O nekim Eulerovim doprinosima u teoriji brojeva

Cafuk, Jelena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Jelena Cafuk

O NEKIM EULEROVIM DOPRINOSIMA U TEORIJI BROJEVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Sadržaj

Uvod

Leonhard Euler rođen je 15. travnja 1707. godine u švicarskom gradu Baselu. Njegova majka Margaretha Brucker i otac Paul Euler, pastor protestantske crkve, bili su njegovi prvi učitelji. S nepunih 14 godina upisao je Sveučilište u Baselu gdje je stekao opće obrazovanje. Kasnije je studirao teologiju i filozofiju, ali je istovremeno pokazivao i sve veći interes za matematiku. U želji da produbi svoje matematičko znanje zamolio je sveučilišnog profesora Johanna Bernoullija za dodatnu poduku. No kako je Bernulli bio svjestan Eulerove darovitosti, odbio mu je držati privatne sate na način na koji je to radio s ostalim studentima. Umjesto toga, Euleru je za čitanje preporučio nekoliko teških knjiga iz astronomije, fizike i matematike. Subotom popodne Benoulli bi se nalazio s Eulerom te ga savjetovao na koji način može savladati teškoće na koje je nailazio prilikom proučavanja knjiga. Zbog neuspješne prijave na mjesto profesora fizike 1727. godine, za čije je potrebe napisao svoju doktorsku disertaciju *De sono*, Euler je zauvijek napustio Basel i otišao u Rusiju, u St. Peterburg.

Tamo je najprije radio u medicinskom odjelu ruske mornarice, a zatim kao profesor fizike na Ruskoj carskoj akademiji znanosti. Za to je vrijeme živio u domu Daniela Bernoullija s kojim je surađivao na njegovom djelu *Hydrodynamica*. Nakon Bennoullijeva povratka u Basel 1733. godine, Euler je naslijedio njegovo mjesto profesora matematike. 1734. godine ženi se Katharinom Gsell s kojom je imao trinaestero djece od kojih je samo petero preživjelo djetinjstvo. Kako bi učvrstio svoje matematičke i političke veze Euler je prvog sina nazvao Johann Albrecht po tadašnjem predsjedniku akademije Johannu Albrechtu Korffu. Za kuma je izabrao matematičara Christiana Goldbacha koji je uvelike utjecao na Eulerov interes za teoriju brojeva.

Zbog nestabilne političke situacije u St. Peterburgu, na poziv pruskog kralja Fredericka II., 1741. godine Euler se s obitelji preselio u Berlin. Na Berlinskoj je akademiji dobio mjesto voditelja odjela za matematiku. No s godinama su se zaoštrili odnosi između Fredericka II. i Eulera. Eulerovo je nezadovoljstvo Berlinskom akademijom sve više raslo te se 1766. godine na poziv ruske carice Katarine Velike s obitelji vratio u St. Peterburg i Rusku akademiju. Godinama se borio s mrenom

na oku, a u jesen 1771. godine je u potpunosti izgubio vid. Međutim, to ga nije spriječilo da nastavi svoja istraživanja u brojnim poljima matematike i fizike. Umro je od moždanog udara 18. rujna 1783. godine.

Slika 1: Portret Leonharda Eulera

Leonhard Euler je bio jedan od najplodnijih i najsvestranijih matematičara svih vremena. Za vrijeme svog života napisao je preko 500 radova, a gotovo 400 ih je objavljeno posthumno. Njegovi su znanstveni doprinosi obogatili svaku matematičku granu tog vremena, a pridonio je razvoju mnogih područja, primjerice balistici, kartografiji, hidrodinamici, hidraulici, teoriji glazbe i mnogim drugim. Smatra ga se osnivačem opće teorije diferencijalnih jednadžbi. 1748. godine izdao je knjigu iz matematičke analize *Introductio in analysin infinitorum* u kojoj definira pojam funkcije te proučava verižne razlomke, eksponencijalnu i logaritamsku funkciju, trigonometrijske funkcije, Eulerove kutove i drugo. Uveo je oznake $f(x)$ za zapis pravila pridruživanja realne funkcije, oznaku imaginarne jedinice i te slovo e za bazu prirodnog logaritma. Dokazao je da je broj e iracionalan broj. Eksponencijalnu je funkciju razvio u red i povezao ju s trigonometrijskim funkcijama iz čega je proizašla čuvena *Eulerova formula*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \ \forall\varphi \in \mathbb{R}.$$

Postavio je temelje suvremene diferencijalne geometrije i teorije grafova. Naime, Euler je prvi riješio problem Königsbergških mostova, a u pismu Goldbachu 1750.

godine iskazao je Eulerovu poliedarsku formulu koju je kasnije i detaljnije analizirao. 1765. godine Euler je dokazao da težište trokuta, središte trokutu opisane kružnice i njegov ortocentar leže na jednom pravcu kojeg danas nazivamo *Eulerovim pravcem*. Dokazao je i da je udaljenost težišta trokuta do ortocentra dvostruko dulja od udaljenosti težišta do središta trokutu opisane kružnice.

Veliki se dio Eulerova opusa odnosi na teoriju brojeva. Neki njegovi doprinosi toj, u to doba ne tako popularnoj grani matematike, predstavljaju temu ovog rada. Zbog lakšeg razumijevanja i kraćeg zapisa u radu uglavnom rabimo suvremenu matematičku terminologiju i simboliku koje nisu postojale u Eulerovo doba.

Poglavlje 1

Djeljivost

1.1 Osnovni pojmovi

U ovom su odjeljku navedene definicije, oznake i važnija svojstva nekih pojmova iz teorije brojeva koja su korisna za razumijevanje sadržaja rada.

Definicija 1.1.1. *Neka su $a \neq 0$ i b cijeli brojevi. Kažemo da je b* djeljiv *s a, odnosno da a* dijeli *b, ako postoji cijeli broj x takav da je $b = ax$. Još kažemo da je a* djelitelj *od b, odnosno da je b* višekratnik *od a. Pišemo $a \mid b$. U suprotnom, ako a ne dijeli b, pišemo $a \nmid b$.*

Za djelitelja $d \in \mathbb{N}$ prirodnog broja n kažemo da je pravi *ako je $d \neq n$.*

Teorem 1.1.2 (Teorem o dijeljenju s ostatkom)**.** *Za proizvoljan prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = aq + r$, $0 \leq r < a$.*

Definicija 1.1.3. *Neka su b i c cijeli brojevi. Cijeli broj a zovemo* zajedničkim djeliteljem *brojeva b i c ako a dijeli i b i c. Najveći među njima zove se* najveći zajednički djelitelj *i označava se s (b, c).*

Prema definiciji najvećeg zajedničkog djelitelja brojeva b i c jasno je da je (b, c) prirodan broj.

Definicija 1.1.4. *Prirodni brojevi a i b su* relativno prosti *ako im je najveći zajednički djelitelj 1.*

Definicija 1.1.5. *Prirodan broj veći od* 1 *je* prost *ili* prim broj *ako nema pravog djelitelja većeg od* 1*. U suprotnom kažemo da je broj* složen*. Broj* 1 *nije niti prost, niti složen.*

Uočimo da je broj prost ako i samo ako ima točno dva djelitelja, 1 i sebe samog.

Definicija 1.1.6. *Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli razliku $a - b$, onda kažemo da je a* kongruentan *b* modulo *m i pišemo $a \equiv b \pmod{m}$. U protivnom kažemo da je a* nekongruentan *b* modulo *m i pišemo $a \not\equiv b \pmod{m}$.*

Oznaku za kongruenciju te teoriju vezanu uz nju uveo je 1801. godine Gauss[1] pa ju Euler nije mogao poznavati ni rabiti. Mi ćemo ipak u mnogim Eulerovim tvrdnjama i dokazima koristiti kongruencije zbog preglednijeg zapisa i boljeg razumijevanja.

Navedimo osnovna svojstva kongruencija.

Propozicija 1.1.7. *Neka su a, b, c i d cijeli brojevi i m prirodan.*

1. *Ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, onda je $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ i $ac \equiv bd \pmod{m}$.*
2. *Ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i $d \mid m$, onda je $a \equiv b \pmod{d}$.*
3. *Ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \neq 0$, onda je $ac \equiv bc \pmod{mc}$.*

Propozicija 1.1.8. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, te $(c, m) = d$. Tada je $ac \equiv bc \pmod{m}$ ako i samo ako $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.*

U slučaju $(a, m) = 1$ vrijedi da je relacija $ac \equiv bc \pmod{m}$ ekvivalentna relaciji $a \equiv b \pmod{m}$.

1.2 Fermatovi brojevi

Pierre de Fermat (1601. - 1665.) je bio jedan od najznačajnih francuskih matematičara svih vremena. Osim teorijom brojeva, bavio se analitičkom geometrijom i teorijom vjerojatnosti te je bio prethodnik infinitezimalnog računa. Svoje je rezultate zapisivao na margine knjiga i u pismima prijateljima. Često je u svojim pismima samo navodio pretpostavke te je pozivao druge da ih dokažu. Točan razlog tome se ne zna. Pretpostavlja se da je mislio da će drugi pri dokazivanju njegovih tvrdnji okriti ljepotu teorije brojeva, ali je vjerojatno da niti sam nije znao dokazati sve svoje pretpostavke.

U Eulerovo su se doba Fermatove pretpostavke uglavnom mogle pronaći u tri izvora: u *Commercium Epistolicum* (1658.) u kojem su objavljena neka Fermatova pisma, u Bachetovom prijevodu Diofantove *Arithmetice* s Fermatovim bilješkama (1670.) te u djelu *Varia Opera* (1679.). Jedna od osoba s kojom se Fermat najviše dopisivao bio je redovnik Marin Mersenne (1588. - 1648.). U jednom je pismu Mersenneu Fermat postavio hipotezu da su svi brojevi oblika $2^{2^n} + 1$, gdje je n nenegativan

[1] Johann Karl Friedrich Gauss, 1777. - 1855., njemački matematičar i fizičar.

cijeli broj, prosti. Postavljenu je hipotezu Fermat provjerio za $n = 0, 1, 2, 3, 4$, ali svoju tvrdnju nije dokazao. Euler je za hipotezu saznao iz pisma kojeg mu je 1. prosinca 1729. uputio Goldbach te ga pritom upitao:

"Je li Vam poznato Fermatovo mišljenje da su brojevi oblika $2^{2^{x-1}} + 1$, kao što su 3, 5, 17, ..., prosti? On to nije dokazao, a koliko znam nije niti itko drugi."

Christian Goldbach (1690. - 1764.) bio je pruski matematičar koji je u jednom pismu Euleru postavio jednu od najpoznatijih hipoteza iz teorije brojeva. Kao i Fermat, više je volio postavljati hipoteze nego ih dokazivati.

Slutnja 1 (Goldbachova hipoteza)**.** *Svaki je prirodan broj veći od 2 moguće napisati kao zbroj dva prosta broja.*

Euler je prvotno Fermatovu hipotezu smatrao nebitnom. No Goldbach ga je ipak uspio zainteresirati za teoriju brojeva i postavljenu hipotezu te ju je u rujnu 1732. godine Euler opovrgnuo. Naime, za $n = 5$ je dobio:

$$2^{2^n} + 1 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

Danas brojeve oblika $2^{2^n} + 1$ nazivamo *Fermatovim brojevima.* Fermatove je proste brojeve iskoristio Gauss pri opisivanju kriterija koji govori koje je pravilne n-terokute moguće konstruirati samo ravnalom i šestarom. Za neparan n, kružnicu je ravnalom i šestarom moguće podijeliti na n jednakih dijelova samo ako je n kvadratno slobodan produkt Fermatovih prostih brojeva. Općenito, pravilni n-terokut se može konstruirati ravnalom i šestarom ako i samo ako je n potencija broja 2 ili je $n = 2^r p_1 p_2 \cdots p_k$, gdje je r nenegativan cijeli broj, a p_i različiti Fermatovi prosti brojevi.

1.3 Savršeni brojevi

Već spomenuti Marin Mersenne bio je svestrani matematičar i fizičar koji je oko sebe okupljao velik broj intelektualaca među kojima su bili Pierre de Fermat, Blaise Pascal[2], René Descartes[3], John Pell[4], Girard Desargues[5] i mnogi drugi. Sa suvremenicima je često komunicirao putem pisama. Katkada im je davao ideje za daljnja istraživanja, a katkada je bio samo posrednik. Omogućio je razmjenu ideja među matematičarima i time neupitno utjecao na mnoge od njih. Mersenne je proučavao alkemiju, astrologiju te fizikalne i matematičke probleme. Međuostalim, bavio se i teorijom brojeva. Pokušavao je pronaći formulu za proste brojeve te je pritom proučavao brojeve oblika $2^n - 1$, gdje je n prirodan broj.

[2]Blaise Pascal, 1623. - 1662., francuski matematičar i fizičar.

[3]René Descartes, 1596. - 1650., francuski matematičar zaslužan za otkriće analitičke geometrije.

[4]John Pell, 1611. - 1685., engleski matematičar.

[5]Girard Desargues, 1591. - 1661., francuski matematičar, inžinjer i arhitekt.

Definicija 1.3.1. *Brojevi oblika* $2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ *se nazivaju* Mersenneovim brojevima. *Mersenneove brojeve koji su prosti nazivamo* Mersenneovim prostim brojevima.

Do danas nije poznato postoji li konačno ili beskonačno mnogo Mersenneovih prostih brojeva. Sluti se da ih je beskonačno.

Slutnja 2. *Postoji beskonačno mnogo Mersenneovih prostih brojeva.*

Najveći do sada poznat Mersenneov prost broj otkriven je početkom 2018. godine, $2^{77\,232\,917}$–1, broj s preko 23 milijuna znamenaka. Potraga za sve većim Mersenneovim prostim brojevima traje u sklopu međunarnog projekta *Great Internet Mersenne Prime Search* ili kraće GIMPS koji uključuje niz matematičara i programera kao profesionalaca, tako i amatera. S jačanjem računala, pronalaze se sve veći brojevi koji idu u prilog tezi da bi ih moglo biti beskonačno.

Propozicija 1.3.2. *Neka je* $2^n - 1$ *prost broj. Tada je* n *prost.*

Zbog prethodne propozicije je jasno da Mersenneove proste brojeve tražimo među onima oblika $2^p - 1$, za p prost. Obrat prethodne propozicije ne vrijedi, a najmanji prost za kojeg to ne vrijedi je $p = 11$. Zaista, $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

Definicija 1.3.3. *Za prirodan broj* n *kažemo da je* savršen *ako je jednak sumi svih svojih pravih djelitelja.*

Definicija 1.3.4. *Funkcija* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *svakom prirodnom broju pridružuje sumu svih njegovih pozitivnih djelitelja. Dakle, za* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

S obzirom na prethodne dvije definicije vidimo da je prirodan broj n savršen ako i samo ako je $\sigma(n) = 2n$.

