Izračunljivost 1-mnogostrukosti

Burnik, Konrad

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Konrad Burnik

Computability of 1-manifolds

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2015

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Konrad Burnik

Izračunljivost 1-mnogostrukosti

DOKTORSKI RAD

Mentor: doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2015.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Konrad Burnik

Computability of 1-manifolds

DOCTORAL THESIS

Supervisor: doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2015

Predgovor

Ova doktorska disertacija je nastala kao rezultat četverogodišnjeg istraživačkog rada s doc.dr.sc. Zvonkom Iljazovićem. Tema je usko vezana za temu njegove disertacije *„Rekurzivnost lančastih i cirkularno-lančastih skupova“* te rezultate o izračunljivosti kompaktnih mnogostrukosti koji su dokazani u [9]. Glavni cilj ovog rada jest proširiti te rezultate i na neke nekompaktne mnogostrukosti. Preciznije, glavni predmet proučavanja ovog rada jest prvenstveno pojam izračunljivosti za *nekompaktne 1-mnogostrukosti*.

Za razumijevanje teksta potrebno je imati barem osnovno predznanje o izračunljivim funkcijama i skupovima iz klasične teorije izračunljivosti te poznavanje osnovnih pojmova teorije metričkih prostora i opće topologije.

Dijelovi ovog rada, posebice poglavlja 7 i 8 su zajednički prezentirani na međunarodnoj konferenciji *Computability and Complexity in Analysis 2013* u Nancyju, Francuskoj i objavljeni u zborniku radova te konferencije pod naslovom *„Topological rays and lines as co-c.e. sets“* [3]. Nadalje, dijelovi ovog rada su objavljeni 2014. u časopisu *Logical Methods in Computer Science* u članku pod naslovom *„Computability of 1-manifolds“* [4].

Konrad Burnik,

u Zagrebu, listopad 2015.

Sadržaj

Predgovor **i**

1 Uvod i motivacija **1**

2 Izračunljive funkcije **5**

2.1 Parcijalno rekurzivne funkcije 5

2.2 Rekurzivno prebrojivi skupovi 8

2.3 Rekurzivne i rekurzivno omeđene funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ 10

2.4 Izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ 15

2.5 Izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ 15

2.6 Izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ 17

3 Izračunljivi metrički prostori **21**

3.1 Osnovne definicije i pojmovi 21

3.2 Izračunljiv euklidski prostor 24

4 Formalna svojstva i lanci **37**

4.1 Formalna sadržanost 38

4.2 Formalna disjunktnost 41

4.3 Efektivni pokrivači 46

4.4 Izbor formalnih lanaca 48

4.5 Formalni lanac koji prekriva luk 48

5 Svojstvo efektivnog pokrivanja **51**

5.1 Dovoljan uvjet za svojstvo efektivnog pokrivanja 51

5.2 Korekurzivno prebrojivi nizovi skupova 58

6 Izračunljiva kompaktnost na zatvorenim kuglama **63**

7 Izračunljivost topološke zrake **69**

7.1 Jednostrana neograničenost topološke zrake 69

7.2 Teorem izračunljivosti za topološku zraku 70

8 Izračunljivost topološke linije **81**

8.1 Obostrana neograničenost topološke linije 81

8.2 Teorem izračunljivosti za topološku liniju 82

9 Dodatni uvjeti na ambijentni prostor **95**

9.1 Nužnost svojstva efektivnog pokrivanja uz kompaktne zatvorene kugle . . . 96

9.2 Nužnost kompaktnih zatvorenih kugala uz svojstvo efektivnog pokrivanja . 100

10 Izračunljivost 1-mnogostrukosti **105**

10.1 Kontraprimjer za broj komponenata povezanosti 106

10.2 Teorem izračunljivosti za 1-mnogostrukosti 107

Literatura **111**

Sažetak **113**

Summary **115**

Životopis **117**

Poglavlje 1

Uvod i motivacija

Za kompaktan skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je *izračunljivo kompaktan* ili *izračunljiv* ako je S prazan ili ako je S neprazan skup koji se može efektivno, po volji dobro, aproksimirati konačnim skupom racionalnih točaka. Kompaktan skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je *poluizračunljivo kompaktan* ili *poluizračunljiv* ako možemo efektivno izlistati sve racionalne otvorene skupove koji prekrivaju S. Svaki kompaktan izračunljiv skup je poluizračunljivo kompaktan. S druge strane, postoje poluizračunljivo kompaktni skupovi koji nisu izračunljivi. Stoga implikacija

$$S \text{ poluizračunljivo kompaktan} \implies S \text{ izračunljivo kompaktan} \tag{1.0.1}$$

ne vrijedi općenito. Međutim, postavlja se pitanje da li postoje uvjeti pod kojima ta implikacija vrijedi. Motivacija za to pitanje dolazi od činjenice da su poluizračunljivo kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}^n$ točno oni korekurzivno prebrojivo zatvoreni skupovi koji su kompaktni.

Za zatvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ kažemo da je *korekurzivno prebrojivo zatvoren* ili *korekurzivno prebrojiv* ako se njegov komplement može efektivno prekriti otvorenim kuglama. Nadalje, korekurzivno prebrojivo zatvoreni skupovi su točno oni skupovi oblika $f^{-1}(\{0\})$ gdje je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija. Stoga pitanje pod kojim uvjetima vrijedi implikacija (1.0.1) je usko povezano s pitanjem pod kojim uvjetima je skup nultočaka izračunljive funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ izračunljiv.

Poznato je da postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima nultočke i pritom one sve leže u $[0, 1]$ ali niti jedna od njih nije izračunljiva [15]. To znači da je $f^{-1}(\{0\})$ neprazan poluizračunljivo kompaktan skup koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku. Posebno, $f^{-1}(\{0\})$ nije izračunljiv, naime, svaki neprazan izračunljiv podskup od $\mathbb{R}^n$ sadrži izračunljive točke. Ovo dakle pokazuje da postoje poluizračunljivo kompaktni skupovi koji su daleko od toga da budu izračunljivi.

Međutim, pokazuje se da uz dodatne pretpostavke implikacija (1.0.1) vrijedi. Posebno, u [12] dokazano je da (1.0.1) vrijedi u slučaju kada je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka sfera (skup koji je homeomorfan jediničnoj sferi $\mathbb{S}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ za neki m) ili S koji je homeomorfan sa zatvorenom jediničnom kuglom $B^m \subseteq \mathbb{R}^n$ za neki m (odnosno S je *m-ćelija*) preko homeomorfizma $f : B^m \to S$ takvog da je $f(\mathbb{S}^{m-1})$ poluizračunljivo kompaktan skup. Prema [7] ovi rezultati vrijede ne samo u $\mathbb{R}^n$ već i u svakom izračunljivom metričkom prostoru koji je lokalno izračunljiv. Ostali rezultati vezani za implikaciju (1.0.1) mogu se pronaći u [2], [5], [10] i [11].

Rezultati za topološke sfere te ćelije s poluizračunljivo kompaktnim rubnim sferama su poopćeni u [9] gdje je dokazano da implikacija (1.0.1) vrijedi u svakom izračunljivom metričkom prostoru ako je S kompaktna mnogostrukost s izračunljivim rubom. Ako je S poluizračunljivo kompaktna mnogostrukost tada vrijedi

$$\partial S \text{ izračunljivo kompaktan} \implies S \text{ izračunljivo kompaktan} \tag{1.0.2}$$

U izračunljivom metričkom prostoru koji ima *svojstvo efektivnog pokrivanja* i u kojem su zatvorene kugle kompaktne je pojam poluizračunljivo kompaktnog skupa ekvivalentan s pojmom kompaktnog korekurzivno prebrojivo zatvorenog skupa. Stoga u takvom izračunljivom metričkom prostoru ako je S kompaktna mnogostrukost s rubom i ako je S korekurzivno prebrojivo zatvoren vrijedi (1.0.4).

U ovom radu promatramo slučaj kada je S 1-mnogostrukost, ne nužno kompaktna i istražujemo što se može reći u vidu implikacije (1.0.2). Najprije moramo definirati odgovarajuću generalizaciju pojma poluizračunljivo kompaktnog skupa. Ideja je da ta generalizacija uključuje i skupove S koji nisu kompaktni ali su takvi da je $S \cap B$ kompaktan skup za svaku zatvorenu kuglu B. Kažemo da je S *poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama* ako je $S \cap B$ poluizračunljivo kompaktan uniformno za svaku zatvorenu racionalnu kuglu B u ambijentnom prostoru. Uvođenjem tog pojma dolazimo do nove implikacije:

$$\begin{aligned}&\partial S \text{ izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama}\\ &\qquad\qquad \implies S \text{ izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama}\end{aligned} \tag{1.0.3}$$

Glavni rezultat je sljedeći: ako je S 1-mnogostrukost u izračunljivom metričkom prostoru i ako je S poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama i S ima konačno mnogo komponenata povezanosti tada implikacija (1.0.3) vrijedi. Nadalje, pokazat ćemo da implikacija (1.0.3) ne vrijedi općenito (bez pretpostavke da je broj komponenata povezanosti konačan).

U izračunljivom metričkom prostoru koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja i u kojem su zatvorene kugle kompaktne su pojmovi izračunljive kompaktnosti na zatvorenim kuglama i korekurzivno prebrojive zatvorenosti ekvivalentni. Stoga možemo nešto reći i o implikaciji

$$\partial S \text{ izračunljivo zatvoren} \implies S \text{ izračunljivo zatvoren} \tag{1.0.4}$$

Nadalje, u takvom izračunljivom metričkom prostoru imat ćemo da ako je S 1-mnogostrukost koja je korekurzivno prebrojivo zatvorena i koja ima konačno mnogo komponenata povezanosti tada implikacija (1.0.4) vrijedi.

Glavni korak u dokazu glavnih rezultata je dokazati sljedeće: ako je S zatvoren skup homeomorfan s $[0, \infty\rangle$ pri čemu je homeomorfizam takav da preslikava 0 u izračunljivu točku, ili je S zatvoren skup homeomorfan s $\mathbb{R}$, tada je S izračunljiv ako je poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. Čak štoviše, dokazat ćemo sljedeće: ako je S zatvoren skup i $S \cup F$ poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama pri čemu je F zatvoren skup disjunktan sa S, tada je S *izračunljivo prebrojivo zatvoren* skup što znači da možemo efektivno izlistati sve otvorene racionalne kugle koje sijeku S. Ovo će biti ključan rezultat koji će lako povlačiti glavni rezultat za 1-mnogostrukosti.

Kako bi ovo sve dokazali koristit ćemo pojam *lanca* i služiti se tehnikama iz [5].

Ovdje ćemo napomenuti da poluizračunljivo kompaktna 1-mnogostrukost s konačno mnogo komponenata povezanosti ne mora biti izračunljiva ako njezin rub nije izračunljiv. Primjer toga vidimo već u slučaju kompaktnih 1-mnogostrukosti: u svakom $\mathbb{R}^n$ postoji *dužina* koja je poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama ali koja nije izračunljiva [12] (barem jedna krajnja točka te dužine nije izračunljiva). No, ovaj primjer ne znači da je izračunljivost ruba nužna za izračunljivost cijele mnogostrukosti. Prema [12] postoji izračunljiv luk u $\mathbb{R}^2$ s neizračunljivim krajnjim točkama, stoga izračunljivost 1-mnogostrukosti s rubom ne povlači izračunljivost njezinog ruba.

Nadalje, što se tiče izračunljivosti mnogostrukosti, možemo primijetiti da izračunljivost ne znači da se mnogostrukost može parametrizirati nekom izračunljivom funkcijom.

Naime, prema [12] postoji izračunljiv luk S u $\mathbb{R}^2$ s izračunljivim krajnjim točkama ali takav da ne postoji izračunljiva bijekcija $f : [0, 1] \to S$.

Spomenimo još da *uniformna* verzija rezultata za 1-mnogostrukosti (teorema 10.5) ne vrijedi općenito. Naime, prema primjeru 7 u [5], postoji niz (S_i) topoloških kružnica u $\mathbb{R}^2$ pri čemu je svaka S_i sadržana u $[0, 1] \times [0, 1]$ i takav da je (S_i) uniformno poluizračunljivo kompaktan, ali nije uniformno izračunljiv.

Poglavlje 2

Izračunljive funkcije

Neka je s $\mathbb{N}$ označen skup prirodnih brojeva u kojeg uključujemo i nulu, odnosno

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ s $\mathbb{N}^n$ označavamo skup svih uređenih n-torki elemenata iz $\mathbb{N}$. Nadalje, za $m \in \mathbb{N}$ skup $\{0, 1, \dots, m\}$ označavamo s $\mathbb{N}_m$, a skup svih uređenih n-torki iz $\mathbb{N}_m$ označavamo s $\mathbb{N}_m^n$.

