Levinsonova nejednakost

Ljuboja, Žana

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:131257

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-01**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Žana Ljuboja

LEVINSONOVA NEJEDNAKOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof.dr.sc. Jadranka Mićić Hot

Zagreb, studeni, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svima onima koji su me pratili, bili uz mene i podržavali sve ove godine studija. Zahvaljujem se profesorima na ovom fakultetu i svojoj mentorici, Prof. dr. sc. Jadranki Mićić Hot na stručnoj pomoći i savjetima prilikom izrade diplomskog rada. Posebnu zahvalnost dugujem suvoditeljici, svojoj profesorici, prof. dr. sc. Sanji Varošanec. Veliko hvala profesorici Varošanec, veseloj, nasmijanoj i uvijek otvorenog srca, na pomoći, strpljenju i suradnji pri izradi ovog rada koja je ostavila pozitivan trag na mene. Za kraj jedno veliko hvala mojoj obitelji koja mi je omogućila studiranje i svojim razumijevanjem i podrškom mi pomogla da ustrajem u svojoj namjeri.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se proučavanjem Levinsonove nejednakosti. To je jedan od primjera koji nam ilustriraju kako matematičari poopćavaju objekte i zakonitosti. N. Levinson je 1964. godine dokazao sljedeću nejednakost:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - \phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \phi(2b - x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - \phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (2b - x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right),$$

pri čemu su $p_i \geq 0, i = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 0,\ x_i \in [0, 2b],\ \phi$ je takva da je $\phi''' \geq 0$.

Njegov je rad bio potaknut tzv. Ky Fanovom nejednakošću

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \leq \left(\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right)^n$$

u kojoj su $x_i \in [0, 1]$. Već je u Levinsonovoj nejednakosti vidljivo nekoliko poopćenja koje je napravio u odnosu na Ky Fanov rezultat: uveo je težine (p_i), interval $[0, 1]$ proširen je na $[0, 2b]$, funkcija ln zamijenjena je s funkcijom ϕ za koju je $\phi''' > 0$.
U narednim godinama vršena su još neka generaliziranja kako uvjeta na točke tako i uvjeta na funkciju. U ovom radu opisat ćemo nekoliko takvih rezultata.

Poglavlje 1

Levinsonova nejednakost

1.1 Biografija Normana Levinsona

Slika 1.1: Norman Levinson

Norman Levinson američki je matematičar rođen 11. kolovoza 1912. godine u Lynnu u Massachusettsu. Diplomirao je i magistrirao elektrotehniku na Massachusetts Institute of Technology 1934. godine. U svojoj ranoj karijeri surađivao je s Norbert Wienerom, matematičarom kojeg danas smatramo ocem kibernetike. Od Massachusetts Institute of Technology primio je Redfield Proctor Traveling Fellowship za studij na Sveučilištu u Cambridgeu. U prva četiri mjeseca u Cambridgeu, već je uspio napraviti dva rada. Doktorirao je 1935. godine. 1937. godine počeo je raditi na fakultetu Massachusetts Institute of Technology. Godine 1954. nagrađen je s Bôcher Memorial Prize of American Mathematical Society. 1970. godine je osvojio Lester R. Ford nagradu, a sljedeće godine dobiva Chauvenet nagradu od Mathematical Association of Amerika za svoj rad "A Motivated Account of an Elementary Proof of the Prime Number Theorem". Baza MathSciNet koju vodi The American Mathematical Society sadrži osvrte na 113 Levinsonovih radova. Veći dio svoje matematičke karijere bavio se problemima vezanim uz diferencijalne jednadžbe i kompleksnu analizu, no posljednjih je desetak godina intenzivno istraživao Riemannovu zeta funkciju. Pod njegovim mentorstvom doktorirali su Raymond Redheffer i Harold Shapiro. Levinson je umro 10. listopada 1975. godine u Bostonu od posljedica tumora na mozgu.

1.2 Levinsonova nejednakost

U knjizi Beckenbacha i Bellmana [3, p. 5] dana je sljedeća nejednakost Ky Fana:
Neka su $0 < x_i \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, ..., n.$
Tada vrijedi

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \leq \left(\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right)^n,$$

sa jednakošću samo ako su svi x_i jednaki.

Korjenujemo li Ky Fanovu nejednakost dobivamo

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \leq \frac{\sqrt[n]{(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n)}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)}{n}}.$$

Dakle, i na lijevoj i na desnoj strani u brojniku se javlja geometrijska sredina, a u nazivniku aritmetička sredina nekih brojeva. Drugim riječima Ky Fanovom nejednakošću uspoređujemo kvocijente geometrijske i aritmetičke sredine niza brojeva $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n)$.
Možemo ju zapisati i ovako

$$\frac{G\,(x_1, \ldots, x_n)}{A\,(x_1, \ldots, x_n)} \leq \frac{G\,(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)}{A\,(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)}.$$

Ukoliko Ky Fanovu nejednakost logaritmiramo dobivamo

$$\frac{1}{n} \log(x_1 \cdot \ \ldots \ \cdot x_n) - \log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \log((1 - x_1) \ldots (1 - x_n)) - \log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)}{n}\right)$$

tj.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n} - \log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \log(1 - x_i)}{n} - \log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)}{n}\right). \tag{1.1}$$

Pojavljuju se pitanja:
1. Mogu li se težine $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ koje se javljaju u originalnoj Ky Fanovoj nejednakosti zamijeniti općim težinama? Naime, poznato je da osnovna AG nejednakost vrijedi ne samo za jednake težine već i za opće, pa zašto ne bi i ovu nejednakost pokušali poopćiti u tom smjeru.

2. U osnovnoj se Ky Fanovoj nejednakosti pojavljuju parovi $(x_i, 1 - x_i)$. Očito je suma brojeva x_i i $1 - x_i$ jednaka 1. Može li se taj uvjet poopćiti?
3. Funkcija log je primjer rastuće konkavne funkcije. Koje od tih svojstava je nužno? Može li se log zamijeniti nekom drugom funkcijom, a da oblik Ky Fanove nejednakosti (1.1) ostane isti?
Odgovore na ova pitanja dao je Levinson dajući sljedeću generalizaciju Ky Fanove nejednakosti [6]. Danas se ovaj rezultat naziva Levinsonova nejednakost.

Teorem 1.1. *Neka ϕ ima nenegativnu treću derivaciju na $(0, 2b)$.*
Za $0 < x_i \le b$ i $0 < p_i$, $1 \le i \le n$ vrijedi

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i\phi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - \phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i\phi(2b - x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - \phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(2b - x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right). \tag{1.2}$$

Osim toga, ako je $\phi'''(u) > 0$ za $u \in (0, 2b)$ onda jednakost nastaje samo ako su svi x_i jednaki.

U slučaju kad je $\phi(u) = \log u$, $p_i = 1$ za svaki $i = 1, 2, ..., n$ i $b = \frac{1}{2}$, tada se nejednakost (1.1) svodi na Ky Fanovu nejednakost.

Dokaz. Neka je a konstanta, $0 < a \le b$.
Neka je

$$F(u) = \phi(u) - \phi(2b - u). \tag{1.3}$$

Razvijmo F oko broja a.
Tada postoji $\theta \in (0, 1)$ tako da je

$$F(u) = F(a) + (u - a)F'(a) + \frac{1}{2}(u - a)^2 F''(a + \theta(u - a)). \tag{1.4}$$

Derivirajmo F dva puta:

$$\begin{aligned}
F(u) &= \phi(u) - \phi(2b - u)\\
F'(u) &= \phi'(u) - \phi'(2b - u) \cdot (-1)\\
F''(u) &= \phi''(u) - \phi''(2b - u) \cdot (-1)^2 = \phi''(u) - \phi''(2b - u)
\end{aligned}$$

pa stavljajući umjesto u broj $a + \theta(u - a)$ dobivamo

$$F''(a + \theta(u - a)) = \phi''(a + \theta(u - a)) - \phi''(2b - a - \theta(u - a)). \tag{1.5}$$

Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti primjenjenom na funkciju ϕ'' na intervalu $[a+\theta(u-a), 2b-a-\theta(u-a)]$ postoji u_1 iz unutrašnjosti tog intervala tako da

$$\begin{aligned} \phi''(2b-a-\theta(u-a)) - \phi''(a+\theta(u-a)) &= \phi'''(u_1)[2b-a-\theta(u-a)-(a+\theta(u-a))] \\ &= 2(b-a-\theta(u-a)) \cdot \phi'''(u_1), \end{aligned}$$

a kad to vratimo u (1.5) dobivamo

$$F''(a+\theta(u-a)) = -2[b-a-\theta(u-a)] \cdot \phi'''(u_1). \tag{1.6}$$

Budući da je po pretpostavci teorema $\phi''' \geq 0$, slijedi da je

$$F''(a+\theta(u-a) \leq 0.$$

Tako je $F(u) \leq F(a) + (u-a)F'(a)$, pa koristeći (1.3) dobivamo

$$\phi(u) - \phi(2b-u) \leq \phi(a) - \phi(2b-a) + (u-a)F'(a). \tag{1.7}$$

U (1.7) stavimo $u = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, pomnožimo sa p_i i sve te nejednakosti zbrojimo. Dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\phi(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i\phi(2b-x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i\phi(a) - \sum_{i=1}^{n} p_i\phi(2b-a) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-a)F^{'}(a),$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\phi(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i\phi(2b-x_i) \leq \phi(a)\sum_{i=1}^{n} p_i - \phi(2b-a)\sum_{i=1}^{n} p_i + F^{'}(a)\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-a).$$

Stavimo da je

$$a = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}. \tag{1.8}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i\phi(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i\phi(2b-x_i) &\leq \phi\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right)\sum_{i=1}^{n} p_i - \phi\left(2b - \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right)\sum_{i=1}^{n} p_i \\ &+ F^{'}\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right)\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right). \end{aligned}$$

Budući da je $0 < x_i \leq b$ slijedi da je $0 < a \leq b$.
Pretpostavimo sada da je $\phi'''(u) > 0$ na intervalu $(0, 2b)$. Tada prema (1.6) vrijedi

$$F''(a + \theta(u - a)) < 0 \tag{1.9}$$

osim ako je $a = b$ i $u = b$. Prema (1.8) $a = b$ je samo ako su svi $x_i = b$.
Upotrebom (1.9) u (1.4) dokazujemo da u (1.7) vrijedi nejednakost osim ako je $u = a$. Dakle, osim ako su svi $x_i = a$ tada znak jednakosti ne može se pojaviti u (1.2).
Time je teorem dokazan. $\square$

Poglavlje 2

3 - konveksnost i Bullenov rezultat

T. Popoviciu je u svom članku [10] pokazao da se pretpostavke o diferencijabilnosti funkcije f mogu oslabiti i da Levinsonova nejednakost vrijedi ako je f 3 - konveksna. Definirajmo n - konveksne funkcije.