Funkcija σ zadovoljava vrlo važno svojstvo *multiplikativnosti*. To znači da vrijede sljedeća dva svojstva:

(1) $\sigma(1) = 1$,

(2) $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $(m, n) = 1$.

Očito vrijedi da je prirodan broj p prost ako i samo ako je

$$\sigma(p) = p + 1.$$

Nadalje, ako je $n = p^\alpha$ gdje je p prost broj i $\alpha \in \mathbb{N}$, tada je

$$\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}.$$

Koristeći svojstvo multiplikativnosti funkcije lako se se može ustanoviti sljedeće:

Propozicija 1.3.5. *Neka je $n > 2$ prirodan broj čiji je kanonski rastav dan s*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Tada je

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

U Euklidovim[6] *Elementima* (knjiga IX, Propozicija 36) koji potječu iz 3. st. pr. Kr. pojavljuje se tvrdnja koja kaže da ako je p prost broj takav da je $p + 1 = 2^k$, onda je $2^{k-1}p$ savršen. No vrijedi i obrat ove tvrdnje. Smatra se da je to prvi uočio arapski matematičar Al-Haytham (11. st.), a dokazao Euler. Dakle, vrijedi sljedeći terem.

Teorem 1.3.6. *Paran prirodan broj n je savršen ako i samo ako se može prikazati u obliku*

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

gdje su p i $2^p - 1$ prosti brojevi.

Dokaz. $\Leftarrow$: Neka su p i $2^p - 1$ prosti brojevi te neka je $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1) = (1 + 2 + \ldots + 2^{p-1})(1 + 2^p - 1) \\ &= \frac{2^p - 1}{2 - 1} 2^p = 2^p(2^p - 1) = 2n.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Neka je n paran savršen broj oblika $n = 2^k \cdot m$, gdje su $k, m \in \mathbb{N}$ i m neparan. Kako su 2^k i m očito relativno prosti, vrijedi:

$$\sigma(n) = \sigma(2^k \cdot m) = \sigma(2^k)\sigma(m) = \left(2^{k+1} - 1\right) \sigma(m).$$

Nadalje, jer je n savršen vrijedi

$$\sigma(n) = 2n = 2^{k+1} \cdot m,$$

[6]Euklid Aleksandrijski, oko 330. - 275., grčki matematičar čije se najpoznatije djelo zove *Elementi*.

pa je

$$\left(2^{k+1}-1\right)\sigma(m) = 2^{k+1}\cdot m. \tag{1.1}$$

Otuda slijedi da $2^{k+1}-1$ dijeli $2^{k+1}\cdot m$. Kako su 2^{k+1} i $2^{k+1}-1$ relativno prosti, dobivamo da $2^{k+1}-1$ mora dijeliti m. Stoga, m možemo zapisati kao

$$m = \left(2^{k+1}-1\right)l,$$

za neki $l \in \mathbb{N}$. S druge strane, prema (1.1) je

$$\sigma(m) = 2^{k+1}\cdot\frac{m}{2^{k+1}-1} = 2^{k+1}\cdot l.$$

Promotrimo sada dva moguća slučaja:

1. Neka je $l > 1$. Tada je $\sigma(m) \geqslant l + m + 1$, a to je nemoguće jer je

$$\sigma(m) = 2^{k+1}\cdot l = 2^{k+1}l - l + l = \left(2^{k+1}-1\right)l + l = m + l < l + m + 1.$$

2. Neka je $l = 1$. Tada je $\sigma(m) = m + 1$, iz čega slijedi da je m prost broj. No, ako je $2^{k+1}-1$ prost broj, onda je i $k+1 = p$ također prost broj pa je $n = 2^{p-1}(2^p-1)$.

□

Euler je 1772. otkrio i 8. savršeni broj, broj 2305843008139952128. Do danas nije poznato postoji li beskonačno ili konačno mnogo savršenih brojeva jer je to očito u direktnoj vezi sa Slutnjom 2, niti mogu li oni biti neparni. Do sada nije pronađen niti jedan neparan savršen broj.

1.4 Prijateljski brojevi

Osim savršenih brojevima, Euler se zanimao i za tzv. *prijateljske* brojeve. Otkrio je 62 para prijateljskih brojeva.

Definicija 1.4.1. *Za dva prirodna broja kažemo da su* prijateljski brojevi *ako je svaki od ta dva broja jednak zbroju svih pravih djelitelja drugog broja.*

Ako su m i n prijateljski, onda je $\sigma(m) - m = n$ i $\sigma(n) - n = m$. Stoga su m i n prijateljski ako i samo ako je

$$\sigma(m) = \sigma(n) = m + n.$$

Za savršene brojeve možemo reći da su to oni brojevi koji su prijateljski sami sa sobom.

Primjer 1.4.2. *Brojevi* 220 *i* 284 *su prijateljski.*
Pravi djeljitelji broja 220 *su* $1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55$ *i* 110 *i njihova suma iznosi* 284.
Pravi djeljitelji broja 284 *su* $1, 2, 4, 71$ *i* 142 *i njihova suma iznosi* 220.

Smatra se da su ovaj par prijateljskih brojeva poznavali još i Pitagorejci (6. st. pr. Kr.) koji su prijateljskim brojevima općenito pridavali mistična svojstva. Tim se brojevima bavio i arapski matematičar Thabit ibn Qurra (9. st.). On je dokazao sljedeći teorem.

Teorem 1.4.3 (Thabitov teorem o prijateljskim brojevima)**.** *Ako su za neki prirodan broj* $n > 1$ *brojevi* $p = 3 \cdot 2^{n-1}, q = 3 \cdot 2^n - 1$ *i* $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ *prosti, onda su brojevi* $2^n pq$ *i* $2^n r$ *prijateljski.*

Do danas su poznata samo 3 takva para brojeva koji se dobiju za $n = 2, n = 4$ te $n = 7$.

Definicija 1.4.4. *Brojevi oblika* $3 \cdot 2^n - 1$ *zovu se* Thabitovi brojevi.

Euler je generalizirao Thabitov teorem o prijateljskim brojevima i time omogućio pronalazak još dva para prijateljskih brojeva.

Teorem 1.4.5 (Eulerovo pravilo)**.** *Neka su* m, n *prirodni brojevi,* $n > m$, *takvi da su*

$$p = \left(2^{n-m} + 1\right) \cdot 2^m - 1,\ q = \left(2^{n-m} + 1\right) \cdot 2^n - 1,\ r = \left(2^{n-m} + 1\right)^2 \cdot 2^{m+n} - 1$$

prosti brojevi. Tada su brojevi $2^n pq$ *i* $2^n r$ *prijateljski.*

Dokaz. Djelitelji broja $2^n pq$ su oblika 2^i, $2^i p$, $2^i q$, $2^i pq$, gdje je $i = 0, \ldots, n$ pa je

$$\begin{aligned}
\sigma(2^n pq) - 2^n pq =& \sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n} 2^i p + \sum_{i=0}^{n} 2^i q + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i pq \\
=& \sum_{i=0}^{n-1} 2^i (1 + p + q + pq) + 2^n + 2^n p + 2^n q \\
=& (2^n - 1)(1 + p + q + pq) + 2^n + 2^n p + 2^n q \\
=& 2^{n+1}(1 + p + q) + 2^n pq - 1 - p - q - pq.
\end{aligned}$$

Kada uvrstimo $p = (2^{n-m}+1)\cdot 2^m - 1$ i $q = (2^{n-m}+1)\cdot 2^n - 1$, dobivamo

$$\begin{aligned}\sigma(2^n pq) - 2^n pq =& 2^{2n+m} + 2^{4n-m} + 2^{3n+1} - 2^n \\ =& 2^n\left[\left(2^{n-m}+1\right)^2 \cdot 2^{m+n} - 1\right] \\ =& 2^n r.\end{aligned}$$

Djelitelji broja $2^n r$ su oblika 2^i, $2^i r$, gdje je $i = 0, \ldots, n$ pa je

$$\sigma(2^n r) - 2^n r = \sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i r = (2^n - 1)(1+r) + 2^n = 2^n(2+r) - 1 - r.$$

Nakon uvrštavanja $r = (2^{n-m}+1)^2 \cdot 2^{m+n} - 1$ i sređivanja izraza dobivamo

$$\begin{aligned}\sigma(2^n r) - 2^n r =& 2^n\left(1 + 2^{3n-m} + 2^{2n+1} + 2^{n+m} - 2^{2n-m} - 2^{n+1} - 2^m\right) \\ =& 2^n\left[\left(\left(2^{n-m}+1\right)\cdot 2^m - 1\right)\left(\left(2^{n-m}+1\right)\cdot 2^n - 1\right)\right] \\ =& 2^n pq.\end{aligned}$$

Kako je

$$\sigma\left(2^n pq\right) = 2^n pq + 2^n r = \sigma\left(2^n r\right),$$

brojevi $2^n pq$ i $2^n r$ su prijateljski. □

Primijetimo, kada u Teorem 1.4.5 uvrstimo $m = n-1$ dobivamo Thabitov teorem o prijateljskim brojevima. Nadalje, brojevi iz Primjera 1.4.2 su oblika danog u Teoremu 1.4.5 za $n = 2$ i $m = 1$ (te $p = 5$, $q = 11$, $r = 71$).

Poglavlje 2

Euler-Fermatov teorem

2.1 Mali Fermatov teorem

Jedan od Fermatovih najvažnijih teorema nalazimo u njegovom pismu upućenom Frenicle de Bessyju[1] 18. listopada 1640. Pismo je objavljeno u ranije spomenutom djelu *Varia Opera*, a teorem je danas poznat pod nazivom Mali Fermatov teorem, u daljnjem kraće MFT. Kasnije će se pokazati da upravo taj teorem omogućava najlakši način faktorizacije Fermatovih brojeva. Moguće je da ga je čak Euler iskoristio za pronalazak faktora 641 Fermatovog broja $2^{31} + 1$.

Originalan Fermatov iskaz, u suvremenoj terminologiji, glasio je:

Ako je p prost, tada p dijeli $a^m - 1$ za m koji je višekratnik od $p - 1$.

Fermat je izostavio nužan uvjet da p i a nemaju zajedničkih faktora, odnosno da $p \nmid a$. Danas pod nazivom Mali Fermatov teorem podrazumijevamo sljedeću tvrdnju.

Teorem 2.1.1 (MFT)**.** *Ako je p prost broj i a prirodan broj koji nije djeljiv s p, onda je $a^{p-1} - 1$ djeljiv s p.*

Ponekad se iskaz formulira i na sljedeći način:

Teorem 2.1.2 (MFT)**.** *Ako je p prost broj, onda p dijeli $a^p - a$.*

Uočimo da su tvrdnje Teorema 2.1.1 i 2.1.2 ekvivalentne. Zaista, trivijalno iz $p \mid a^{p-1} - 1$ slijedi $p \mid a^p - a$. Obratno, ako $p \mid a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$ i $p \nmid a$, tada $p \mid a^{p-1} - 1$.

[1]Bernard Frénicle de Bessy, oko 1604. – 1674., francuski matematičar koji je posebnu pažnju posvetio teoriji brojeva i kombinatorici.

Fermata je za iskaz gornje tvrdnje vjerojatno "inspirirao" binomni identitet. Za cijeli broj a i prost broj p vrijedi:

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} = a^p + \sum_{1 \leqslant k < p} \binom{p}{k} a^{p-k} + 1.$$

Činjenica da su binomni koeficijenti $\binom{p}{k}$, $1 \leq k < p$, djeljivi s p nije sama po sebi dovoljna da bi se teorem i dokazao. Nije poznato je li Fermat znao dokazati navedeni teorem. U onom što slijedi navest ćemo nekoliko varijanti dokaza MFT-a za koje je zaslužan Euler.

Teorem 2.1.3 (Mali Fermatov teorem u Eulerovoj formulaciji)**.** *Ako je p prost broj, onda svaka potencija s eksponentom $p-1$ pri dijeljenju s p daje ostatak 0 ili 1.*

2.2 Prvi dokaz MFT-a

Ako je Fermat znao dokaz tvrdnje 2.1.1, nije ga zapisao. Poznato je da ju je dokazao Leibniz[2] prije 1683. godine, no taj je rad ostao u rukopisu i objavljen je tek 1894. Prvi objavljeni dokaz MFT-a stoga pripada Euleru. Predstavio ga je St. Peterburškoj akademiji 2. kolovoza 1736., pod naslovom *Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio* (Neki teoremi u svezi prostih brojeva).

Neki smatraju da je od upravo ovoga trenutka Euler postao uvjeren kako je teorija brojeva matematička grana vrijedna zanimanja. Ono što je Eulera smetalo proučavajući Fermatova djela bio je njegov nedovoljno znanstveni pristup koji se oslanjao više na intuiciju, nego na matematički dokaz.

Euler dokazuje MFT koristeći princip matematičke indukcije, što je za ono vrijeme rijetkost. Štoviše, ne samo da daje dokaz već detaljno opisuje proces iz kojeg je proizašao sam dokaz. Najprije je krenuo od specijalnog slučaja za $a = 2$. Nazovimo to pomoćnom tvrdnjom.

Lema 2.2.1. *Ako je p neparan prost broj, onda je $2^{p-1} - 1$ djeljivo s p.*

Dokaz. Prema Binomnom poučku vrijedi

$$(1+1)^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} = 1 + \frac{p-1}{1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} + \frac{p-1}{1} + 1.$$

[2]Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646. - 1716., njemački matematičar, jedan od utemeljitelja modernog infinitezimalnog računa.

Broj pribrojnika u gornjem izrazu je jednak p pa ih ima neparan broj. Oduzmemo li izrazu 1, ostaje nam paran broj pribrojnika pa preostalu sumu, odnosno pribrojnike, možemo grupirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}(1+1)^{p-1}-1 = &\left(\binom{p-1}{1}+\binom{p-1}{2}\right)+\left(\binom{p-1}{3}+\binom{p-1}{4}\right)+\cdots\\ &+\left(\binom{p-1}{p-2}+\binom{p-1}{p-1}\right).\end{aligned}$$

Sada primijenimo pravilo za binomne koeficijente

$$\binom{p-1}{k-1}+\binom{p-1}{k}=\binom{p}{k}$$

i dobivamo

$$(1+1)^{p-1}-1=\binom{p}{2}+\binom{p}{3}+\cdots+\binom{p}{p-1}.$$

Kako je za $1 \leq k < p$,

$$\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdots k},$$

vidimo da p dijeli $\binom{p}{k}$, odnosno dijeli zbroj na desnoj strani jednakosti. Stoga

$$p \mid 2^{p-1}-1.$$

□

No Euler ovaj dokaz nije mogao poopćiti pa je uočio da bi od veće koristi bila malo izmijenjena tvrdnju koju iznosimo kao sljedeću lemu. Ta će lema ujedno činiti bazu matematičke indukcije u dokazu MFT-a.