U *klasičnoj teoriji izračunljivosti* (vidi [17]) prvenstveno promatramo izračunljivost podskupova od $\mathbb{N}^n$. Intuitivno, ako je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ takav da za njega postoji funkcija koja nekim algoritmom u konačno mnogo koraka utvrđuje da li za zadani $k \in \mathbb{N}^n$ vrijedi $k \in S$ ili $k \notin S$ tada kažemo da je S *izračunljiv* skup. No, pojam funkcije čije vrijednosti se mogu izračunati algoritmom nije precizan, stoga se radije služimo preciznim pojmom parcijalno rekurzivne funkcije $S \to \mathbb{N}$.

2.1 Parcijalno rekurzivne funkcije

Dokazi za većinu tvrdnji navedenih u nastavku ovog poglavlja kao i pregled klasične teorije izračunljivosti mogu se naći u [6] i [17]. Ovdje navodimo neke već poznate pojmove i činjenice iz teorije klasične izračunljivosti koje ćemo trebati da dokažemo glavne rezultate u ovome radu.

Promatramo funkcije $f : S \to \mathbb{N}$ gdje je $S \subseteq \mathbb{N}^k,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$. Ako je $S = \mathbb{N}^k$ tada kažemo da je funkcija **totalna**.

Definiramo **nul-funkciju** $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa $Z(i) = 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. **Funkciju sljedbenika** $Sc : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiramo sa $Sc(i) = i + 1$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Za $k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$ definiramo **i-tu projekciju** $P_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s $P_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$ za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}^k$.

Funkcije Z,Sc i P_i^k za $k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$, $i \in \{0, \ldots, k\}$ zovemo **inicijalne funkcije**. Neka su $S_1, \ldots, S_n$ podskupovi od $\mathbb{N}^k$, $g_i : S_i \to \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $f : T \to \mathbb{N}$ gdje je $T \subseteq \mathbb{N}^n$. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ takav da vrijedi

$$S = \{x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n : (g_1(x), \ldots, g_n(x)) \in T\}.$$

Za funkciju $h : S \to \mathbb{N}$ kažemo da je dobivena **kompozicijom funkcija** $f, g_1, \ldots, g_n$ ako vrijedi

$$h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x)),$$

za svaki $x \in S$ i pišemo

$$h(x) \simeq f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$$

pri čemu oznaka „$\simeq$“ znači da je izraz na lijevoj strani definiran za one x za koje je definiran izraz na desnoj strani. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. Neka je $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana induktivno s

$$\begin{aligned} h(0, x) = &\quad f(x), \\ h(i+1, x) = &\quad g(h(i, x), i, x), \end{aligned}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Za funkciju h tada kažemo da je dobivena **primitivnom rekurzijom** od f i g. Neka je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$. Definiramo skup

$$T = \left\{x \in \mathbb{N}^k : \exists i \in \mathbb{N}\ g(x, i) = 0\right\}$$

te funkciju $f : T \to \mathbb{N}$ s

$$f(x) = \min\left\{i \in \mathbb{N} : g(x, i) = 0\right\},\ \forall x \in T.$$

Za $x \in T$, broj $\min\{i \in \mathbb{N} : g(x, i) = 0\}$ označavamo s $\mu i\, [g(x, i) = 0]$, dakle

$$f(x) \simeq \mu i\, [g(x, i) = 0]\,.$$

Za funkciju f kažemo da je dobivena **primjenom** μ-operatora na funkciju g. Pojmovi primitivne rekurzije i μ-operatora mogu se analogno definirati i za funkcije koje nisu totalne. **Klasa parcijalno rekurzivnih funkcija** je najmanja klasa funkcija koja sadrži inicijalne funkcije i zatvorena je na kompoziciju, primitivnu rekurziju i μ-operator. Parcijalno rekurzivne funkcije koje su totalne zovemo **rekurzivne funkcije**. Također ćemo ih ponekad zvati i **izračunljive funkcije**. Nadalje, funkcija $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ je **rekurzivna** ako postoje rekurzivne funkcije $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)), \quad \forall x \in \mathbb{N}^n.$$

Za skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$, $k \geq 1$ kažemo da je **rekurzivan** ako je njegova karakteristična funkcija $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna.

U sljedećem primjeru navodimo neke funkcije koje ćemo koristiti u ovom a i kasnijim poglavljima. Dokaz da se radi o rekurzivnim funkcijama može se pronaći u [17].

Primjer 2.1. Neka je $c \in \mathbb{N}$. Funkcija $C : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirana s $C(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, je rekurzivna. Lako se provjeri da je funkcija Plus : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana s $\text{Plus}(x, y) = x+y$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$ rekurzivna. Za $x, y \in \mathbb{N}$ neka $x \dot{-} y$ označava broj definiran s

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ako je } x \geq y, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkciju $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$ nazivamo **modificirano oduzimanje**. Za nju se lako pokaže da je rekurzivna. Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$.

Stoga je $(x, y) \mapsto |x - y|$ rekurzivna funkcija. Funkcije $(x, y) \mapsto \min\{x, y\}$ i $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ su rekurzivne što slijedi iz $\min\{x, y\} = x \dot{-} (x \dot{-} y)$, $\max\{x, y\} = x + (y \dot{-} x)$.

Funkcije $\text{sg}, \overline{\text{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirane s

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}; \qquad \overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

su rekurzivne. □

Sljedeća propozicija će nam biti korisna za definiranje određenih rekurzivnih funkcija (vidi propoziciju 1.2 (ii) i pripadni dokaz u [6]).

Propozicija 2.2. *Neka su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Definiramo funkcije $g, g' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s*

$$g(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(i, x); \qquad g'(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(i, x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

pri čemu uzimamo $g(x) = 0$ i $g'(x) = 1$ ako je $\alpha(x) > \beta(x)$. Tada su g i g' rekurzivne funkcije. □

Sljedeću propoziciju (propozicija 2.18 (i) iz [6]) ćemo koristiti kasnije u dokazu da izračunljiv euklidski prostor ima svojstvo efektivnog pokrivanja.

Propozicija 2.3. *Ako su $f : \mathbb{N}^{n+k} \to \mathbb{N}$ i $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije, tada su funkcije $\psi, \psi' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,*

$$\psi(x) = \min_{z\in\{0,\dots,\varphi(x)\}^n} f(z,x); \qquad \psi'(x) = \max_{z\in\{0,\dots,\varphi(x)\}^n} f(z,x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

rekurzivne funkcije. $\square$

Korištenjem propozicije 2.2 dolazimo do još primjera rekurzivnih funkcija koje ćemo također koristiti kasnije.

Primjer 2.4. Funkcija $(x,y) \mapsto \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$, (pri čemu uzimamo $\lfloor \frac{x}{0} \rfloor = x$) je rekurzivna. To slijedi iz $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor = \sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}(iy \dot{-} x)$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Funkcija $\mathrm{ost} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana s $\mathrm{ost}(x,y) = x \dot{-} (y \cdot \lfloor \frac{x}{y} \rfloor)$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$, je rekurzivna. $\square$

U ovom, a i kasnijim poglavljima koristit ćemo sljedeće oznake (preuzete iz [6]): neka su $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke fiksirane rekurzivne funkcije sa svojstvom da je svaki neprazan konačan niz u $\mathbb{N}$ jednak $(\sigma(j,0), \dots, \sigma(j, \eta(j)))$ za neki j. Nije teško pokazati da takve rekurzivne funkcije postoje. Primjer konstrukcije takve funkcije se može naći u [6]. Koristit ćemo još i sljedeće oznake iz [6]: $(j)_i$ umjesto $\sigma(j,i)$ i $\bar{j}$ umjesto $\eta(j)$. Dakle,

$$\left\{((j)_0, \dots, (j)_{\bar{j}}) : j \in \mathbb{N}\right\}$$

je skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Ako je $j \in \mathbb{N}$, onda za konačan niz $((j)_0, \dots, (j)_{\bar{j}})$ kažemo da je pridružen broju j. Za $j \in \mathbb{N}$ skup $\left\{(j)_i : 0 \le i \le \bar{j}\right\}$ ćemo označavati s $[j]$.

Nadalje, neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke fiksirane rekurzivne funkcije takve da vrijedi

$$\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) : i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2.$$

Koristimo oznake $\langle i \rangle_1$ umjesto $\tau_1(i)$ te $\langle i \rangle_2$ umjesto $\tau_2(i)$.

2.2 Rekurzivno prebrojivi skupovi

Za $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je **rekurzivno prebrojiv** ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $f(\mathbb{N}) = S$.

Sljedeća tvrdnja je poznato svojstvo rekurzivno prebrojivih skupova koju ćemo kasnije koristiti na više mjesta u ovom radu, no ovdje ju također navodimo bez dokaza.

Propozicija 2.5. *Neka je $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq 1$. Neka su $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojivi skupovi. Tada su $S_1 \cup \cdots \cup S_n$, $S_1 \cap \cdots \cap S_n$ i $S_1 \times \cdots \times S_n$ rekurzivno prebrojivi skupovi.* □

U ovom, i narednim poglavljima često ćemo koristiti sljedeće tehnike rada s rekurzivno prebrojivim skupovima.
Imamo najprije jednu poznatu i korisnu karakterizaciju rekurzivno prebrojivih skupova (vidi propoziciju 1 i dokaz u [6]).

Propozicija 2.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(1) S je rekurzivno prebrojiv.

(2) S je domena neke parcijalno rekurzivne funkcije.

(3) Postoji rekurzivan skup $T \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je

$$S = \{i \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N}\ (i, j) \in T\}.$$

□

U sljedećoj propoziciji navodimo tvrdnje koje ćemo koristiti pri dokazivanju glavnih rezultata ovoga rada (vidi propoziciju 2 i dokaz u [6]).

Propozicija 2.7. *Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ rekurzivno prebrojiv. Tada vrijedi:*

(1) Skup $\left\{x \in \mathbb{N}^n : \exists y \in \mathbb{N}^k\ (x, y) \in T\right\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(2) Ako su $S_1 \subseteq \mathbb{N}^k$ i $S_2 \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojivi takvi da za svaki $x \in S_1$ postoji $y \in S_2$ takav da $(x, y) \in T$ onda postoji parcijalno rekurzivna funkcija $f : S_1 \to \mathbb{N}^n$ takva da je $f(S_1) \subseteq S_2$ te $(x, f(x)) \in T$ za svaki $x \in S_1$.

(3) Ako je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija onda je skup $f^{-1}(S) = \left\{x \in \mathbb{N}^k : f(x) \in S\right\}$ rekurzivno prebrojiv.

□

2.3 Rekurzivne i rekurzivno omeđene funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$

U ovom odjeljku dajemo pregled osnovnih činjenica o r.r.o. funkcijama opisanih u [6]. Navedene činjenice ćemo koristiti kasnije pri dokazivanju rekurzivne prebrojivosti određenih podskupova od $\mathbb{N}^n$.

Ako je X neki skup, tada s $\mathcal{P}(X)$ označavamo skup svih podskupova od X. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **rekurzivna** ako je funkcija $\bar{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ definirana s

$$\bar{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k,\ \forall y \in \mathbb{N}^n$$

rekurzivna. Ovdje $\chi_S : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ označava karakterističnu funkciju od $S \subseteq \mathbb{N}^n$. Ako su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcije takve da je

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

onda kažemo da je Φ **omeđena** s φ. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **rekurzivno omeđena** ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je Φ omeđena s φ. Za funkciju $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **r.r.o.** ako je Φ rekurzivna i rekurzivno omeđena.

U sljedećoj propoziciji (vidi Propoziciju 2.18 i pripadni dokaz u [6]) navodimo neke osnovne tvrdnje o r.r.o. funkcijama koje ćemo koristiti u poglavlju 4.

Propozicija 2.8. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. *Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija, onda je funkcija $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, $\Phi(x) = \{f(x)\}$, $x \in \mathbb{N}^k$, r.r.o.*

2. *Ako je $f : \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna funkcija i $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o., onda je $\Phi \circ f : \mathbb{N}^\ell \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o.*

3. *Ako su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcije, onda su $x \mapsto \Phi(x) \cup \Psi(x)$, $x \mapsto \Phi(x) \cap \Psi(x)$, $x \mapsto \Phi(x) \setminus \Psi(x)$, $x \in \mathbb{N}^k$ r.r.o. funkcije.*

4. *Ako je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija, onda je skup $\left\{x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) = \emptyset\right\}$ rekurzivan.*

5. *Ako su* $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *r.r.o. funkcije, onda su skupovi*

$$\Big\{x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) = \Psi(x)\Big\} \ \ i \ \Big\{x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\Big\}$$

rekurzivni.

□

Sljedeća propozicija nije navedena u [6], no mi ćemo ju trebati kasnije, stoga ju iskazujemo i dokazujemo na ovom mjestu.

