjela diferencijalnih jednađžbi je na obične diferencijalne jednađžbe (ordinar differential equation-ODE), te parcijalne diferencijalne jednađžbe (partial differential equation-PDE). Razlika između njih je u broju varijabli - obične sadrže funkciju jedne neovisne varijable i njezine derivacije, dok parcijalne sadrže multivarijabilne funkcije i njihove parcijalne derivacije. Obzirom da nam je promatrana jednađžba (Poissonova) parcijalna, naglasak će nam biti upravo na parcijalnim diferencijalnim jednađžbama.

**Definicija 2.1.1.** *Izraz u obliku forme:*

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad (x \in \Omega)$$

gdje nam je  $u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  nepoznata, naziva se parcijalna diferencijalna jednađžba  $k$ -tog reda (u našem slučaju  $k = 2$ ).

**Definicija 2.1.2.** (i) *Parcijalna diferencijalna jednađžba naziva se linearna, ako se nalazi u formi:*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

za zadane funkcije  $a_\alpha$  ( $|\alpha| \leq k$ ) i  $f$ . Štaviše, linearna jednađžba je homogena ako  $f \equiv 0$ .

(ii) *naziva se semilinearna ako je u formi:*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0,$$

(iii) naziva se kvazilinearna ako je  $u$  formi:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x)D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0,$$

(iv) jednadžba je potpuno nelinearna ako nelinearno ovisi o derivaciji najvišeg reda.

U generalnom iskazu parcijalne diferencijalne jednadžbe (2.1), najviši red derivacija  $k$  je njegov stupanj. Općenita forma skalarne linearne jednadžbe drugog reda u  $d$  različitim varijabli  $x = (x_1, \dots, x_d)^T$  je:

$$C : D^2u + b \cdot Du + au = f \quad u \in \Omega, \quad (2.2)$$

ili u konvencijalnijoj formi:

$$\sum_{i,j=1}^d c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f \quad u \in \Omega, \quad (2.3)$$

gdje,  $\forall x \in \Omega, a(x) \in \mathbb{R}, b(x) \in \mathbb{R}^d, C(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  su koeficijenti jednadžbe, te uz notaciju  $A : B = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} b_{ij}$ , koja predstavlja matrični skalarni produkt.

**Definicija 2.1.3.** Neka nam je zadana parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda u obliku forme (2.2) sa simetričnom matricom koeficijenata  $C(x)$ ; tada će nam jednadžba biti:

1. eliptička u  $x \in \Omega$ , ako je  $C(x)$  pozitivno definitna, tj. za svaki  $v \neq 0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $v^T C v > 0$ .
2. parabolička u  $x \in \Omega$ , ako je  $C(x)$  pozitivno semidefinitna ( $v^T C v \geq 0$ , za svaki  $v \in \mathbb{R}^d$ ) i nije pozitivno definitna, te je rang od  $(C(x), b(x))$  jednak  $d$ .
3. hiperbolička u  $x \in \Omega$ , ako  $C(x)$  ima jednu negativnu, te  $n - 1$  pozitivnih svojstvenih vrijednosti.

Za više detalja, pogledaj u [3]

Poissonova jednadžba je linearna parcijalna diferencijalna jednadžba eliptičkog tipa sa širokim spektrom primjene u područjima poput elektrostatike, mehaničkog inženjerstva, te teorijske fizike. Ime je dobila po francuskom matematičaru Siméonu Denisu Poissonu. U našem slučaju, poseban naglasak ćemo staviti na Poissonovu jednadžbu promatranu u 1D, te u 2D. Također, zbog kompleksnosti promatranja naše jednadžbe u višim dimenzijama, program koji će nam numerčki računati rješenje jednadžbe, biti će pisan isključivo za 1D slučajeve. Poissonovu jednadžbu zapisujemo u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y) & na \ \Omega \\ u(x, y) &= 0, & na \ \partial\Omega \end{aligned}$$

# Poglavlje 3

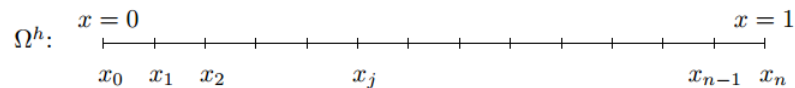
## Multigrid metoda

### 3.1 Motivacija

Multigrid metode su imale prvobitnu primjenu za jednostavne rubne probleme, koji su prirodno zahtijevali upotrebu takvih metoda. Promatranje započnimo diskretnom 1D Poissonovom jednažbom:

$$-u'' = f, \quad x \in (0, 1) \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3.1.1)$$

Za svaki  $N$ , promatramo uniformnu mrežu  $\tau_h$  intervala  $[0,1]$  na sljedeći način:



Slika 3.1: Jednodimenzionalna mreža intervala  $[0,1]$ .

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1, \quad x_j = jh, j = 0, \dots, N,$$

gdje je  $h = 1/N$  duljina pojedinog podintervala. Na taj način uspostavljamo mrežu, koja označavamo sa  $\Omega^h$ . Sada uvodimo oznake za aproksimaciju rješenja,  $v_i \approx u(x_i)$ , te  $f_i \approx f(x_i)$ , za  $i = 0, 1, \dots, N$ . Analogno, uvodimo vektor aproksimativnih rješenja  $v = (v_1, \dots, v_{N-1})^T$ , te vektor fukcije desne strane  $f = (f_1, \dots, f_{N-1})^T$ . Aproksimiramo drugu derivaciju funkcije  $u(x)$  koristeći Taylorov razvoj:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^4)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^4)$$

Zbrajanjem tih dvaju izraza dobivamo traženu aproksimaciju:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

Koristeći gornje svojstvo, možemo aproksimirati početni problem (3.1.1), tj. koristeći metodu konačnih diferencija dobivamo zapis:

$$\frac{-v_{j-1} + 2v_j - v_{j+1}}{h^2} = f(x_j), \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (3.1.2)$$

$$v_0 = v_N = 0$$

Gornji zapis možemo reprezentirati i u matricnoj formi  $Av = f$ , koristeći vektor aproksimativnih rješenja  $v$ , te vektor funkcije desne strane  $f$  na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.1.2.M)$$

Matrica  $A$  je trodijagonalna, simetrična, pozitivno definitna, te dimenzije  $(N-1) \times (N-1)$ .

Uzmimo sada u obzir diskretnu 2D Poissonovu jednadžbu.