Definicija 2.1. *Za funkciju f kažemo da je n - konveksna na [a,b] ako za svaki izbor $(n+1)$ različitih točaka $x_0, x_1, \ldots, x_n$ iz [a,b] vrijedi*

$$V_n(f; x_0, \ldots, x_n) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \geq 0 \tag{2.1}$$

gdje je $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$, a znak $'$ u $\omega'(x_k)$ označava da je u produktu izostavljen faktor $(x - x_k)$.
Ako je $x_i = x_j$ za neki $i, j = 0, 1, \ldots, n$ tada se definira

$$V_n(f; x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \lim_{t \to x_i} V_n(f; x_0, \ldots, x_i, \ldots, t, \ldots, x_n)$$

ako limes postoji pri čemu je t na $j+1$- nom mjestu.
Izraz na lijevoj strani u (2.1) se zove n - ta podijeljena razlika.

Pojam n - konveksnosti je generalizacija monotonosti i konveksnosti. Naime, uzmemo li $n = 1$, tada je f 1 - konveksna ako za $n + 1 = 2$ različite točke x_0 i x_1 vrijedi (2.1), tj.

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \geq 0$$

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)} \geq 0$$

$$(x_0 - x_1)(f(x_0) - f(x_1)) \geq 0.$$

Ako je $x_0 \geq x_1$, tada je i $f(x_0) \geq f(x_1)$, tj. f je rastuća funkcija. Vrijedi i obrat, ako je f rastuća, tada prateći gornje nejednakosti dobivamo da je 1 - konveksna.
Promotrimo što možemo reći o 2 - konveksnoj funkciji.
Dokazat ćemo da je 2 - konveksna funkcija ujedno konveksna funkcija. Prisjetimo se da funkciju f nazivamo konveksnom ako za svaki $\alpha \in [0, 1]$ i za svaki $x, y \in I$ vrijedi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Graf konveksne funkcije ima svojstvo da ako povučemo sekantu u točkama $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$, $x, y \in [a, b]$ tada je graf na intervalu $[x, y]$ ispod te sekante.
Ako konveksna funkcija ima drugu derivaciju, tada je $f^{''} \geq 0$. Mnoge elementarne funkcije su konveksne, bilo na cijeloj svojoj domeni, bilo na nekim intervalima. Tako je kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ konveksna za $a > 0$. Na cijelom $\mathbb{R}$ konveksne su funkcije $f(x) = e^{ax}$ i $f(x) = \log_b x$ za $0 < b < 1$. Funkcija sinus je konveksna na intervalima oblika $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Funkcija tangens je konveksna na intervalima oblika $[0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi >, k \in \mathbb{Z}$.

Neka su dani $x, y \in I,\ x < y$ te $\alpha \in (0, 1)$. Budući da je f 2 - konveksna u definicijsku nejednakost

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \geq 0 \tag{2.2}$$

stavimo

$$x_0 = x,\ x_1 = \alpha x + (1 - \alpha)y,\ x_2 = y.$$

Iz $x_1 = \alpha x + (1 - \alpha)y$ možemo izraziti α pomoću x_0, x_1, x_2. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + (1 - \alpha)y \\ x_1 &= \alpha x + y - \alpha y \\ \alpha(x - y) &= x_1 - y \\ \alpha &= \frac{x_1 - y}{x - y} = \frac{y - x_1}{y - x} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}. \end{aligned}$$

Uz to je

$$1-\alpha = 1-\frac{y-x_1}{y-x} = \frac{y-x-(y-x_1)}{y-x} = \frac{x_1-x}{y-x} = \frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}.$$

Pomnožimo (2.2) sa $(x_1-x_0)(x_1-x_2)$. To je negativni broj jer je $x_o < x_1 < x_2$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}
f(x_0)\frac{-(x_1-x_2)}{x_0-x_2} &+ f(x_1)+f(x_2)\frac{-(x_1-x_0)}{x_2-x_0} \leq 0\\
f(x_1) &\leq \frac{x_1-x_2}{x_0-x_2}f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}f(x_2)\\
f(\alpha x+(1-\alpha)y) &\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Vrijedi i obrat: ako je f konveksna, tada je ona 2 - konveksna što se dokazuje sličnim supstitucijama.

Specijalno, f je 3 - konveksna ako za svake četiri različite točke $x_0, x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} &+ \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\
&+ \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Ako je treća podijeljena razlika pozitivna za svaki izbor točaka x_0, x_1, x_2, x_3 tada kažemo da je funkcija f strogo 3 - konveksna.
Za podijeljene razlike vrijedi

$$(x_0-x_r)V_r(f;x_0,\ldots,x_r) = V_{r-1}(f;x_0,\ldots,x_{r-1}) - V_{r-1}(f;x_1,\ldots,x_r).$$

Dokažimo tu tvrdnju.

Dokaz. Raspišimo posebno desnu stranu jednakosti:

$$\begin{aligned}
V_{r-1}(f;x_0,\ldots,x_{r-1}) &= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{r-1})}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{r-1})}\\
&+ \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_{r-1})} + \quad \ldots \quad +\\
&+ \frac{f(x_{r-1})}{(x_{r-1}-x_0)(x_{r-1}-x_1)\cdots(x_{r-1}-x_{r-2})}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
V_{r-1}(f;x_1,\dots,x_r) &= \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_r)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_r)} \\
+ \quad \dots \quad &+ \frac{f(x_{r-1})}{(x_{r-1}-x_1)\cdots(x_{r-1}-x_{r-2})(x_{r-1}-x_r)} \\
&+ \frac{f(x_r)}{(x_r-x_1)(x_r-x_2)\cdots(x_r-x_{r-1})}\,.
\end{aligned}$$

Promotrimo razliku $V_{r-1}(f;x_0,\dots,x_{r-1}) - V_{r-1}(f;x_1,\dots,x_r)$.

$$\begin{aligned}
V_{r-1} \quad & (f;x_0,\dots,x_{r-1}) - V_{r-1}(f;x_1,\dots,x_r) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{r-1})} \\
+ \quad & \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{r-1})}\cdot\frac{1}{(x_1-x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_{r-1})}\cdot\frac{1}{(x_2-x_0)} \\
+ \quad \dots \quad + \quad & \frac{f(x_{r-1})}{(x_{r-1}-x_1)\cdots(x_{r-1}-x_{r-2})}\cdot\frac{1}{(x_{r-1}-x_0)} - \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{r-1})}\cdot\frac{1}{(x_1-x_r)} \\
- \quad & \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_{r-1})}\cdot\frac{1}{(x_2-x_r)} - \dots - \\
- \quad & \frac{f(x_{r-1})}{(x_{r-1}-x_1)\cdots(x_{r-1}-x_{r-2})}\cdot\frac{1}{(x_{r-1}-x_r)} - \frac{f(x_r)}{(x_r-x_1)(x_r-x_2)\cdots(x_r-x_{r-1})}\,.
\end{aligned}$$

Izlučivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
V_{r-1}(f;x_0,\dots,x_{r-1}) \quad - \quad & V_{r-1}(f;x_1,\dots,x_r) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{r-1})} \\
+ \quad & \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{r-1})}\left(\frac{1}{(x_1-x_0)} - \frac{1}{(x_1-x_r)}\right) \\
+ \quad & \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_{r-1})}\left(\frac{1}{(x_2-x_0)} - \frac{1}{(x_2-x_r)}\right) + \dots + \\
+ \quad & \frac{f(x_{r-1})}{(x_{r-1}-x_1)\cdots(x_{r-1}-x_{r-2})}\left(\frac{1}{(x_{r-1}-x_0)} - \frac{1}{(x_{r-1}-x_r)}\right) \\
- \quad & \frac{f(x_r)}{(x_r-x_1)(x_r-x_2)\cdots(x_r-x_{r-1})}\,.
\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
V_{r-1}(f; x_0, \ldots, x_{r-1}) \quad - \quad & V_{r-1}(f; x_1, \ldots, x_r) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{r-1})} \\
+ \quad & \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_{r-1})} \cdot \frac{(x_0 - x_r)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_r)} \\
+ \quad & \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)\cdots(x_2 - x_{r-1})} \cdot \frac{(x_0 - x_r)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_r)} + \ \ldots \ + \\
+ \quad & \frac{f(x_{r-1})}{(x_{r-1} - x_1)\cdots(x_{r-1} - x_{r-2})} \cdot \frac{(x_0 - x_r)}{(x_{r-1} - x_0)(x_{r-1} - x_r)} \\
- \quad & \frac{f(x_r)}{(x_r - x_1)(x_r - x_2)\cdots(x_r - x_{r-1})} \, .
\end{aligned}$$

Pomnožimo li prvi i zadnji kvocijent s $\dfrac{(x_0 - x_r)}{(x_0 - x_r)}$ te izlučimo li $(x_0 - x_r)$ dobivamo lijevu stranu jednakosti tj. $(x_0 - x_r)V_r(f; x_0, \ldots, x_r)$, a to je upravo ono što smo trebali dokazati.

□

Izračunajmo čemu je jednako $V[f; x_0, x_0]$, $V[f; x_0, x_0, x_0]$ i $V[f; x_0, x_0, x_0, x_0]$, ako funkcija f ima prvu, drugu, odnosno treću derivaciju.
Upotrijebimo li definiciju podijeljene razlike dobivamo

$$V[f; x_0, x_0] = \lim_{t \to x_0} V[f; x_0, t] = \lim_{t \to x_0} \left(\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \right) = f^{'}(x_0).$$

Tu ćemo formulu iskoristiti i u sljedećem računu:

$$\begin{aligned}
V[f; x_0, x_0, x_0] &= \lim_{u \to x_0} \left(\lim_{v \to x_0} V[f; x_0, v, u] \right) = \lim_{u \to x_0} \left(\lim_{v \to x_0} \frac{V[f; v, u] - V[f; x_o, u]}{u - x_o} \right) \\
&= \lim_{u \to x_0} \left(\frac{f^{'}(u) - V[f; x_0, u]}{u - x_0} \right) = \lim_{u \to x_0} \frac{f^{'}(u) - \dfrac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}}{u - x_0} \\
&= \lim_{u \to x_0} \frac{f^{'}(u)(u - x_0) - (f(u) - f(x_0))}{(u - x_0)^2}.
\end{aligned}$$

Taj je razlomak oblika $\frac{0}{0}$ pa možemo primijeni L'Hospitalovo pravilo za računanje limesa, tj. gornji je limes dalje jednak

$$V[f; x_0, x_0, x_0] = \lim_{u \to x_0} \frac{f^{''}(u)(u - x_0) + f^{'}(u) - f^{'}(u)}{2(u - x_0)} = \lim_{u \to x_0} \frac{f^{''}(u)}{2} = \frac{f^{''}(x_0)}{2}.$$

Dakle, $V[f; x_0, x_0, x_0] = \dfrac{f''(x_0)}{2}$.
Izračunajmo još i podijeljenu razliku $V[f; x_0, x_0, u], u \neq x_0$.

$$\begin{aligned}
V[f; x_0, x_0, u] &= \lim_{v\to x_0} V[f; x_0, v, u] = \lim_{v\to x_0}\left(\frac{f(x_0)}{(x_0-v)(x_0-u)} + \frac{f(v)}{(v-x_0)(v-u)} + \frac{f(u)}{(u-x_0)(u-v)}\right)\\
&= \lim_{v\to x_0}\frac{f(u)}{(u-x_0)(u-v)} + \lim_{v\to x_0}\left(\frac{f(x_0)}{(x_0-v)(x_0-u)} + \frac{f(v)}{(v-x_0)(v-u)}\right)\\
&= \frac{f(u)}{(u-x_0)^2} + \lim_{v\to x_0}\frac{f(x_0)(v-u)+f(v)(u-x_0)}{(x_0-v)(x_0-u)(v-u)}.
\end{aligned}$$

Razlomak u drugom pribrojniku je oblika $\frac{0}{0}$ pa primjenimo li L'Hospitalovo pravilo dobivamo:

$$\lim_{v\to x_0}\frac{f(x_0)(v-u)+f(v)(u-x_0)}{(x_0-u)(x_0-v)(v-u)} = \lim_{v\to x_0}\frac{f(x_0)+f'(v)(u-x_0)}{(x_0-u)(-2v+x_0+u)} = \frac{f(x_0)+f'(x_0)(u-x_0)}{-(u-x_0)^2},$$

tj.
$V[f; x_0, x_0, u] = \dfrac{f(u)-f(x_0)-f'(x_0)(u-x_0)}{(u-x_0)^2}$.