Lema 2.2.2. *Ako p prost broj, onda p dijeli 2^p-2.*

Dokaz. Neka je $p \neq 2$ prost broj, tj. p je neparan prost. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}(1+1)^p-2 &= 1+p+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}+\frac{p(p-1)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+p+1-2\\ &= p+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}+\frac{p(p-1)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+p\end{aligned}$$

iz čega je vidljivo da p dijeli svaki pribrojnik pa dijeli i 2^p-2.

Za $p=2$ tvrdnja očito vrijedi. □

Kao što smo već uočili u prethodnom odjeljkueme, Leme 2.2.1 i 2.2.2 su ekvivalentne. Euler je potom uočio da iz činjenice da p dijeli $2^{p-1}-1$ slijedi da p dijeli $2^{p-1}-1, 4^{p-1}-1, 8^{p-1}-1$, odnosno vrijedi:

Korolar 2.2.3. *Neka je $p \neq 2$ prost broj, onda p dijeli brojeve oblika*

$$2^{k(p-1)}-1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Čini se da je u ovom trenutku Euler razmišljao o sljedećoj strategiji u dokazu: ako tvrdnju pokaže za sve proste brojeve a, onda ju je zbog prethodnog korolara pokazao i za sve potencije a^n, ali i za sve umnoške prostih brojeva. Zaista, ako $p \mid a^{p-1}-1$ i $p \mid b^{p-1}-1$, onda $p \mid (a^{p-1}-1)(b^{p-1}-1)$. Kako je $(a^{p-1}-1)(b^{p-1}-1) = (ab)^{p-1}-1-(a^{p-1}-1)-(b^{p-1}-1)$, slijedi da $p \mid (ab)^{p-1}-1$.

Zato se kao sljedeći korak nametnuo dokaz za sljedeći prost broj $a = 3$.

Lema 2.2.4. *Ako je p prost broj, onda p dijeli $3^p - 3$.*

Dokaz. Vrijedi:

$$3^p = (1+2)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^k = 1 + p \cdot 2 + \frac{p(p-1)}{2} \cdot 4 + \cdots + 2^p.$$

Svaki je pribrojnik, osim prvog i zadnjeg, djeljiv s p pa je broj $3^p - 1 - 2^p$ djeljiv s p. Kako je $3^p - 1 - 2^p = 3^p - 3 - (2^p - 2)$, prema Lemi 2.2.2 imamo da p dijeli $2^p - 2$. Slijedi da

$$p \mid 3^p - 3.$$

□

Sada bi se tvrdnja MFT-a mogla pokazati za sljedeći prost broj $5 = 4 + 1$ gdje bi kako pretpostavku indukcije koristili Korolar 2.2.3. No može i jednostavnije. Pretpostavka da tvrdnja MFT-a vrijedi za prirodan broj a povlači da vrijedi i za $a + 1$. To je upravo korak indukcije opisan u sljedećej lemi.

Lema 2.2.5. *Neka je p prost broj i $a > 1$ prirodan broj takav da p dijeli $a^p - a$. Tada p dijeli $(a+1)^p - (a+1)$.*

Dokaz. Vrijedi:

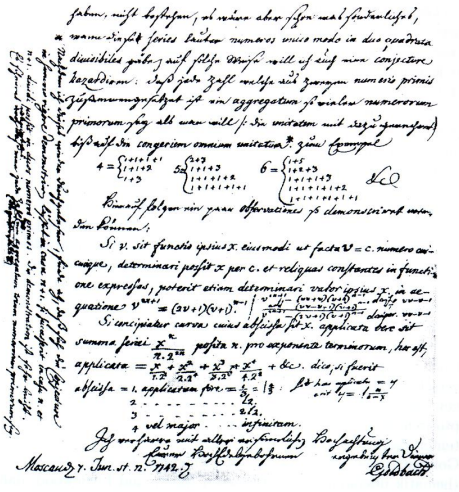
$$\begin{aligned}(a+1)^p - (a+1) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} - (a+1) \\ &= a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} + 1 - a - 1 \\ &= (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k}.\end{aligned}$$

Prema pretpostavci leme $p \mid a^p - a$. Nadalje, $p \mid \binom{p}{k}$ za sve $1 \leq k < p$, pa p dijeli desnu strane gornje jednakosti i stoga $p \mid (a+1)^p - (a+1)$. □

MFL slijedi prema principu matematičke indukcije. Lema 2.2.2 predstavlja bazu, a Lema 2.2.5 korak indukcije.

2.3 Drugi dokaz MFT-a

Drugu varijantu Eulerovog dokaza MFT-a nalazimo u pismu upućenom Goldbachu 6. ožujka 1742. Iako nalikuje prvom dokazu, uz njega je Euler iskazao i dokazao neke važne rezultate vezane uz sume kvadrata koje ćemo spomenuti u sljedećem poglavlju. Ponovo koristeći Binomni poučak Euler uočava sljedeće.



Slika 2: Goldbachovo pismo Euleru, 1742. godina

Lema 2.3.1. *Neka su a, b cijeli brojevi i p prost. Tada p dijeli $(a+b)^p - a^p - b^p$.*

Dokaz. Očito iz

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{p}{k}}_{p|} a^{p-k} b^k.$$

□

Sada baza indukcije predstavlja specijalan slučaj prethodne leme za $a = b = 1$, a u koraku indukcije lema se primijeni na a i $b = 1$.

2.4 Treći dokaz MFT-a

Sljedeći dokaz MFT-a Euler je predstavio Akademiji u Berlinu 13. veljače 1755. radom pod naslovom *Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta* (Teoremi o ostatcima pri dijeljenju potencija). Tada je ujedno prvi put iskaz teorema pripisao Fermatu. Ovaj Eulerov članak sadrži nekoliko ključnih koraka koji će doprinijeti razvoju teorije grupa. Kao što kaže i sam naslov, u članku se razmatra kada prost broj p dijeli potenciju broja a. Članak je koncipiran tako da se iza svake dokazane tvrdnje (teorema) navode posljedice, formirane kao korolari. Ukratko ga opisujemo s naglaskom na ključne tvrdnje za dokaz MFT-a.

Teorem 2.4.1. *Ako prost broj p ne dijeli a, onda ne dijeli niti jednu potenciju od a.*

Euler se u dokazu prethodnog teorema poziva na Euklidovu tvrdnju iz *Elemenata* koja kaže da ako p ne dijeli ni a ni b, onda ne dijeli ni njihov umnožak ab.

Budući da je ostataka pri dijeljenju konačno mnogo, jasno je da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 2.4.2. *Beskonačni niz brojeva $1, a, a^2, a^3, \ldots$ sadrži neke članove koji daju isti ostatak pri dijeljenju s prostim brojem p.*

Teorem 2.4.3. *Neka je p prost broj i $a > 1$. Ako p ne dijeli a, onda postoji beskonačno mnogo članova geometrijskog niza $1, a, a^2, a^3, \ldots$ koji daju ostatak 1 pri dijeljenju s p.*

Štoviše, eksponenti članova niza koji daju ostatak 1 pri dijeljenju s p tvore aritmetički niz.

Dokaz. Prema Korolaru 2.4.2, postoje bar dva člana tog niza koji pri dijeljenju s p daju isti ostatak. Neka su to a^m i a^n, $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Dakle, pisano suvremenim oznakama

$$a^m \equiv a^n \pmod{p}.$$

Stoga,

$$p \mid a^m - a^n = a^n(a^{m-n} - 1).$$

Prema Teoremu 2.4.1 $p \nmid a^n$ što povlači da

$$p \mid a^{m-n} - 1.$$

Označimo li sa $\lambda = m - n$, svaki član niza

$$1, a^\lambda, a^{2\lambda}, a^{3\lambda}, \ldots$$

pri dijeljenju s p daje ostatak 1. Dakle, postoji beskonačno mnogo potencija od a koje daju ostatak 1 pri dijeljenju s p.

Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj za kojeg je

$$a^{\lambda_0} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Tada su svi članovi geometrijskog niza $1, a, a^2, a^3, \ldots$ koji pri dijeljenju s p daju ostatak 1 dani s:

$$1, a^{\lambda_0}, a^{2\lambda_0}, a^{3\lambda_0}, \ldots$$

Očito eksponenti čine aritmetički niz, no ostaje nam još za pokazati da ne postoji potencija $a^m \equiv 1 \pmod{p}$ takva da $m \neq k\lambda_0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zaista, tada je $m = k\lambda_0 + r$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$ i $0 < r < \lambda_0$ prema Teoremu o dijeljenju s ostatkom. Očito je

$$a^m = \underbrace{a^{k\lambda_0}}_{\equiv 1 \pmod{p}} \cdot a^r \equiv 1 \pmod{p}$$

pa slijedi da je $a^r \equiv 1 \pmod{p}$ što je u kontradikciji s pretpostavkom minimalnosti od λ_0. □

Sada Euler uočava sljedeće, ako je $\lambda_0 \in \mathbb{N}$ najmanji takav za koji vrijedi $a^{\lambda_0} \equiv 1 \pmod{p}$, onda nikoje dvije potencije iz skupa

$$S = \{a^0 = 1, a^1, a^2, \ldots, a^{\lambda_0 - 1}\}$$

ne daju isti ostatak pri dijeljenju s p, tj. nisu međusobno kongruentne modulo p. Ako bi postojale takve dvije npr. $a^\mu \equiv a^\nu \pmod{p}$ za $1 \leq \nu < \mu < \lambda_0$ tada je $a^{\mu-\nu} \equiv 1 \pmod{p}$ i $1 < \mu - \nu < \lambda_0$ što je kontradikciji s minimalnošću. Dakle, za zaključiti je da je broj elemenata skupa S najviše $p - 1$ jer pri dijeljenju s p moraju dati različite ostatke $1, 2, \ldots, p - 1$, odnosno

$$|S| \leq p - 1.$$

S druge strane je $|S| = \lambda_0$ pa je

$$\lambda_0 \leq p - 1.$$

Euler dalje pretpostavlja da je $\lambda_0 < p - 1$. Tada postoji ostatak $k_1 \in \{2, \ldots, p - 1\}$ takav da niti jedan element iz skupa S ne daje ostatak k_1 pri dijeljenju s p, odnosno $a^i \not\equiv k_1 \pmod{p}$, za $i = 0, 1, \ldots, \lambda_0 - 1$. Promotrimo skup

$$S_1 = \{a^0 k_1 = k_1, a^1 k_1, a^2 k_1, \ldots, a^{\lambda_0 - 1} k_1\}.$$

Niti jedan od elemenata iz S_1 nije kongruentan modulo p s niti jednim elementom iz S. Ako bi bilo

$$a^j k_1 \equiv a^i \pmod{p},$$

onda bi, uz npr. pretpostavku $j \geq i$, slijedilo da je

$$a^i(a^{j-i}k_1 - 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Otuda je

$$a^{j-i}k_1 \equiv 1 \pmod{p},$$

odnosno

$$k_1 \equiv a^{\lambda_0-(j-i)} \pmod{p},$$

što je u kontradikciji s izborom elementa k_1. Slično se pokaže ako pretpostavimo da $j < i$.

Nadalje, lako se pokaže da su elementi iz S_1 međusobno nekongruentni modulo p. Stoga iz sljedeće tri činjenice:

1. $|S| = \lambda_0$, $|S_1| = \lambda_0$,
2. $S \cap S_1 = \emptyset$,
3. svi elementi iz $S \cup S_1$ su međusobno nekongruentni modulo p,

slijedi da je $|S \cup S_1| = 2\lambda_0$ pa je

$$2\lambda_0 = p - 1 \text{ ili } 2\lambda_0 < p - 1.$$

Ako je $2\lambda_0 < p - 1$, onda postoji ostatak $k_2 \in \{2, \ldots, p-1\}$, $k_2 \neq k_1$ takav da niti jedan element iz skupa $S \cup S_1$ ne daje ostatak k_2 pri dijeljenju s p, te definiramo skup

$$S_2 = \{a^0k_2 = k_2, a^1k_2, a^2k_2, \ldots, a^{\lambda_0-1}k_2\}.$$

Analognim zaključivanjem dobili bismo da je

$$3\lambda_0 = p - 1 \text{ ili } 3\lambda_0 < p - 1.$$

Ako $3\lambda_0 < p-1$, onda ponavljamo postupak. Postupak mora stati u konačno mnogo koraka. Time je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 2.4.4. *Ako je $\lambda_0 \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj za kojeg potencija a^{λ_0} daje 1 pri dijeljenju s p, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$n\lambda_0 = p - 1.$$

Drugim riječima, ako je $\lambda_0 \in \mathbb{N}$ najmanji takav za koji vrijedi $a^{\lambda_0} \equiv 1 \pmod{p}$, onda je λ_0 djelitelj od $p - 1$. Posljedica ovog teorema je upravo MFT.

Danas je uobičajeno broj λ_0 zvati *red* elementa a modulo p. Precizno ga definiramo na sljedeći način, a pojam se može poopćiti za prirodan broj n takav da su a i m relativno prosti.

Definicija 2.4.5. *Neka je a cijeli broj i n prirodan broj takav da $(a, n) = 1$. Najmanji prirodan broj λ_0 za koji vrijedi*

$$a^{\lambda_0} \equiv 1 \pmod{n}$$

zove se red *broja a modulo n.*

2.5 Četvrti dokaz MFT-a

8. lipnja 1758. Euler predstavlja svoj rad *Theoremata arithmetic nova methodo demonstrata* (Teoremi dokazani novom aritmetičkom metodom) koji ne samo da uključuje još jedan dokaz MFT-a, već i njegovu generalizaciju nazvanu *Euler-Fermatov teorem*, a danas poznatiju pod nazivom *Eulerov teorem*. Pritom uvodi vrlo korisnu aritmetičku funkciju koja, ponovo njemu u čast, nosi naziv *Eulerova funkcija* ili *Eulerova φ-funkcija*. Ukratko ćemo opisati sadržaj ovog Eulerovog članka.

U prethodnoj verziji dokaza MFT-a Euler je promatrao geometrijski niz, dok ovaj dokaz započinje promatranjem aritmetičkog niza a, $a + d$, $a + 2d$, ...