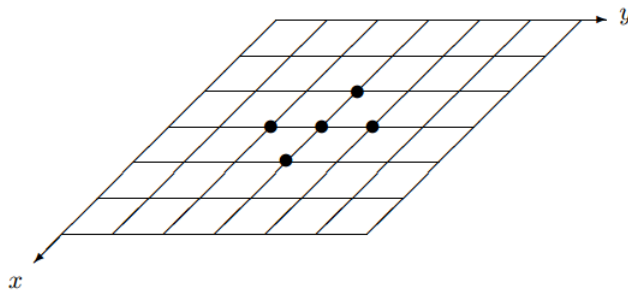
$$-u_{xx} - u_{yy} = f(x, y), \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1 \quad (3.1.3)$$

U obzir ćemo uzeti rubni uvjet  $u = 0$  na rubu domene, tj. rubu jediničnog kvadrata. Analogno prošlom slučaju, diskretizirati ćemo domenu definirajući točke mreže sa  $(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y)$ , gdje nam je  $h_x = 1/M$ , te  $h_y = 1/N$ . Dvodimenzionalnu mrežu ćemo također označiti sa  $\Omega^h$ .

$$\frac{-v_{i-1,j} + 2v_{i,j} - v_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{-v_{i,j-1} + 2v_{i,j} - v_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{i,j}, \quad (3.1.4)$$

$$v_{i,j} = 0, \quad i = 0 \text{ ili } i = M \text{ ili } j = 0 \text{ ili } j = N,$$

za  $1 \leq i \leq M-1$ ,  $1 \leq j \leq N-1$ , gdje nam je  $v_{i,j}$  aproksimacija egzaktnog rješenja  $u(x_i, y_j)$ , te  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ . Sada imamo  $(M-1) \times (N-1)$  unutrašnjih točaka mreže, te isti broj nepoznanica. Odabrat ćemo leksikografski poredak po linijama sa konstantnim indeksom  $i$ .



Slika 3.2: Dvodimenzionalna mreža na jediničnom kvadratu. Točke označavaju nepoznanice povezane sa točkom mreže zadanom diskretnom jednađbom (3.1.4).

Nepoznanice  $i$ -tog stupca mreže možemo zapisati u vektoru  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{i,N-1})^T$ , za  $1 \leq i \leq M-1$ . Slično, uzmimo  $f_i = (f_{i1}, \dots, f_{i,N-1})^T$ . Sistem jednađbi (3.1) sada možemo zapisati u matričnoj formi:

$$\begin{pmatrix} B & -I & \cdots & \cdots \\ -I & B & -I & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & -I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{M-1} \end{pmatrix} \quad (3.1.4.M)$$

gdje nam je  $I$  jedinična matrica pomnožena konstantom  $h_x^{-2}$ , a matrica  $B$  ima sljedeći oblik:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} & -\frac{1}{h_y^2} & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{h_x^2} & \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} & -\frac{1}{h_x^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & -\frac{1}{h_x^2} & \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \end{pmatrix}$$

Sistem je blok trodijagonalan, simetričan, te je pretežito ispunjen nulama. Blok dimenzija je  $(M-1) \times (M-1)$ , te je svaki dijagonalan blok dimenzije  $(N-1) \times (N-1)$ , dok je svaki nedijagonalan blok višekratnik od  $(N-1) \times (N-1)$  matrice  $I$ . Naša dva modela linearnih sistema (3.1.2) i (3.1.4) će nam biti esencijalni problemi na kojima ćemo promatrati i uspoređivati rješenja raznih metoda sa Multigridom. Metode za rješavanje sistema (3.1.2.M) i (3.1.4.M) dijelimo u dvije kategorije: direktne metode, te iterativne metode. U direktne metode spadaju metode kao npr. Gaussova eliminacija, faktorizacija, te brzi Poissonovi rješavači, dok iterativnih ima jako puno, ali ćemo naglasak staviti na Jakobijevu, Gauss-Seidelovu, te jasno Multigrid metode, te ćemo usporediti njihova rješenja. Direktne metode podrazumjevaju računanje egzaktnog

(računalnog) rješenja u konačno mnogo aritmetičkih koraka. Jasno, efikasnost ovih algoritama ovisi jako o veličini promatrane matrice  $A$ , te stoga nisu preporučljivi za veće sisteme. Iterativne metode započinju sa inicijalnom aproksimacijom rješenja, te s koracima, aproksimacija rješenja konvergira (ili bar to želimo) egzaktnom rješenju linearnog sistema. Iz opisa metoda koja pripadaju ovoj kategoriji, jasno je da i one imaju razne nedostatke koje ćemo pokušati ispraviti upravo uz pomoć Multigrid metode.

**Teorem 3.1.1.** *Neka je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  strogo dijagonalno dominantna ili ireducibilno dijagonalno dominantna matrica. Tada su i Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda konvergentne sa svakom početnom iteracijom.*

*Dokaz.* Dokaz teorema se nalazi u [6]. □

**Teorem 3.1.2.** *Iteracije  $x^{(k+1)} = \mathbf{F}x^{(k)} + c$  konvergiraju fiksnoj točki  $\mathbf{x}$  za svaki početni  $x^{(0)}$  akko je  $\text{spr}(\mathbf{F}) < 1$ .*

*Dokaz.* Dokaz teorema se nalazi u [6]. □



## 3.2 Osnovne iterativne metode

Upoznali smo se sa 2 osnovna modela Poissonovih jednadžbi, te nam je sada cilj riješiti sisteme linearnih jednadžbi primjenom određene iterativne metode. Neka nam

$$Au = f$$

označava generalan sistem linearnih jednadžbi kao u (3.1.2.M), te u (3.1.4.M). Sa  $u$  (vektor) označavati ćemo egzaktno rješenje sistema, dok će nam  $v$  (vektor) označavati aproksimativno rješenje dobiveno ili generirano nekom iterativnom metodom. Također će kasnije biti potrebno asociirati  $u$  i  $v$  sa određenom mrežom (posebno kod Multigrida), npr. sa  $\Omega^h$ , te ćemo u tom slučaju rješenja označavati sa  $u^h$  i  $v^h$ . Očito nam je egzaktno rješenje nepoznato, dok aproksimativno ćemo jasno računati. Postoje dvije bitne mjere koje nam govore koliko dobro je aproksimativno rješenje. Prva je *pogreška*, koja je dana sa

$$e = u - v.$$

Pogreška je također vektor, pa koristimo dva tipa normi za njeno računanje definirana sa

$$\|e\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq N-1} |e_j| \quad \|e\|_2 = \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} e_j^2 \right\}^{1/2}$$