Sad ćemo izračunati $V[f; x_0, x_0, x_0, x_0]$.

$$\begin{aligned}
V[f; x_0, x_0, x_0, x_0] &= \lim_{t\to x_0} V[f; x_0, x_0, x_0, t] = \lim_{t\to x_0}\frac{V[f; x_0, x_0, t] - V[f; x_0, x_0, x_0]}{t-x_0}\\
&= \lim_{t\to x_0}\frac{\dfrac{f(t)-f(x_0)-f'(x_0)(t-x_0)}{(t-x_0)^2} - \dfrac{f''(x_0)}{2}}{(t-x_0)}\\
&= \lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)-f'(x_0)(t-x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)(t-x_0)^2}{(t-x_0)^3}.
\end{aligned}$$

Taj je razlomak oblika $\frac{0}{0}$, pa primjenom L'Hospitalova pravila dva puta dobivamo

$$\lim_{t\to x_0}\frac{f'(t)-f'(x_0)-f''(x_0)(t-x_0)}{3(t-x_0)^2} = \lim_{t\to x_0}\frac{f''(t)-f''(x_0)}{6(t-x_0)} = \frac{1}{6}f'''(x_0).$$

Dakle, $V[f; x_0, x_0, x_0, x_0] = \dfrac{1}{3!}f'''(x_0)$.

Može se pokazati da za $(n+1)$ točku x_0 vrijedi $V[f; x_0, x_0, \ldots, x_0] = \dfrac{1}{n!}f^n(x_0)$.

Najčešće korišteni kriterij za utvrđivanje n - konveksnosti je ovaj:
Ako postoji n-ta derivacija od f, tada je f n - konveksna funkcija ako i samo ako je $f^{(n)} \geq 0$.
U slučaju kad je $f(x) = x^r$ tada je $f'''(x) = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$.
Funkcija f je strogo 3 - konveksna ako i samo ako $0 < r < 1$ ili $r > 2$. Funkcija f je strogo 3 - konkavna ako je $r < 0$ ili $1 < r < 2$.
I funkcije $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = e^x$ su strogo 3 - konveksne na skupu $(0, \infty)$.

Dokaz. Derivirajmo funkciju $f_1(x) = \ln x$:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1}{x} \\ f_1''(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f_1'''(x) &= \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$f_1'''(x) > 0$ na skupu $(0, \infty)$ pa zaključujemo da je funkcija $f_1(x)$ 3 - konveksna.

Za funkciju $f_2(x) = e^x$ vrijedi:

$$f_2'(x) = f_2''(x) = f_2'''(x) = e^x$$

$f_2'''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ pa zaključujemo da je funkcija $f_2(x)$ 3 - konveksna.

□

Sada ćemo prikazati Bullenov rezultat za 3 - konveksne funkcije.

Teorem 2.2. .
(a) Neka je funkcija f realna, 3- *konveksna na intervalu [a, b] i* x_k, y_k *(*$1 \leq k \leq n$*)* $2n$ *točaka iz intervala [a, b] tako da vrijedi*

$$\max(x_1, \ldots, x_n) \leq \min(y_1, \ldots, y_n), \quad x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \cdots = x_n + y_n. \tag{2.3}$$

Ako su $p_k > 0, k = 1, 2, \ldots n$, *uz oznaku* $P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$, $(2 \leq k \leq n)$ *tada vrijedi*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{P_n} - f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{P_n}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(y_k)}{P_n} - f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k y_k}{P_n}\right). \tag{2.4}$$

Ako je funkcija f strogo 3- *konveksna tada jednakost u (2.4) vrijedi ako i samo ako je* $x_1 = \cdots = x_n$.

(b) Ako za neprekidnu funkciju vrijedi (2.4) (strogo) za svaki n i za svakih $2n$ *točaka koje zadovoljavaju (2.3) i za sve* $p_k > 0$ *(*$1 \leq k \leq n$*), tada je funkcija f (strogo)* 3 *- konveksna.*

Dokaz. .
(a) Da ovo dokažemo dovoljno je za pretpostaviti $x_1 < \cdots < x_n \leq y_n < y_{n-1} < \cdots < y_1$. Dokaz slijedi indukcijom po n i prvo gledamo slučaj kada je $n = 2$. Raspišimo podijeljene razlike V_3 za brojeve $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$.

$$\begin{aligned}
(z_0 - z_3)V_3(f; z_0, z_1, z_2, z_3) &= V_2(f; z_0, z_1, z_2) - V_2(f; z_1, z_2, z_3) \\
(z_1 - z_4)V_3(f; z_1, z_2, z_3, z_4) &= V_2(f; z_1, z_2, z_3) - V_2(f; z_2, z_3, z_4) \\
(z_2 - z_5)V_3(f; z_2, z_3, z_4, z_5) &= V_2(f; z_2, z_3, z_4) - V_2(f; z_3, z_4, z_5).
\end{aligned}$$

Ako je $z_0 \geq z_3, z_1 \geq z_4, z_2 \geq z_5$ zbog 3 - konveksnosti funkcije f vrijedi da je

$$V_2(f; z_0, z_1, z_2) \geq V_2(f; z_1, z_2, z_3) \geq V_2(f; z_2, z_3, z_4) \geq V_2(f; z_3, z_4, z_5),$$

tj.

$$V_2(f; z_0, z_1, z_2) \geq V_2(f; z_3, z_4, z_5). \tag{2.5}$$

Stavimo u (2.5)

$$z_0 = y_1, \quad z_2 = y_2, \quad z_1 = \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2}{p_1 + p_2}, \quad z_3 = x_2, \quad z_5 = x_1, \quad z_4 = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}.$$

Uz pretpostavku da je $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ i $x_1 < x_2 \leq y_2 < y_1$ dobivamo

$$V_2(f; z_0, z_1, z_2) = \frac{f(z_0)}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} + \frac{f(z_1)}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)} + \frac{f(z_2)}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)}$$

$$= \frac{f(y_1)}{(y_1 - y_2)\left(y_1 - \frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2}\right)} + \frac{f\left(\frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2}\right)}{\left(\frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2} - y_1\right)\left(\frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2} - y_2\right)}$$

$$+ \frac{f(y_2)}{(y_2 - y_1)\left(y_2 - \frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2}\right)}$$

$$= \frac{f(y_1)}{(y_1 - y_2)(\frac{p_2(y_1 - y_2)}{p_1 + p_2})} + \frac{f\left(\frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2}\right)}{\left(\frac{p_2(y_2 - y_1)}{p_1 + p_2}\right)\left(\frac{p_1(y_1 - y_2}{p_1 + p_2}\right)} + \frac{f(y_2)}{(y_2 - y_1)(\frac{p_1(y_2 - y_1)}{p_1 + p_2})}$$

$$= \frac{(p_1 + p_2)}{(y_1 - y_2)^2}\left[\frac{1}{p_2}f(y_1) - \frac{(p_1 + p_2)}{p_1p_2}f\left(\frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2}\right) + \frac{1}{p_1}f(y_2)\right]$$

$$= \frac{(p_1 + p_2)^2}{(y_1 - y_2)^2}\frac{1}{p_1p_2}\left[\frac{p_1}{p_1 + p_2}f(y_1) - f(\frac{p_1y_1 + p_2y_2}{p_1 + p_2}) + \frac{p_2}{p_1 + p_2}f(y_2)\right] \tag{2.6}$$

i

$$V_2(f; z_3, z_4, z_5) = \frac{f(z_3)}{(z_3 - z_4)(z_3 - z_5)} + \frac{f(z_4)}{(z_4 - z_3)(z_4 - z_5)} + \frac{f(z_5)}{(z_5 - z_3)(z_5 - z_4)}$$

$$= \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)\left(x_2 - \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}\right)} + \frac{f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}\right)}{\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2} - x_2\right)\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2} - x_1\right)}$$

$$+ \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)\left(x_1 - \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}\right)}$$

$$= \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(\frac{p_2(x_2-x_1)}{p_1+p_2})} + \frac{f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}\right)}{\left(\frac{p_1(x_1-x_2)}{p_1+p_2}\right)\left(\frac{p_2(x_2-x_1}{p_1+p_2}\right)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-y_2)(\frac{p_2(x_1-y_2)}{p_1+p_2})}$$
$$= \frac{(p_1+p_2)}{(x_1-x_2)^2}\left[\frac{1}{p_1}f(x_2) - \frac{(p_1+p_2)}{p_1p_2}f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}\right) + \frac{1}{p_2}f(x_1)\right]$$
$$= \frac{(p_1+p_2)^2}{(x_1-x_2)^2}\frac{1}{p_1p_2}\left[\frac{p_2}{p_1+p_2}f(x_2) - f(\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}) + \frac{p_1}{p_1+p_2}f(x_1)\right]. \tag{2.7}$$

Primjenom jednakosti (2.6) i (2.7) slijedi (2.4).
Budući da je $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, slijedi da je $(y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2$, pa kad nejednakost $V_2(f; z_o, z_1, z_2) \geq V_2(f; z_3, z_4, z_5)$ pomnožimo s $\frac{(y_1-y_2)^2 p_1p_2}{(p_1+p_2)^2}$ upravo dobivamo nejednakost (2.4) za $n = 2$, tj.

$$\frac{p_1f(y_1)}{p_1+p_2} + \frac{p_2f(y_2)}{p_1+p_2} - f\left(\frac{p_1y_1+p_2y_2}{p_1+p_2}\right) \geq \frac{p_1f(x_1)}{p_1+p_2} + \frac{p_2f(x_2)}{p_1+p_2} - f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}\right).$$

Sada pretpostavimo da rezultat vrijedi za $n = 2, 3, \ldots, m-1$ i razmotrimo razliku