Propozicija 2.9. *Neka su* $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ *takvi da vrijedi* $k, \ell, m, n \geq 1$*. Ako su funkcije* $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *i* $\Psi : \mathbb{N}^\ell \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ *r.r.o. tada je funkcija* $\Lambda : \mathbb{N}^{k+\ell} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^{n+m})$*,*

$$\Lambda(x, y) = \Phi(x) \times \Psi(y), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \ \forall y \in \mathbb{N}^\ell$$

r.r.o.

Dokaz. Funkcije Φ i Ψ su r.r.o. pa stoga postoje rekurzivne funkcije $\overline{\Phi}$ i $\overline{\Psi}$ takve da vrijedi $\overline{\Phi}(x, w) = \chi_{\Phi(x)}(w)$ i $\overline{\Psi}(y, z) = \chi_{\Psi(y)}(z)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^\ell$, $w \in \mathbb{N}^n$ i $z \in \mathbb{N}^m$.

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^\ell$, $w \in \mathbb{N}^n$ i $z \in \mathbb{N}^m$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
(w, z) \in \Lambda(x, y) &\iff w \in \Phi(x) \wedge z \in \Psi(y) \\
&\iff (\overline{\Phi}(x, w) = 1) \wedge (\overline{\Psi}(y, z) = 1) \\
&\iff \overline{\Phi}(x, w) \cdot \overline{\Psi}(y, z) = 1.
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^\ell$, $w \in \mathbb{N}^n$, $z \in \mathbb{N}^m$ vrijedi

$$(w, z) \in \Lambda(x, y) \iff \overline{\Phi}(x, w) \cdot \overline{\Psi}(y, z) = 1. \tag{2.3.1}$$

Definiramo funkciju $\overline{\Lambda} : \mathbb{N}^{k+\ell+m+n} \to \mathbb{N}$ s

$$\overline{\Lambda}(x, y, w, z) = \overline{\Phi}(x, w) \cdot \overline{\Psi}(y, z), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^\ell, w \in \mathbb{N}^n, z \in \mathbb{N}^m.$$

Funkcija $\overline{\Lambda}$ je rekurzivna kao produkt rekurzivnih funkcija $\overline{\Phi}$ i $\overline{\Psi}$ komponiranih s odgovarajućim projekcijama. Nadalje, prema (2.3.1) imamo $\overline{\Lambda}(x, y, w, z) = \chi_{\Lambda(x,y)}(w, z)$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^\ell$, $w \in \mathbb{N}^n$, $z \in \mathbb{N}^m$ pa je stoga Λ rekurzivna.

Dokažimo da je Λ rekurzivno omeđena. Iz rekurzivne omeđenosti od Φ i Ψ imamo da postoje rekurzivne funkcije $\phi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $\psi : \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\phi(x)} \text{ i } \Psi(y) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(y)} \tag{2.3.2}$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}^\ell$. Definirajmo funkciju $\lambda : \mathbb{N}^{k+\ell} \to \mathbb{N}$ s

$$\lambda(x, y) = \phi(x) + \psi(y), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, y \in \mathbb{N}^\ell.$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^\ell$, $w \in \mathbb{N}^n$, $z \in \mathbb{N}^m$. Tada imamo $\mathbb{N}^n_{\phi(x)} \subseteq \mathbb{N}^n_{\phi(x)+\psi(y)}$ i $\mathbb{N}^m_{\psi(x)} \subseteq \mathbb{N}^m_{\phi(x)+\psi(y)}$. No sada imamo sljedeći niz zaključaka:

$$\begin{aligned} (w, z) \in \Lambda(x, y) &\iff w \in \Phi(x) \wedge z \in \Psi(y) \\ &\implies (w, z) \in \mathbb{N}^n_{\phi(x)} \times \mathbb{N}^m_{\psi(y)} \\ &\implies (w, z) \in \mathbb{N}^n_{\phi(x)+\psi(y)} \times \mathbb{N}^m_{\phi(x)+\psi(y)} \\ &\iff (w, z) \in \mathbb{N}^{n+m}_{\phi(x)+\psi(y)}. \end{aligned}$$

Stoga je $\Lambda(x, y) \subseteq \mathbb{N}^{n+m}_{\lambda(x,y)}$ iz čega slijedi da je Λ rekurzivno omeđena. Dakle, Λ je r.r.o. $\square$

Imamo sljedeću propoziciju (vidi primjer 2.12 iz [6]). Dokaz dajemo kao demonstraciju direktnog dokaza da je neka funkcija r.r.o.

Propozicija 2.10. *Neka su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ i $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije. Neka je $\Phi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^k)$ zadana s*

$$\Phi(x) = \{f(x, i) : \alpha(x) \leq i \leq \beta(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^n.$$

Tada je Φ r.r.o. funkcija.

Dokaz. Definiramo najprije pomoćnu funkciju $\kappa : \mathbb{N}^{n+k+1} \to \mathbb{N}$ s

$$\kappa(x, y, i) = \sum_{j=1}^{k} |P^k_j f(x, i) - P^k_j y|, \quad \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall y \in \mathbb{N}^k,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo sada funkciju $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{n+k} \to \mathbb{N}$ s

$$\overline{\Phi}(x, y) = sg\left(\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \overline{sg}(\kappa(x, y, i))\right), \quad \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall y \in \mathbb{N}^k.$$

Dokažimo tvrdnju

$$\overline{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y), \quad \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall y \in \mathbb{N}^k. \tag{2.3.3}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^n$ i $y \in \mathbb{N}^k$. Imamo dva slučaja: $y \in \Phi(x)$ ili $y \notin \Phi(x)$. U prvom slučaju, $y \in \Phi(x)$ imamo $y = f(x, i)$ za neki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha(x) \leq i \leq \beta(x)$. No tada je $\kappa(x, y, i) = 0$, pa je $\overline{sg}(\kappa(x, y, i)) = 1$. Sada je $\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \overline{sg}(\kappa(x, y, i)) > 0$ pa stoga imamo $\overline{\Phi}(x, y) = 1$.

U drugom slučaju, $y \notin \Phi(x,y)$ povlači $y \neq f(x,i)$ za svaki $\alpha(x) \leq i \leq \beta(x)$. Stoga je $\kappa(x,y,i) > 0$ odnosno $\overline{sg}(\kappa(x,y,i)) = 0$ za svaki $\alpha(x) \leq i \leq \beta(x)$. No tada je $\sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} \overline{sg}(\kappa(x,y,i)) = 0$ što povlači $\overline{\Phi}(x,y) = 0$. Zaključujemo da vrijedi 2.3.3 odnosno Φ je rekurzivna funkcija.

Dokažimo da je Φ rekurzivno omeđena. U tu svrhu definiramo funkcije $m : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ i $\phi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ s

$$m(x,i) = \max_{1 \leq j \leq k} P_j^k f(x,i); \quad \phi(x) = \max_{0 \leq j \leq \beta(x)} m(x,j), \quad \forall x \in \mathbb{N}^n, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \{0, \ldots, \phi(x)\}^k, \quad \forall x \in \mathbb{N}^n. \tag{2.3.4}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$ i neka je $y \in \Phi(x)$. Tada je $y = f(x,i)$ za neki $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\alpha(x) \leq i \leq \beta(x)$. No, tada je

$$y = (y_1, \ldots, y_k) = (P_1^k f(x,i), \ldots, P_k^k f(x,i))$$

što zajedno s $P_j^k f(x,i) \leq m(x,i)$ povlači $y_j \in \{0, \ldots, m(x,i)\}$ za svaki $j \in \{1, \ldots, k\}$. Sada ovo, zajedno s $m(x,i) \leq \phi(x)$ povlači $y \in \{0, \ldots, \phi(x)\}^k$. Ovime smo dokazali da vrijedi (2.3.4) odnosno Φ je rekurzivno omeđena. Sada tvrdnje (2.3.3) i (2.3.4) zajedno povlače da je Φ r.r.o. $\square$

Jedna važna primjena upravo dokazane propozicije jest dokaz da je funkcija $i \mapsto [i]$ r.r.o. Tu funkciju ćemo vrlo često koristiti u kasnijim poglavljima. Imamo sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.11. *Funkcija $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definirana s $\Phi(i) = [i]$, $\forall i \in \mathbb{N}$ je r.r.o.*

Dokaz. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s

$$f(i,j) = (i)_j, \quad \forall i,j \in \mathbb{N}.$$

Neka su $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadane redom s

$$\alpha(i) = 0, \quad \beta(i) = \bar{i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo

$$\Phi(i) = \{(i)_j : 0 \leq j \leq \bar{i}\} = \{f(i,j) : \alpha(i) \leq j \leq \beta(i)\}$$

pa je prema propoziciji 2.10 funkcija Φ r.r.o. $\square$

Definicija r.r.o. funkcije po slučajevima nije navedena u [6], no koristit ćemo je kasnije, stoga je navodimo ovdje. Dokaz slijedi direktno iz definicije r.r.o. funkcije.

Propozicija 2.12. *Neka su $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivan skup. Tada je funkcija $\Phi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ zadana s*

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x), & x \in S \\ \Phi_2(x), & x \notin S \end{cases}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^n$ r.r.o. funkcija. □

U nekim dokazima bit će potrebno napraviti presjek vrijednosti neke r.r.o. funkcije zadanim rekurzivnim skupom. Stoga imamo sljedeću propoziciju, dokaz slijedi direktno iz definicije r.r.o. funkcije.

Propozicija 2.13. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcija. Neka je $T \subseteq \mathbb{N}^m$ rekurzivan skup. Tada je $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ definirana s*

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cap T, \quad \forall x \in \mathbb{N}^n$$

r.r.o. funkcija. □

Koristit ćemo i sljedeću propoziciju (vidi propoziciju 2.19 i njezin dokaz u [6]).

Propozicija 2.14. *Neka su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^{n+k} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ r.r.o. funkcije. Neka je $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ definirana s*

$$\Lambda(x) = \bigcup_{z \in \Phi(x)} \Psi(z, x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je Λ r.r.o. funkcija. □

Sljedeća lema (lema 2.5 iz [6]) je vrlo korisna tehnika za dokazivanje rekurzivne prebrojivosti nekog podskupa od $\mathbb{N}^n$ i mi ćemo ju stoga koristiti u kasnijim poglavljima. Ovdje navodimo samo njen iskaz (za dokaz vidi [6]).

Lema 2.15. *Neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ r.r.o. funkcija te neka je $T \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada je skup*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k : \Phi(x) \subseteq T \right\}$$

rekurzivno prebrojiv. □

2.4 Izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$

Sa $\mathbb{Z}$ označavamo skup cijelih brojeva, odnosno

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}.$$

U ovom odjeljku želimo navesti jedno poopćenje rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ na izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. To je dakle, samo jedan dodatni korak prema definiciji izračunljivih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Napomenimo da je taj prijelaz napravljen nešto direktnije u [6].

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ kažemo da je **izračunljiva** ako postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{b(x)} a(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Sljedeću propoziciju ćemo koristiti već u idućem odjeljku.

Propozicija 2.16. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ izračunljiva funkcija. Tada je skup*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k : f(x) > 0 \right\}$$

rekurzivan.

Dokaz. Funkcija f je izračunljiva, pa neka su $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da vrijedi $f(x) = (-1)^{b(x)} a(x)$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$. Definiramo funkciju $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s $g(x) = \mathrm{sg}(a(x)) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{ost}(b(x), 2))$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$, gdje je ost funkcija iz primjera 2.4. Uočimo $\mathrm{Im}\, g = \{0, 1\}$. Funkcija g je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija i vrijedi $f(x) > 0$ ako i samo ako $g(x) = 1$. Zaključujemo da je funkcija g karakteristična funkcija od S, pa je stoga S rekurzivan. $\square$

2.5 Izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$

Skup racionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{Q}$, odnosno

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Kao što smo već spomenuli u prethodnom odjeljku, cilj nam je doći do definicije izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Kako bi to napravili, najprije trebamo dati definiciju izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$.

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je **izračunljiva** ako postoje izračunljive funkcije $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, i $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $b(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, takve da je

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Primjer 2.17. Funkcija $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definirana s

$$r(i) = \frac{\langle i \rangle_1 + 1}{\langle i \rangle_2 + 1}, \ \forall i \in \mathbb{N}$$

je izračunljiva i vrijedi Im $r = \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty \rangle$. □

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}^n$ kažemo da je **izračunljiva**, ako postoje izračunljive funkcije $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)), \ \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Primjer 2.18. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Funkcija $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ zadana s

$$q(i) = \left((-1)^{(i)_0} \frac{(i)_1}{(i)_2 + 1}, \ldots, (-1)^{(i)_{3n-3}} \frac{(i)_{3n-2}}{(i)_{3n-1} + 1} \right), \ \forall i \in \mathbb{N}$$

je izračunljiva funkcija i vrijedi Im $q = \mathbb{Q}^n$. □

Dokaz sljedeće propozicije može se naći u [6], ovdje dajemo samo njezin iskaz.