Nažalost, pogreška je nedostupna poput egzaktnog rješenja, pa uvodimo drugu mjeru *rezidual*, dan sa

$$r = f - Av.$$

Rezidual predstavlja vrijednost koja nam govori koliko je odstupanje aproksimativnog rješenja od rješenja sustava. Rezidual je također vektor, te se može mjeriti sa istim normama kao i pogreška. Primjetimo da nam jedinstvenost rješenja  $u$  povlači da vrijedi  $r = 0 \iff e = 0$ . Nadalje, ne vrijedi nužno ako je  $r$  malen u normi, da je  $e$  također malen u normi. Ako napišemo ponovno originalan problem

$$Au = f,$$

te preuredimo definiciju reziduala kao

$$Av = f - r$$

i onda oduzmemo drugi izraz od prvog, dobivamo bitnu vezu između greške i reziduala

$$Ae = r$$

koju nazivamo *rezidualnom jednadžbom*. Ona kaže da greška zadovoljava isti skup jednadžbi kao i nepoznanica  $u$  kada zamijenimo  $f$  sa  $r$  (posebno bitno kod Multigrida.) Ako pretpostavimo da smo izračunali  $v$ , tada je jednostavno izračunati rezidual  $r = f - Av$ . Da bismo poboljšali aproksimaciju  $v$ , možemo riješiti rezidualnu jednadžbu za  $e$ , te zatim izračunati novu aproksimaciju koristeći definiciju pogreške

$$u = v + e.$$

Obzirom da Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda nisu primarni predmet ovoga rada, već sekundarni, napisat ćemo samo kratko matričnu formu za ove dvije metode (detalji u [5]):

$$\begin{aligned} \text{JACOBIJEVA :} \quad & v^{(1)} = P_J v^{(0)} + D^{-1} f, & P_J &= D^{-1}(L + U), \\ \text{GAUSS-SEIDELOVA :} & v^{(1)} = P_G v^{(0)} + (D - L)^{-1} f, & P_G &= (D - L)^{-1} U, \end{aligned}$$

gdje  $D$ ,  $U$ ,  $L$  predstavljaju dijagonalni, strogo gornje trokutasti, te strogo donje trokutasti dio matrice sustava. Bitno je uočiti da nam konvergenciju metoda uvjetuje Teorem 3.1.1. U našim slučajevima je matrica sistema ireducibilno dijagonalno dominantna, dakle obje metode su konvergentne.

Pri proučavanju stacionarnih linearnih iteracija, dovoljno je uzeti homogen linearan sistem  $Au = 0$ , te proizvoljnu inicijalnu vrijednost. U tom slučaju, znamo da nam je egzaktna vrijednost  $u = 0$ , te da nam je pogreška  $-v$ . Sada se vraćamo jednodimenzionalnom problemu gdje nam je  $f = 0$ . (Ovaj problem će nam biti referentan za sve zaključke koje ćemo izvesti do kraja ove sekcije).

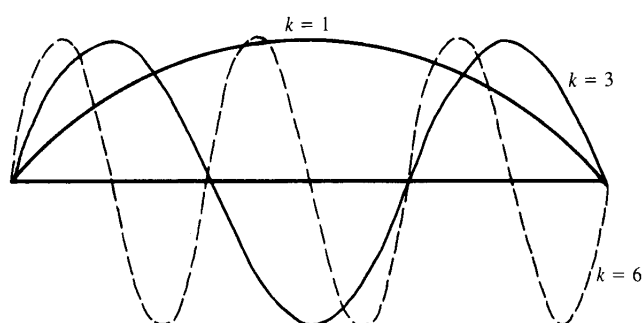
$$-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1} = 0, \quad 1 \leq j \leq N - 1 \quad (3.2.1)$$

$$u_0 = u_N = 0$$

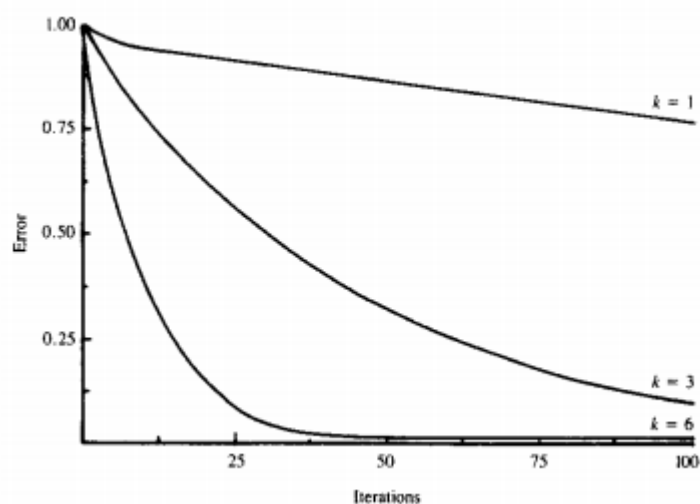
Za inicijalnu vrijednost sada uzmimo vektore ili Fourierove *modove* (svojtveni vektori matrice  $A$ , te čine ortonormiranu bazu jer je matrica simetrična)

$$v_j = \sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad (3.2.2)$$

gdje je  $0 \leq j \leq N$  i  $1 \leq k \leq N - 1$ . Slovo  $k$  nam predstavlja tzv. *valni broj*, a služi nam za određivanje broja perioda funkcije. Označimo sa  $v_k$  vektor sa valnim brojem  $k$ . Primjetimo da za male  $k$ , modovi odgovaraju dugačkim, glatkim valovima, dok za velike odgovaraju oscilatornim valovima. Vidljivo je sa slike 3.4 da se pogreška smanjuje sa svakom iteracijom, te da se stopa opadanja greške povećava proporcionalno povećanju valnog broja.

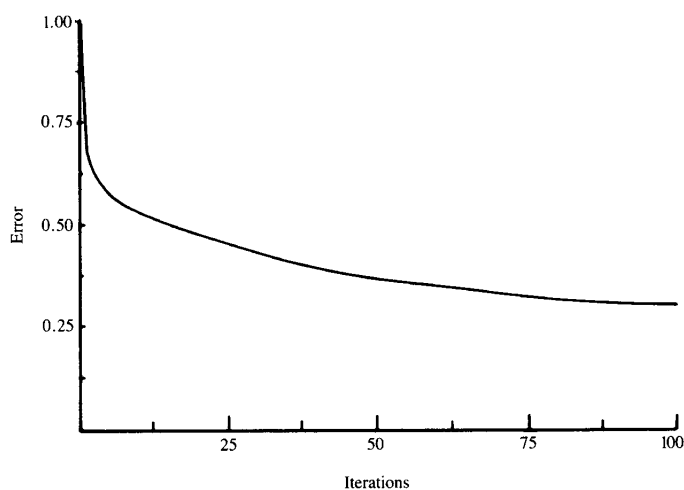


Slika 3.3: Modovi  $v_j = \sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right)$ ,  $0 \leq j \leq N$ , sa valnim brojevima  $k = 1, 3, 6$ .