Teorem 2.5.1. *Ako su n i razlika d relativno prosti, tada svaki nenegativan broj manji od n predstavlja ostatak pri dijeljenju s n nekog od prvih n članova aritmetičkog niza:*

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d.$$

Drugim riječima, Teorem 2.5.1 kaže da skup $\{a, a + d, \ldots, a + (n - 1)d\}$ predstavlja jedan *potpuni sustav ostataka modulo n*. Prisjetimo se:

Definicija 2.5.2. *Neka je n prirodan broj. Skup cijelih brojeva $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sa svojstvom da za svaki cijeli broj y postoji točno jedan $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je*

$$y \equiv x_j \pmod{n}$$

zove se potpuni sustav ostataka modulo n.

Najpoznatiji potpuni sustav ostataka modulo n sastoji se od najmanjih nenegativnih brojeva $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Općenito, svaki n-člani skup cijelih brojeva čiji su elementi međusobno nekongruentni modulo n čini potpuni sustav ostataka modulo n. Tu jednostavnu činjenicu koristimo u dokazu Teorema 2.5.1.

Dokaz Teorema 2.5.1. Neka je dan aritmetički niz a, $a+d$, $a+2d$, ... i prirodan broj n koji je relativno prost s razlikom d. Promotrimo prvih n članova tog niza:

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d.$$

Pretpostavimo da je

$$a + x_i d \equiv a + x_j d \pmod{n},$$

za $x_i, x_j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $i \neq j$. Tada je i

$$x_i d \equiv x_j d \pmod{n}.$$

Kako je $(n, d) = 1$, prema Propoziciji 1.1.8 slijedi da je

$$x_i \equiv x_j \pmod{n}$$

pa smo dobili kontradikciju. Dakle, n-člani skup $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d\}$ sastoji se od elemenata koji su međusobno nekongruentni modulo n, odnosno čini potpuni sustav ostataka modulo n. □

Teorem 2.5.3. *Neka su d i $n > 0$ relativno prosti cijeli brojevi. Ako član $a + \nu d$ aritmetičkog niza daje ostatak $0 < r < n$ pri dijeljenju s n, te su r i n relativno prosti, tada su i brojevi $a + \nu d$ i n relativno prosti. Nadalje, ako r i n nisu relativno prosti, tada ni $a + \nu d$ i n nisu relativno prosti.*

Dokaz. Prema Teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni cijeli brojevi q i $0 \leq r < n$ takvi da je

$$a + \nu d = nq + r. \tag{2.1}$$

Prema pretpostavci teorema je $r > 0$.

Pretpostavimo da r i n nisu relativno prosti te označimo sa $z > 1$ njihov najveći zajednički djelitelj, $(r, n) = z$. Tada je $r = r_1 z$, $n = n_1 z$ i $(r_1, n_1) = 1$, te

$$a + \nu d = z(n_1 q + r_1).$$

Kako z dijeli desnu stranu, mora dijeliti i lijevu, odnosno $a + \nu d$ pa je $z > 1$ ujedno i zajednički djelitelj od n i $a + \nu d$.

Neka su r i n relativno prosti. Pretpostavimo da je $(n, a + \nu d) = z > 1$, odnosno vrijedi $n = n_1 z$, $a + \nu d = xz$. Tada iz (2.1) dobivamo

$$axz = n_1 z + r,$$

što znači da z dijeli r. No kako z dijeli i n, slijedi da r i n nisu relativno prosti. Kontradikcija! Dakle, $z = 1$, odnosno $(a + \nu d, n) = 1$. □

Kao posljedicu prethodnog teorema imamo činjenicu da je *broj* članova niza a, $a + d$, …, $a + (n-1)d$ koji su relativno prosti s n jednak *broju* nenegativnih brojeva manjih od n koji su relativno prosti s n. Euler je uočio važnost tog *broja* koji danas zovemo *vrijednošću Eulerove funkcije u n*.

Definicija 2.5.4. *Neka je n prirodan broj. Broj prirodnih brojeva u nizu $1, 2, \ldots, n$ koji su relativno prosti s n se označava s $\varphi(n)$. Ovime je definirana funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja se naziva* Eulerova funkcija.

Primjer 2.5.5. *$\varphi(6) = 2$, jer su u nizu $1, 2, 3, 4, 5, 6$ jedino 1 i 5 relativno prosti sa 6.*
$\varphi(7) = 6$, jer su u nizu $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ svi osim 7 relativno prosti sa 7. Općenito, lako zaključujemo da je $\varphi(p) = p - 1$.

Prisjetimo se sljedeće definicije.

Definicija 2.5.6. Reducirani sustav ostataka modulo n *je skup cijelih brojeva $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ sa svojstvom da je $(r_i, n) = 1$, $r_i \not\equiv r_j \pmod{n}$ za $i \neq j$, te da za svaki cijeli broj x takav da je $(x, n) = 1$ postoji $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takav da je $x \equiv r_i \pmod{n}$.*

Kako je jedan reducirani sustav ostataka modulo n skup svih brojeva $a \in \{1, 2, \ldots n\}$ za koje je $(a, n) = 1$, to je broj elemenata u reduciranom sustavu ostataka jedanak upravo $\varphi(n)$.

U sljedećem teoremu Euler zapravo naslućuje strukturu grupe. Pojam grupe razvijen je u drugoj polovici 19. stoljeća (Cauchy[3], Galois[4]). Napomenimo i da operacija množenja koja se spominje u sljedećem teoremu predstavlja zapravo množenje modulo n.

Teorem 2.5.7. *Neka su a i n relativno prosti. Skup ostataka dobivenih dijeljenjem s n geometrijskog niza brojeva $1, a, a^2, a^3, \ldots$ zatvoren je s obzirom na operaciju množenja.*

Dokaz. Neka je λ_0 red broja a modulo n. Označimo s $r_0, r_1, \ldots, r_{\lambda_0 - 1} \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ostatke pri dijeljenju s n brojeva $1, a, a^2, \ldots, a^{\lambda_0 - 1}$, tj.

$$r_j \equiv a^j \pmod{n}$$

za $j = 0, 1, \ldots, \lambda_0 - 1$. Uočimo da je $r_i > 0$ za sve i jer su a^i i n relativno prosti.

Nadalje, vrijedi da je

$$r_i \not\equiv r_j \pmod{n},\ i \neq j.$$

Zaista, ako $r_i \equiv r_j \pmod{n}$ i $i > j$, onda je

$$a^{i-j} \equiv 1 \pmod{n},$$

[3]Augustin Louis Cauchy, 1789. - 1857., francuski matematičar.

[4]Évariste Galois, 1811. - 1832., francuski matematičar.

što je nemoguće jer je $0 < i - j < \lambda_0$ a λ_0 je red elementa a.

Sada uočimo da za svaku potenciju a^k, $k \geq 0$ postoji $j \in \{0, 1, \ldots, \lambda_0 - 1\}$ takav da je

$$a^k \equiv r_j \pmod{n}.$$

Uistinu, prema Teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni $q \in \mathbb{Z}$ i $0 \leq j < \lambda_0$ za koje je $k = \lambda_0 q + j$ pa je

$$a^k = a^{\lambda_0 q + j} = \underbrace{(a^{\lambda_0})^q}_{\equiv 1} a^j \equiv a^j \equiv r_j \pmod{n}.$$

Dakle, skup ostataka dobiven dijeljenjem s n geometrijskog niza (a_k) je

$$\{r_0, r_1, \ldots, r_{\lambda_0 - 1}\}.$$

Preostaje još provjeriti da je zatvoren na množenje. Neka su $i, j \in \{0, 1, \ldots, \lambda_0 - 1\}$. Tada je

$$r_i r_j \equiv a^i a^j = a^{i+j} \equiv a^k = r_k \pmod{n},$$

gdje je $i + j = \lambda_0 q + k$, $0 \leq k < \lambda_0$. □

Danas bismo lako mogli ustanoviti da skup ostataka koji smo definirali u prethodnom dokazu, $\{r_0, r_1, \ldots, r_{\lambda_0 - 1}\}$ čini multiplikatvnu grupu. Zatvorenost smo upravo pokazali, komutativnost i asocijativnost su očite pa nam prestaje pokazati postojanje inverza. Uočimo, za $i > 0$ vrijedi

$$r_i r_{\lambda_0 - i} \equiv a^{\lambda_0} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Stoga je inverz od r_i, $i > 0$, jednak $r_{\lambda_0 - i}$, a $r_0 = 1$ je sam sebi inverz.

Primjer 2.5.8. Neka je $a = 2$, $m = 15$. Odredimo grupu ostataka modulo n geometrijskog niza (a^k). Prvo ustanovimo da je red broja 2 modulo 15 jednak 4, $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$, $\lambda_0 = 4$. Stoga je $\{r_0, r_1, r_2, r_3\} = \{1, 2, 4, 8\}$.

Primjer 2.5.9. Neka je $a = 3$, $m = 10$. Red broja 3 modulo 10 jednak je 4, $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, $\lambda_0 = 4$. Stoga je $\{r_0, r_1, r_2, r_3\} = \{1, 3, 9, 7\}$. U ovom slučaju se naša grupa poklopila s reduciranim sustavom ostataka modulo 10.

U predhodna dva primjera opisali smo slučajeve koji mogu nastupiti pri određivanju grupe ostataka modulo n geometrijskog niza (a^k). U Primjeru 2.5.8 smo dobili grupu $\{1, 2, 4, 8\}$ čiji je red, odnosno broj elemenata jednak 4, dok se reducirani sustav ostataka modulo 15, $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ sastoji od 8 elemenata i $4 \mid 8$. U Primjeru 2.5.9 broj elemenata grupe je upravo jednak broju elemenata u reduciranom

sustavu ostataka. Ovo što smo opazili zapravo je činjenica da red elementa modulo n dijeli vrijednost Eulerove funkcije u n, $\varphi(n)$. Euler to iskazuje sljedećim teoremom. Uočimo da u specijalnom slučaju, za $n = p$ prost broj, ovo svojstvo predstavlja tvrdnju Teorema 2.4.4.

Teorem 2.5.10. *Neka su a i n relativno prosti. Broj različitih ostataka pri dijeljenju s n niza potencija $1, a, a^2, a^3, \ldots$ dijeli broj brojeva brojeva manjih od n i relativno prostih s n.*

Euler je prethodni teorem dokazao slično kao Teorem 2.4.4. I ovdje bi tvrdnju moglu formulirati koristeći algebarske strukture i pozivajući se na Lagrangeov[5] teorem da red podgrupe dijeli red grupe, no Euler to u svoje vrijeme nije mogao formulirati na taj način. Ako pažljivije pogledamo dokaz, možemo uočiti da je Euler zapravo koristio ideju "razbijanja" grupe na klase. Kao posljedicu je dobio jedan od najvažnih rezultata teorije brojeva.

Teorem 2.5.11 (Izvorna formulacija Euler-Fermatova teorema)**.** *Neka su a i n relativno prosti. Ako je ν jednak broju brojeva manjih od n koji su relativno prosti s n ili djelitelju tog broja, onda a^ν pri dijeljenju s n daje ostatak 1.*

Iz toga slijedi da ako je n prost broj, vrijedi $\varphi(n) = n - 1$, čime je dokazan Mali Fermatov teorem.

2.6 Eulerov teorem

Danas *Euler-Fermatov teorem* češće nazivamo samo *Eulerovim teoremom* te ga iskazujemo u sljedećem obliku.

Teorem 2.6.1 (Eulerov teorem)**.** *Neka je a cijeli broj te n prirodan broj. Ako su brojevi a i n relativno prosti, onda je $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.*

Navest ćemo kraći i jednostavniji dokaz prethodne tvrdnje. Za to nam je potrebna sljedeća jednostavna lema.

Lema 2.6.2. *Neka je $\left\{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}\right\}$ reducirani sustav ostataka modulo n te neka je $(a, n) = 1$. Tada je i $\left\{ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(n)}\right\}$ reducirani sustav ostataka modulo n.*

[5] Joseph-Louis Lagrange, 1736. - 1813., francuski matematičar.

Dokaz Teorema 2.6.1. Neka je $\left\{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}\right\}$ reducirani sustav ostataka modulo n. Tada je prema Lemi 2.6.2 i $\left\{ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(n)}\right\}$ reducirani sustav ostataka modulo n. Dakle, vrijedi

$$\prod_{j=1}^{\varphi(n)} ar_j \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \pmod{n},$$

odnosno

$$a^{\varphi(n)} \prod_{j=1}^{\varphi(n)} r_j \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \pmod{n}.$$

Kako su r_i i n relativno prosti za svaki i, prema Propoziciji 1.1.8 slijedi da je $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. □

2.7 Svojstva Eulerove funkcije

Iz same definicije Eulerove funkcije je očito $\varphi(p) = p-1$ za prost broj p. Jednostavno možemo odrediti vrijednost Eulerove funkcije za potenciju prostog broja:

Propozicija 2.7.1. *Neka je p prost broj i $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\varphi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$.*

Dokaz. Neka je dan prost broj p i $k \in \mathbb{N}$. Jedini brojevi u nizu $1, 2, 3, \ldots, p^k$ koji nisu relativno prosti s p su brojevi $p, 2p, 3p, \ldots, p^{k-1} \cdot p$. Njih ima p^{k-1}. Kako je ukupan broj brojeva u nizu $1, 2, 3, \ldots, p^k$ jednak p^k slijedi da je $\varphi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$. □

Eulerova funkcija φ također (kako i funkcija σ) zadovoljava svojstvo multiplikativnosti. Odnosno, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, za $(m, n) = 1$. Ako iskoristimo to svojstvo i Propoziciju 2.7.1 dobit ćemo eksplicitnu formulu za računanje vrijednosti Eulerove funkcije za svaki prirodan broj n. Jedino što možda može biti problem jest činjenica da se formula bazira na kanonskom rastavu broja n na proste faktore.

Neka je

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

gdje su $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ prosti i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\varphi(n) = \varphi\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right),$$

zbog multiplikativnosti i

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

zbog Propozicije 2.7.1. Formulu često zapisujemo u sljedećem obliku

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right), \tag{2.2}$$

a koristan je i oblik

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1} (p_i - 1). \tag{2.3}$$

Primjer 2.7.2. Neka je $n = 12$. Prosti djelitelji broja 12 su 2 i 3 pa je

$$\varphi(12) = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4.$$

S druge strane, jedini brojevi u nizu $1, 2, \ldots, 12$ koji su relativno prosti s 12 su brojevi $1, 5, 7$ i 11.

Koristeći multiplikativnost funkcije φ i formulu (2.3) mogu se pokazati sljedeća svojstva.