Propozicija 2.19. *Neka su $\alpha, \beta : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ izračunljive funkcije. Neka su funkcije $g, g', h, h' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ definirane s*

$$g(x) = \sum_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(i, x), \quad g'(x) = \prod_{i=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(i, x),$$

$$h(x) = \min_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i, x), \quad h'(x) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i, x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, pri čemu je $g(x) = 0$ i $g'(x) = 1$ ako je $\alpha(x) > \beta(x)$. Tada su g, g', h, h' izračunljive funkcije. □

Propozicija 2.20. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija. Tada je skup*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{N}^k : f(x) > 0 \right\}$$

rekurzivan.

Dokaz. Funkcija f je izračunljiva, pa postoje izračunljive funkcije $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Zbog $b(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(x) > 0$ ako i samo ako $a(x) > 0$, pa prema propoziciji 2.16 slijedi da je S rekurzivan. □

Propozicija 2.21. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija. Tada je skup*

$$S = \left\{x \in \mathbb{N}^k : f(x) = 0\right\}$$

rekurzivan. $\square$

2.6 Izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

Skup realnih brojeva označavamo s $\mathbb{R}$. Za realan broj x kažemo da je **izračunljiv** (vidi [16]) ako postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|x - f(k)| < 2^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ kažemo da je **izračunljiva** (vidi [18]) ako postoji izračunljiva funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je

$$|F(x) - F(x, l)| < 2^{-l}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Za funkciju F kažemo da je **izračunljiva aproksimacija** od f. Pojam izračunljive funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ koristi se prije svega u definiciji izračunljivog metričkog prostora (vidi iduće poglavlje).

Neka osnovna svojstva izračunljivih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ navedena su u sljedećoj propoziciji koju ovdje navodimo bez dokaza. Dokaz se može pronaći u [6] ili [18].

Propozicija 2.22. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljive funkcije. Tada vrijedi:*

1. *Funkcija $f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ je izračunljiva.*
2. *Funkcija $-f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ je izračunljiva.*
3. *Ako je funkcija $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna funkcija tada je $f \circ h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{R}$ također izračunljiva funkcija.*

$\square$

Bit će nam korisna i sljedeća propozicija (propozicija 1.5 (ii) u [6]). Dokaz navodimo kao demonstraciju tehnika s izračunljivim funkcijama $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.

Propozicija 2.23. *Neka su* $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *te* $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *izračunljive funkcije. Neka su funkcije* $g, g' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *definirane s*

$$g(x) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i, x), \qquad g'(x) = \min_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i, x)$$

Tada su funkcije g *i* g' *izračunljive.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za funkciju g, za g' je analogno.

Neka je $F : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva aproksimacija za f. Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ s

$$G(x, n) = \max_{0 \le i \le \alpha(x)} F(i, x, n), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji 2.19 funkcija G je izračunljiva.

Neka je $\varepsilon > 0$. Pretpostavimo da su $a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$|a_i - A_i| < \varepsilon, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Označimo s $M = \max\{A_1, \ldots, A_n\}$ i $m = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Tada vrijedi $|M - m| < \varepsilon$. Naime, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ iz $|a_i - A_i| < \varepsilon$ imamo $a_i < A_i + \varepsilon$. Specijalno, jer je $m = a_j$ za neki $j \in \{1, \ldots, n\}$ imamo $m < A_j + \varepsilon$, no zbog $A_j \le M$ je $m < M + \varepsilon$. S druge strane, iz $A_i < a_i + \varepsilon$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $A_j = M$ za neki j imamo $M < a_j + \varepsilon$. Sada zbog $a_j \le m$ je $M < m + \varepsilon$. Zaključujemo $|M - m| < \varepsilon$. Iz ovog se sada pokaže

$$|g(x) - G(x, n)| < 2^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Najprije, imamo $|f(i, x) - F(i, x, n)| < 2^{-n}$. Sada je

$$|g(x) - G(x, n)| = \left| \max_{0 \le i \le \alpha(x)} f(i, x) - \max_{0 \le i \le \alpha(x)} F(i, x, n) \right| < 2^{-n}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je funkcija g izračunljiva. Slično se tvrdnja pokazuje za funkciju g'. $\square$

Imamo sljedeću korisnu propoziciju (propozicija 1.6 iz [6]) koju ćemo također često koristiti za dokazivanje rekurzivne prebrojivosti određenih skupova, preciznije, koristit ćemo ju u situacijama u kojima ćemo imati $S \subseteq \mathbb{N}^k$ takav da postoji neka izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $S = \{x \in \mathbb{N}^k : f(x) > 0\}$.

Propozicija 2.24. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija. Tada je skup*

$$\Big\{x \in \mathbb{N}^k : f(x) > 0\Big\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva aproksimacija od f. Definiramo skup T s

$$T = \Big\{(x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} : F(x,i) > 2^{-i}\Big\}.$$

Tvrdimo da je T rekurzivan. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ s $h(x,i) = F(x,i) - 2^{-i}$. Prema propoziciji 2.22 funkcija h je izračunljiva funkcija. Prema definiciji od h vrijedi

$$\forall x \in \mathbb{N}^k,\ \forall i \in \mathbb{N}\ \Big[F(x,i) > 2^{-i} \iff h(x,i) > 0\Big]$$

iz čega prema propoziciji 2.20 slijedi da je skup T rekurzivan. Tvrdimo da je

$$\forall x \in \mathbb{N}^k\ \ [f(x) > 0 \iff \exists i \in \mathbb{N}\ (x,i) \in T]\,.$$

Naime, neka je $x \in \mathbb{N}^k$ takav da vrijedi $f(x) > 0$. Tvrdimo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $F(x,i) > 2^{-i}$. Najprije iz $f(x) > 0$ slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da

$$f(x) > 2 \cdot 2^{-i}.$$

No sada iz $F(x,i) > f(x) - 2^{-i}$ imamo $F(x,i) > 2^{-i}$.

Obratno, pretpostavimo da je $x \in \mathbb{N}^k$ takav da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $F(x,i) > 2^{-i}$. Tada iz ovog, te $|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}$ imamo

$$f(x) > F(x,i) - 2^{-i} > 0.$$

Prema propoziciji 2.7 sada slijedi da je $\Big\{x \in \mathbb{N}^k : f(x) > 0\Big\}$ rekurzivno prebrojiv. □

U radu s izračunljivim funkcijama $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, u nejednakostima će nam ponekad biti potrebno preći na funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Jedan takav prijelaz dan je sljedećom propozicijom.

Propozicija 2.25. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi*

$$f(x) < g(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}^k$$

Dokaz. Funkcija f je izračunljiva pa stoga postoji izračunljiva funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da $|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ i sve $x \in \mathbb{N}^k$. Nadalje, zbog izračunljivosti od F postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$F(x,i) = (-1)^{c(x,i)} \frac{a(x,i)}{b(x,i)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Iz obrnute nejednakosti trokuta imamo

$$|f(x) - F(x,i)| \geq ||f(x)| - |F(x,i)||, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$\left| |f(x)| - \frac{a(x,i)}{b(x,i)} \right| < 2^{-i}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sada je $|f(x)| < \frac{a(x,i)}{b(x,i)} + 2^{-i} \leq a(x,i) + 1$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$, pa je i $f(x) < a(x,i) + 1$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i sve $i \in \mathbb{N}$. Definiramo $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s $g(x) = a(x,0) + 1$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Prema konstrukciji vrijedi $f(x) < g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ pa je stoga g tražena funkcija. $\square$

Poglavlje 3

Izračunljivi metrički prostori

3.1 Osnovne definicije i pojmovi

Neka je (X, d) metrički prostor. Za $x \in X$ i $r > 0$ s $B(x, r)$ označavamo otvorenu kuglu sa središtem u x radijusa r, a s $\widehat{B}(x, r)$ odgovarajuću zatvorenu kuglu, tj. $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ i $\widehat{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$. S $\bar{A}$ označavamo zatvorenje od $A \subseteq X$ u (X, d). Spomenimo da za sve $x \in X$ i $r > 0$ vrijedi $\overline{B(x, r)} \subseteq \widehat{B}(x, r)$ no skupovi $\overline{B(x, r)}$ i $\widehat{B}(x, r)$ općenito ne moraju biti jednaki.

Izračunljiv metrički prostor (vidi [18]) je uređena trojka (X, d, α) gdje je (X, d) metrički prostor i $\alpha : \mathbb{N} \to X$ je niz u (X, d) takav da vrijedi:

(1) Niz α je *gust* u X, odnosno $\overline{\alpha(\mathbb{N})} = X$;

(2) funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ je izračunljiva.

Za $\alpha : \mathbb{N} \to X$ za koji vrijede svojstva (1) i (2) kažemo da je **efektivan separirajući niz** u (X, d). Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Kažemo da je $a \in X$ **izračunljiva točka** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(a, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ (vidi [18]).

Za niz (x_i) u X kažemo da je **izračunljiv** (vidi [18]) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_i, \alpha_{f(i,k)}) < 2^{-k}$, za sve $i, k \in \mathbb{N}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $Y \subseteq X$. Za izračunljiv metrički prostor (Y, d', β) kažemo da je **izračunljiv metrički potprostor** (vidi [8]) od (X, d, α) ako je $d' : Y \times Y \to \mathbb{R}$ restrikcija od $d : X \times X \to \mathbb{R}$ i β je izračunljiv niz u (X, d, α).

Propozicija 3.1. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor i neka je* (Y, d', β) *izračunljiv metrički potprostor od* (X, d, α). *Neka je* (y_i) *izračunljiv niz u* (Y, d', β). *Tada je* (y_i) *izračunljiv niz u* (X, d, α).

Dokaz. Niz (y_n) je izračunljiv niz u (Y, d', β) pa stoga postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $d'(y_n, \beta_{F(n,k)}) < 2^{-k-1}$ za sve $n, k \in \mathbb{N}$. Nadalje, β je izračunljiv niz u (X, d, α) pa stoga postoji rekurzivna funkcija $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $d(\beta(n), \alpha(G(n, k))) < 2^{-k-1}$ za sve $n, k \in \mathbb{N}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} d(y_n, \alpha(G(F(n,k),k))) &\leq d(y_n, \beta(F(n,k))) + d(\beta(F(n,k)), \alpha(G(F(n,k),k))) \\ &< d'(y_n, \beta(F(n,k))) + 2^{-k-1} < 2^{-k} \end{aligned}$$

za sve $n, k \in \mathbb{N}$ pa je stoga (y_n) izračunljiv niz u (X, d, α). □

Pojmovi koje navodimo u ostatku ovog odjeljka su preuzeti iz [1], [6] i [18].

Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ neka fiksirana rekurzivna surjekcija takva da je $\operatorname{Im} q = \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty \rangle$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ definiramo pripadne **racionalne kugle** s

$$I_i = B(\alpha_{\langle i \rangle_1}, q_{\langle i \rangle_2}), \quad \widehat{I}_i = \widehat{B}(\alpha_{\langle i \rangle_1}, q_{\langle i \rangle_2}). \tag{3.1.1}$$

Definiramo funkcije $\lambda : \mathbb{N} \to X$ i $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sa

$$\lambda(i) = \alpha_{\langle i \rangle_1} \text{ i } \rho(i) = q_{\langle i \rangle_2}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Funkcije λ i ρ su očito rekurzivne, gledajući na njih kao na nizove λ je rekurzivan kao rekurzivan podniz rekurzivnog niza α, a ρ je rekurzivan kao rekurzivan podniz rekurzivnog niza q. Središta i radijuse racionalnih kugala sada možemo pisati kraće pomoću nizova λ i ρ pa imamo

$$I_i = B(\lambda_i, \rho_i), \ \widehat{I}_i = \widehat{B}(\lambda_i, \rho_i), \ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3.1.2}$$

Uočimo da je $\bar{I}_i \subseteq \widehat{I}_i$ te da skupovi $\bar{I}_i$ i $\widehat{I}_i$ ne moraju biti jednaki.

Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = \bigcup_{i \in [j]} I_i, \quad \widehat{J_j} = \bigcup_{i \in [j]} \widehat{I}_i$$

Za $\ell \in \mathbb{N}$ označavamo s $\mathcal{H}_\ell$ konačan niz skupova

$$J_{(\ell)_0}, \ldots, J_{(\ell)_{\bar{\ell}}},$$

a s $\bigcup \mathcal{H}_\ell$ označavamo uniju ovih skupova, tj. $\bigcup \mathcal{H}_\ell = J_{(\ell)_0} \cup \cdots \cup J_{(\ell)_{\bar{\ell}}}$. Za $p \in \mathbb{N}$, označavamo $\mathcal{H}_\ell^{0 \leq p} = (J_{(\ell)_0}, \ldots, J_{(\ell)_p})$. Za $p, q \in \mathbb{N}$ takve da je $p \leq q$ označavamo $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q} = (J_{(\ell)_p}, \ldots, J_{(\ell)_q})$. Pripadnu uniju označavamo s $\bigcup \mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ odnosno $\bigcup \mathcal{H}_\ell^{p \leq q} = J_{(l)_p} \cup \cdots \cup J_{(l)_q}$. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S \subseteq X$. Tada kažemo da $\mathcal{H}_\ell$ **pokriva** S ako vrijedi $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell$. Analogno, za $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ kažemo da **pokriva** S ako vrijedi $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$.

Neka je $\mathcal{A} = (A_0, \ldots, A_n)$ konačan niz nepraznih podskupova od X te neka je $\varepsilon > 0$. Za $\mathcal{A}$ kažemo da je *ε-konačan niz* ako je $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Kažemo da metrički prostor (X, d) ima **kompaktne zatvorene kugle** ako je $\widehat{B}(x, r)$ kompaktan skup za sve $x \in X$, $r > 0$.

Za zatvoren podskup S od (X, d) kažemo da je **rekurzivno prebrojivo zatvoren** ili samo **rekurzivno prebrojiv** u (X, d, α) ako je $\{i \in \mathbb{N} : S \cap I_i \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Za zatvoren podskup S kažemo da je **korekurzivno prebrojivo zatvoren** ili samo **korekurzivno prebrojiv** u (X, d, α) ako je $S = X$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $X \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}$. Kažemo da je S **izračunljivo zatvoren** odnosno **izračunljiv** skup u (X, d, α) ako je S rekurzivno prebrojivo i korekurzivno prebrojivo zatvoren u (X, d, α).

Za otvoren skup $S \subseteq X$ kažemo da je **rekurzivno prebrojivo otvoren** u (X, d, α) ako je $X \setminus S$ korekurzivno prebrojivo zatvoren u (X, d, α). Analogno, S je **korekurzivno prebrojivo otvoren** u (X, d, α) ako je $X \setminus S$ rekurzivno prebrojivo zatvoren u (X, d, α). S je **izračunljivo otvoren** u (X, d, α) ako i samo ako je on rekurzivno prebrojivo i korekurzivno prebrojivo otvoren u (X, d, α) (vidi [1], [18]). Mi ćemo se u ovom radu baviti isključivo izračunljivošću *zatvorenih* skupova u nekom izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α).

Primjer 3.2. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $S = \emptyset$. Tada je S korekurzivno prebrojivo zatvoren skup u (X, d, α).

Naime, neka je $x \in X$. Niz (α_i) je gust u X pa stoga postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in B(\lambda_i, \rho_i)$ tj. $x \in I_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$. Dakle, $X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$. Obratno, ako je $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ tada je $x \in I_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$, pa zbog $I_i \subseteq X$ slijedi $x \in X$. Dakle, $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$. Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana s $f(i) = i$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ je očito rekurzivna, te prema upravo dokazanom vrijedi $X \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}$ pa je stoga S korekurzivno prebrojivo zatvoren u (X, d, α). $\square$

3.2 Izračunljiv euklidski prostor

U sljedećoj propoziciji dajemo glavni primjer izračunljivog metričkog prostora kojeg ćemo koristiti u ovom i kasnijim poglavljima.

Propozicija 3.3. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ niz definiran na isti način kao niz q iz primjera 2.18. Tada je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ izračunljiv metrički prostor.*

Dokaz. Znamo da je $(\mathbb{R}^n, d)$ metrički prostor, te je niz α gust niz (racionalnih n-torki) u $\mathbb{R}^n$. Preostaje pokazati da je funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$g(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j),\ \forall i, j \in \mathbb{N},$$

izračunljiva. Neka je $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija takva da vrijedi $\operatorname{Im} r = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty\rangle$. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(i) = \sqrt{r_i},\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\ell : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$\ell(i, k) = \mu j \left[\frac{j^2}{2^{2k}} \leq r_i < \frac{(j+1)^2}{2^{2k}}\right],\ \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Za funkciju $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ definiranu sa

$$F(i, k) = \frac{\ell(i, k)}{2^k},\ \forall i, k \in \mathbb{N},$$

vrijedi $|f(i) - F(i, k)| < 2^{-k}$ za sve $i, k \in \mathbb{N}$, pa je stoga f izračunljiva funkcija. Neka je $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$\gamma(i, j) = \mu m[r_m = d^2(\alpha_i, \alpha_j)],\ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Sada je $g(i, j) = f(\gamma(i, j)) = d(\alpha_i, \alpha_j)$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$, pa je stoga g izračunljiva prema propoziciji 2.22 (3). Dakle, $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor. $\square$

Izračunljiv metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ iz propozicije 3.3 zovemo **izračunljiv euklidski prostor** (vidi [1], [6], [18]). Pregled nekih zanimljivih činjenica o izračunljivom euklidskom prostoru može se pronaći u [1], [6] i [18]. Taj prostor je posebno zanimljiv u ovome radu jer se klasična izračunljivost podskupova od $\mathbb{N}^n$ može promatrati kao specijalan slučaj izračunljivo zatvorenih podskupova u odgovarajućem izračunljivom euklidskom prostoru, što ćemo iskoristiti za konstrukciju jednog kontraprimjera za naše rezultate iz poglavlja 10.

Preciznije, u izračunljivom euklidskom prostoru vrijedi sljedeća tvrdnja. Dokaz se može provesti koristeći tehnike iz [6] no mi ćemo ovdje napraviti drugačiji dokaz, koristeći samo tehnike koje smo dosad naveli u ovome radu.

Propozicija 3.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Tada vrijedi:*

(i) S je rekurzivno prebrojiv u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ ako i samo ako je S rekurzivno prebrojiv kao podskup od $\mathbb{N}^n$.

(ii) S je korekurzivno prebrojiv u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ ako i samo ako je S korekurzivno prebrojiv kao podskup od $\mathbb{N}^n$.

(iii) S je izračunljiv u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ ako i samo ako je S rekurzivan u $\mathbb{N}^n$.

Dokaz. Dokažimo (i). Ako je $S = \emptyset$ tada tvrdnja vrijedi. Ako je S neprazan rekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}^n$ tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da vrijedi $f(\mathbb{N}) = S$. No, iz $S \subseteq \mathbb{N}^n$ slijedi $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Neka je I_i definiran kao u (3.1.1) za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo najprije da u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ vrijedi

$$\forall i \in \mathbb{N} \ [I_i \cap S \neq \emptyset \iff \exists j \in \mathbb{N} \ f(j) \in I_i]. \tag{3.2.1}$$

Ako je $I_i \cap S \neq \emptyset$ tada zbog $x \in S \subseteq \mathbb{N}^n$ i $f(\mathbb{N}) = S$ slijedi da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $f(j) \in I_i$.

Obratno, neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da $f(j) \in I_i$. Tada zbog $f(\mathbb{N}) = S$ također imamo $f(j) \in S$. Dakle, $f(j) \in S \cap I_i$ pa je stoga $S \cap I_i \neq \emptyset$. Ovime smo dokazali tvrdnju (3.2.1).

Definirajmo skup

$$T = \{i \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N} \ f(j) \in I_i\}.$$

Tada prema upravo dokazanoj tvrdnji (3.2.1) imamo

$$T = \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap S \neq \emptyset\}. \tag{3.2.2}$$

Nadalje, tvrdimo da je T rekurzivno prebrojiv. Najprije neka je

$$U = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : f(j) \in I_i\}.$$

Skup U je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.24. Naime, definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$h(i,j) = q_{\langle i \rangle_2} - d(f(j), \alpha_{\langle i \rangle_1}),\ \forall i,j \in \mathbb{N}.$$

Tada je prema propoziciji 2.22 h izračunljiva funkcija. Nadalje, vrijedi

$$\forall i,j \in \mathbb{N} \quad f(j) \in I_i \iff h(i,j) > 0$$

pa je skup U jednak skupu

$$\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : h(i,j) > 0\}$$

koji je prema propoziciji 2.24 rekurzivno prebrojiv. Skup T je sada jednak

$$T = \{i \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N}\ (i,j) \in U\}.$$

pa je stoga i T rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.7 svojstvu (1). Sada zbog rekurzivne prebrojivosti od T imamo prema (3.2.2) da je S rekurzivno prebrojiv.

Obratno, pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Tada je skup T iz (3.2.2) rekurzivno prebrojiv iz čega slijedi da postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa svojstvom $g(\mathbb{N}) = T$. Neka je funkcija $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definirana na isti način kao i funkcija r iz primjera 2.17. Tvrdimo da vrijedi

$$\forall x \in \mathbb{N}^n \left[x \in S \iff \exists i \in \mathbb{N} \quad (\alpha_{\langle g(i) \rangle_1} = x) \wedge (q_{\langle g(i) \rangle_2} < 1)\right]. \tag{3.2.3}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^n$ i pretpostavimo da je $x \in S$. Tada zbog $x \in \mathbb{N}^n$ i $\mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Q}^n$ imamo $x \in \mathbb{Q}^n$. Funkcija α je surjekcija, pa stoga postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha(j) = x$. Neka je $r \in \mathbb{Q} \cap \langle 0, \infty \rangle$ takav da je $r < 1$. Znamo da vrijedi $\mathrm{Im}\ q = \mathbb{Q} \cap \langle 0, \infty \rangle$ pa stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $q(k) = r$. Neka je $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je $\langle \ell \rangle_1 = j$ i $\langle \ell \rangle_2 = k$. Zbog činjenice da za svaki $r > 0$ imamo $x \in B(x,r)$ slijedi da je $x \in B(\alpha_{\langle \ell \rangle_1}, q(\langle \ell \rangle_2))$ odnosno $x \in I_\ell$. Sada zbog $x \in I_\ell$ i $x \in S$ imamo $I_\ell \cap S \neq \emptyset$ pa je stoga $\ell \in T$. Iz $g(\mathbb{N}) = T$ slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $g(i) = \ell$. Prema konstrukciji je sada $\alpha_{\langle g(i) \rangle_1} = x$ i $q_{\langle g(i) \rangle_2} < 1$.

Obratno, neka je $x \in \mathbb{N}^n$ i neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(\alpha_{\langle g(i) \rangle_1} = x) \wedge (q_{\langle g(i) \rangle_2} < 1)$. Zbog $g(\mathbb{N}) = T$ imamo $g(i) \in T$ odnosno $I_{g(i)} \cap S \neq \emptyset$. Neka je $y \in I_{g(i)} \cap S$. Tada je $y \in I_{g(i)}$ i $y \in S$. Sada $y \in I_{g(i)}$ povlači $d(x,y) < 1$. Iz $x, y \in \mathbb{N}^n$ i $d(x,y) < 1$ imamo $x = y$. Ukupno, $x = y$ i $y \in S$ povlači $x \in S$. Zaključujemo da vrijedi (3.2.3). Definiramo skup

$$V = \{(x,i) \in \mathbb{N}^{n+1} : \alpha(\langle g(i) \rangle_1) = x \wedge q(\langle g(i) \rangle_2) < 1\}.$$

Definiramo skupove

$$V_1 = \{(x,i) \in \mathbb{N}^{n+1} : \alpha(\langle g(i)\rangle_1) = x\};$$

$$V_2 = \{(x,i) \in \mathbb{N}^{n+1} : q(\langle g(i)\rangle_2) < 1\}.$$

Definiramo skup

$$E = \{(x,i) \in \mathbb{N}^{n+1} : \alpha(i) = x\}.$$

Skup E je rekurzivan. Naime, funkcija definirana s $e : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$

$$e(x,i) = \overline{sg}(\sum_{j=0}^{3n-3} sg(|(-1)^{(i)_j}(i)_{j+1} - x((i)_{j+2}+1)| \cdot \mathrm{ost}((i)_j, 2)$$
$$\cdot \mathrm{ost}((i)_{j+1}, (i)_{j+2}+1))), \ \forall x \in \mathbb{N}^n, \ \forall i \in \mathbb{N}$$

je rekurzivna i vrijedi $\chi_E(x,i) = e(x,i)$ za sve $x \in \mathbb{N}^{n+1}, i \in \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $v_1 : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^{n+1}$ sa

$$v_1(x,i) = (x, \langle g(i)\rangle_1)), \quad \forall x \in \mathbb{N}^n, \ i \in \mathbb{N}.$$

Tada je v_1 izračunljiva kao kompozicija izračunljivih funkcija $i \mapsto g(i)$, $j \mapsto \langle j\rangle_1$ i odgovarajućih projekcija. Nadalje, vrijedi

$$(x,i) \in V_1 \iff v_1(x,i) \in E \iff (x,i) \in v_1^{-1}(E)$$

Stoga je skup V_1 rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.7 (3). Definiramo funkciju $v_2 : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ sa

$$v_2(x,i) = 1 - q(\langle g(i)\rangle_2), \quad \forall x \in \mathbb{N}^n, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je v_2 izračunljiva kao zbroj izračunljivih funkcija $(x,i) \mapsto 1$ i $(x,i) \mapsto -q(\langle g(i)\rangle_2)$. Imamo

$$\forall x \in \mathbb{N}^n, \ \forall i \in \mathbb{N} \ \left[(x,i) \in V_2 \iff v_2(x,i) > 0\right].$$

Stoga je skup V_2 rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.20. Sada, jer je $V = V_1 \cap V_2$ slijedi da je V rekurzivno prebrojiv. Nadalje, imamo

$$S = \{x \in \mathbb{N}^n : \exists i \in \mathbb{N} \ (x,i) \in V\}.$$

Stoga je prema propoziciji 2.7 skup S rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo (ii). Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ korekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}^n$. Najprije tvrdimo da vrijedi

$$\mathbb{R}^n \setminus S = (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}^n) \cup (\mathbb{N}^n \setminus S). \tag{3.2.4}$$

Neka je $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Tada je $x \in \mathbb{R}^n$ i $x \notin S$. Imamo dva slučaja. U prvom slučaju je $x \notin \mathbb{N}^n$. Tada zajedno s $x \in \mathbb{R}^n$ imamo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}^n$. U drugom slučaju je $x \in \mathbb{N}^n$, tada zajedno s $x \notin S$ imamo $x \in \mathbb{N}^n \setminus S$. Ukupno, imamo $x \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}^n) \cup (\mathbb{N}^n \setminus S)$.