Slika 3.4: Odnos pogreške i broja iteracija u ovisnosti o valnom broju za Gauss-Seidelovu metodu

Pogledajmo sada realniji slučaj, u kojemu se inicijalna vrijednost sastoji od 3 moda: *niskofrekventni val* ( $k = 1$ ), *srednjefrekventni val* ( $k = 6$ ), te *visokofrekventni val* ( $k = 32$ ). Slika 3.5 nam pokazuje da se pogreška ubrzano smanjuje u prvih pet iteracija, nakon čega brzina smanjivanja pogreške znatno opada. Kasnije ćemo vidjeti da je inicijalno smanjivanje pogreške u korelaciji sa brzom eliminacijom visokofrekventnih modova, dok je naknadno sporo opadanje pogreške posljedica prisustva niskofrekventnih modova.



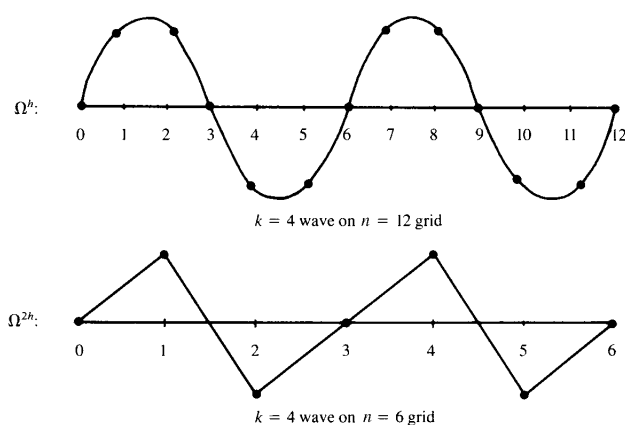
Slika 3.5: Jacobijeva metoda s inicijalnom vrijednošću  $\frac{1}{3}[\sin(\frac{j\pi}{N}) + \sin(\frac{6j\pi}{N}) + \sin(\frac{32j\pi}{N})]$ .

Također, bitno je naglasiti da standardne iterativne metode ubrzano konvergiraju sve dok pogreška ima visokofrekventne komponentne, dok nam sporija eliminacija niskofrekventnih komponenti degradira performanse ovih metoda.

U ovom trenutku, potrebno je uspostaviti terminologiju koju ćemo naknadno koristiti. Modove u donjoj polovici spektra sa valnim brojem u rangu  $1 \leq k \leq N/2$ , ćemo nazivati *glatki* modovi, dok ćemo one u gornjoj polovici, tj. u rangu  $N/2 \leq k \leq N - 1$ , nazivati *oscilatorni*. Mnoge relaksacijske sheme posjeduju svojstvo eliminiranja oscilatornih modova, te ostavljanja glatkih modova. Ovo svojstvo ćemo nazvati *izgladujuće svojstvo*, te nam ono predstavlja ozbiljan nedostatak ovih metoda. Postoji lijek za taj problem i naziva se Multigrid.

### 3.3 Elementi Multigrida

Prvo poboljšanje iterativnih metoda koje nam se prirodno javlja je korištenje dobre inicijalne vrijednosti. Jedna od osnovnih tehnika za to je izvođenje preliminarnih iteracija na grubljnoj (manji broj točaka) mreži, te korištenje dobivenog rezultata kao inicijalne vrijednosti. Promatrajući grublju mrežu, sjetimo se da najosnovnije sheme profinjenja mreže trpe zbog glatke komponente greške. Pretpostavimo da primjenjujemo odabranu shemu profinjenja sve dok imamo glatku komponentu greške. Pitamo se kako izgleda ta greška na grubljnoj mreži. Sljedeća slika daje nam odgovor. Vidimo da nam glatki val na mreži  $\Omega^h$  više oscilira na grubljnoj mreži  $\Omega^{2h}$ . Upravo to



Slika 3.6: Val sa brojem oscilacija  $k = 4$  na  $\Omega^h$  ( $N = 12$ ) je projiciran na mrežu  $\Omega^{2h}$  ( $N = 6$ ). Gruba mreža "vidi" val sa brojem oscilacija  $k = 4$ , koji više oscilira na grubljnoj nego li na finijoj mreži.

svojstvo nam daje glavnu motivaciju za Multigrid. Važno je napomenuti da glatki modovi na finijoj mreži, izgledaju manje glatki kada se prebace na grublju mrežu. Ta činjenica nam sugerira da kada se profinjenje počne oduglovačiti, što je posljedica dominacije glatke komponente pogreške, nastavimo postupak na grubljnoj mreži na kojoj nam te greške osciliraju, te je stoga profinjenje uspješnije.

Sada si postavljamo bitno pitanje - kako preći na grublju mrežu, te iskoristiti svojstvo da nam greške više osciliraju na njoj? Odgovor na to pitanje će nam dati upravo Multigrid. Ako nam  $v$  predstavlja aproksimaciju egzaktnog rješenja  $u$ , tada greška  $e = u - v$  zadovoljava

$$Ae = r = f - Av. \quad (3.3.1.)$$

Također, treba imati na umu sljedeću činjenicu:

Profinjenje originalne jednadžbe  $Au = f$  sa proizvoljnom inicijalnom vrijednošću  $v$  ekvivalentno je profinjenju rezidualne jednadžbe  $Ae = r$  sa specifičnim inicijalnim uvjetom  $e = 0$ .

Prva i osnovna stvar Multigrida je strategija prelaska na grublju mrežu. Cilj je krenuti od jako grube mreže, te na njoj izračunati jednadžbu  $Au = f$ , a zatim postepeno profinjavati mrežu, te na svakoj mreži rješavati istu jednadžbu (*ugnježdene iteracije*). Nakon toga, želimo iskoristiti rezidualnu jednadžbu za računanje greške. Postupak bi bio:

Riješiti  $Au = f$  na  $\Omega^h$  radi dobivanja aproksimacije  $v^h$ .

Izračunati rezidual  $r = f - Av^h$ .

Riješiti  $Ae = r$  na grubljnoj mreži  $\Omega^{2h}$  radi dobivanja aproksimacije greške  $e^{2h}$ .

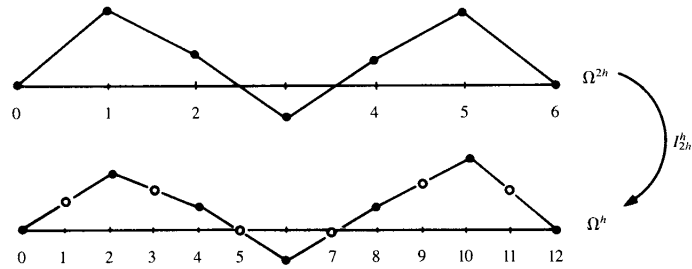
Ispraviti aproksimativno rješenje  $v^h$  dobiveno na početnoj mreži koristeći grešku  $e^{2h}$   
 $v^h \leftarrow v^h + e^{2h}$