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} p_kf(x_k)}{P_m} - \frac{\sum_{k=1}^{m} p_kf(y_k)}{P_m}$$
$$= \left\{\frac{P_{m-1}}{P_m}\frac{\sum_{k=1}^{m-1} p_kf(x_k)}{P_{m-1}} + \frac{P_m}{P_m}f(x_m)\right\} - \left\{\frac{P_{m-1}}{P_m}\frac{\sum_{k=1}^{m-1} p_kf(y_k)}{P_{m-1}} + \frac{P_m}{P_m}f(y_m)\right\}$$
$$\leq \left\{\frac{P_{m-1}}{P_m}f\left(\sum_{k=1}^{m-1} p_kx_k/P_{m-1}\right) + \frac{p_m}{P_m}f(x_m)\right\} - \left\{\frac{P_{m-1}}{P_m}f\left(\sum_{k=1}^{m-1} p_ky_k/P_{m-1}\right) + \frac{p_m}{P_m}f(y_m)\right\}$$

ali za slučaj $n = 2$ zadnji izraz je manji ili jednak od

$$f\left(\sum_{k=1}^{m} p_kx_k/P_m\right) - f\left(\sum_{k=1}^{m} p_ky_k/P_m\right)$$

čime je dovršen dokaz o nejednakosti (2.4) u slučaju kada je $n = m$, pa prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 2$.
(b) Stavimo da je

$$n = 2,\ x_1 = x,\ x_2 = y_2 = x + \frac{3h}{2},\ y_1 = x + 3h,\ p_1 = 1,\ p_2 = 2.$$

Sume koje se pojavljuju u nejednakosti (2.4) glase

$$\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) = f(x) + 2f(x + \frac{3h}{2})$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k = p_1 x_1 + p_2 x_2 = x + 2(x + \frac{3h}{2}) = 3x + 3h = 3(x + h)$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 = 3$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k y_k = p_1 y_1 + p_2 y_2 = (x + 3h) + 2(x + \frac{3h}{2}) = 3x + 6h = 3(x + 2h)$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k f(y_k) = p_1 f(y_1) + p_2 f(y_2) = f(x + 3h) + 2f(x + \frac{3h}{2});$$

pa nejednakost (2.4) izgleda ovako

$$\frac{f(x) + 2f(x + \frac{3h}{2})}{3} - f\left(\frac{3(x+h)}{3}\right) \leq \frac{f(x+3h) + 2f(x + \frac{3h}{2})}{3} - f\left(\frac{3(x+2h)}{3}\right)$$

odnosno:

$$\frac{f(x+3h)}{3} - f(x+2h) + f(x+h) - \frac{f(x)}{3} \geq 0.$$

Podijelimo li tu nejednakost s $2h^3 > 0$ dobivamo

$$\frac{f(x+3h)}{6h^3} - \frac{f(x+2h)}{2h^3} + \frac{f(x+h)}{2h^3} - \frac{f(x)}{6h^3} \geq 0$$

tj. uz činjenice da je $h = (x+3h) - (x+2h)$, $h = (x+2h) - (x+h)$ i slično, dobivamo

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x+3h)}{((x+3h)-(x+2h))((x+3h)-(x+h))((x+3h)-x)} \\
+ \quad & \frac{f(x+2h)}{((x+2h)-(x+3h))((x+2h)-(x+h))((x+2h)-x)} \\
+ \quad & \frac{f(x+h)}{((x+h)-(x+3h))((x+h)-(x+2h))((x+h)-x)} \\
+ \quad & \frac{f(x)}{((x-(x+3h))((x-(x+2h))((x-(x+h))} \geq 0.
\end{aligned}$$

Izraz na lijevoj strani je upravo podijeljena razlika $V_3(f; x+3h, x+2h, x+h, x)$, tj. dobili smo da za svaki $x, h > 0$ vrijedi

$$V_3(f; x+3h, x+2h, x+h, x) \geq 0$$

tj. f je 3 - konveksna.

$\square$

Definicija 2.3. *Neka je $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ n-torka pozitivnih brojeva, te neka je $(w) = (w_1, \ldots, w_n)$ n-torka nenegativnih brojeva. Tada se r-ta sredina n-torke (a) s težinom (w) definira ovako:*

$$\begin{aligned}
M_n^{[r]}(a; w) &= \left(\frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^{n} a_i^r w_i \right)^{\frac{1}{r}} \quad (0 < |r| < +\infty) \\
M_n^{[0]}(a; w) &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i} \right)^{\dfrac{1}{W_n}} \quad (r = 0);
\end{aligned}$$

pri čemu je $W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Ako je $r = 1, 0$ tada koristimo zapis

$$M_n^{[1]}(a; w) = A_n(a; w) \;\; \text{(aritmetička sredina)}$$

$$M_n^{[0]}(a; w) = G_n(a; w) \text{ (geometrijska sredina).}$$

Uz ovaj zapis nejednakost (2.4) postaje

$$A_n(f(x); p) - f(A_n(x; p) \leq (A_n(f(y); p) - f(A_n(y; p)) \tag{2.8}$$

gdje je $(f(a)) = (f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

Budući da je A_n samo jedna specijalna sredina, ovaj zapis potiče pitanje može li se A_n zamijeniti s bilo kojom sredinom $M_n^{[r]}$. Odgovor na to pitanje je dan u sljedećem korolaru.

Korolar 2.4. *Neka je s realan broj i (a) i (b) n- torke pozitivnih brojeva koje zadovoljavaju*

$$\max(a_1, \ldots, a_n) \leq \min(b_1, \ldots, b_n),$$

$$a_1^s + b_1^s = \cdots = a_n^s + b_n^s \quad (s \neq 0), \quad a_1 b_1 = \cdots = a_n b_n \quad (s = 0)$$

te neka je (p) još jedna n- torka pozitivnih brojeva.

(i) Ako je $0 \leq t < s$, $t > 2s \geq 0$, $s < t < 0$ ili $t < 2s < 0$ tada vrijedi

$$[(M_n^{[t]}(a; p)]^t - [(M_n^{[s]}(a; p)]^t \leq [(M_n^{[t]}(b; p)]^t - [(M_n^{[s]}(b; p)]^t \quad (t \neq 0), \tag{2.9}$$

$$\frac{G_n(a; p)}{M_n^{[s]}(a; p)} \leq \frac{G_n(b; p)}{M_n^{[s]}(b; p)} \quad (t = 0). \tag{2.10}$$

(ii) Ako je $t < 0 \leq s$, $0 < s < t < 2s$, $s < 0 \leq t$, ili $2s < t < s < 0$ vrijede suprotne nejednakosti u (2.9) i (2.10).
Jednakost se javlja ako i samo ako vrijedi $a_1 = \cdots = a_n$.

Dokaz. Ovi rezultati slijede iz prethodnog teorema za specijalne funkcije f.
Stavljanjem $f(x) = x^{t/s}$ $(0 < \frac{t}{s} < 1$, ili $\frac{t}{s} > 2)$ u (2.4) i

$$x_i = a_i^s, \;\; y_i = b_i^s \;\; (1 \leq i \leq n)$$

članovi nejednakosti (2.4) se svode na:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^s}{P_n} = \left(M_n^{[s]}(a;p)\right)^s$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k ((a_k)^s)^{\frac{t}{s}}}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^t}{P_n} = \left(M_n^{[t]}(a;p)\right)^t$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k y_k}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k b_k^s}{P_n} = \left(M_n^{[s]}(b;p)\right)^s$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(y_k)}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k ((b_k)^s)^{\frac{t}{s}}}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k b_k^t}{P_n} = \left(M_n^{[t]}(b;p)\right)^t.$$

Konačno (2.4) postaje

$$(M_n^{[t]}(a;p))^t - f(M_n^{[s]}(a;p)^s) \leq (M_n^{[t]}(b;p))^t - f(M_n^{[s]}(b;p)^s)$$

tj. uz $f(x) = x^{\frac{t}{s}}$ imamo

$$(M_n^{[t]}(a;p))^t - (M_n^{[s]}(a;p))^{s\cdot\frac{t}{s}} \leq (M_n^{[t]}(b;p))^t - (M_n^{[s]}(b;p))^{s\cdot\frac{t}{s}}$$
$$(M_n^{[t]}(a;p))^t - (M_n^{[s]}(a;p))^t \leq (M_n^{[t]}(b;p))^t - (M_n^{[s]}(b;p))^t,$$

u slučaju kad je $0 < t < s$, $t > 2s > 0$, $s < t < 0$ i $t < 2s < 0$.
U slučaju da je $t = 0, s > 0$ nejednakost (2.10) slijedi uzimanjem funkcije $f(x) = \frac{1}{s}\ln x$ i upotrebom iste supstitucije za $x_i,\ y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ kao gore:

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{P_n} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{s}\ln a_i^s}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{s}\cdot s\ln a_i}{P_n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln a_i}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln a_i^{p_i}}{P_n} = \frac{\ln(a_1^{p_1} a_2^{p_2}\ldots a_n^{p_n})}{P_n} = \ln G_n(a;p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} p_k x_k}{P_n} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_k a_k^s}{P_n} \\
f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_k x_k}{P_n}\right) &= \frac{1}{s}\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_k a_k^s}{P_n}\right) = \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_k a_k^s}{P_n}\right)^{\frac{1}{s}} = \ln M_n^{[s]}(a;p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i)}{P_n} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{s}\ln b_i^s}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{s}\cdot s\ln b_i}{P_n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln b_i}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln b_i^{p_i}}{P_n} = \frac{\ln(b_1^{p_1} b_2^{p_2}\dots b_n^{p_n})}{P_n} = \ln G_n(b;p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} p_k y_k}{P_n} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_k b_k^s}{P_n} \\
f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_k y_k}{P_n}\right) &= \frac{1}{s}\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_k b_k^s}{P_n}\right) = \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_k b_k^s}{P_n}\right)^{\frac{1}{s}} = \ln M_n^{[s]}(b;p)
\end{aligned}$$

Konačno (2.4) postaje

$$\ln G_n(a;p) - \ln M_n^{[s]}(a;p) \leq \ln G_n(b;p) - \ln M_n^{[s]}(b;p)$$

$$\ln\frac{G_n(a;p)}{M_n^{[s]}(a;p)} \leq \ln\frac{G_n(b;p)}{M_n^{[s]}(b;p)}$$

$$\frac{G_n(a;p)}{M_n^{[s]}(a;p)} \leq \frac{G_n(b;p)}{M_n^{[s]}(b;p)}$$

Konačno ako je $f(x) = e^{tx}, t > 0$ i $x_i = \ln a_i, y_i = \ln b_i$ $(1 \le i \le n)$ tada se članovi nejednakosti (2.4) svode na:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \ln a_k}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln a_k^{p_k}}{P_n} = \ln G_n(a;p)$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k (e^{tx})}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k (e^{t\ln a_k})}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^t}{P_n} = \left(M_n^{[t]}(a;p)\right)^t$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k y_k}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \ln b_k}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln b_k^{p_k}}{P_n} = \ln G_n(b;p)$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(y_k)}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k (e^{tx})}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k (e^{t\ln b_k})}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k b_k^t}{P_n} = \left(M_n^{[t]}(b;p)\right)^t$$

Konačno (2.4) postaje

$$(M_n^{[t]}(a;p))^t - f(\ln G_n(a;p)) \le (M_n^{[t]}(b;p))^t - f(\ln G_n(b;p))$$

tj. uz $f(x) = e^{tx}$ imamo

$$(M_n^{[t]}(a;p))^t - e^{t\ln G_n(a;p)} \le (M_n^{[t]}(b;p))^t - e^{t\ln G_n(b;p)}$$
$$(M_n^{[t]}(a;p))^t - (G_n(a;p))^t \le (M_n^{[t]}(b;p))^t - (G_n(b;p))^t,\ s = 0$$

tj.

$$(M_n^{[t]}(a;p))^t - (M_n^{[0]}(a;p))^t \le (M_n^{[t]}(b;p))^t - (M_n^{[0]}(b;p))^t.$$

□

Poglavlje 3

Promjena uvjeta za točke

Kao što smo već uočili, u originalnoj Levinsonovoj nejednakosti točke se biraju tako da suma odgovarajućih točaka jednaka 1. No, taj se uvjet može oslabiti.