Propozicija 2.7.3. *Neka su m i n prirodni brojevi. Vrijedi:*

1. *Ako je $n \geq 3$, onda je $\varphi(n)$ je paran broj.*
2. *Ako n dijeli m, onda $\varphi(n)$ dijeli $\varphi(m)$.*
3. *Ako je n paran broj, onda $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$, a ako je neparan, onda $\varphi(2n) = \varphi(n)$.*
4. *$\varphi(n^m) = n^{m-1}\varphi(n)$.*
5. *$\varphi([m, n])\varphi((m, n)) = \varphi(m)\varphi(n)$, gdje je $[m, n]$ najmanji zajednički višekratnik brojeva m i n, a (m, n) njihov najveći zajednički djelitelj.*
6. *$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\dfrac{(m, n)}{\varphi((m, n))}$.*

Danas je poznato da za neparan broj n vrijedi $\varphi(n) = \varphi(2n)$ te da ako n nije djeljiv ni s 2 ni 3, onda je $\varphi(3n) = \varphi(4n) = \varphi(6n)$. Pretpostavlja se, ali nije dokazano da vrijedi i sljedeće.

Slutnja 3. *Za svaki broj n postoji broj n' takav da vrijedi $\varphi(n) = \varphi(n')$.*

Poglavlje 3

Sume kvadrata

3.1 Sume dva kvadrata

Teorem 3.1.1 (Teorem o dva kvadrata)**.** *Svaki prosti broj p oblika $4k+1$ se može na jedinstveni način prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.*

U nastavku rada kraće ćemo govoriti samo o sumi, odnosno zbroju dva kvadrata.

Teorem o dva kvadrata se ponekad naziva i *Fermatov teorem o dva kvadrata* ili *Fermatov božićni teorem* jer je svoju tvrdnju elaborirao u pismu Marinu Mersenneu koje je datirano 25. prosinca 1640. Neki ovaj teorem nazivaju i *Girardovim teoremom* prema Albertu Girardu[1] koji se 15 godina prije Fermata bavio prirodnim brojevima koji se mogu reprezentirati kao zbroj dva kvadrata.

Fermat je teorem dokazao djelomično, a prvi koji ga je u potpunosti dokazao bio je Euler 1747. U dokazu je koristio *metodu neprekidnog silaska.* Jedan dio dokaza objavljen je u članku pod naslovom teorema kojeg je objavio u radu *De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum* (O brojevima koji su zbroj dva kvadrata) 1758. godine, a drugi *Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae 4n+1 esse summam duorum quadratorum* (Dokaz Fermatova teorema da se svaki broj oblika $4n+1$ može prikazati kao suma dva kvadrata) 1760. godine.

U nastavku slijedi Eulerov dokaz, ali uz današnju notaciju (npr. kongruencije). U njemu se koristi tzv. *Diofantov identitet* koji kaže da je umnožak brojeva koji su prikazivi kao zbroj dva kvadrata i sam zbroj dva kvadrata, odnosno

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 . \tag{3.1}$$

[1] Albert Girard, 1595. - 1632., flamanski matematičar.

Dokaz se sastoji od nekoliko koraka koje Euler naziva propozicijama.

Propozicija 3.1.2. *Količnik broja koji se može prikazati kao suma dva kvadrata i prostog broja koji se može prikazati kao suma dva kvadrata je isto suma dva kvadrata.*

Dokaz. Neka su $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$. Pretpostavimo da prost broj $p^2 + q^2$ dijeli broj $a^2 + b^2$. Tada $p^2 + q^2$ dijeli i

$$p^2(a^2 + b^2) - a^2(p^2 + q^2) = (pb - aq)(pb + aq).$$

Budući je $p^2 + q^2$ prost, vrijedi da $(p^2 + q^2) \mid (pb - aq)$ ili $(p^2 + q^2) \mid (pb + aq)$. Ako $(p^2 + q^2) \mid (pb - aq)$ onda prema (3.1) imamo

$$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap + bq)^2 + (aq - bp)^2,$$

pa slijedi da $(p^2 + q^2) \mid (pb + aq)$. Sada tvrdnju dobivamo iz

$$\frac{a^2 + b^2}{p^2 + q^2} = \frac{(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)^2} = \underbrace{\left(\frac{ap + bq}{p^2 + q^2}\right)^2}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\left(\frac{aq - bp}{p^2 + q^2}\right)^2}_{\in \mathbb{N}}.$$

□

Propozicija 3.1.3. *Količnik broja koji se može prikazati kao suma dva kvadrata i prostog broja koji se* ne *može prikazati kao suma dva kvadrata ima prostog djelitelja koji* nije *suma dva kvadrata.*

Dokaz. Pretpostavimo da je

$$\frac{a^2 + b^2}{c} = p_1 p_2 \cdots p_n,$$

gdje c nije suma dva kvadrata, a $p_1, \ldots, p_n$ su prosti i, suprotno tvrdnji, prikazivi kao zbroj dva kvadrata. Dijeljenjem $a^2 + b^2$ s p_1 dobivamo količnik $cp_2 \cdots p_n$ koji prema Propoziciji 3.1.2 je suma dva kvadrata. Uzastopnim dijeljenjem s $p_2, \ldots, p_n$ i primjenom Propozicije 3.1.2 doći ćemo do zaključka da je c suma dva kvadrata što je u suprotnosti s pretpostavkom propozicije. Stoga postoji p_i, $1 \leq i \leq n$, koji se ne može prikazati kao suma dva kvadrata. □

Propozicija 3.1.4. *Neka su a i b relativno prosti cijeli brojevi. Tada je svaki (prosti) djelitelj od $a^2 + b^2$ moguće zapisati kao sumu dva kvadrata.*

Dokaz. Neka je p prost djelitelj od $a^2 + b^2$. Nadalje, neka su $c, d \in \mathbb{Z}$ takvi da je $|c|, |d| < \frac{p}{2}$ i

$$a \equiv c \pmod{p},\ b \equiv d \pmod{p}.$$

Tada je i $c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{p}$, odnosno $p \mid c^2 + d^2$ i

$$c^2 + d^2 < 2\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{p}{2} \cdot p.$$

Stoga postoji $1 \leq k \leq \frac{p}{2}$ takav da je

$$c^2 + d^2 = kp. \tag{3.2}$$

Nadalje, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su c i d relativno prosti. Ako ne bi bili, umjesto njih uzeli bi $c' = \frac{c}{(c,d)}$, $d' = \frac{c}{(c,d)}$, $k' = \frac{k}{(c,d)^2}$, pri čemu je (c, d) najveći zajednički djelitelj od c i d.

Ako je $k = 1$, onda je dokaz naše tvrdnje gotov jer smo prostog djelitelja prikazali kako sumu kvadrata. Ako $k > 1$, tada je moguće primijeniti *metodu neprekidnog silaska* koja vodi do kontradikcije.

Pretpostavimo da je $k > 1$. Neka su $u, v \in \mathbb{Z}$ takvi da je $|u|, |v| \leq \frac{k}{2}$ i za koje vrijedi

$$u \equiv c \pmod{k},\ v \equiv d \pmod{k}. \tag{3.3}$$

Tada je

$$u^2 + v^2 \equiv c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{k},$$

iz čega slijedi da je

$$u^2 + v^2 = kr, \tag{3.4}$$

za neki prirodan broj r. Uočimo da r ne može biti 0. U tom slučaju bi bilo $u = v = 0$, odnosno $k > 1$ bi dijelio c, d što nije moguće jer su relativno prosti. Za broj r dobivamo sljedeću gornju ogradu

$$r = \frac{1}{k}\left(u^2 + v^2\right) \leqslant \frac{1}{k}\left(\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4}\right) \leq \frac{k}{2} \leq \frac{p}{4}.$$

Množenjem jednakosti (3.2) i (3.4) te primjenom identiteta (3.1) dobivamo

$$k^2 pr = \left(c^2 + d^2\right)\left(u^2 + v^2\right) = (cu + dv)^2 + (cv - du)^2. \tag{3.5}$$

Primjetimo, $cu + dv$ i $cv - du$ su višekratnici broja k,

$$cu + dv \equiv c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{k},$$

$$cv - du \equiv cy - dx \equiv 0 \pmod{k}.$$

Stoga jednakost (3.5) možemo podijeliti s k^2 čime dobivamo

$$rp = c_1^2 + d_1^2,$$

gdje su $c_1 = \dfrac{cu + dv}{k}$ i $d_1 = \dfrac{cv - du}{k}$ cijeli brojevi. Nadalje, bez smanjenja općenitosti $(c_1, d_1) = 1$. Time smo pokazali da postoji prirodan broj $r < k$ za koji je rp moguće prikazati kao sumu dva kvadrata. Dakle, moguće je provesti metodu neprekidnog silaska. Stoga zaključujemo da postoje $x, y \in \mathbb{N}$ za koje je

$$p = x^2 + y^2.$$

□

Propozicija 3.1.5. *Svaki prost broj oblika* $4n + 1$ *jednak je sumi dva kvadrata.*

Dokaz. Budući je $4n + 1 = p$ prost, MFT 2.1.1 povlači da je

$$1, 2^{4n}, 3^{4n}, \ldots, (4n)^{4n} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Otuda je razlika svaka dva susjedna člana djeljiva s $4n + 1$, odnosno

$$2^{4n} - 1, 3^{4n} - 2^{4n}, \ldots, (4n)^{4n} - (4n-1)^{4n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Svaku od gornjih razlika faktoriziramo kao razliku kvadrata:

$$x^{4n} - y^{4n} = \underbrace{\left(x^{2n} + y^{2n}\right)}_{\square+\square}\left(x^{2n} - y^{2n}\right).$$

Ako postoji $1 \leq a \leq 4n - 1$ takav da p dijeli $(a+1)^{2n} + a^{2n}$, onda prema Propoziciji 3.1.4 slijedi da je i sam p jednak sumi kvadrata. Zato pretpostavimo da p dijeli sve razlike

$$2^{2n} - 1, 3^{2n} - 2^{2n}, \ldots, (4n)^{2n} - (4n-1)^{2n}.$$

No i $4n - 2$ dijeli uzastopne razlike prethodnog niza,

$$3^{2n} - 2 \cdot 2^{2n} + 1, \ldots, (4n)^{2n} - 2 \cdot (4n-1)^{2n} + (4n-2)^{2n}.$$

Nastavljajući tako dalje, nakon $2n$ koraka, prema Lemi 3.1.6 ćemo dobiti (za $f(x) = x^{2n}$) broj $(2n)!$ koji mora bit djeljiv s p, što nije moguće. Stoga p dijeli barem jedan faktor oblika $(a+1)^{2n} + a^{2n}$. □

U dokazu prethodne tvdnje koristila se tzv. *diferencija polinoma.* Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiramo *diferenciju 1. reda* kao

$$D_1(x) = f(x+1) - f(x),$$

zatim *diferenciju 2. reda*

$$D_2(x) = D_1(x+1) - D_1(x).$$

Općenito, *diferencija k-tog reda* je

$$D_k(x) = D_{k-1}(x+1) - D_{k-1}(x),$$

za $k \in \mathbb{N}$, pri čemu je $D_0(x) = f(x)$.

Lema 3.1.6. *Ako je f polinom stupnja k, tada je k-ta diferencija konstantna funkcija. Konkretno,*

$$D_k(x) = a_k \cdot k!,$$

gdje je a_k vodeći koeficijent polinoma f.

Dokaz. Neka je

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje je $a_k \neq 0$. Tada je

$$D_1(x) = f(x+1) - f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \left((x+1)^i - x^i\right),$$

a prema Binomnom teoremu

$$(x+1)^i - x^i = \binom{i}{1}x^{i-1} + \binom{i}{2}x^{i-2} + \cdots + \binom{i}{i-1}x^1 + \binom{i}{0}x^0.$$

Stoga je D_1 polinom stupnja $k-1$:

$$D_1(x) = a_k\binom{k}{1}x^{k-1} + \left(a_k\binom{k}{2} + a_{k-1}\binom{k-1}{1}\right)x^{k-2} + \cdots + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1)\,x^0.$$

Analognim zaključivanjem, polinom D_2 je stupnja $k-2$ i koeficijent uz vodeću potenciju je

$$a_k\binom{k}{1}\binom{k-1}{1}.$$

Konačno, možemo zaključiti da je D_k je stupnja 0, odnosno konstantan polinom i

$$D_k(x) = a_k\binom{k}{1}\binom{k-1}{1}\cdots\binom{2}{1}\binom{1}{1} = a_k \cdot k!.$$

□

Propozicija 3.1.7. *Prikaz prostog broja $4n+1$ kao sume kvadrata dva prirodna broja je jedinstven, do na poredak pribrojnika.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi x, y, X, Y, za koje vrijedi

$$p = x^2 + y^2,\ p = X^2 + Y^2. \tag{3.6}$$

Nakon množenja jednakosti u (3.6) i primjene identiteta (3.1) dobivamo

$$p^2 = \left(x^2 + y^2\right)\left(X^2 + Y^2\right) = (xX + yY)^2 + (xY - yX)^2. \tag{3.7}$$

Uočimo da je $xX + yY \equiv xY - yX \equiv 0 \pmod{p}$. Zaista, iz (3.6) slijedi $x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$, $X^2 \equiv -Y^2 \pmod{p}$ pa je $x^2X^2 \equiv y^2Y^2 \pmod{p}$. Stoga,

$$xX + yY \equiv 0 \pmod{p} \text{ ili } xX - yY \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vrijede implikacije:

$$\begin{aligned} xX + yY \equiv 0 \pmod{p} &\Rightarrow xX^2 \equiv -yXY \pmod{p} \\ &\Rightarrow -xY^2 \equiv -yXY \pmod{p} \\ &\Rightarrow xY \equiv yX \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ako bi vrijedilo $xX - yY \equiv 0 \pmod{p}$, onda bi dobili $xY + yX \equiv 0 \pmod{p}$ pa bi u (3.7) zamijenili y s $-y$.

Dakle, $xX + yY$ i $xY - yX$ su višekratnici broja p. Sada izraz (3.7) možemo podijeliti s p^2 čime dobivamo

$$1 = A^2 + B^2,$$

za $A, B \in \mathbb{Z}$. Jedina moguća rješenja prethodne jednadžbe do na poredak pribrojnika su $A = \pm 1$, $B = 0$ što znači da je i u jednadžbi (3.7) jedan od pribrojnika morao biti 0. Kako su x i y te X i Y relativno prosti, iz $xX + yY = 0$ slijedi da je

$$(x, y) = (Y, -X) \text{ ili } (x, y) = (-Y, X).$$

Ako bi vrijedilo $xY - yX = 0$, slijedilo bi

$$(x, y) = (X, Y) \text{ ili } (x, y) = (-X, -Y).$$

Dakle, jedina mogućnost je $(x, y) = (X, Y)$. □

3.2 Sume četiri kvadrata

U Fermatovom pismu Carcaviju[2] nalazimo i *Teorem o četiri kvadrata.* Rene Descartes jednom je prilikom izrekao:

"Neupitno je da je ovaj teorem jedan od najljepših teorema teorije brojeva, ali ja nemam njegov dokaz. Po mojoj procjeni, bilo bi toliko teško dokazati ga da dokaz nisam ni tražio."