Trenutno nam je nejasno kako izračunati rezidual na  $\Omega^h$  prebaciti na  $\Omega^{2h}$ , te kako obrnuto napraviti istu stvar sa greškom (standardna notacija - mreža  $\Omega^{2h}$  ima dvostruko manje točaka od  $\Omega^h$ ). U tome će nam pomoći *operator linearne interpolacije*  $I_{2h}^h$ , te *operator restrikcije*  $I_h^{2h}$ . Definiramo operator linearne interpolacije sa  $I_{2h}^h v^{2h} = v^h$ , gdje je

$$v_{2j}^h = v_j^{2h}$$

$$0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1.$$

$$v_{2j+1}^h = \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}).$$

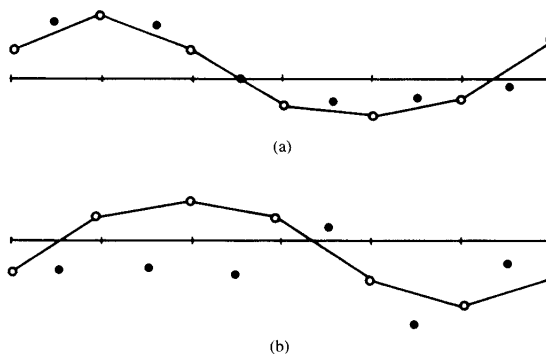


Slika 3.7: Interpolacija vektora sa grublje  $\Omega^{2h}$  na finiju mrežu  $\Omega^h$ .

$I_{2h}^h$  je linearan operator sa  $\mathbb{R}^{\frac{N}{2}-1}$  u  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Punog je ranga i ima trivijalnu jezgru. Pokažimo primjerom djelovanje tog operatora za npr.  $N = 8$

$$I_{2h}^h v^{2h} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{2h} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = v^h.$$

Kada interpoliramo glatku pogrešku sa grublje na finiju mrežu, interpolant je također gladak. Suprotno, ako nam je greška oscilacijska, interpolant nam neće biti precizan.



Slika 3.8: (a) Ako je egzaktna greška na  $\Omega^h$  (označena sa  $\circ$  i  $\bullet$ ) glatka, interpolant aproksimacije grublje mreže  $e^{2h}$  (označen sa  $\circ$ ) bi trebao dati dobru reprezentaciju egzaktne pogreške. (b) Ako je egzaktna greška na  $\Omega^h$  (označena sa  $\circ$  i  $\bullet$ ) oscilacijska, interpolant aproksimacije grublje mreže  $e^{2h}$  (označen sa  $\circ$ ) bi mogao dati lošu reprezentaciju egzaktne pogreške.

Za 2D probleme, interpolacijski operator definiramo na sljedeći način

$$\begin{aligned}
 v_{2i,2j}^h &= v_{ij}^{2h} \\
 v_{2i+1,2j}^h &= \frac{1}{2}(v_{ij}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h}) \\
 &0 \leq i, j \leq \frac{N}{2} - 1. \\
 v_{2i,2j+1}^h &= \frac{1}{2}(v_{ij}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h}) \\
 v_{2i+1,2j+1}^h &= \frac{1}{4}(v_{ij}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h} + v_{i+1,j+1}^{2h})
 \end{aligned}$$

Sada trebamo definirati restriksijski operator  $I_h^{2h}$ . Najočitiji primjer takvog operatora je projekcija, ali ćemo ipak koristiti *operator pune težine* definiran kao  $I_h^{2h}v^h = v^{2h}$ , td. vrijedi

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h), \quad 1 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1.$$

$I_h^{2h}$  je linearan operator sa  $\mathbb{R}^{N-1}$  u  $\mathbb{R}^{\frac{N}{2}-1}$ . Dimenzija ranga mu je  $\frac{N}{2} - 1$ , dok mu je jezgra dimenzije  $\frac{N}{2}$ . Pokažimo primjerom djelovanje tog operatora za npr.  $N = 8$

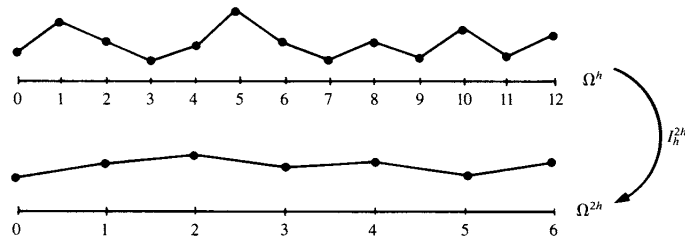


$$I_h^{2h} v^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{2h} = v^{2h}.$$

Operator pune težine koristimo radi sljedećeg bitnog svojstva

$$I_{2h}^h = c(I_h^{2h})^T, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ovo svojstvo je bitno zbog veze između operatora (matrice) na različitim mrežama. Zbog toga se oni, kod prelaska s jedne mreže na drugu definiraju na isti način, do na multiplikativni faktor.



Slika 3.9: Restrikcija po punoj težini finije na grublju mrežu.

Radi potpunosti iskaza, pokažmo još djelovanje operatora pune težine u dvije dimenzije

$$v_{i,j}^{2h} = \frac{1}{16} [v_{2i-1,2j-1}^h + v_{2i-1,2j+1}^h + v_{2i+1,2j-1}^h + v_{2i+1,2j+1}^h + 2(v_{2i,2j-1}^h + v_{2i,2j+1}^h + v_{2i-1,2j}^h + v_{2i+1,2j}^h) + 4v_{2i,2j}^h], \quad 1 \leq i, j \leq \frac{N}{2} - 1,$$

Definirajmo sada strategiju profinjenja grublje mreže, koje ćemo označiti sa GG.

$$v^h \leftarrow GG(v^h, f^h)$$

Profini (primjeni iterativnu metodu)  $\nu_1$  puta na mreži  $\Omega^h$  rješavajući problem  $A^h u^h = f^h$  sa inicijalnom vrijednošću  $v^h$ .

Izračunaj  $r^{2h} = I_h^{2h}(f^h - A^h v^h)$ .

Riješi  $A^{2h} e^{2h} = r^{2h}$  na mreži  $\Omega^{2h}$

Iskoristi aproksimaciju finije mreže:  $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h e^{2h}$ .

Profini  $\nu_2$  puta na mreži  $\Omega^h$  rješavajući problem  $A^h u^h = f^h$  sa inicijalnom vrijednošću  $v^h$ .