J. Pečarić je u svom radu [8] razmatrao Levinsonovu nejednakost ali uz nešto slabije uvjete na izbor točaka $x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Pokazao je da vrijedi ovaj teorem.

Teorem 3.1. *Neka je funkcija f realna, 3 - konveksna na intervalu [a, b], $p_i > 0$ $(0 \leq i \leq n)$ i x_k, y_k $(0 \leq k \leq n)$ $2n + 2$ točaka iz intervala [a, b] tako da vrijedi*

$$x_0 + y_0 = x_1 + y_1 = \cdots = x_n + y_n = 2c \tag{3.1}$$

i

$$x_{2k} + x_{2k+1} \leq 2c, \frac{p_{2k}x_{2k} + p_{2k+1}x_{2k+1}}{p_{2k} + p_{2k+1}} \leq c \quad \left(k = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

$\left(\text{ako je } n \text{ paran tada vrijedi } x_{n+1} = \dfrac{p_{n-2}x_{n-2} + p_{n-1}x_{n-1}}{p_{n-2} + p_{n-1}},\ p_{n+1} = p_{n-2} + p_{n-1}\right).$
Tada vrijedi

$$\frac{1}{P_n}\sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=0}^{n} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=0}^{n} p_i f(y_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=0}^{n} p_i y_i\right). \tag{3.2}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n i prvo dokazujemo slučaj za $n = 1$.
Budući da je funkcija f 3 - konveksna tada iz

$$(x_0 - x_r)V_r(f; x_0, \ldots, x_r) = V_{r-1}(f; x_0, \ldots, x_{r-1}) - V_{r-1}(f; x_1, \ldots, x_r),$$

za $r = 3$, za $z_0 > z_3$ vrijedi $V_2(f; z_0, z_1, z_2) \geq V_2(f; z_1, z_2, z_3)$.

Postupajući kao u dokazu Bullenovog teorema dobivamo da vrijedi

$$V_2(f; z_0, z_1, z_2) \geq V_2(f; z_3, z_4, z_5) \tag{3.3}$$

ako je $z_0 > z_3, z_1 > z_4, z_2 > z_5$.
Neka je

$$z_0 = y_0,\ z_2 = y_1,\ z_1 = \frac{p_0 y_0 + p_1 y_1}{p_0 + p_1},\ z_3 = x_1,\ z_5 = x_0,\ z_4 = \frac{p_0 x_0 + p_1 x_1}{p_0 + p_1}.$$

Tada (3.3) postaje (3.2) za $n = 1$, ako je zadovoljeno $x_0 + y_0 = x_1 + y_1 = 2c$,

$x_0 + x_1 \leq 2c,\ \dfrac{p_0 x_0 + p_1 x_1}{p_0 + p_1} \leq c.$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = m$.
Neka je m neparan. Tada je $\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor = \dfrac{m-1}{2}$.
Tada za $n = m$ vrijedi (3.2) uz pretpostavke $x_0 + y_0 = \cdots = x_m + y_m = 2c$ i

$$x_{2k} + x_{2k+1} \leq 2c,\ \frac{p_{2k} x_{2k} + p_{2k+1} x_{2k+1}}{p_{2k} + p_{2k+1}} \leq c \tag{3.4}$$

za svaki $k = 0, 1, \ldots, \dfrac{m-1}{2}$.

Korištenjem supstitucije:
$x_i \to x_i, \quad y_i \to y_i \quad p_i \to p_i \quad (1 \leq i \leq m-2), \quad x_{m-1} \to \dfrac{p_{m-1} x_{m-1} + p_m x_m}{p_{m-1} + p_m},$

$p_{m-1} \to p_{m-1} + p_m, \quad x_m \to x_{m+1}, \quad p_m \to p_{m+1}, \quad x_{m+1} + y_{m+1} = 2c$

prema (3.2) za $n = m$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&P_{m+1}\left(f\left(\frac{1}{P_{m+1}}\sum_{i+0}^{m+1} p_i x_i\right) - f\left(\frac{1}{P_{m+1}}\sum_{i=0}^{m+1} p_i y_i\right)\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{m-2} p_i(f(x_i) - f(y_i)) + p_{m+1}(f(x_{m+1}) - f(y_{m+1})) \\
&+(p_{m+1} + p_m)\left(f\left(\frac{p_{m-1}x_{m-1} + p_m x_m}{p_{m-1} + p_m}\right) - f\left(\frac{p_{m-1}y_{m-1} + p_m y_m}{p_{m-1} + p_m}\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

uz pretpostavku da je (3.4) zadovoljeno za svaki

$$k = 0, 1, \dots, \frac{m-3}{2},$$

$$x_0 + y_0 = x_1 + y_1 = \dots = \frac{p_{m-1}(x_{m-1} + y_{m-1}) + p_m(x_m + y_m)}{p_{m-1} + p_m} = x_{m+1} + y_{m+1},$$

i ako

$$\frac{p_{m-1}x_{m-1} + p_m x_m}{p_{m-1} + p_m} + x_{m+1} \leq 2c, \frac{p_{m-1}x_{m-1} + p_m x_m + p_{m+1}x_{m+1}}{p_{m-1} + p_m + p_{m+1}} \leq c.$$

I ako još vrijedi

$$x_{m-1} + y_{m-1} = x_m + y_m, \; x_{m-1} + x_m \leq 2c \quad i \quad \frac{p_{m-1}x_{m-1} + p_m x_m}{p_{m-1} + p_m} \leq c,$$

tada prema (3.5) dobivamo (3.2) za $n = m + 1$.

Sada, neka je m paran. Tada za $n = m$ vrijedi (3.2) ako je $x_0 + y_0 = \dots = x_m + y_m = 2c$, ako (3.4) vrijedi za $k = 0, 1, \dots, \frac{m-2}{2}$ i ako

$$x_m + \frac{p_{m-2}x_{m-2} + p_{m-1}x_{m-1}}{p_{m-2} + p_{m-1}} \leq 2c, \frac{p_{m-2}x_{m-2} + p_{m-1}x_{m-1} + p_m x_m}{p_{m-2} + p_{m-1} + p_m} \leq c.$$

Uz supstituciju

$x_m \to \dfrac{p_m x_m + p_{m+1}x_{m+1}}{p_m + p_{m+1}}$, $p_m \to p_m + p_{m+1}$, prema (3.2) za $n = m$ dobivamo

$$\begin{aligned} P_{m+1}\left(f\left(\frac{1}{P_{m+1}}\sum_{i+0}^{m+1} p_i x_i\right) - f\left(\frac{1}{P_{m+1}}\sum_{i=0}^{m+1} p_i y_i\right)\right) &\geq \sum_{i=1}^{m-1} p_i(f(x_i) - f(y_i)) \\ +(p_m + p_{m+1})\left(f\left(\frac{p_m x_m + p_m x_{m+1}}{p_m + p_{m+1}}\right) - f\left(\frac{p_m y_m + p_{m+1}y_{m+1}}{p_m + p_{m+1}}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

prema pretpostavci $x_0 + y_0 = \dots = x_{m-1} + y_{m-1} = \dfrac{p_m(x_m + y_m) + p_{m+1}(x_{m+1} + y_{m+1})}{p_m + p_{m+1}}$, (3.4) vrijedi za $k = 0, 1, \dots, \dfrac{m-2}{2}$ i ako vrijedi

$$\frac{p_m x_m + p_{m+1}x_{m+1}}{p_m + p_{m+1}} + \frac{p_{m-2}x_{m-2} + p_{m-1}x_{m-1}}{p_{m-2} + p_{m-1}} \leq 2c, \frac{p_{m-2}x_{m-2} + \dots + p_{m+1}x_{m+1}}{p_{m-2} + \dots + p_{m+1}} \leq c. \tag{3.7}$$

Ako (3.4) vrijedi za $k = \frac{m}{2}$ i ako $x_m + y_m = x_{m+1} + y_{m+1}$ tada iz (3.6) dobivamo (3.2) za $n = m + 1$ (u ovom slučaju je (3.7) uvijek zadovoljeno).

$\square$

Iz prethodnog teorema slijedi:

Teorem 3.2. *Neka je funkcija f realna, 3 - konveksna na intervalu $[a, b]$, $p_i > 0$ $(0 \leq i \leq n)$ i x_k, y_k $(0 \leq k \leq n)$ $2n + 2$ točaka iz intervala $[a, b]$ tako da vrijedi*

$$x_0 + y_0 = x_1 + y_1 = \cdots = x_n + y_n = 2c \tag{3.8}$$

i

$$x_i + x_{n-i} \leq 2c, \quad \frac{p_i x_i + p_{n-i} x_{n-i}}{p_i + p_{n-i}} \leq c \quad (0 \leq i \leq n).$$

Tada vrijedi (3.2).
Ako su težine p_i sve jednake 1, tada se Levinsonova nejednakost (3.2) svodi na

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) - f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(y_i) - f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i\right) \tag{3.9}$$

uz pretpostavke (3.8) i ako je $x_i + x_{n-i} \leq 2c \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$.

A.McD.Mercer je u svom radu [7] dokazao sljedeću generalizaciju Levinsonove nejednakosti.