Obratno, neka je $x \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}^n) \cup (\mathbb{N}^n \setminus S)$. Tada je $x \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}^n)$ ili $x \in (\mathbb{N}^n \setminus S)$. Iz ovog sada slijedi $x \in \mathbb{R}^n$ i $x \notin S$, odnosno $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Dakle, vrijedi (3.2.4).

Dokažimo najprije da je $\mathbb{N}^n$ korekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Neka je $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}^n$. Tada je

$$d(x, \mathbb{N}^n) > 0. \tag{3.2.5}$$

U protivnom bi bilo $d(x, \mathbb{N}^n) = 0$ što zbog zatvorenosti od $\mathbb{N}^n$ u $\mathbb{R}^n$ povlači $x \in \mathbb{N}^n$ što je kontradikcija. Uočimo nadalje, da prema definiciji udaljenosti točke od skupa vrijedi

$$d(x, \mathbb{N}^n) \leq d(x, y), \quad \forall y \in \mathbb{N}^n. \tag{3.2.6}$$

Označimo $\lambda = d(x, \mathbb{N}^n)$. Odaberimo $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(\alpha_j, x) < \lambda/4. \tag{3.2.7}$$

Odaberimo $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ takav da je

$$\lambda/4 < r < \lambda/2. \tag{3.2.8}$$

Sada je $d(x, \alpha_j) < \frac{\lambda}{4} < r$ odnosno $x \in B(\alpha_j, r) \subseteq \widehat{B}(\alpha_j, r)$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\lambda_i = \alpha_j$ i $\rho_i = r$. Tada je $x \in \widehat{I}_j$. Tvrdimo da za svaki $y \in \widehat{I}_i$ vrijedi $y \notin \mathbb{N}^n$. Pretpostavimo suprotno, neka je $y \in \widehat{I}_i$ takav da je $y \in \mathbb{N}^n$. Tada tvrdnje (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8) zajedno s $y \in \widehat{I}_i$ te nejednakosti trokuta povlače

$$\lambda \leq d(x, y) \leq d(x, \alpha_j) + d(\alpha_j, y) < \lambda/4 + \lambda/2$$

što je kontradikcija. Stoga za svaki $y \in \widehat{I}_i$ vrijedi $y \notin \mathbb{N}^n$ pa je $\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n = \emptyset$.

Obratno, jasno je da $x \in \widehat{I}_i$ i $\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n = \emptyset$ povlači $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}^n$. Zaključujemo da vrijedi

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}^n = \bigcup_{\{i \in \mathbb{N} : \widehat{I} \cap \mathbb{N}^n = \emptyset\}} I_i. \tag{3.2.9}$$

Označimo $O = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Dokažimo sada sljedeću tvrdnju:

$$\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n = \emptyset \iff \exists M \in \mathbb{N} \quad (d(O, \lambda_i) + \rho_i < M) \wedge (\mathbb{N}^n_M \cap \widehat{I}_i = \emptyset). \tag{3.2.10}$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n = \emptyset$. Tada za svaki $M \in \mathbb{N}$ vrijedi $\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n_M = \emptyset$. Posebno, za $M \in \mathbb{N}$ takav da je $d(O, \lambda_i) + \rho_i < M$ vrijedi $\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n_M = \emptyset$.

Obratno, neka je $M \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(d(O, \lambda_i) + \rho_i < M) \wedge (\mathbb{N}^n_M \cap \widehat{I}_i = \emptyset). \tag{3.2.11}$$

Neka je $y \in \mathbb{N}^n$ proizvoljan. U slučaju $y \in \mathbb{N}^n_M$ imamo zajedno s $\mathbb{N}^n_M \cap \widehat{I}_i = \emptyset$ da vrijedi $y \notin \widehat{I}_i$.

Neka je $y \in \mathbb{N}^n \backslash \mathbb{N}^n_M$. Tada je $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pri čemu su $y_i \in \mathbb{N}$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ te postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da vrijedi $y_i > M$. No tada mora biti $d(O, y) > M$ jer u protivnom bismo imali $y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leq M^2$, što zajedno sa činjenicom da je $y_i \in \mathbb{N}$ i $y_i > M$ povlači $y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leq M^2 < y_i^2$ što je kontradikcija. Dakle, vrijedi

$$d(O, y) > M. \tag{3.2.12}$$

Sada iz prvog dijela (3.2.11) i (3.2.12) imamo

$$d(y, \lambda_i) \geq d(y, O) - d(O, \lambda_i) > M - d(O, \lambda_i) > \rho_i.$$

odnosno $y \notin \widehat{I}_i$. Ovime smo dokazali da vrijedi (3.2.10). Dokažimo

$$\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n_M = \emptyset \iff \min_{y \in \mathbb{N}^n_M} d(y, \lambda_i) > \rho_i. \tag{3.2.13}$$

Neka je $\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n_M = \emptyset$, te neka je $y \in \mathbb{N}^n_M$. Tada zbog $\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n_M = \emptyset$ slijedi $d(y, \lambda_i) > \rho_i$. Dakle, $d(y, \lambda_i) > \rho_i$ za svaki $y \in \mathbb{N}^n_M$, pa je stoga i $\min_{y \in \mathbb{N}^n_M} d(y, \lambda_i) > \rho_i$. Obratno, neka je $\min_{y \in \mathbb{N}^n_M} d(y, \lambda_i) > \rho_i$. Tada za svaki $y \in \mathbb{N}^n_M$ imamo $d(y, \lambda_i) \geq \min_{y \in \mathbb{N}^n_M} d(y, \lambda_i) > \rho_i$ pa je stoga $\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n_M = \emptyset$. Zaključujemo da vrijedi (3.2.13). Definiramo funkciju $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$F(i, M) = M - d(O, \lambda_i) - \rho_i, \quad \forall i, M \in \mathbb{N}.$$

Neka je $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\alpha_{i_0} = O$. Takav i_0 postoji jer je α surjekcija. Sada je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto d(\alpha_{i_0}, \alpha_{\langle i \rangle_1})$ prema 2.22 svojstvu (3) izračunljiva kao kompozicija funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $i \mapsto (i_0, \langle i \rangle_1)$ i $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$. Primjenom propozicije 2.22 svojstava (1) i (2) imamo da je F izračunljiva. Skup

$$A = \{(i, M) \in \mathbb{N}^2 : F(i, M) > 0\}$$

je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.24. Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$G(i, M) = \min_{y \in \mathbb{N}^n_M} d(y, \lambda_i) - \rho_i, \quad \forall i, M \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da je funkcija G izračunljiva kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$. Najprije, prema [6] postoji rekurzivna funkcija $\zeta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$\mathbb{N}^n_M \subseteq \{((i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}) : i \in \{0, \dots, \zeta(n, M)\}\}. \tag{3.2.14}$$

Definiramo sada funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$h(j, M) = \mu i[\alpha_i = (\mathrm{ost}((j)_0, M+1), \dots, \mathrm{ost}((j)_{n-1}, M+1))], \quad \forall j, M \in \mathbb{N}. \tag{3.2.15}$$

Sada imamo

$$G(i, M) = \min_{0 \le j \le \zeta(n,M)} d(\alpha_{h(j,M)}, \alpha_{\langle i \rangle_1}) - \rho_i, \quad \forall i, M \in \mathbb{N}.$$

Prema propozicijama 2.22, 2.23 i izračunljivosti funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j), \forall i, j \in \mathbb{N}$ je funkcija G izračunljiva. Stoga je skup

$$B = \{(i, M) \in \mathbb{N}^2 : G(i, M) > 0\}$$

rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.24. Prema (3.2.10) i (3.2.13) imamo sljedeću tvrdnju

$$\widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n = \emptyset \iff \exists M \in \mathbb{N} \quad (i, M) \in A \cap B. \tag{3.2.16}$$

Skup $A \cap B$ je rekurzivno prebrojiv, pa je stoga i skup $\{i \in \mathbb{N} : \exists M \in \mathbb{N}\ (i, M) \in A \cap B\}$ rekurzivno prebrojiv. Sada iz (3.2.16) zaključujemo da je skup

$$T = \{i \in \mathbb{N} : \widehat{I}_i \cap \mathbb{N}^n = \emptyset\} \tag{3.2.17}$$

rekurzivno prebrojiv. Sada iz (3.2.9) zaključujemo da je $\mathbb{N}^n$ korekurzivno prebrojiv u $\mathbb{R}^n$. Nadalje, iz (3.2.4) i (3.2.9) imamo

$$\mathbb{R}^n \setminus S = \bigcup_{i \in T} I_i \cup (\mathbb{N}^n \setminus S). \tag{3.2.18}$$

Dokažimo da je S korekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$.

Neka je $j \in \mathbb{N}^n \setminus S$, te neka je $y \in B(j, \frac{1}{2})$. Tada je $d(j, y) < \frac{1}{2}$. S druge strane zbog $j \in \mathbb{N}^n$ i $j \notin S$ imamo

$$d(j, x) \geq 1, \quad \forall x \in S. \tag{3.2.19}$$

Tvrdimo $y \notin S$ za svaki $y \in B(j, \frac{1}{2})$. Pretpostavimo suprotno, neka je $y \in B(j, \frac{1}{2})$ takav da je $y \in S$. Tada zbog (3.2.19) imamo $1 \leq d(j, y) < 1/2$ što je kontradikcija. Iz ovog zaključujemo da vrijedi $B(j, \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$ za svaki $j \in \mathbb{N}^n \setminus S$ iz čega slijedi

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}^n \setminus S} B(j, \tfrac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S. \tag{3.2.20}$$

Definiramo

$$V = \bigcup_{i \in T} I_i, \quad W = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^n \setminus S} B(j, \tfrac{1}{2}). \tag{3.2.21}$$

Za svaki $j \in \mathbb{N}^n \setminus S$ imamo $j \in B(j, \frac{1}{2})$, pa je stoga

$$\mathbb{N}^n \setminus S \subseteq W. \tag{3.2.22}$$

No, sada (3.2.20) povlači

$$\mathbb{R}^n \setminus S = (\mathbb{R}^n \setminus S) \cup W. \tag{3.2.23}$$

Nadalje, (3.2.22) povlači

$$W = (\mathbb{N}^n \setminus S) \cup W. \tag{3.2.24}$$

Sada iz (3.2.18) dobivamo

$$(\mathbb{R}^n \setminus S) \cup W = V \cup (\mathbb{N}^n \setminus S) \cup W. \tag{3.2.25}$$

Odnosno iz (3.2.23), (3.2.24) i (3.2.25) imamo

$$\mathbb{R}^n \setminus S = V \cup W. \tag{3.2.26}$$

Neka je $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi $t(\mathbb{N}) = T$. Neka je $t' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi $t'(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^n \setminus S$. Tada prema (3.2.26) vrijedi

$$\mathbb{R}^n \setminus S = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{t(i)} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(t'(i), \tfrac{1}{2}) \right). \tag{3.2.27}$$

Definiramo redom skupove

$$\begin{aligned} U' &= \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \lambda_i = t'(j) \wedge \rho_i = \tfrac{1}{2}\} \\ U &= \{i \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N}\ (i,j) \in U'\}. \end{aligned}$$

Skup U' je rekurzivno prebrojiv kao presjek rekurzivno prebrojivih skupova $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \lambda_i = t'(j)\}$ i $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \rho_i = \frac{1}{2}\}$. Sada, iz rekurzivne prebrojivosti od U' prema propoziciji 2.7 (1) slijedi rekurzivna prebrojivost skupa U. Neka je $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi $u(\mathbb{N}) = U$. Sada (3.2.27) možemo izraziti preko funkcija t i u, odnosno imamo:

$$\mathbb{R}^n \setminus S = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{t(i)} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{u(i)} \right). \tag{3.2.28}$$

Definiramo sada funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$h(i) = \begin{cases} t(\langle i \rangle_1), & \langle i \rangle_2 \text{ paran.} \\ u(\langle i \rangle_1), & \langle i \rangle_2 \text{ neparan.} \end{cases}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$. Funkcija h je rekurzivna te vrijedi

$$\mathbb{R}^n \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{h(i)}$$

pa je stoga S korekurzivno prebrojiv u $\mathbb{R}^n$.