Nekoliko stvari trebamo napomenuti ovdje. Potrebno je razlikovati mreže, tj. pažljivo gledati definiciju pojedinog operatora. Zatim, potrebno je definirati izgled matrice  $A^{2h}$ , te ju trenutno možemo zamišljati kao  $\Omega^{2h}$  verziju matrice  $A^h$ . Također,  $\nu_1$  i  $\nu_2$  su nenegativni cijeli brojevi, te je u praksi  $\nu_1 \in \{1, 2, 3\}$ . Relaksacija na finijoj mreži će nam eliminirati oscilacijske komponente greške, dajući nam relativno glatku pogrešku. Vrijedi sljedeće svojstvo:

$$A^{2h} = I_h^{2h} A^h I_{2h}^h$$

### 3.4 Algoritam

$\mu$ -Ciklusna Shema

$$v^h \leftarrow M\mu^h(v^h, f^h)$$

1. Profini  $\mu_1$  puta na  $A^u u^h = f^h$  sa zadanom inicijalnom vrijednošću  $v^h$ .

2. Ako je mreža  $\Omega^h$  najgrublja mreža, idi na 4.

$$\text{Inače } f^{2h} \leftarrow I_h^{2h}(f^h - A^h v^h)$$

$$v^{2h} \leftarrow 0$$

$$v^{2h} \leftarrow M\mu^{2h}(v^{2h}, f^{2h}) \quad \mu \text{ puta.}$$

3. Korigiraj  $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h v^{2h}$ .

4. Profini  $\mu_2$  puta na  $A^u u^h = f^h$  sa zadanom inicijalnom vrijednošću  $v^h$ .

$\mu$ -Ciklusna metoda nam predstavlja cijelu familiju ciklusnih multigrid shema. U praksi se primjenjuju dvije metode i to  $V$ -Ciklus za  $\mu = 1$ , te  $W$ -Ciklus za  $\mu = 2$ . Ove dvije metode nam predstavljaju ideju profinjenja grube mreže, te je potrebno još iskoristiti ugnježdene iteracije, koje nam daju dobru inicijalnu vrijednost, za kompletiranje algoritma. Sve to nam omogućuje sljedeći algoritam u kompaktnoj formi

*Kompletni V-Ciklusni Multigrid*

$$v^h \leftarrow FMV^h(v^h, f^h)$$

1. Ako je mreža  $\Omega^h$  najgrublja mreža, idi na 3.

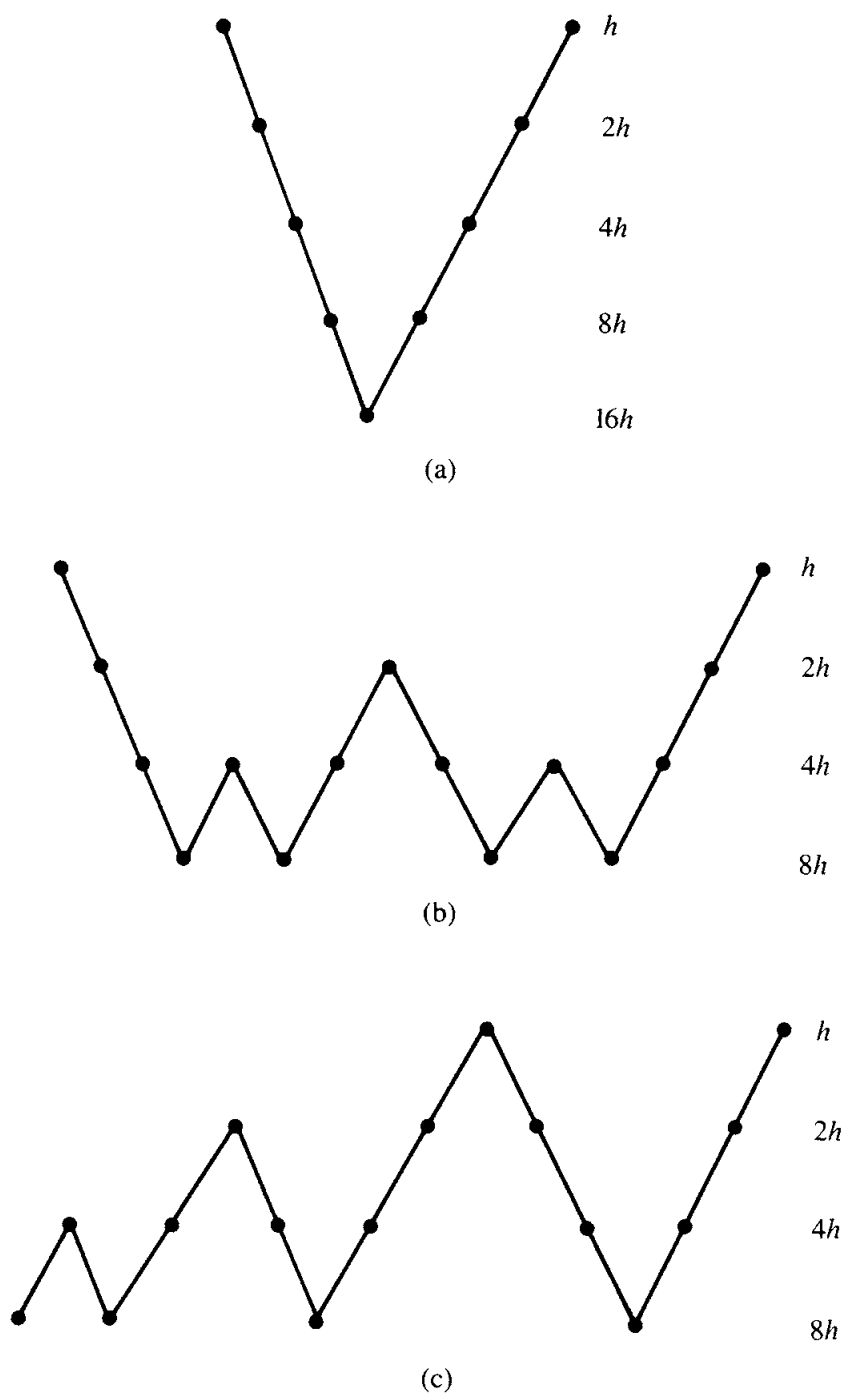
$$\text{Inače } f^{2h} \leftarrow I_h^{2h}(f^h - A^h v^h)$$

$$v^{2h} \leftarrow 0$$

$$v^{2h} \leftarrow FMV^{2h}(v^{2h}, f^{2h}).$$

2. Korigiraj  $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h v^{2h}$ .

3.  $v^h \leftarrow M\mu^h(v^h, f^h)$   $\nu_0$  puta. ( $\mu = 1$ , tj. V-Ciklus)

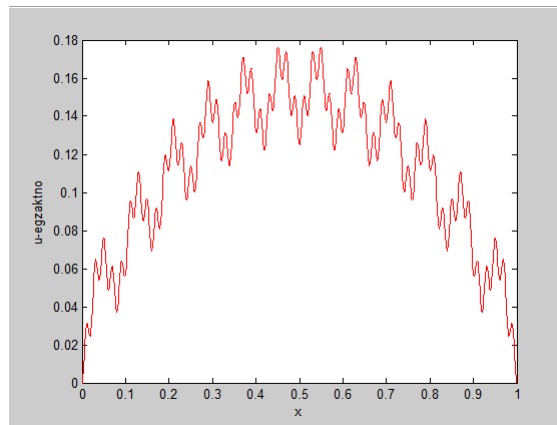


Slika 3.10: Raspored mreža za (a) V-ciklus, (b) W-ciklus i (c) FMV shemu, na sva četiri nivoa.