Teorem 3.3. *Neka su* (x) *i* (y) *n-torke pozitivnih brojeva pri čemu je* $\max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \min\{y_1, \ldots, y_n\}$. *Neka je* $w_k > 0$ *za* $k = 1, 2, \ldots, n$ *pri čemu je* $\sum w_k = 1$.
Uz oznake $A_1 = \sum w_k x_k$ *i* $A_2 = \sum w_k y_k$, *pretpostavimo da vrijedi*

$$\sum w_k(x_k - A_1)^2 = \sum w_k(y_k - A_2)^2. \tag{3.10}$$

Tada za bilo koju funkciju f *za koju je* $f''' \geq 0$ *na intervalu koji sadrži sve* x_k *i* y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ *vrijedi*

$$\sum w_k f(x_k) - f(A_1) \leq \sum w_k f(y_k) - f(A_2).$$

Dokaz. Neka je

$$J(\lambda) = \sum w_k f(\lambda x_k + (1-\lambda)A_1) - \sum w_k f(\lambda y_k + 1(1-\lambda)A_2).$$

Tada je

$$J'(\lambda) = \sum w_k(x_k - A_1)f'(\lambda x_k + (1-\lambda)A_1) - \sum w_k(y_k - A_2)f'(\lambda y_k + (1-\lambda)A_2)$$

i

$$J''(\lambda) = \sum w_k(x_k - A_1)^2 f''(\lambda x_k + (1-\lambda)A_1) - \sum w_k(y_k - A_2)^2 f''(\lambda y_k + (1-\lambda)A_2) \tag{3.11}$$

odnosno,

$$J''(\lambda) = \left[\sum w_k(x_k - A_1)^2\right] f''(\alpha) - \left[\sum w_k(y_k - A_2)^2\right] f''(\beta),$$

pri čemu su $\alpha \in \text{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $\beta \in \text{span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, zato što su svi faktori u svakoj sumi u (3.11) pozitivni. Ovdje α i β ovise o λ, x_k i λ, y_k, redom, i $\alpha < \beta$.
Budući da je $f''' \geq 0$ tada $f''(\alpha) < f''(\beta)$ i budući da prema pretpostavci također vrijedi $\sum w_k(x_k - A_1)^2 = w_k(y_k - A_2)^2$, tada $J'' < 0$ i J' je padajuća. Dakle,

$$J'(0) = 0 > J'(\lambda) \quad za \quad 0 < \lambda < 1.$$

Budući je $J(\lambda)$ padajuća funkcija imamo da je $J(1) < J(0)$, tj.

$$\sum w_k f(x_k) - \sum w_k f(y_k) < \sum w_k f(A_1) - \sum w_k f(A_2) = f(A_1) - f(A_2)$$

i time je teorem dokazan. □

Zanimljivo je da se uvjet da su zbrojevi $x_i + y_i$ međusobno jednaki može zamijeniti uvjetom da su im razlike jednake. Taj rezultat je dan u članku [9] i glasi ovako:

Teorem 3.4. *(a) Neka je funkcija f realna, 3- konveksna na intervalu [a, b] i x_k, y_k ($1 \leq k \leq n$) $2n$ točaka iz intervala [a, b] tako da vrijedi*

$$y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \cdots = y_n - x_n > 0 \tag{3.12}$$

i neka je $p_k > 0, k = 1, 2, \ldots n$, tada vrijedi (2.4). Ako je funkcija f strogo 3- konveksna tada jednakost u (2.4) vrijedi ako i samo ako je $x_1 = \cdots = x_n$.

(b) Ako za neprekidnu funkciju f vrijedi (2.4) (strogo) za svaki n i za svakih $2n$ točaka koje zadovoljavaju (3.12) i za sve $p_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$), tada je funkcija f (strogo) 3 - konveksna.

Dokaz. .
(a) Dokaz provodimo indukcijom po n i prvo dokazujemo slučaj za $n = 2$.
Kao u dokazu teorema (2.2) dokaže se da za $z_0 > z_3, z_1 > z_4, z_2 > z_5$, vrijedi

$$V_2(f; z_0, z_1, z_2) \geq V_2(f; z_3, z_4, z_5).$$

Kad se u tu nejednakost uvrsti

$$z_0 = y_1,\ z_2 = y_2,\ z_1 = \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2}{p_1 + p_2},\ z_3 = x_1,\ z_5 = x_2,\ z_4 = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}$$

na lijevoj strani, tj. u izrazu $V_2(f; z_0, z_1, z_2)$ u nazivniku se dobije $(y_1 - y_2)^2$, a na desnoj strani, tj. u izrazu $V_2(f; z_3, z_4, z_5)$ se dobije $(x_1 - x_2)^2$. Po pretpostavci vrijedi $y_1 - x_1 = y_2 - x_2$, tj. $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$, pa se izrazi $(y_1 - y_2)^2$ i $(x_1 - x_2)^2$ u lijevoj i desnoj strani nejednakosti krate i ono što ostane je upravo Levinsonova nejednakost (2.4) za $n = 2$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2, 3, \ldots, m - 1$.
Korištenjem supstitucije

$$x_1 \to \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{i=1}^{m-1} p_i x_i, \quad x_2 \to x_m, \quad y_1 \to \frac{1}{P_{m-1}} \sum_{i=1}^{m-1} p_i y_i$$
$$y_2 \to y_m, \quad p_1 \to P_{m-1}, \quad p_2 \to p_m$$

prema (2.4) za $n = 2$ dobivamo

$$f\left(\frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i y_i\right) - f\left(\frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_m} P_{m-1} f\left(\frac{1}{P_{m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} p_i y_i\right)$$
$$-f\left(\frac{1}{P_{m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} p_i x_i\right) + p_m\left(f\left(y_m\right) - f\left(x_m\right)\right) \leq \frac{1}{P_m}\sum_{i=1}^{m} p_i\left(f\left(y_i\right) - f\left(x_i\right)\right)$$

gdje smo koristili pretpostavku indukcije za $n = m - 1$.
Iz $y_1 - x_1 = \cdots = y_{m-1} - x_{m-1} > 0$ i

$$\frac{1}{P_{m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} p_i y_i - \frac{1}{P_{m-1}}\sum_{i=1}^{m-1} p_i x_i = y_m - x_m > 0$$

dobivamo da vrijedi $y_1 - x_1 = \cdots = y_m - x_m > 0$ čime je dovršen dokaz o nejednakosti (2.4) u slučaju kada je $n = m$, pa prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki n.
(b) Stavimo da je $n = 2, x_1 = x, x_2 = x + 2h, y_1 = x + h, y_2 = x + 3h, p_1 = p_2 = 1, (h > 0)$, tada se nejednakost (2.4) reducira na

$$V_3(f; x + 3h, x + 2h, x + h, x) \geq 0.$$

Poznato je da ako ovo vrijedi za sve $x, h > 0$ (strogo vrijedi) tada funkcija f je 3 - konveksna (strogo 3 - konveksna).

$\square$

Poglavlje 4

Daljnji rezultati

U ovom poglavlju dajemo rezultat u kojem je razlika lijeve i desne strane Levinsonove nejednakosti izražena kao produkt istovrsne razlike za polinom x^3 i treće derivacije funkcije f u jednoj točki domene. Prije iskaza teorema, dokazat ćemo jedan rezultat neovisan o Levinsonovoj nejednakosti.

Lema 4.1. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ takva da je njezina treća derivacija neprekidna na $[a, b]$ i neka je $m = \min f'''$ i $M = \max f'''$. Funkcije ϕ_1 i ϕ_2 definirane kao:*

$$\phi_1(t) = \frac{M}{6}t^3 - f(t), \tag{4.1}$$

$$\phi_2(t) = f(t) - \frac{m}{6}t^3 \tag{4.2}$$

su 3 - konveksne funkcije.

Dokaz. Derivirajmo funkciju ϕ_1:

$$\begin{aligned}
\phi_1'(t) &= \frac{3M}{6}t^2 - f'(t) \\
\phi_1''(t) &= \frac{6M}{6}t - f''(t) \\
\phi_1'''(t) &= M - f'''(t).
\end{aligned}$$

Budući da je $M = \max f'''$ slijedi da je $\phi_1'''(t) \geq 0$ pa zaključujemo da je $\phi_1(t)$ 3 - konveksna funkcija.

Za funkciju ϕ_2 vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\phi_2^{'}(t) &= f^{'}(t) - \frac{3m}{6}t^2 \\
\phi_2^{''}(t) &= f^{''}(t) - \frac{6m}{6}t \\
\phi_2^{'''}(t) &= f^{'''}(t) - m.
\end{aligned}
$$

Budući da je $m = \min f^{'''}$ slijedi da je $\phi_2^{'''}(t) \geq 0$ pa zaključujemo da je $\phi_2(t)$ 3 - konveksna funkcija.

□

Teorem 4.2. *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ takva da je njezina treća derivacija $f^{'''}$ neprekidna na $[a, b]$. Tada za $x_i > 0$ i $p_i > 0$ postoji $\xi \in [a, b]$ tako da sljedeća jednakost vrijedi*

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \\
& + \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(2a - x_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a - x_i)\right) \\
& = \frac{f^{'''}(\xi)}{6}\left[\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^3 - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^3 + \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a - x_i)^3 - \left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a - x_i)\right)^3\right].
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Dokaz. Budući da je $f^{'''}$ neprekidna na segmentu, ona na njemu poprima minimum i maksimum koje označimo redom s m i M, tj. $\min f^{'''} = m$, $\max f^{'''} = M$.
Primjenom Levinsonove nejednakosti 1.2 na funkciju ϕ_1 definiranu u Lemi 4.1, dobivamo sljedeću nejednakost:

$$
\begin{aligned}
& \frac{M}{6}\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^3 - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \\
& \qquad - \frac{M}{6}\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^3 + f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \\
& \leq \frac{M}{6}\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a - x_i)^3 - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(2a - x_i) \\
& \qquad - \frac{M}{6}\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a - x_i)\right)^3 + f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a - x_i)\right).
\end{aligned}
$$

Prebacivanjem na lijevu stranu $\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(2a-x_i)$ i $f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)$ te $\frac{M}{6}\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^3$ i $\frac{M}{6}\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^3$ na desnu stranu dobivamo nejednakost:

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)-\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)\\
&\qquad+\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(2a-x_i)-f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)\\
&\leq \frac{M}{6}\left[\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^3-\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^3\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)^3-\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)^3\right].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Analogno postupimo i s funkcijom ϕ_2. Dobivamo sljedeću nejdnakost:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)-\frac{m}{6}\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^3\\
&\qquad-f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)+\frac{m}{6}\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^3\\
&\leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(2a-x_i)-\frac{m}{6}\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)^3\\
&\qquad-f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)+\frac{m}{6}\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)^3.
\end{aligned}$$

Prebacivanjem na lijevu stranu $\frac{m}{6}\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)^3$ i $\frac{m}{6}\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)^3$ te

$\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ i $f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$ na desnu stranu dobivamo nejednakost:

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{6}\Bigg[\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^3 - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^3 \\
&\qquad + \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)^3 - \left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)^3\Bigg] \\
&\leq f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \\
&\qquad + \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(2a-x_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Kombinirajući ove dvije nejednakosti (4.4) i (4.5) dobivamo

$$m \leq \frac{f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(2a-x_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)}{\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^3 - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^3 + \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)^3 - \left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i(2a-x_i)\right)^3\right]} \leq M,$$

tj. taj kvocijent je neki ρ iz segmenta $[m, M]$.

Budući da je f''' neprekidna na segmentu $[a, b]$ kojega, prema Bolzano - Weierstrassovom teoremu, preslikava na $[m, M]$, slijedi da postoji $\xi \in [a, b]$ tako da je $f'''(\xi) = \rho$, što je upravo (4.3). $\square$

Poglavlje 5

Promjena uvjeta za funkciju

U prethodnim poglavljima promatrana funkcija je bila 3 - konveksna. Sada ćemo promatrati Levinsonov tip nejednakosti za druge klase funkcija.