Dokažimo sada obratan smjer, pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ korekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$\mathbb{R}^n \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}. \tag{3.2.29}$$

Tvrdimo da vrijedi

$$\forall x \in \mathbb{N}^n \ \left[x \in \mathbb{N}^n \setminus S \iff \exists i \in \mathbb{N}\ x \in I_{f(i)} \right]. \tag{3.2.30}$$

Naime, neka je $x \in \mathbb{N}^n$ i pretpostavimo da je $x \in \mathbb{N}^n \setminus S$. Tada je $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ stoga prema (3.2.29) vrijedi $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}$ odnosno postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{f(i)}$.

Obratno, neka je $x \in \mathbb{N}^n$ i pretpostavimo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{f(i)}$. Sada (3.2.29) povlači $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Ukupno, $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ i $x \in \mathbb{N}^n$ povlače $x \in \mathbb{N}^n \setminus S$. Ovime smo dokazali (3.2.30).

Definiramo sada funkciju $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sa

$$F(x,i) = q_{\langle f(i)\rangle_2} - d(x, \alpha_{\langle f(i)\rangle_1}),\ \forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Za F se pokaže da je izračunljiva na analogan način kao i ranije u dokazu obratnog smjera tvrdnje (ii). Tvrdimo sada

$$\forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall i \in \mathbb{N}\ \left[x \in I_{f(i)} \iff F(x, f(i)) > 0\right]. \tag{3.2.31}$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^n$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in I_{f(i)}$. Tada je $d(x, \alpha_{\langle f(i)\rangle_1}) < q_{\langle f(i)\rangle_2}$. Prema definiciji od F imamo $F(x,i) > 0$.

Obratno, neka su $x \in \mathbb{N}^n$ i $i \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $F(x, f(i)) > 0$. Tada je $q_{\langle f(i)\rangle_2} - d(x, \alpha_{\langle f(i)\rangle_1}) > 0$ iz čega slijedi $d(x, \alpha_{\langle f(i)\rangle_1}) < q_{\langle f(i)\rangle_2}$ odnosno $x \in I_{f(i)}$. Ovime smo dokazali tvrdnju (3.2.31).

Tvrdnje (3.2.30) i (3.2.31) sada povlače

$$\forall x \in \mathbb{N}^n\ \left[x \in \mathbb{N}^n \setminus S \iff \exists i \in \mathbb{N}\ F(x, f(i)) > 0\right]. \tag{3.2.32}$$

Definiramo skup

$$W = \{(x,i) \in \mathbb{N}^{n+1} : F(x, f(i)) > 0\}.$$

Najprije uočimo da je prema propoziciji 2.22 funkcija F izračunljiva funkcija. Stoga je skup W rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.24. Nadalje, prema definiciji skupa W imamo

$$\forall x \in \mathbb{N}^n,\ \forall i \in \mathbb{N}\ [(x,i) \in W \iff F(x, f(i)) > 0]$$

pa je stoga tvrdnja (3.2.32) ekvivalentna sa

$$\forall x \in \mathbb{N}^n\ \left[x \in \mathbb{N}^n \setminus S \iff \exists i \in \mathbb{N}\ (x,i) \in W\right]. \tag{3.2.33}$$

Konačno, skup

$$\{x \in \mathbb{N}^n : \exists i \in \mathbb{N}\ (x,i) \in W\}$$

je prema 3.2.33 jednak $\mathbb{N}^n \setminus S$, a prema propoziciji 2.7 on je rekurzivno prebrojiv.

Tvrdnju (iii) sada lako dokazujemo iz već dokazanih tvrdnji (i) i (ii). Naime, ako je S izračunljiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ tada je on rekurzivno i korekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. No, prema upravo dokazanim tvrdnjama (i) i (ii) vrijedi da je S rekurzivno prebrojiv i korekurzivno prebrojiv kao podskup od $\mathbb{N}^n$. Stoga je S rekurzivan skup u $\mathbf{N}^n$. Vrijedi također i obratno, tj. ako je S rekurzivan u $\mathbb{N}^n$ tada je on rekurzivno prebrojiv i korekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}^n$ i prema tvrdnjama (i) i (ii) on je rekurzivno i korekurzivno prebrojiv a time i izračunljiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. □

Još jedna tvrdnja koju ćemo koristiti prilikom konstrukcije kontraprimjera u poglavlju 10 je sljedeća.

Propozicija 3.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ korekurzivno prebrojiv u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Tada je $S \times \mathbb{R}$ korekurzivno prebrojiv u izračunljivom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^{n+1}, d', \beta)$.*

Dokaz. U slučaju $S = \emptyset$ tvrdnja trivijalno slijedi. Pretpostavimo $S \neq \emptyset$. Označimo $T = \mathbb{R}^n \setminus S$. Imamo

$$\mathbb{R}^{n+1} = (S \cup T) \times \mathbb{R} = (S \times \mathbb{R}) \cup (T \times \mathbb{R}).$$

Stoga je

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus (S \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}. \tag{3.2.34}$$

Skup S je korekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$, pa neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi

$$\mathbb{R}^n \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}. \tag{3.2.35}$$

Neka je $x' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (S \times \mathbb{R})$. Tada prema (3.2.34) slijedi $x' \in (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}$. Sada iz $x' \in (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}$ i (3.2.35) imamo $x' \in (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}) \times \mathbb{R}$ odnosno $x' \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (I_{f(i)} \times \mathbb{R})$.

Obratno, neka je $x' \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (I_{f(i)} \times \mathbb{R})$. Tada je $x' \in (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i)}) \times \mathbb{R}$ pa je prema (3.2.35) $x' \in (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}$ odnosno prema (3.2.34) vrijedi $x' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (S \times \mathbb{R})$. Zaključujemo da vrijedi

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus (S \times \mathbb{R}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (I_{f(i)} \times \mathbb{R}). \tag{3.2.36}$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$ te neka je $x' \in I_{f(i)} \times \mathbb{R}$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija iz primjera 2.18 (za $n = 1$). Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_{n+1} - q_j|^2 < \rho_{f(i)}^2 - d(x, \lambda_{f(i)})^2$. Sada imamo

$$d'(x', (\lambda_{f(i)}, q_j))^2 = d(x, \lambda_{f(i)})^2 + |x_{n+1} - q_j|^2 < \rho_{f(i)}^2.$$

Sada iz ovoga, zbog $d'((\lambda_{f(i)}, q_j), x') \geq 0$ i $\rho_{f(i)} > 0$ slijedi $d'((\lambda_{f(i)}, q_j), x') < \rho_{f(i)}$. No, tada je $x' \in B((\lambda_{f(i)}, q_j), \rho_{f(i)})$, odnosno $x' \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B((\lambda_{f(i)}, q_j), \rho_{f(i)})$.

Obratno, neka je

$$x' = (x, x_{n+1}) \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B((\lambda_{f(i)}, q_j), \rho_{f(i)}).$$

Tada je $(x, x_{n+1}) \in B((\lambda_{f(i)}, q_j), \rho_{f(i)})$ za neki $j \in \mathbb{N}$. Sada zbog $B((\lambda_{f(i)}, q_j), \rho_{f(i)}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ imamo $x' \in \mathbb{R}^{n+1}$. Nadalje, zbog $d'(x', (\lambda_{f(i)}, q_j)) < \rho_{f(i)}$, imamo $d(x, \lambda_{f(i)}) < \rho_{f(i)}$ te zbog $x' \in \mathbb{R}^{n+1}$ je $x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Stoga je $x' \in I_{f(i)} \times \mathbb{R}$. Zaključujemo da vrijedi

$$I_{f(i)} \times \mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B((\lambda_{f(i)}, q_j), \rho_{f(i)}), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3.2.37}$$

Tvrdnje (3.2.36) i (3.2.37) nam daju

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{n+1} \setminus (S \times \mathbb{R}) &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B((\lambda_{f(i)}, q_j), \rho_{f(i)}) = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} B((\lambda_{f(i)}, q_j), \rho_{f(i)}) \\ &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B((\lambda_{f(\langle i\rangle_1)}, q_{\langle i\rangle_2}), \rho_{f(\langle i\rangle_1)}) \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

Definiramo funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa

$$h(i) = \mu z[\beta(\langle z\rangle_1) = (\lambda_{f(\langle i\rangle_1)}, q_{\langle i\rangle_2}) \wedge \rho_{\langle z\rangle_2} = \rho_{f(\langle i\rangle_1)}], \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada iz (3.2.38) i definicije od h slijedi

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus (S \times \mathbb{R}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{h(i)}.$$

Stoga je $S \times \mathbb{R}$ korekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}^{n+1}, d', \beta)$. $\square$

Poglavlje 4

Formalna svojstva i lanci

U ovom poglavlju navodimo formalna svojstva podskupova izračunljivih metričkih prostora koja možemo efektivno testirati. Većina pojmova navedenih u ovom poglavlju su već poznati pojmovi iz [6] koji se u ovom poglavlju dograđuju do originalnih pojmova koji su nužni za dokaz glavnih rezultata ovog rada, te se također neke već postojeće tehnike nadograđuju i prilagođavaju tim originalnim pojmovima. Navedene pojmove i tehnike koristimo u poglavljima 7 i 8.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $x_0, \dots, x_n \in X$ i $r_0, \dots, r_n \in \mathbb{R}^+$. Za parove $(x_0, r_0), \dots, (x_n, r_n)$ definiramo **formalni dijametar** s

$$D = \max_{i,j} d(x_i, x_j) + 2 \max_{k} r_k.$$

Uočimo da vrijedi diam $(B(x_0, r_0) \cup \dots \cup B(x_n, r_n)) \leq D$. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo formalni dijametar od j, u oznaci $D(j)$ kao formalni dijametar niza

$$(\lambda_{(j)_0}, \rho_{(j)_0}), \dots, (\lambda_{(j)_{\overline{j}}}, \rho_{(j)_{\overline{j}}}).$$

Definiramo funkciju fdiam : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s $\mathrm{fdiam}(j) = D(j)$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Uočimo da vrijedi diam $J_j \leq \mathrm{fdiam}(j)$. Za $\ell \in \mathbb{N}$ promotrimo $\mathcal{H}_\ell$ i definiramo

$$\mathrm{fmesh}(\ell) = \max_{0 \leq i \leq \overline{\ell}} \mathrm{fdiam}((\ell)_i).$$

Funkcije fdiam i fmesh su izračunljive što formalno iskazujemo u sljedećim lemama. Dokaz obiju tvrdnji dobije se direktnom primjenom propozicije 2.23 (vidi također [6]).

Lema 4.1. *Funkcija* fdiam : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *je izračunljiva.* □

Lema 4.2. *Funkcija* fmesh : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *je izračunljiva.* □

4.1 Formalna sadržanost

Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su $x_0, y_0 \in X$, $r_0, s_0 \in \langle 0, +\infty\rangle$. Kažemo da je **uređeni par** (y_0, s_0) **formalno sadržan** u (x_0, r_0) ako je

$$d(x_0, y_0) + s_0 < r_0.$$

Ako je (y_0, s_0) formalno sadržan u (x_0, r_0), onda je $B(y_0, s_0) \subseteq B(x_0, r_0)$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za racionalne kugle $I_i = B(\lambda_i, \rho_i)$ i $I_j = B(\lambda_j, \rho_j)$ kažemo da je I_i **formalno sadržana** u I_j ako vrijedi $d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j$. Ako je I_i formalno sadržana u I_j, to skraćeno pišemo $I_i \subseteq_F I_j$. Za racionalni skup J_i i racionalnu kuglu I_j kažemo da je J_i **formalno sadržan** u I_j ako vrijedi $I_q \subseteq_F I_j$ za svaki $q \in [i]$.