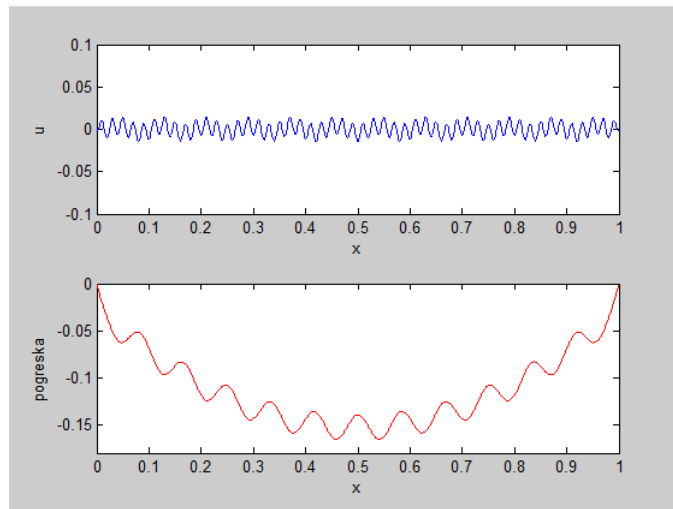
### 3.5 Rezultati

Reference za kodove su [1], te [2]

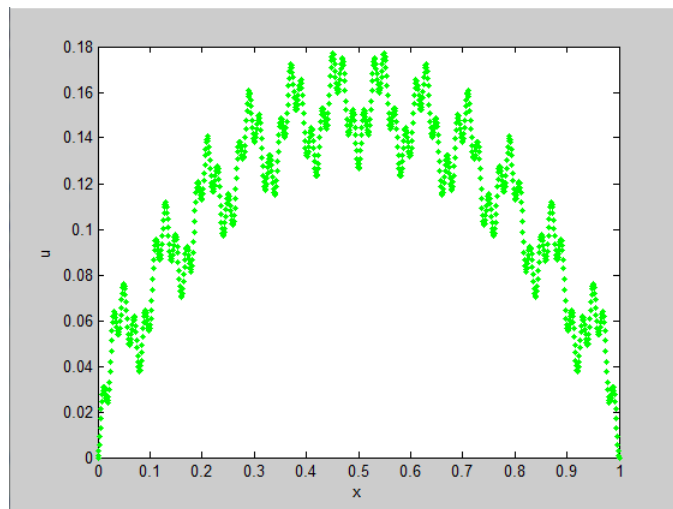
Na slikama vidimo rješenja pomoću različitih metoda za 1D Poissonovu jednadžbu, gdje su nam varijable:  $N = 1024$ ,  $f = -1 + 100 \cos(24\pi x) + 1000 \cos(100\pi x)$ ;



Slika 3.11: Prikaz egzaktnog rješenja jednadžbe u ovisnosti o  $x$

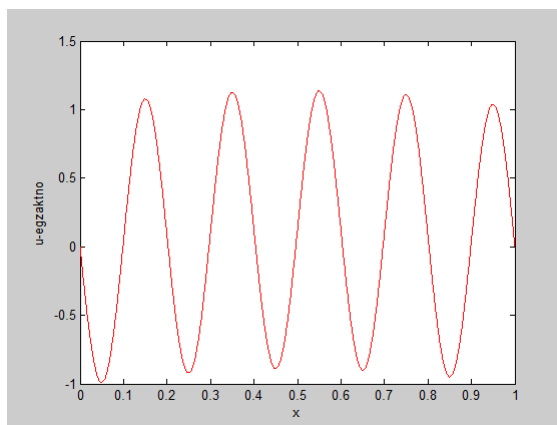


Slika 3.12: Gornja slika nam daje prikaz aproksimativnog rješenja dobivenog Jacobijevom metodom u ovisnosti o  $x$ , dok nam donja daje prikaz odnosa pogreške u ovisnosti o  $x$ . Prikaz aproksimacije rješenja smo dobili nakon 100 iteracija, a pogreška ima vrijednost  $\|e\|_{\infty} = 0.1652$

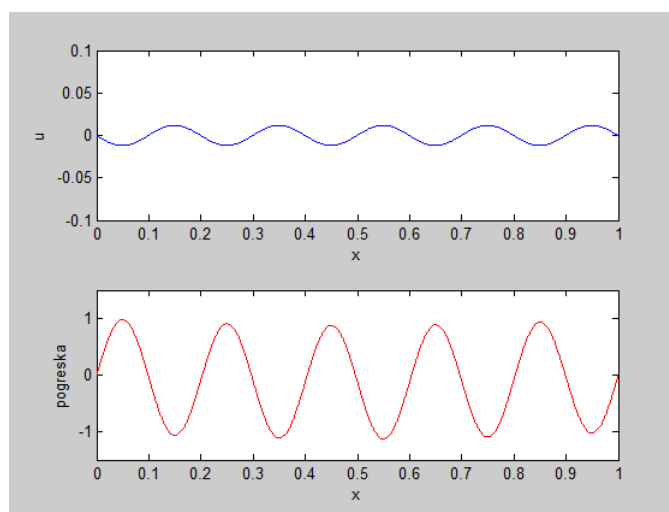


Slika 3.13: Prikaz aproksimativnog rješenja dobivenog Multigridom u ovisnosti o  $x$ . Koristili smo rekurzivnu V-ciklusnu shemu, te smo provodili tri koraka Jakobijeve metode prije i poslije korekcije na grubljoj mreži. Pogreška ima vrijednost  $\|e\|_{\infty} = 0.0022$

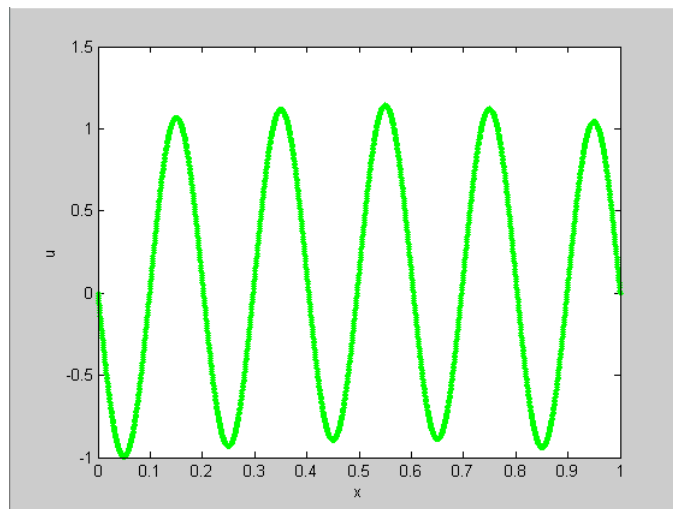
Na slikama vidimo rješenja pomoću različitih metoda za 1D Poissonovu jednadžbu, gdje su nam varijable:  $N = 2048$ ,  $f = -1 + \cos(24\pi x) + 1000 \sin(10\pi x)$ ;