Da je dokaz uistinu bilo teško pronaći potvrđuje i činjenica da je Euler preko 40 godina pokušavao dokazati navedeni teorem, ali u tome nije uspio. Dokaz teorema dao je Lagrange krajem 18. stoljeća pa se danas taj teorem naziva i *Lagrangeovim teoremom o četiri kvadrata.*

Teorem 3.2.1 (Teorem o četiri kvadrata)**.** *Svaki se prirodan broj može zapisati kao suma kvadrata četiri cijela broja.*

Lagrange je u dokazu iskoristio Eulerov teorem o sumi četiri kvadrata kojeg je potonji izrekao u pismu upućenom Goldbachu 1748. godine.

Teorem 3.2.2 (Eulerov teorem o četiri kvadrata)**.** *Umnožak dva broja, od kojih je svaki suma četiri kvadrata, je i sam suma četiri kvadrata.*

Zapisano simbolima, teorem kaže sljedeće:

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) =&(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2+\\ &(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2+\\ &(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2+\\ &(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2.\end{aligned}$$

Primjer 3.2.3. *Broj* 30 *možemo izraziti kao* $1^2+2^2+3^2+4^2$*, a broj* 10 *kao* $1^2+1^2+2^2+2^2$*. Primjenom Eulerova teorema o četiri kvadrata slijedi da i umnožak* $30\cdot 10$ *možemo izraziti pomoću sume četiri kvadrata. Zaista, vrijedi*

$$30\cdot 10=(-15)^2+1^2+(-5)^2+7^2.$$

[2]Pierre de Carcavi, oko 1600. - 1684., francuski matematičar.

Poglavlje 4

Kvadratni ostatci

4.1 Legendreov simbol

Definicija 4.1.1. *Neka su a i m relativno prosti prirodni brojevi. Ako kongruencija*

$$x^2 \equiv a \pmod{m}$$

ima rješenja, onda kažemo da je a kvadratni ostatak modulo m. *U suprotnom kažemo da je a* kvadratni neostatak modulo m.

Teorem 4.1.2. *Neka je p neparan prost broj. Reducirani sustav ostataka modulo p se sastoji od $\frac{p-1}{2}$ kvadratnih ostataka i $\frac{p-1}{2}$ kvadratnih neostataka.*

Dokaz. Neka je p neparan prost broj. Skup

$$S = \left\{-\frac{p-1}{2}, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right\}$$

čini potpuni sustav ostataka modulo p. Svaki kvadratni ostatak modulo p mora biti kongruentan nekom od brojeva

$$(\pm 1)^2, (\pm 2)^2, \ldots, \left(\pm\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Njih ima ukupno $\dfrac{p-1}{2}$. Pretpostavimo sada da je

$$k^2 \equiv l^2 \pmod{p},$$

pri čemu je $1 \leqslant k < l \leqslant \dfrac{p-1}{2}$. Tada je $(l+k)(l-k) \equiv 0 \pmod{p}$ iz čega slijedi da je $l + k \equiv 0 \pmod{p}$ ili $l - k \equiv 0 \pmod{p}$. No kako su $k, l \in R$ to je nemoguće, odnosno vrijedi

$$k^2 \neq l^2 \pmod{p},$$

za $1 \leqslant k < l \leqslant \dfrac{p-1}{2}$. □

Primjer 4.1.3. Odredit ćemo sve kvadratne ostatke, odnosno neostatke modulo $p = 11$. Na temelju dokaza prethodnog teorema slijedi da su kvadratni ostatci modulo 11 jednaki

$$1, 4, 9, 16 \equiv 5 \pmod{11}, 25 \equiv 3 \pmod{11}.$$

Stoga su neostatci jednaki $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \backslash \{1, 3, 4, 5, 9\} = \{2, 6, 7, 8, 10\}$.

Definicija 4.1.4. *Neka je p neparan prost broj i a prirodan broj.* Legendreov simbol*, u oznaci $\left(\dfrac{a}{p}\right)$, je jednak* 1 *ako je a kvadratni ostatak modulo p,* -1 *ako je a kvadratni neostatak modulo p, a jednak 0 ako p dijeli a.*

4.2 Eulerov kriterij

Odrediti vrijednost Legendreova simbola nije posebno teško ako je prost p dovoljno mali broj (npr. kao u Primjeru 4.1.3), no za veće p to predstavlja problem. Euler je koristeći MFT, našao "formulu" za određivanje Legendreova simbola.

Teorem 4.2.1 (Eulerov kriterij)**.** *Ako je p neparan prost broj, onda je*

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Dokaz. Neka je p neparan prost broj. Treba ustanoviti da je

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0, 1, -1 \pmod{p}$$

za

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 0, 1, -1,$$

respektivno. Stoga razlikujemo tri slučaja.

1. Ako je $\left(\dfrac{a}{p}\right) = 0$, onda $p \mid a$, odnosno $a \equiv 0 \pmod{p}$ pa analogna relacija vrijedi i za svaku potenciju od a.

2. Pretpostavimo da je a kvadratni ostatak modulo p, odnosno da je $\left(\dfrac{a}{p}\right) = 1$. Tada postoji cijeli broj x_1 takav da je

$$x_1^2 \equiv a \pmod{p}.$$

Kako su a i p relativno prosti, slijedi da su i x_1 i p relativno prosti. Iz MFT 2.1.1 primijenjenog na brojeve x_1 i p slijedi

$$x_1^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Kako je $x_1^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ dobivamo

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

3. Pretpostavimo da je a kvadratni neostatak modulo p, odnosno da je $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.

   Ustanovimo da za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ postoji jedinstveni $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $i \neq j$ takav da je

   $$i \cdot j \equiv a \pmod{p}. \tag{4.1}$$

   Razlog tome jest što linearna kongruencija $i \cdot x \equiv a \pmod{p}$ ima jedinstveno rješenje u skupu $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ jer su brojevi i i p relativno prosti. Nadalje, $j \neq i$ jer je a kvadratni neostatak modulo p. Stoga skup $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ možemo rasporediti u $\frac{p-1}{2}$ parova (i, j) za koje vrijedi (4.1), odnosno

   $$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

   S druge strane koristeći Wilsonov teorem 4.2.2koji kaže da je

   $$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

   slijedi

   $$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

□

U dokazu prethodne tvrdnje korišten je *Wilsonov teorem* kojeg je iskazao John Wilson[1] 1770. godine (iako je navodno i prije toga bio poznat Leibnizu, a još prije i arapskim matematičarima u 11. stoljeću). Dokazao ga je 1773. godine Lagrange. U dokazu se koristi ideja slična onoj u slučaju 3. prethodnog dokaza.

Teorem 4.2.2 (Wilsonov teorem)**.** *Ako je p prost broj, onda je $(p-1)!+1$ višekratnik od p.*

Vrijedi i obrat Teorema 4.2.2. Ako je $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, onda je p prost.

[1] John Wilson, 1741. - 1793., engleski matematičar.

4.3 Svojstva Legendreova simbola

U ovom odjeljku navodimo neka svojstva Legendreova simbola koja direktno slijede iz Eulerova kriterija.

Teorem 4.3.1. *Za svaka dva cijela broja a i b te neparan prost broj p vrijedi:*

(1) Ako je $a \equiv b \pmod{p}$, *onda je* $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

(2) $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$.

(3) Ako je $(a,p) = 1$, *onda je* $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$.

Dokaz. Neka su dani cijeli brojevi a i b te neparan prost broj p.

(1) Koristeći Eulerov kriterij i pretpostavku $a \equiv b \pmod{p}$, imamo

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod{p}.$$

(2) Primjenom Eulerova kriterija dobivamo

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{ab}{p}\right) \pmod{p}.$$

Kako je Legendreov simbol jednak $-1, 0$ ili 1 slijedi $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$.

(3) Pretpostavimo da je $(a,p) = 1$. Kako kongruencija $x^2 \equiv a^2 \pmod{p}$ ima rješenje $x = a$, to je a^2 kvadratni ostatak modulo p. □

Teorem 4.3.2. *Za neparan prost broj p vrijedi:*

(1) $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$,

(2) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Dokaz. Neka je p neparan prost broj.
Dokaz od (1) slijedi direktno iz tvrdnje (3) prethodnog teorema.
Tvrdnju (2) dobivamo uvrštavanjem $a = -1$ u Eulerov kriterij. □

Poglavlje 5

Veliki Fermatov teorem

5.1 Fermatova *slutnja*

Kao što smo već ranije spomenuli Fermat je svoje spoznaje ponekad zapisivao na margine knjiga. Tako je u svom primjerku Bachetovog[1] prijevoda Diofantove *Arithmetice* zapisao sljedeće:

"Nije moguće kub rastaviti na dva kuba ili bikvadrat na dva bikvadrata niti općenitije neku potenciju veću od druge na dvije potencije s istim eksponentom. Za to imam stvarno čudesan dokaz, no rub je ovdje preuzak da ga zapišem."

Danas taj teorem znamo pod nazivom *Veliki Fermatov teorem*, u nastavku kraće VFT i pamtimo ga u sljedećem obliku.

Teorem 5.1.1 (VFT)**.** *Ne postoje pozitivni cijeli brojevi x, y, z takvi da vrijedi*

$$x^n + y^n = z^n,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Jasno je da za $n = 1$ jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja. Za $n = 2$ također postoji beskonačno mnogo rješenja, a neka su od njih bila poznata još Babiloncima oko 1800 godina prije Krista. Danas uređenu trojku (x, y, z) prirodnih brojeva za koju vrijedi $x^2 + y^2 = z^2$ nazivamo *Pitagorinom trojkom.*

Fermat je i prije iskaza samog VFT, u pismu iz 1658. godine, izrekao dva specijalna slučaja tog teorema.

Slutnja 4. *Ne postoji pravokutan trokut čije su duljine stranica prirodni brojevi čija je površina kvadrat prirodnog broja.*

[1]Claude Gaspard Bachet de Méziriac, 1587. - 1638., francuski matematičar i pisac.

Slutnja 5. *Ne postoji kub cijelog broja koji je jednak zbroju kubova dva racionalna broja.*

Moguće je da je Fermat znao dokazati VFT za slučaj $n = 3$ i $n = 4$. Za posljednji je pronađena njegova skica dokaza u kojoj koristi *metodu neprekidnog silaska*. Iako je neposredno nakon iskaza teorema Fermat napisao da ga zna u cijelosti dokazati, danas je uopćeno mišljenje da dokaz zapravo nije znao. U prilog tome ide i činjenica da su ga mnogi veliki matematičari pokušali dokazati no većinom su uspjevali dokazati samo neke specijalne slučajeve. U novije vrijeme su na dokazu radila trojica matematičara: Gerhard Frey[2], Richard Taylor[3] i Andrew Wiles[4]. Posljednji je korak napravio Wiles 1995. godine nakon gotovo 360 godina.

5.2 Eulerov doprinos

Euler je također bio jedna od osoba čiju je pažnju okupirao Fermatov teorem. U Engleskoj se literaturi teorem naziva *Fermatovim posljednjim teoremom*. Ne zato što je to bila zadnja slutnja koju je Fermat izrekao, već zato što je nakon Eulera to ostala jedina važna Fermatova tvrdnja koju je trebalo dokazati ili opovrgnuti. On je 23. lipnja i 16. kolovoza 1738. godine Akademiji u St. Peterburgu predstavio *Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes* (Dokazi nekih aritmetičkih teorema). Međuostalim, dokazao je da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 5.2.1. *Jednadžba $x^4 - y^4 = z^2$ nema cjelobrojnih rješenja uz uvjet $xyz \neq 0$.*

Geometrijski prethodnu tvrdnju možemo interpretirati da ne postoji Pitagorin trokut, odnosno pravokutan trokut čije su stranice cjelobrojne, u kome su hipotenuza i jedna kateta kvadrati prirodnih brojeva. On ima dvije važne posljedice. Jedna je dokaz Slutnje 4 koja je zapravo njen korolar.

Korolar 5.2.2. *Jednadžba $x^4 + y^4 = z^4$ nema cjelobrojnih rješenja uz uvjet $xyz \neq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $abc \neq 0$, rješenje jednadžbe $x^4 + y^4 = z^4$. Tada je

$$c^4 - a^4 = (b^2)^2,$$

odnosno (c, a, b^2) je rješenje jednadžbe $x^4 - y^4 = z^2$ koje zadovoljava uvjet $xyz \neq 0$ što nije moguće prema Teoremu 5.2.1. □

[2]Gerhard Frey, rođen 1944., njemački matematičar.
[3]Richard Lawrence Taylor, rođen 1962., američki matematičar.
[4]Sir Andrew John Wiles, rođen 1953., britanski matematičar.

Nepotpun dokaz VFT za slučaj $n = 3$ Euler je dao 1753., ali je postao poznat tek nakon objavljivanja djela *Elements of algebra* 1770. godine. Dokaz je proveo *metodom neprekidnog silaska*, a u nastavku donosimo skicu dokaza.

Dokaz. Pretpostavimo da je $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ rješenje jednadžbe

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0, \tag{5.1}$$

pri čemu su cijeli brojevi $a, b, c \neq 0$ u parovima relativno prosti te ne svi pozitivni. Naime, kada bi dva navedena broja sadržavala zajednički faktor, tada bi ga sadržavao i treći broj pa bismo jednadžbu mogli podijeliti tim faktorom. Točno jedan od ta tri broja mora biti paran pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to c. Kako su a i b neparni brojevi, oni nužno moraju biti različiti. U protivnom bi vrijedilo

$$2a^3 = -c^3,$$

iz čega slijedi da je a paran što je u proturječju s pretpostavkom da je samo c paran. Zbroj i razlika dva neparna broja je paran broj pa vrijedi

$$a + b = 2u,\ a - b = 2v,$$

iz čega slijedi

$$a = u + v,\ b = u - v. \tag{5.2}$$

Uvrstimo li (5.2) u početnu jednadžbu (5.1) dobivamo

$$-c^3 = (u + v)^3 + (u - v)^3 = 2u\left(u^2 + 3v^2\right). \tag{5.3}$$

Zbog različite parnosti cijelih brojeva $u \neq 0$ i $v \neq 0$, broj $u^2 + 3v^2$ je uvijek neparan. Primjetimo, u i v su različite parnosti i relativno prosti. Kada bi imali zajednički faktor veći od 1, on bi dijelio i a i b što je u suprotnosti s pretpostavkom $(a, b) = 1$. Također možemo pretpostaviti da su u i v oba pozitivna, inače zamjenimo a i b. Prema ranijoj pretpostavci c je paran iz čega slijedi da je u paran, a v neparan. Kako je $(u, v) = 1$ zaključujemo da je najveći zajednički djelitelj brojeva $2u$ i $u^2 + 3v^2$ ili 1 ili 3.