Definicija 5.1. *Neka je funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *i* $c \in (a, b)$.
Kažemo da je $f \in \mathcal{K}_1^c(a, b)$ *ako postoji konstanta A tako da je funkcija* $F(x) = f(x) - \frac{A}{2}x^2$ *konkavna na* $(a, c]$ *i konveksna na* $[c, b)$.
Kažemo da je $f \in \mathcal{K}_2^c(a, b)$ *ako postoji konstanta A tako da je funkcija* $F(x) = f(x) - \frac{A}{2}x^2$ *konveksna na* $(a, c]$ *i konkavna na* $[c, b)$.

Teorem 5.2. *Neka je* $a < x_i \leq c \leq y_i < b,\ p_i > 0$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ *i vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(y_i - \bar{y})^2 \tag{5.1}$$

pri čemu je $\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ *i* $\bar{y} = \sum_{i=1}^n p_i y_i$.

Ako je $f \in \mathcal{K}_1^c(a, b)$ *tada nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i) - f(\bar{y}) \tag{5.2}$$

vrijedi i ako je $f \in \mathcal{K}_2^c(a, b)$ *tada (5.2) vrijedi sa obrnutim znakom nejednakosti.*

Dokaz. Za $0 \leq t \leq 1$, neka je $x_i(t) = \bar{x} + t(x_i - \bar{x})$ i $y_i(t) = \bar{y} + t(y_i - \bar{y})$.
Definiramo funkciju

$$U(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i(t)) - f(\bar{y}) - \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i(t)) + f(\bar{x}).$$

Prvo ćemo pokazati ako je $f \in \mathcal{K}_1^c(a,b)$ tada je funkcija U konveksna.
Neka je $t_1, t_2, t_3 \in [0,1], t_i \neq t_j$ za $i \neq j$, i $x_i \neq \bar{x}$. Kako je $F(x) = f(x) - \frac{A}{2}x^2$ konkavna na $(a,c]$

$$
\begin{aligned}
0 \geq V[F; x_i(t_1), x_i(t_2), x_i(t_3)] &= \frac{F(x_i(t_1))}{(x_i(t_1) - x_i(t_2))(x_i(t_1) - x_i(t_3))} \\
+\frac{F(x_i(t_2))}{(x_i(t_2) - x_i(t_3))(x_i(t_2) - x_i(t_1))} &+ \frac{F(x_i(t_3))}{(x_i(t_3) - x_i(t_1))(x_i(t_3) - x_i(t_2))} \\
= \frac{f(x_i(t_1)) - \frac{A}{2}(x_i(t_1))^2}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(x_i - \bar{x})^2} &+ \frac{f(x_i(t_2)) - \frac{A}{2}(x_i(t_2))^2}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)(x_i - \bar{x})^2} \\
+\frac{f(x_i(t_3)) - \frac{A}{2}(x_i(t_3))^2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(x_i - \bar{x})^2}
\end{aligned}
$$

Prema tome

$$
\frac{f(x_i(t_1))}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{f(x_i(t_2))}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} + \frac{f(x_i(t_3))}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}
$$

$$
-\frac{A}{2}\left[\frac{(x_i(t_1))^2}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{(x_i(t_2))^2}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} + \frac{(x_i(t_3))^2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}\right] \leq 0 \tag{5.3}
$$

vrijedi za $x_i \neq \bar{x}$. Ako $x_i = \bar{x}$ tada (5.3) također vrijedi tako da je lijeva strana jednaka nuli. Slično, kako je F konveksna na $[c,b)$ nejednakost

$$
\frac{f(y_i(t_1))}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{f(y_i(t_2))}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} + \frac{f(y_i(t_3))}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}
$$

$$
-\frac{A}{2}\left[\frac{(y_i(t_1))^2}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{(y_i(t_2))^2}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} + \frac{(y_i(t_3))^2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}\right] \geq 0 \tag{5.4}
$$

vrijedi za svaki y_i i različite točke $t_1, t_2, t_3 \in [0,1]$.

Razmotrimo

$$
\begin{aligned}
V[U;t_1,t_2,t_3] &= \frac{U(t_1)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{U(t_2)}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{U(t_3)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \\
&= \frac{1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\left(\sum_{i=1}^n p_i f(y_i(t_1)) - f(\bar{y}) - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i(t_1)) + f(\bar{x})\right) \\
&+ \frac{1}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)}\left(\sum_{i=1}^n p_i f(y_i(t_2)) - f(\bar{y}) - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i(t_2)) + f(\bar{x})\right) \\
&+ \frac{1}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\left(\sum_{i=1}^n p_i f(y_i(t_3)) - f(\bar{y}) - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i(t_3)) + f(\bar{x})\right) \\
&= \sum_{i=1}^n p_i \left[\frac{f(y_i(t_1))}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{f(y_i(t_2))}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{f(y_i(t_3))}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right] \\
&- \sum_{i=1}^n p_i \left[\frac{f(x_i(t_1))}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{f(x_i(t_2))}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{f(x_i(t_3))}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right] \\
&- (f(\bar{y}) - f(\bar{x}))\left[\frac{1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{1}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{1}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right] \\
&= \sum_{i=1}^n p_i \left[\frac{f(y_i(t_1))}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{f(y_i(t_2))}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{f(y_i(t_3))}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right. \\
&- \left.\frac{A}{2}\left(\frac{(y_i(t_1))^2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{(y_i(t_2))^2}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{(y_i(t_3))^2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right)\right] \\
&+ \frac{A}{2}\sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{(y_i(t_1))^2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{(y_i(t_2))^2}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{(y_i(t_3))^2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right) \\
&+ \sum_{i=1}^n p_i \left[\frac{A}{2}\left(\frac{(x_i(t_1))^2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{(x_i(t_2))^2}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{(x_i(t_3))^2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right)\right. \\
&- \left.\frac{f(x_i(t_1))}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{f(x_i(t_2))}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{f(x_i(t_3))}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right] \\
&- \frac{A}{2}\sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{(x_i(t_1))^2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{(x_i(t_2))^2}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{(x_i(t_3))^2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right) \\
&\geq \frac{A}{2}\sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{(y_i(t_1))^2 - (x_i(t_1))^2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \frac{(y_i(t_2))^2 - (x_i(t_2))^2}{(t_2-t_3)(t_2-t_1)} + \frac{(y_i(t_3))^2 - (x_i(t_3))^2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\right)
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz (5.3) i (5.4).

Primjetimo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i(t_j)^2 &= \sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{x}^2 + 2t_j\bar{x}(x_i - \bar{x}) + t_j^2(x_i - \bar{x})^2) \\ &= \bar{x}^2 + t_j^2 \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x})^2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

i slično,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i(t_j)^2 = \bar{y}^2 + t_j^2 \sum_{i=1}^{n} p_i(y_i - \bar{y})^2. \tag{5.7}$$

Oduzimanjem (5.6) od (5.7) i uzimajući u obzir pretpostavku (5.1) dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(y_i(t_j)^2 - x_i(t_j)^2) = \bar{y}^2 - \bar{x}^2,$$

tako da je zadnji redak u (5.5) jednak

$$\frac{A}{2}(\bar{y}^2 - \bar{x}^2)\left[\frac{1}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{1}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} + \frac{1}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}\right] = 0.$$

Dakle, $V[U; t_1, t_2, t_3] \geq 0$ za svaki izbor od t_j, $j = 1, 2, 3$, pa je funkcija U konveksna.

Pokažimo da je desna strana derivacije funkcije U u nuli nenegativna.
Prvo, budući da je $F(x) = f(x) - \frac{A}{2}x^2$ konkavna na $(a, c]$ i konveksna na $[c, b)$, obje funkcije F'_- i F'_+ postoje i nerastuće su na (a, c) za $F'_- \geq F'_+$ i nerastuće na (c, b) za $F' \leq F'_1$.
Kako je $x \mapsto \frac{A}{2}x^2$ diferencijabilna, f' i f'_1 također postoje i vrijedi

$$F'_-(x) = f'_-(x) - Ax \quad i \quad F'_+(x) = f'_-(x) - Ax.$$

Budući da $t \searrow 0$ izraz $y_i(t) = \bar{y} + t(y_i - \bar{y})$ povećava (smanjuje) prema $\bar{y}$ za $y_i < \bar{y}(y_i > \bar{y})$ i $y_i(t) \equiv \bar{y}$ kada $y_i = \bar{y}$.

Analogno, tvrdnja vrijedi za $x_i(t)$ i $\bar{x}$. Budući je $U(0) = 0$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
U'_{+}(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{U(t)}{t} &= \lim_{t \searrow 0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f(y_i(t)) - f(\bar{y})}{t} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f(x_i(t)) - f(\bar{x})}{t} \right] \\
&= \lim_{t \searrow 0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f(\bar{y} + t(y_i - \bar{y})) - f(\bar{y})}{t(y_i - \bar{y})} (y_i - \bar{y}) \right. \\
&- \left. \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{f(\bar{x} + t(x_i - \bar{x})) - f(\bar{x})}{t(x_i - \bar{x})} (x_i - \bar{x}) \right] \\
&= f'_{-}(\bar{y}) \sum_{y_i < \bar{y}} p_i (y_i - \bar{y}) + f'_{+}(\bar{y}) \sum_{y_i > \bar{y}} p_i (y_i - \bar{y}) \\
&- f'_{-}(\bar{x}) \sum_{x_i < \bar{x}} p_i (x_i - \bar{x}) - f'_{+}(\bar{x}) \sum_{x_i > \bar{x}} p_i (x_i - \bar{x}) \\
&= F'_{-}(\bar{y}) \sum_{y_i < \bar{y}} p_i (y_i - \bar{y}) + F'_{+}(\bar{y}) \sum_{y_i > \bar{y}} p_i (y_i - \bar{y}) + A\bar{y} \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - \bar{y}) \\
&- F'_{-}(\bar{x}) \sum_{x_i < \bar{x}} p_i (x_i - \bar{x}) - F'_{+}(\bar{x}) \sum_{x_i > \bar{x}} p_i (x_i - \bar{x}) - A\bar{x} \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x}) \\
&= F'_{-}(\bar{y}) \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - \bar{y}) + (F'_{-}(\bar{y}) - F'_{-}(\bar{y})) \sum_{y_i > \bar{y}} p_i (y_i - \bar{y}) \\
&- F'(\bar{x}) \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x}) - (F'_{1}(\bar{x}) - F'(\bar{x})) \sum_{x_i > \bar{x}} p_i (x_i - \bar{x}) \\
&= (F'_{+}(\bar{y}) - F'_{-}(\bar{y})) \sum_{y_i > \bar{y}} p_i (y_i - \bar{y}) - (F'_{+}(\bar{x}) - F'_{-}(\bar{x})) \sum_{x_i > \bar{x}} p_i (x_i - \bar{x}) \geq 0,
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

gdje zadnja nejednakost slijedi zbog $\bar{y} \in (c, b)$ i $\bar{x} \in (a, c)$ (ako $\bar{y} = c$ ili $\bar{x} = c$, vrijedi $y_i = \bar{y}$ i $x_i = \bar{x}$ i nejednakost (5.2) je trivijalna).