Slika 3.14: Prikaz egzaktnog rješenja jednadžbe  $u$  u ovisnosti o  $x$



Slika 3.15: Gornja slika nam daje prikaz aproksimativnog rješenja dobivenog Jacobijevom metodom u ovisnosti o  $x$ , dok nam donja daje prikaz odnosa pogreške u ovisnosti o  $x$ . Prikaz aproksimacije rješenja smo dobili nakon 100 iteracija, a pogreška ima vrijednost  $\|e\|_\infty = 1.1254$



Slika 3.16: Prikaz aproksimativnog rješenja dobivenog Multigridom u ovisnosti o  $x$ . Koristili smo rekurzivnu V-ciklusnu shemu, te smo provodili tri koraka Jakobijeve metode prije i poslije korekcije na grubljoj mreži. Pogreška ima vrijednost  $\|e\|_\infty = 0.0132$



```

Data: function u = multigrid1D(f)
N = length(f) - 1;
h = 1/N;
x = (0:h:1)';
u = zeros(N+1,1);
I = 2:N;
if N > 2 then
    for i = 1 : 3 do
        | u(I) = 1/2 · (u(I + 1) + u(I - 1) - h2 · f(I))
    end

    residual = [0; f(I) - 1/h2 · (u(I + 1) - 2 · u(I) + u(I - 1)); 0] ;
    coarseresidual = residual(1:2:end) ;
    coarseerror = multigrid1D (-coarseresidual) ;
    error = zeros(N+1,1);
    error = interp1(1:2:(N+1), coarseerror, 1:(N+1), 'linear');
    u = u - error';

    for i = 1 : 3 do
        | u(I) = 1/2 · (u(I + 1) + u(I - 1) - h2 · f(I))
    end
else
    | u(I) = -1/2 · h2 · f(I);
end

```

**Algorithm 1:** Pseudokod Multigrid metode korištene za dobivanje rezultata

# Bibliografija

- [1] *Multigrid methods*, 2012, <http://www.maths.cam.ac.uk/undergrad/course/na/ii/multigrid/multigrid.php>, posjećena 2015-21-8.
- [2] *Multigrid Solver for 1D Poisson Problem*, 2012, [http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m\\_src/multigrid\\_poisson\\_1d/multigrid\\_poisson\\_1d.html](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/multigrid_poisson_1d/multigrid_poisson_1d.html), posjećena 2015-21-8.
- [3] *Partial differential equations*, 2013, [http://www.ann.jussieu.fr/frey/cours/UdC/ma691/ma691\\_ch3.pdf](http://www.ann.jussieu.fr/frey/cours/UdC/ma691/ma691_ch3.pdf), posjećena 2015-10-6.
- [4] *Linearna algebra 2*, 2014, <http://www.mathos.unios.hr/la2/p2.pdf>, posjećena 2015-14-6.
- [5] William.L. Briggs, *A Multigrid Tutorial*, Lancaster Press, Lancaster, Pennsylvania, 1987.
- [6] Z. Drmač, *Numerička Matematika*, 2010.

# Sažetak

Osnovna ideja ovoga rada nam je bila Multigrid metoda, tj. njezina usporedba sa ostalim iterativnim metodama. Testiranje metoda smo provodili isključivo koristeći Poissonovu jednadžbu sa homogenim rubnim uvjetom, premda to nije bilo nužno. Također, koristili smo legitimnu pretpostavku da nam je promatrani prostor dimenzije 1D, zbog složenosti postavljanja problema u višim dimenzijama.

Radi lakšeg snalaženja, rad smo podijelili na tri osnovne cjeline: Uvod, Poissonova jednadžba, te Multigrid. U prvoj cjelini smo iskazali osnovne matematičke pojmove koje smo koristili, dok smo u drugoj klasificirali Poissonovu jednažbu. Posljednja, glavna cjelina se sastoji od motivacije i općenitih razmatranja koja su dovela do razvijanja Multigrida, osnovnih elemenata Multigrida koje smo morali u konačnici povezati, te naposljetku od pseudokoda algoritma i grafičkog prikaza rezultata.

Poseban naglasak smo stavili na rezultate, koji su nam sa pragmatičnog stajališta, najbitniji dio rada. Nismo vršili detaljnu interpretaciju rezultata, radi jasnoće MATLAB-ovskih grafičkih prikaza. Kod uz pomoć kojega su dobiveni rezultati, je pisan posebno u MATLABU, te nam je omogućio usporedbu Multigrida sa osnovnim metodama poput Jacobijeve.

# Summary

Basic idea of this work is Multigrid method, i.e. comparison with other basic iterative methods. Method testing was carried out exclusively using Poisson equation with homogeneous boundary condition, although that was not necessary. Also, we used legitimate assumption that our space has dimension 1D, due to complex set up in higher dimensions.

Conveniently, our work is split in three basic units: Introduction, Poisson equation, and Multigrid. In first unit, we have expressed basic mathematical terms which we used, while in second unit we classified Poisson equation. Last, the most significant unit consists of motivation and general considerations which led us to develop Multigrid, basic elements of Multigrid, which we had to connect in the end, and finally algorithm pseudocode and graphical display of results.

Special emphasis is made on the results, which are from pragmatism viewpoint, most important part of our work. We did not perform detailed interpretation of our results, because of distinct clearness of MATLAB graphical displays. Code which obtained our results, is written in MATLAB, and allow us comparison of Multigrid with basic iterative methods like Jacobi.

# Životopis

Rođen sam 15. ožujka 1990. godine u Slavonskom Brodu. Nakon završene osnovne škole Dr. Stjepan Ilijašević u Slavonskom Kobašu, upisao sam Tehničku školu - smjer Tehničar za elektroniku, u Slavonskom Brodu.

Maturirao sam 2008. godine, a tema maturalnog rada mi je bila "Ispis laserom na zid". Rad je bio grupni, te se sastojao od fizičke izrade stroja, kao i popratne dokumentacije i softvera.

Smjer Matematika na preddiplomskom studiju PMF sam upisao 2008. godine, a diplomski studij Primjenjena matematika sam upisao 2013. godine.

Početakom 2015. godine, počeo sam se baviti izradom android aplikacija, te sam sudjelovao u projektu "Tinnitus", koji je obuhvaćao izradu aplikacije, čija je namjena bila pomoći ljudima sa slušnim problemima.