1. slučaj. Neka je $(2u, u^2 + 3v^2) = 1$. Tada $3 \nmid u$ i vrijedi

$$2u = r^3, \tag{5.4}$$

$$u^2 + 3v^2 = s^3. \tag{5.5}$$

Euler je sada uočio sljedeći identitet,

$$\begin{aligned}(e^2+3f^2)^3 &= (e^2+3f^2)\left((e^2-3f^2)^2+3(2ef)^2\right),\\ &= \left(e(e^2-3f^2)+3f(2ef)\right)^2+3\left(e(2ef)+f(e^2-3f^2)\right)^2\\ &= (e^3-9ef^2)^2+3(3e^2f-3f^3)^2.\end{aligned}$$

Dakle, ako

$$u = e^3-9ef^2,\ v = 3e^2f-3f^3, \tag{5.6}$$

onda

$$u^2+3v^2 = (e^2+3f^2)^3.$$

Ono što je Euleru trebalo u nastavku dokaza jest da je *jedini* način da broj oblika u^2+3v^2 bude kub, jest da u i v budu oblika (5.6). Konkretno, formulirao je u dvije tehničke leme.

Lema 5.2.3. *Ako je s neparan broj za koji vrijedi $s^3 = u^2+3v^2$, tada postoje relativno prosti cijeli brojevi e i f takvi da je $s = e^2+3f^2$.*

Lema 5.2.4. *Ako je broj u^2+3v^2 kub pri čemu su u i v relativno prosti brojevi različite parnosti, onda postoje relativno prosti brojevi e i f različite parnosti takvi da je $u = e\left(e^2-9f^2\right), v = 3f\left(e^2-f^2\right)$.*

Euler je dokaz prethodne leme bazirao se na netočnoj tvrdnji. Ispravak njegove greške možemo pronaći u odsječku 2.5 iz [7].

Pretpostavimo da je e paran, što znači da je f neparan. Iz (5.4) je

$$r^3 = 2u = 2e(e-3f)(e+3f).$$

Kako su faktori $2e, e-3f, e+3f$ u parovima relativno prosti, svaki od njih mora biti kub cijelog broja, odnosno

$$\begin{aligned}-2e &= a_1^3,\\ e-3f &= b_1^3,\\ e+3f &= c_1^3.\end{aligned}$$

Time smo dobili "manje" rješenje (a_1, b_1, c_1) jednadžbe $x^3+y^3+z^3 = 0$. Zaista, $|c_1| \leq 2u \leq a+b < |c|$. Stoga primjenom metode silaska zaključujemo da ne postoji netrivijalno rješenje.

2. slučaj. Neka je $(2u, u^2 + 3v^2) = 3$. Tada $3 \mid u$ i $3 \nmid v$ pa možemo pisati $u = 3w$. Tada je

$$-z^3 = 2u\left(u^2 + 3v^2\right) = 2 \cdot 3^2 w\left(3w^2 + v^2\right)$$

iz čega se lako vidi $(2 \cdot 3^2 w, 3w^2 + v^2) = 1$ što znači da su oba broja kubovi nekih cijelih brojeva, odnosno vrijedi

$$\begin{aligned} 18w &= r^3, \\ 3w^2 + v^2 &= s^3. \end{aligned}$$

Sada je nastavak dokaza analogan postupku u 1. slučaju. □

Poglavlje 6

Pellova jednadžba

Diofantska jednadžba je polinomijalna jednadžba sa cjelobrojnim koeficijentima koja se rješava u prstenu cijelih brojeva. Specijalna diofantska jednadžba oblika

$$x^2 - dy^2 = 1, \tag{6.1}$$

gdje je d prirodan broj koji nije potpuni kvadrat, zove se *Pellova jednadžba*. Pellova jednadžba uvijek ima trivijalno rješenje $(1, 0)$, a ostala rješenja traže se u skupu prirodnih brojeva. Najmanje među njima zove se *fundamentalno rješenje*.

Modifikacija jednadžbe (6.1) oblika

$$x^2 - dy^2 = N, \tag{6.2}$$

za $N \in \mathbb{N}$, zove se *pellovska jednadžba*.

Neki specijalni slučajevi Pellove jednadžbe su javili se još kod starogrčkog matematičara Arhimeda u 3. stoljeću prije Krista pri rješavanju takozvanog "problema stoke". U 7. stoljeću Pellovom jednadžbom bave se i indijski matematičari, npr. Brahmagupta[1]. U 12. stoljeću Bhaskara II[2] razvija cikličku metodu nazvanu *Chakravala* za određivanje rješenja Pellove jednadžbe. Gotovo 5. stoljeća kasnije Fermat je shvatio da Pellova jednadžba (za razliku od pellovske) ima beskonačno mnogo rješenja. No Euler je bio taj koji ju je dublje analizirao, baš kao i neke druge diofantske jednadžbe te je svoja opažanja objavio u knjizi *Vollständige Anleitung zur Algebra* (Elementi algebre) 1765. godine. Njegova se metoda oslanja na neke pokušaje Wallisa i metodu *Chakravala*. Za razliku od Bhaskare II, za kojeg ne znamo kako je došao do svojih zaključaka, Euler svoje temelji na rigoroznim dokazima koji se često baziraju

[1]Brahmagupta, 598. - oko 670., indijski matematičar.

[2]Bhaskara II, 1114.- 1185., indijski matematičar.

na principu matematičke indukcije i Fermatovoj *metodi neprekidnog silaska*. Ubrzo nakon izlaska Eulerove knjige, Joseph-Louis Lagrange zaokružuje priču oko rješavanja Pellove jednadžbe. Svoje značajne doprinose, upotpunjenja i ispravke objavljuje u dodatku koji jednostavno naziva *Dodatci Eulerovim Elementima algebre*.

Iako jednadžba novi Pellovo ime, najčešće izvori kažu da ona s njim nema mnogo veze. Naime, Euler ju je u jednom članku, misleći da je engleski matematičar John Pell pridonio metodi rješavanja jednadžbe, zabunom pripisao njemu. No jednadžba se javila u knjizi *Teutsche Algebra* švicarskog matematičara Johanna Rhana (17. st.) koji ju je pisao u suradnji s Pellom. Neki kažu da je knjigu zapravo u cijelosti napisao sam Pell pa Eulerova greška možda i nije bila slučajna.

6.1 Eulerovi primjeri

Iako su neke činjenice o Pellovoj jednadžbi i verižnim razlomcima bile poznate puno prije Eulerova vremena, on je prvi koji je području dao začajniji doprinos. Prvo Eulerovo korištenje Pellove jednadžbe nalazimo u *De solutione problematum diophanteorum per numeros integros* (O rješenju Diofantovog problema) iz 1732. godine. Euler je pokazao na koji način možemo konstruirati rješenja diofantske jednadžbe $y^2 = ax^2 + bx + c$ ukoliko nam je poznato jedno njezino rješenje, te rješenje Pellove jednadžbe.

Euler započinje promatrajući jednadžbu $x^2 = ay^2 + b$, te ustanovljuje da ako je (f, g) jedno njezino rješenje, onda i

$$(x, y) = \left(\frac{f(p^2 + aq^2) - 2agpq}{p^2 - aq^2}, \frac{2fpq - (p^2 + aq^2)g}{p^2 - aq^2} \right) \tag{6.3}$$

zadovoljava tu jednadžbu, pri čemu su $p, q \in \mathbb{Z}$. Zaista,

$$\left(\frac{f(p^2 + aq^2) - 2agpq}{p^2 - aq^2} \right)^2 - a \left(\frac{2fpq - (p^2 + aq^2)g}{p^2 - aq^2} \right)^2 = \frac{(f^2 - ag^2)(p^2 - aq^2)^2}{(p^2 - aq^2)^2} = b.$$

Jasno, ukoliko je (p, q) rješenje Pellove jednadžbe, $p^2 - aq^2 = 1$, onda smo sigurni da je rješenje u (6.3) cjelobrojno.

Ako rješenje u (6.3) zapišemo kao

$$(x, y) = (mf - nag, nf - mg),$$

gdje su

$$m = \frac{p^2 + aq^2}{p^2 - aq^2}, \ n = \frac{2pq}{p^2 - aq^2},$$

za koje je

$$m^2 - an^2 = 1,$$

odnosno (m, n) je rješenje Pellove jednadžbe. Stoga, za određivanje rješenja pellovske jednadžbe $x^2 - ay^2 = b$, treba riješiti i Pellovu $x^2 - ay^2 = 1$, a na gore opisani način, iz jednog rješenja (f, g) moći ćemo generirati njih beskonačno mnogo.

Sada ćemo prikazati nekoliko originalnih Eulerovih primjera rješavanja Pellove jednadžbe. I sam Euler je svoje primjere prokomentirao sljedećim riječima: "Ovu metodu nije moguće provesti općenito, za svaki a; primjenjiva je samo samo u posebnim slučajevima." Ono što je Euler s ovime mislio jest da za proizvoljan a ne može predvidjeti konkretan broj koraka, ali da će nakon neodređenog (konačnog) broja ponavljanja metoda rezultirati određivanjem rješenja.

Primjer 6.1.1. Zadana je jednadžba

$$x^2 - 5y^2 = 1.$$

Pretpostavimo da je (m, n) njeno rješenje. Tada

$$\sqrt{5n^2 + 1} > 2n.$$

Stoga postoji $p \in \mathbb{N}$ za koji je

$$\sqrt{5n^2 + 1} = 2n + p. \tag{6.4}$$

odnosno

$$5n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2.$$

Stoga je $n^2 - 4np - p^2 + 1 = 0$ i rješavanjem te kvadratne jednadžbe po n dobivamo

$$n = 2p + \sqrt{5p^2 - 1}.$$

Iz

$$\sqrt{5p^2 - 1} > 2p$$

slijedi da postoji $q \in \mathbb{N}$ za koji je

$$\sqrt{5p^2 - 1} = 2p + q.$$

Kvadriranjem predhodne jednadžbe dobivamo

$$5p^2 - 1 = 4p^2 + 4pq + q^2.$$

Ponovo rješavanjem kvadratne jednadžbe po p slijedi

$$p = 2q + \sqrt{5q^2 + 1}.$$

Budući da će se sada ponoviti situacija kao u (6.4), kao i svaki sljedeći korak, za Eulera je to znak da je $q = 0$. Otuda je $p = 1$, $n = 4$ i $m = 9$. Zaista, $9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1$.

Primjer 6.1.2. Zadana je jednadžba

$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

Pretpostavimo da je (m, n) njeno rješenje. Tada je

$$\sqrt{7n^2 + 1} > 2n \tag{6.5}$$

pa postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $\sqrt{7n^2 + 1} = 2n + p$. Kvadriranjem dobivamo jednadžbu $3n^2 - 4np - p^2 + 1 = 0$ pa je njeno pozitivno rješenje dano s

$$n = \frac{2p + \sqrt{7p^2 - 3}}{3}.$$

Uočimo li da je

$$n > \frac{4}{3}p > p,$$

slijedi

$$\sqrt{7p^2 - 3} = p + 3q.$$

Nakon kvadriranja te jednadžbe dobivamo

$$7p^2 - 3 = p^2 + 6pq + 9q^2,$$

iz čega rješavanjem jednadžbe po p slijedi

$$p = \frac{q + \sqrt{7q^2 + 2}}{2}.$$

Za razliku od prošlog primjera, ovdje se postupak nastavlja. Iz

$$p > \frac{3}{2}q > q,$$

slijedi da postoji $r \in \mathbb{N}$ za koji je

$$\sqrt{7q^2 + 2} = q + 2r.$$

Kvadriranjem i rješavanjem jednadžbe dobivamo

$$q = \frac{r + \sqrt{7r^2 - 3}}{3}.$$

Kako je $q > r$, postoji prirodan broj s takav da je

$$q = r + s,$$

pa je

$$2r + 3s = \sqrt{7r^2 - 3}.$$

Kvadriranjem dobivamo

$$-3r^2 + 12rs + 9s^2 + 3 = 0,$$

pa iz rješavanja po r slijedi

$$r = 2s + \sqrt{7s^2 + 1}.$$

Uočimo da će se sada ponoviti situacija kao u (6.5), pa postavljamo $s = 0$. Sada vrijedi

$$s = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = 8.$$

Zaista, $8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$, pa je uređeni par $(8, 3)$ rješenje početne jednadžbe.

Nakon ovih i još nekih primjera vidi se da Euler bio na dobrom tragu da pronađe univerzalnu metodu za rješavanje Pellove jednadžbe, no u tome ga je spriječila sljepoća, a na tragu njegovih opažanja Lagrange upješno završava priču o Pellovoj jednadžbi.

6.2 Veza s verižnim razlomcima

Već smo spomenuli da je Euler pokazao kako se uz pomoć jednog rješenja Pellove jednadžbe mogu konstruirati ostala rješenja, a uočio je i da $\sqrt{d}$ dobro aproksimira rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$.

U radu *De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo* (O korištenju novog algoritma za rješavanje Pellova problema) prezentiranom 1759. godine (a objavljenom nešto kasnije 1767.) Euler daje algoritam za rješavanje Pellove jednadžbe te pri tome koristi verižne razlomke.

Definicija 6.2.1. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor .$$

Ako je $a_0 \neq \alpha$, *onda postoji* α_1 *takav da je*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Kako je $\alpha_1 > 1$, *to je* $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$ *prirodan broj. Ako je* $a_1 \neq \alpha_1$, *onda postoji* α_2 *takav da je*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}.$$

Za $k > 1$ *postupak nastavljamo do dok je* $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor \neq \alpha_k$.
Ako je $\alpha_n = a_n$, *onda je*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots \cfrac{}{+ a_n}}}}$$

razvoj broja α u jednostavni konačni verižni razlomak *i pišemo* $\alpha = [a_0, a_1, \ldots a_n]$. *Broj* a_i *nazivamo* i-tim parcijalnim kvocijentom od α. *Razlomak* $\frac{p_i}{q_i} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i]$ *zovemo* i-ta konvergenta od α, *a* $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \ldots a_n]$ *je* i-ti potpuni kvocijent od α.