Dakle, za $f \in \mathcal{K}_1^c(a, b)$ funkcija U je konveksna i $U'_{-}(0) \geq 0$, pa $U(0) \leq U(1)$, što je upravo nejednakost (5.2).

Dokaz za $f \in \mathcal{K}_2^c(a, b)$ je analogan ako je U konkavna i $U_{+}(0) \leq 0$. $\square$

Lema 5.3. *Neka su $p_1, p_2, \dots, p_n$ nenegativni realni bojevi takvi da je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, te neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ brojevi za koje vrijedi $m \le x_i \le M$. Ako je f konveksna funkcija na $[m, M]$, tada vrijedi*

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \le \frac{M-\bar{x}}{M-m} f(m) + \frac{\bar{x}-m}{M-m} f(M)$$

gdje je $\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i$. Ako je f konkavna na $[m, M]$ tada vrijedi suprotna nejednakost.

Dokaz. Svaki $x_i \in [m, M]$ možemo zapisati ovako

$$x_i = \frac{M-x_i}{M-m} m + \frac{x_i-m}{M-m} M.$$

Ako je funkcija f konveksna, tj. ako je

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

tada uz supstituciju $x \to m,\ y \to M,\ \alpha = \dfrac{M-x_i}{M-m},\ 1-\alpha = \dfrac{x_i-m}{M-m}$ dobivamo

$$f(x_i) \le \frac{M-x_i}{M-m} f(m) + \frac{x_i-m}{M-m} f(M), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pomnožimo svaku od tih nejednakosti s p_i. Dobivamo

$$p_i f(x_i) \le \frac{p_i M - p_i x_i}{M-m} f(m) + \frac{p_i x_i - p_i m}{M-m} f(M), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zbrojimo li sve te nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) &\le \sum_{i=1}^n \frac{p_i M - p_i x_i}{M-m} f(m) + \sum_{i=1}^n \frac{p_i x_i - p_i m}{M-m} f(M) \\
&= \frac{f(m)}{M-m}\left(\sum_{i=1}^n p_i M - \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) + \frac{f(M)}{M-m}\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - \sum_{i=1}^n p_i m\right) \\
&= \frac{f(m)}{M-m}\left(M \sum_{i=1}^n p_i - \bar{x}\right) + \frac{f(M)}{M-m}\left(\bar{x} - m \sum_{i=1}^n p_i\right) \\
&= \frac{f(m)}{M-m}(M-\bar{x}) + \frac{f(M)}{M-m}(\bar{x}-m)
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ i kraću oznaku $\sum_{i=1}^n p_i x_i = \bar{x}$.
Ako je funkcija f konkavna onda se isti dokaz provodi samo što umjesto znaka $\le$ koristimo znak $\ge$. $\square$

Nejednakost iz ove leme naziva se Lah-Ribarič nejednakost.

Koristeći prethodnu lemu dokazat ćemo sljedeći teorem koji se u literaturi naziva Levinsonova generalizacija Edmundson-Lah-Ribarič nejednakosti, [5].

Teorem 5.4. *Neka su $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$ nenegativni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $\sum_{j=1}^m q_j = 1$. Neka su $a \le A \le b \le B$, te neka je $f : [a, B] \to \mathbb{R}$ 3 - konveksna funkcija u točki $c \in (A, b)$, tj. $f \in K_c^1(A, b)$. Neka su $x_1, \dots, x_n \in [a, A], y_1, \dots, y_n \in [b, B]$ takvi da je*

$$\frac{A - \sum_{i=1}^n p_i x_i}{A - a} a^2 + \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i - a}{A - a} A^2 - \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \le \frac{B - \sum_{j=1}^m q_j y_j}{B - b} b^2 + \frac{\sum_{j=1}^m q_j y_j - b}{B - b} B^2 - \sum_{i=1}^n p_i y_i^2.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{A - \sum_{i=1}^n p_i x_i}{A - a} f(a) \quad &+ \quad \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i - a}{A - a} f(A) - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \\ &\le \quad \frac{B - \sum_{j=1}^m q_j y_j}{B - b} f(b) + \frac{\sum_{j=1}^m q_j y_j - b}{B - b} f(B) - \sum_{j=1}^m q_j f(y_j). \end{aligned}$$

Dokaz. Budući da je $f \in K_c^1(A, b)$, to znači da postoji konstanta D takva da za $c \in (A, b)$ je funkcija $F(x) = f(x) - \dfrac{D^2}{2} x^2$ konkavna na $[a, c]$ i konveksna na $[c, B]$. Brojevi $x_1, \dots, x_n$ nalaze se u $[a, A] \subseteq [a, c]$ pa na njih primjenimo lemu i dobijemo nejednakost:

$$\sum_{i=1}^n p_i F(x_i) \le \frac{A - \bar{x}}{A - a} F(a) + \frac{\bar{x} - a}{A - a} F(A),$$

gdje je $\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i$, uvrstimo u gornju nejednakost $F(x) = f(x) - \dfrac{D^2}{2} x^2$ koja je konkavna na $[a, A]$ i pribrojene u kojima se javlja $f(x)$ ostavimo na jednoj strani.
Dobivamo

$$\frac{A - \bar{x}}{A - a} f(a) + \frac{\bar{x} - a}{A - a} f(A) - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \le \frac{D}{2} \left[\frac{A - \bar{x}}{A - a} a^2 + \frac{\bar{x} - a}{A - a} A^2 - \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right]. \tag{5.9}$$

S druge strane, F je konveksna na $[b, B]$ pa primjenimo lemu i dobivamo

$$\sum_{j=1}^m q_j F(y_j) \le \frac{B - \bar{y}}{B - b} F(b) + \frac{\bar{y} - b}{B - b} F(B),$$

gdje je $\bar{y} = \sum_{j=1}^{m} q_j y_j$.

Uvrstimo u gornju nejednakost $F(x) = f(x) - \frac{D}{2}x^2$ i rasporedimo pribrojnike tako da oni koji sadrže f ostanu na jednoj strani dobivamo

$$\frac{B-\bar{y}}{B-b}f(b) + \frac{\bar{y}-b}{B-b}f(B) - \sum_{j=1}^{m} q_j f(y_j) \geq \frac{D}{2}\left[\frac{B-\bar{y}}{B-b}b^2 + \frac{\bar{y}-b}{B-b}B^2 - \sum_{j=1}^{m} q_j y_j^2\right]. \tag{5.10}$$

Sada iz (5.9) i (5.10) uz korištenje uvjeta teorema dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{A-\bar{x}}{A-a}f(a) + \frac{\bar{x}-a}{A-a}f(A) - \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) &\leq \frac{D}{2}\left[\frac{A-\bar{x}}{A-a}a^2 + \frac{\bar{x}-a}{A-a}A^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right] \\
&\leq \frac{D}{2}\left[\frac{B-\bar{y}}{B-b}b^2 + \frac{\bar{y}-b}{B-b}B^2 - \sum_{j=1}^{m} q_j y_j^2\right] \\
&\leq \frac{B-\bar{y}}{B-b}f(b) + \frac{\bar{y}-b}{B-b}f(B) - \sum_{j=1}^{m} q_j f(y_j)
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Bibliografija

[1] M. Anwar and J. Pečarić, *Cauchy's means of Levinson type*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 9(4) (2008), Art. 120.

[2] I. A. Baloch, J. Pečarić and M. Praljak, *Generalization of Levinson's inequality*, J. Math. Inequal. 9, (2015), 571–586.

[3] E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1961.

[4] P. S. Bullen, *An inequality of N. Levinson*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 412–460, (1973), 109–112.

[5] R. Jakšić, J. Pečarić, *Levinson's type generalization of the Edmundson-Lah-Ribarič inequality*, Mediterr. J. Math online: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00009-014-0478-y

[6] N. Levinson, *Generalization of an inequality of Ky Fan*, J. Math. Anal. Appl. 8, (1964), 133–134.

[7] A. McD. Mercer, *Short proof of Jensen's and Levinson's inequality*, Math. Gazette 94 (2010), 492–495.

[8] J. E. Pečarić, *On an inequality of N. Levinson*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 678–715, (1980), 71–74.

[9] J. E. Pečarić, *An inequality for 3-convex functions*, J. Math. Anal. Appl. 90, (1982), 213–218.

[10] T. Popoviciu, *Sur une inégalité de N. Levinson*, Mathematica (Cluj) 6 (1964), 301–306.

Sažetak

U ovom radu bavimo se Levinsonovom nejednakošću i njenim generalizacijama.
Rad se sastoji od pet poglavlja. U Poglavlju 1 opisan je život američkog matematičara Normana Levinsona i njegovi najveći doprinosi te navodimo kako je Levinson dobio generalizaciju Ky Fanove nejednakosti koju danas nazivamo Levinsonova nejednakost. U Poglavlju 2 govorimo o n - konveksnim funkcijama, specijalno 3 - konveksnim funkcijama za koje vrijedi Levinsonova nejednakost. U Poglavlju 3 govorimo o promjeni uvjeta za točke. Konkretnije, spominjemo rezultate u kojima se razmatra Levinsonova nejednakost uz nešto slabije uvjete na izbor točaka. U Poglavlju 4 dajemo rezultat u kojem je razlika lijeve i desne strane Levinsonove nejednakosti izražena kao produkt istovrsne razlike za polinom x^3 i treće derivacije funkcije f u jednoj točki domene. U Poglavlju 5 bavimo se promjenama uvjeta za funkciju. Pokazujemo da Levinsonova nejednakost vrijedi za funkcije koje su 3 - konveksne u točki.

Summary

In this paper we consider with Levinson's inequality and its generalizations.
The work consists of five chapters. In Chapter 1 we describe the life of an American mathematician Norman Levinson and his greatest contribution and show how Levinson proved generalization Ky Fans inequality which we called Levinson's inequality. In Chapter 2, we talk about the n - convex functions, particularly, about 3 - convex functions for which Levinson's inequality also holds. In Chapter 3 we consider changing of conditions of points. In fact, we give results connected with Levinson's inequality with weak assumptions on points. In Chapter 4 we give a result in which the difference between the left-hand and the right-hand sides of Levinson's inequality is expressed as a product equivalent to the difference polynomial x^3 and third derivatives of f at one point of domain. In Chapter 5 we change assumptions of the function. Namely, we prove that Levinson's inequality holds for functions which are 3 - convex at a point.

Životopis

Rođena sam 3. prosinca 1986. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Augusta Šenoe u Zagrebu. Po završetku osnovne škole upisala sam Hotelijersko-turističku školu u Zagrebu, gdje sam i maturirala 2005. godine s vrlodobrim uspjehom na smjeru hotelijersko-turistički tehničar. 2006. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika-smjer nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji sam završila 2012. godine. Iste godine nastavila sam studij na nastavničkom smjeru diplomskog sveučilišnog studija Matematika.