Ako je α *iracionalan broj, postupak razvoja u verižni razlomak može se provoditi beskonačno. Tada uvodimo oznaku* $\lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots a_n] = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. *Ako je* $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *onda ovaj izraz zovemo* razvoj od α u beskonačni jednostavni verižni razlomak. *Razlomak* $\frac{p_i}{q_i} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i]$ *zovemo* i-ta konvergenta od α, a_i i-ti parcijalni kvocijent od α, *a* $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \ldots]$ *je* i-ti potpuni kvocijent od α.

Algoritam za određivanje rješenja Pellove jednadžbe 6.1 sastoji se od sljedećih koraka:
1. Postavimo $z_0 = \sqrt{d}$ i $a_0 = \lfloor d \rfloor$.
2. Za svaki n definiramo $z_n = (z_{n-1} - a_{n-1})^{-1}$ i $a_n = \lfloor z_n \rfloor$.
3. U nekom će se trenutku vrijednosti z_n i a_n početi ponavljati, pretpostavimo da se to dogodilo u koraku $i + 1$.
4. Uređeni par (p_{i-1}, q_{i-1}) je rješenje Pellove jednadžbe, gdje je $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ konvergenta od $\sqrt{d}$.

Primjer 6.2.2. *Neka je dana jednadžba $x^2 - 7y^2 = 1$ kao u Primjeru 6.1.2. Slijedeći korake:*

$$\begin{aligned}
&n = 0, \quad z_0 = \sqrt{7}, && a_0 = 2\\
&n = 1, \quad z_1 = \left(\sqrt{7} - 2\right)^{-1} = \tfrac{2+\sqrt{7}}{3}, && a_1 = 1,\\
&n = 2, \quad z_2 = \left(\tfrac{2+\sqrt{7}}{3} - 1\right)^{-1} = \tfrac{1+\sqrt{7}}{2}, && a_2 = 1,\\
&n = 3, \quad z_3 = \left(\tfrac{1+\sqrt{7}}{2} - 1\right)^{-1} = \tfrac{1+\sqrt{7}}{3}, && a_3 = 1,\\
&n = 4, \quad z_4 = \left(\tfrac{1+\sqrt{7}}{3} - 1\right)^{-1} = 2 + \sqrt{7}, && a_4 = 4,\\
&n = 5, \quad z_5 = \left(2 + \sqrt{7} - 4\right)^{-1} = \tfrac{2+\sqrt{7}}{3}, && a_5 = 1.
\end{aligned}$$

Uočimo da su 1. i 5. korak isti pa će koraci 1-4 ponavljati u nedogled. Rješenje Pellove jednadžbe (p_3, q_3) gdje je

$$\frac{p_3}{q_3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{8}{3},$$

iz čega slijedi $8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$.

Primjenom navedenog algoritma dobiju se najmanja rješenja Pellove jednadžbe, a sva ostala mogu se dobiti na način opisan u sljedećem teoremu.

Teorem 6.2.3. *Ako je (x_1, y_1) najmanje netrivijalno rješenje u prirodnim brojevima jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$, onda su sva rješenja ove jednadžbe dana s (x_n, y_n), za $n \in \mathbb{N}$, gdje su x_n i y_n prirodni brojevi definirani s*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n.$$

Euler je uočio, ali ne i dokazao, još nekoliko veza između Pellove jednadžbe i verižnih razlomaka. Veze su izražene sljedećim teoremima.

Teorem 6.2.4. *Ako prirodan broj d nije potpuni kvadrat, onda razvoj u jednostavni verižni razlomak od $\sqrt{d}$ ima oblik*

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}],$$

gdje crta iznad kvocijenata označava ponavljanje tog dijela verižnog razlomka u nedogled.

Teorem 6.2.5. *Neka je i duljina najmanjeg perioda u razvoju od $\sqrt{d}$. Ako je i paran, onda je $x = p_{i-1}$, $y = q_{i-1}$. Ako je i neparan, onda je $x = p_{2i-1}$, $y = q_{2i-1}$.*

Euler je dao i tablicu razvoja u jednostavni verižni razlomak korijena brojeva od 2 do 120 koji nisu potpuni kvadrati, a pripisujemo mu i sljedeći teorem.

Teorem 6.2.6. *Ako je α periodski verižni razlomak, onda je α kvadratna iracionalnost.*

Prisjetimo se, za iracionalan broj α kažemo da je *kvadratna iracionalnost* ako je α korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima.

Dokaz. Neka je $\alpha = [b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}}]$ periodski verižni razlomak. Označimo s $\beta = [\overline{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}}]$ čisto periodski dio od α. Tada iz

$$\beta = \left[\overline{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \beta}\right]$$

slijedi da postoje cijeli brojevi $p_{m-1}, p_{m-2}, q_{m-1}$ i q_{m-2} takvi da je

$$\beta = \frac{p_{m-1}\beta + p_{m-2}}{q_{m-1}\beta + q_{m-2}}.$$

Time smo dobili kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima za β. Kako je β iracionalan broj koji je korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima, zaključujemo da je β kvadratna iracionalnost. Sada α možemo zapisati kao

$$\alpha = \frac{p\beta + P}{q\beta + Q},$$

gdje su p, P, q, Q cijeli brojevi te $\dfrac{p}{q}$, $\dfrac{P}{Q}$ zadnje dvije konvergente od $[b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}]$. Kako je $\beta = \dfrac{a + \sqrt{b}}{c}$, pri čemu je $c \neq 0$, a $b > 0$ broj koji nije potpuni kvadrat, slijedi da i α ima isti oblik, dakle, α je iracionalan broj. □

Vrijedi i obrat navedenog teorema, a dokazao ga je Lagrange.

Primjer 6.2.7. *Neka je dan periodski verižni razlomak $\alpha = [3, \overline{1, 6}]$. Tada je*

$$\beta = [\overline{1, 6}] = 1 + \frac{1}{6 + \dfrac{1}{\beta}},$$

iz čega slijedi da je β rješenje kvadratne jednadžbe $6\beta^2 - \beta - 1 = 0$. Kako je $\beta > 0$ slijedi da je $\beta = \dfrac{3 + \sqrt{15}}{6}$. Sada je

$$\alpha = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\beta}} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{6}}} = \sqrt{15},$$

a $\sqrt{15}$ *jest kvadratna iracionalnost.*

Na kraju ćemo napomenuti da je Euler razvijao analitičku teoriju verižnih razlomaka. 1748. godine uočio je sljedeću vezu između konačnog zbroja i verižnog razlomka:

$$a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+\cdots+a_0a_1a_2\cdots a_n = \cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2}{1+a_2-\cfrac{a_3}{\ddots\cfrac{\ddots}{1+a_{n-1}-\cfrac{a_n}{1+a_n}}}}}}.$$

Prethodna relacija se može proširiti na sumu reda, odnosno beskonačni verižni razlomak što postaje vrlo koristan alat matematičke analize. Specijalno, zahvaljujući tome, Euler je broj e prikazao u obliku beskonačnog verižnog razlomka:

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\ldots}}}},$$

odnosno

$$e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots].$$

Bibliografija

[1] R. E. Bradley, C. Edward Sandifer, *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, Studies in the History and Philosophy of Mathematics, Volume 5, Elsevier, 2007.

[2] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2014.

[3] F. M. Brückler, *Povijest matematike 2*, dostupno na `http://www.mathos.unios.hr/~bruckler/main2.pdf` (lipanj 2018.).

[4] J. H. Davenport, *The Higher Arithmetic: An Introduction to the Theory of Numbers*, Eighth edition, Cambridge University Press, 2008.

[5] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers, Volume I: Divisibility and Primality*, Dover Publications, 2005.

[6] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva (skripta)*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf` (srpanj 2018.).

[7] H. M. Edwards, *Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] L. Euler, *Theorems on residues obtained by the division of powers*, dostupno na `https://arxiv.org/pdf/math/0608467.pdf` (srpanj 2018.).

[9] L. Euler, *On numbers which are the sum of two squares*, dostupno na `http://eulerarchive.maa.org/docs/translations/E228en.pdf` (kolovoz 2018.).

[10] Z. Franušić, *Pellova jednadžba*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/etb/materijali/pellova-web.pdf` (kolovoz 2018.).

[11] L. Freeman, *Euler's Mistake*, dostupno na `http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2005/06/eulers-mistake.html` (kolovoz 2018.).

[12] J. A. McGill, *Euler and Lagrange on Pell's Equation*, dostupno na `http://www.math.mcgill.ca/darmon/courses/10-11/nt/joshua-aaron.pdf` (kolovoz 2018.).

[13] C. E. Sandifer, *How Euler Did It*, dostupno na `https://books.google.hr/books?id=sohHs7ExOsYC&pg=PA66&lpg=PA66&dq=euler+pell+equation&source=bl&ots=1iQ0Wn9WKg&sig=r7YloOSLPt8RPp6DluUT_VMFy3k&hl=en&sa=X&ved=2ahUKEwiuh931x_7cAhUpp4sKHb7RAK8Q6AEwB3oECAIQAQ#v=onepage&q=euler%20pell%20equation&f=false` (kolovoz 2018.).

[14] E. Sandifer, *How Euler Did It, Factoring F_5*, dostupno na `http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-03.pdf` (srpanj 2018.).

[15] E. Sandifer, *How Euler Did It, Who proved e is irrational?*, dostupno na `http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-02.pdf` (kolovoz 2018.).

[16] Peter Shiu, *Euler's Contribution to Number Theory*, The Mathematicarlau, H. Opolka, *From Fermat to Minkowski*, Springer-Verlag, 1l Gazette, Vol. 91, No. 522 (2007), pp. 453-461.

[17] W. Scharlau, H. Opolka, *From Fermat to Minkowski*, Springer-Verlag, 1984.

[18] E. R. Tou, *Leonhard Euler and the Invention of Modern Math*, dostupno na `http://faculty.washington.edu/etou/documents/TouE-EulerBiographicalTalk.pdf` (kolovoz 2018.).

[19] *Amicable numbers*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Amicable_numbers#Euler's_rule` (srpanj 2018.).

[20] *Andrew Wiles*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Andrew_Wiles` (kolovoz 2018.).

[21] *Bernard Frénicle de Bessy*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Bernard_Fr%C3%A9nicle_de_Bessy` (rujan 2018.).

[22] *Euler's continued fraction formula*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_continued_fraction_formula` (kolovoz 2018.).

[23] *Euler's four-square identity*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_four-square_identity` (kolovoz 2018.).

[24] *E29 – De solutione problematum diophanteorum per numeros integros*, dostupno na `http://eulerarchive.maa.org/pages/E029.html` (srpanj 2018.).

[25] *E71 – De fractionibus continuis dissertatio*, dostupno na `http://eulerarchive.maa.org/pages/E071.html` (srpanj 2018.).

[26] *E98 – Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes*, dostupno na `http://eulerarchive.maa.org/pages/E098.html` (srpanj 2018.).

[27] *E323 – De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo*, dostupno na `http://eulerarchive.maa.org/pages/E323.html` (srpanj 2018.).

[28] *Gerhard Frey*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Gerhard_Frey` (kolovoz 2018.).

[29] *Great Internet Mersenne Prime Search*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Great_Internet_Mersenne_Prime_Search` (kolovoz 2018.).

[30] *John Wilson*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/John_Wilson_(mathematician)` (rujan 2018.).

[31] *Leonhard Euler by Handmann*, dostupno na `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/03/Leonhard_Euler_by_Handmann.png` (rujan 2018.).

[32] *Letter Goldbach-Euler*, dostupno na `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5f/Letter_Goldbach-Euler.jpg/256px-Letter_Goldbach-Euler.jpg` (rujan 2018.).

[33] *Mersenne prime*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime` (kolovoz 2018.).

[34] *Method of Differences*, dostupno na `https://brilliant.org/wiki/method-of-differences/` (kolovoz 2018.).

[35] *Pell's equation*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Pell%27s_equation` (kolovoz 2018.).

[36] *Pierre de Carcavi*, dostupno na `https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Carcavi` (rujan 2018.).

[37] *Poglavlje 1. Diofantske jednadžbe*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/diofant.pdf` (kolovoz 2018.).

[38] *Proof of Fermat's Last Theorem for specific exponents*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_of_Fermat%27s_Last_Theorem_for_specific_exponents#Proof_for_Case_A_2` (kolovoz 2018.).

[39] *Proofs of Fermat's theorem on sums of two squares*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_of_Fermat%27s_theorem_on_sums_of_two_squares`(kolovoz 2018.).

[40] *Richard Taylor (mathematician)*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Taylor_(mathematician)` (kolovoz 2018.).

Sažetak

Leonhard Euler (1707.-1783.) najproduktivniji je matematičar svih vremena. Dao je ogroman doprinos svakom matematičkom području svog vremena, ali i mnogim drugim znanostima kao što su geografija, fizika, teorija glazbe, ... Postavio je temelje nekim matematičkim granama, a smatra se da je posebnu "virtuoznost" pokazao baveći se teorijom brojeva. U radu ćemo opisati samo neke njegove doprinose elementarnoj teoriji brojeva, primjerice dokaz Malog Fermatovog teorema, Velikog Fermatovog teorema za $n = 3$ i Teorema o dva kvadrata te mnoge zaključke vezane uz djeljivost prirodnih brojeva, Legendreov simbol i Pellovu jednadžbu.

Summary

Leonhard Euler (1707. - 1783.) is the most productive mathematician of all time. He made enormous contributions to every mathematical branch of his time as well as to many other fields of science such as geography, physics, music theory, ... He laid the foundations for some mathematical branches, however, number theory is considered the branch where his "virtuosity" was most evident. This paper describes just some of his contributions to elementary number theory, such as the proof of Fermat's little theorem, Fermat's last theorem for $n = 3$ and his Theorem on the sum of two squares as well as many conclusions related to the divisibility of natural numbers, the Legendre symbol and Pell's equation.

Životopis

Zovem se Jelena Cafuk. Rođena sam 12. listopada 1992. godine u Zagrebu. Prva četiri razreda osnovne škole završila sam u Osnovnoj školi Sesvete, a druga četiri u Soblincu. Obrazovanje sam nastavila u III. gimnaziji u Zagrebu gdje sam nakon dana provedenog u zamjeni *učenik-profesor* donijela konačnu odluku o tome što želim raditi u životu, a to je biti nastavnica matematike. 2011. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodnoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a godinu kasnije prešla sam na nastavnički smjer. Godine 2016. na istom sam fakultetu upisala diplomski studij matematike, nastavnički smjer.