Za racionalnu kuglu $I_n = B(\lambda_n, \rho_n)$ kažemo da je **formalno sadržana** u $B(a, m)$ ako vrijedi $d(\lambda_n, a) + \rho_n < m$. Pišemo $I_n \subseteq_F B(a, m)$. Za racionalni skup J_n kažemo da je **formalno sadržan** u $B(a, m)$ ako vrijedi $I_n \subseteq_F B(a, m)$ za svaki $n \in [j]$. Za $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ kažemo da je **formalno sadržan** u $B(a, m)$ ako je $J_{(\ell)_i} \subseteq_F B(a, m)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, $p \leq i \leq q$.

Ovdje treba naglasiti da se kod svih navedenih definicija formalne sadržanosti radi zapravo o relacijama između brojeva, a ne skupova.

Propozicija 4.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada vrijedi:*

(1) Skup $Q_1 = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : I_i \subseteq_F I_j\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(2) Skup $Q_2 = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : J_i \subseteq_F I_j\}$ je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Koristeći definiciju formalne sadržanosti dokazujemo redom navedene tvrdnje. Dokažimo (1). Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$f(i, j) = \rho_j - d(\lambda_i, \lambda_j) - \rho_i, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Sada je $Q_1 = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : f(i, j) > 0\}$ a prema propoziciji 2.24 on je rekurzivno prebrojiv. Dokažimo (2). Neka je Q_1 skup iz (1). Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sa

$$\Lambda(i, j) = [i] \times \{j\}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Funkcija Λ je r.r.o. prema propozicijama 2.11, 2.8 (1) i 2.9. Sada imamo

$$\begin{aligned}
(i, j) \in Q_2 &\iff J_i \subseteq_F I_j \\
&\iff I_q \subseteq_F I_j, \ \forall q \in [i] \\
&\iff \Lambda(i, j) \subseteq Q_1.
\end{aligned}$$

Stoga je prema lemi 2.15 skup Q_2 rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 4.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $a \in X$ izračunljiva točka. Tada vrijedi*

(1) Skup $\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : I_n \subseteq_F B(a, m)\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(2) Skup $\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : J_n \subseteq_F B(a, m)\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(3) Skup $\{(m, \ell, p) \in \mathbb{N}^3 : \mathcal{H}_\ell^{0 \le p} \subseteq_F B(a, m)\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(4) Skup $\{(m, \ell, p, q) \in \mathbb{N}^4 : \mathcal{H}_\ell^{p \le q} \subseteq_F B(a, m)\}$ je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Definiramo najprije funkciju $\Lambda : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ s

$$\Lambda(n, m) = [n] \times \{m\}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Funkcija Λ je r.r.o. funkcija ponovo prema propozicijama 2.11, 2.8 (1) i 2.9. Dokažimo (1). Označimo zadani skup sa S. Tvrdimo da je skup S rekurzivno prebrojiv. Točka a je izračunljiva pa postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $d(a, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema definiciji formalne sadržanosti za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $I_n \subseteq_F B(a, m)$ ako i samo ako je $d(a, \lambda_n) + \rho_n < m$. Tvrdimo da vrijedi

$$I_n \subseteq_F B(a, m) \iff \exists k_0 \in \mathbb{N}\ d(\alpha_{f(k_0)}, \lambda_n) + 2^{-k_0} + \rho_n < m.$$

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo najprije da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(\alpha_{f(k_0)}, \lambda_n) + 2^{-k_0} + \rho_n < m$. Iz ovog i nejednakosti trokuta sada imamo

$$\begin{aligned} d(a, \lambda_n) + \rho_n &\le d(a, \alpha_{f(k_0)}) + d(\alpha_{f(k_0)}, \lambda_n) + \rho_n \\ &< 2^{-k_0} + d(\alpha_{f(k_0)}, \lambda_n) + \rho_n < m \end{aligned}$$

pa je stoga $I_n \subseteq_F B(a, m)$. Pretpostavimo sada da je $I_n \subseteq_F B(a, m)$ za neke $n, m \in \mathbb{N}$. Tada je prema definiciji formalne sadržanosti $d(a, \lambda_n) + \rho_n < m$, pa stavimo $D = (m - d(a, \lambda_n) - \rho_n)/2$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $2^{-k_0} < D$. Sada iz ovog te nejednakosti trokuta dobijemo

$$\begin{aligned} d(\lambda_n, \alpha_{f(k_0)}) + 2^{-k_0} + \rho_n &\le d(\lambda_n, a) + d(a, \alpha_{f(k_0)}) + 2^{-k_0} + \rho_n \\ &< m - \rho_n - 2D + 2 \cdot 2^{-k_0} + \rho_n < m \end{aligned}$$

pa je stoga $k_0 \in \mathbb{N}$ traženi broj.

Definiramo funkciju $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ sa

$$g(n, m, k_0) = m - d(\alpha_{f_{k_0}}, \lambda_n) - 2^{-k_0} - \rho_n, \quad \forall n, m, k_0 \in \mathbb{N}.$$

Funkcija g je rekurzivna kao zbroj rekurzivnih funkcija. Definiramo sada

$$T_1 = \{(n, m, k_0) \in \mathbb{N}^3 : g(n, m, k_0) > 0\}.$$

Prema propoziciji 2.24 skup T_1 je rekurzivno prebrojiv. Sada imamo

$$(n, m) \in S \iff \exists k_0 \in \mathbb{N}\ (n, m, k_0) \in T_1$$

pa je prema propoziciji 2.7 skup S rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo (2). Označimo zadani skup s T. Imamo za sve $m, n \in \mathbb{N}$

$$J_n \subseteq_F B(a, m) \iff \forall \ell \in [n]\ I_\ell \subseteq_F B(a, m) \iff [n] \times \{m\} \subseteq S$$

Skup T je jednak skupu $\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \Lambda(m, n) \subseteq S\}$, pa je stoga prema lemi 2.15 on rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo (3). Označimo zadani skup s U. Označimo s T skup iz (2). Definiramo funkciju $\Psi : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sa

$$\Psi(m, \ell, p) = \{((\ell)_i, m) : 0 \leq i \leq p\}$$

za sve $m, \ell, p \in \mathbb{N}$. Funkcija Ψ je r.r.o. što dobivamo primjenom propozicije 2.14. Imamo

$$\mathcal{H}_\ell^{0 \leq p} \subseteq_F B(a, m) \iff \forall i \in \{0, \ldots, p\},\ J_{(\ell)_i} \subseteq_F B(a, m).$$

Skup U je jednak skupu $\{(m, \ell, p) \in \mathbb{N}^3 : \Psi(m, \ell, p) \subseteq T\}$ pa je prema lemi 2.15 on rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo tvrdnju (4). Označimo zadani skup s V. Označimo s T skup iz (2). Definiramo funkciju $\Psi' : \mathbb{N}^4 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sa

$$\Psi'(m, \ell, p, q) = \{((\ell)_i, m) : p \leq i \leq q\}, \quad \forall m, \ell, p, q \in \mathbb{N}$$

Prema propoziciji 2.14 funkcija Ψ' je r.r.o. Imamo

$$\mathcal{H}_\ell^{p \leq q} \subseteq_F B(a, m) \iff \forall i \in \{p, \ldots, q\},\ J_{(\ell)_i} \subseteq_F B(a, m).$$

Skup V je jednak skupu $\{(m, \ell, p, q) \in \mathbb{N}^4 : \Psi'(m, \ell, p, q) \subseteq T\}$ pa je prema lemi 2.15 on rekurzivno prebrojiv. $\square$

Lema 4.5. *Neka je $m \in \mathbb{N}$ i neka je $x \in I_m$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ sa sljedećim svojstvom: ako je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in J_j$ i $\operatorname{fdiam}(j) < \varepsilon$, tada je $J_j \subseteq_F I_m$.*

Dokaz. Imamo da je $d(\lambda_m, x) < \rho_m$ i stoga postoji $r > 0$ takav da vrijedi

$$d(\lambda_m, x) + r < \rho_m.$$

Neka je $\varepsilon = \frac{r}{2}$. Pretpostavimo da je $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $x \in J_j$ i $\operatorname{fdiam}(j) < \varepsilon$. Neka je $i \in [j]$. Tada je $\rho_i < \operatorname{fdiam}(j) < \varepsilon$ i $d(x, \lambda_i) \leq \operatorname{diam}(J_j) \leq \operatorname{fdiam}(j) < \varepsilon$. Sada imamo

$$d(\lambda_m, \lambda_i) + \rho_i \leq d(\lambda_m, x) + d(x, \lambda_i) + \rho_i < d(\lambda_m, x) + 2\varepsilon = d(\lambda_m, x) + r < \rho_m.$$

Stoga je $d(\lambda_m, \lambda_i) + \rho_i < \rho_m$ i $I_i \subseteq_F I_m$. Dakle, vrijedi $J_j \subseteq_F I_m$. □

4.2 Formalna disjunktnost

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Za I_i i I_j kažemo da su **formalno disjunktni** ako vrijedi $d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j$. Za I_i i J_j kažemo da su **formalno disjunktni** ako su I_i i I_k formalno disjunktni za svaki $k \in [j]$. Neka su $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$. Za J_{j_1} i J_{j_2} kažemo da su **formalno disjunktni** ako su I_i i $I_{i'}$ formalno disjunktni za svaki $i \in [j_1]$ i svaki $i' \in [j_2]$. Neka je $\ell \in \mathbb{N}$. Konačan niz $\mathcal{H}_\ell = (J_{(\ell)_0}, \dots, J_{(\ell)_{\overline{\ell}}})$ je **formalni lanac** ako za sve $i, j \in \left\{0, \dots, \overline{\ell}\right\}$ vrijedi

$$|i - j| > 1 \implies J_{(\ell)_i} \text{ i } J_{(\ell)_j} \text{ su formalno disjunktni.}$$

Neka su $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je $p \leq q$. Za J_j i $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q} = (J_{(\ell)_p}, \dots, J_{(\ell)_q})$ kažemo da su **formalno disjunktni** ako vrijedi da su J_j i J_k formalno disjunktni za svaki $k \in \{(\ell)_p, \dots, (\ell)_q\}$. Analogno, za I_j i $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ kažemo da su **formalno disjunktni** ako su I_j i J_k formalno disjunktni za svaki $k \in \{(\ell)_p, \dots, (\ell)_q\}$.

Propozicija 4.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada vrijedi:*

(1) Skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : I_i \text{ i } I_j \text{ su formalno disjunktni}\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(2) Skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : I_i \text{ i } J_j \text{ su formalno disjunktni }\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(3) Skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : J_i \text{ i } J_j \text{ su formalno disjunktni}\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(4) Skup $\{\ell \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_\ell \text{ je formalni lanac}\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(5) *Skup* $\{(j, \ell, p, q) \in \mathbb{N}^4 : J_j$ *i* $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ *su formalno disjunktni*$\}$ *je rekurzivno prebrojiv.*

(6) *Skup* $\{(j, \ell, p, q) \in \mathbb{N}^4 : I_j$ *i* $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ *su formalno disjunktni*$\}$ *je rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Dokažimo (1). Označimo zadani skup sa S. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$f(i, j) = d(\lambda_i, \lambda_j) - \rho_i - \rho_j, \ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Imamo da su $I_i = B(\lambda_i, \rho_i)$ i $I_j = B(\lambda_j, \rho_j)$ formalno disjunktni ako i samo ako vrijedi

$$d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j$$

pa je stoga $S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : f(i, j) > 0\}$, a prema propoziciji 2.24 on je rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo (2). Označimo zadani skup sa Z. Neka je S skup iz (1). Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$

$$\Lambda(i, j) = \{i\} \times [j], \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Funkcija Λ je r.r.o. prema propozicijama 2.11, 2.8 (1) i 2.9. Imamo $Z = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \Lambda(i, j) \subseteq S\}$ pa je prema lemi 2.15 on rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo (3). Označimo zadani skup s T. Označimo sa S skup definiran u (1). Prema definiciji, skupovi J_i i J_j su formalno disjunktni ako i samo ako

$$I_a \text{ i } I_b \text{ su formalno disjunktni za svaki } a \in [i] \text{ i svaki } b \in [j].$$

Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sa

$$\Lambda(i, j) = [i] \times [j], \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Funkcija Λ je r.r.o. prema propozicijama 2.11 i 2.9. Nadalje, skup

$$\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \Lambda(i, j) \subseteq S\right\}$$

je jednak T, pa je stoga on rekurzivno prebrojiv prema lemi 2.15.

Dokažimo (4). Označimo zadani skup s U. Označimo s T skup iz (3). Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sa

$$\Lambda(\ell) = \left\{((\ell)_i, (\ell)_j) : i, j \in \left\{0, \ldots, \overline{\ell}\right\}, |i - j| > 1\right\}, \ \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ sa

$$f(i, j, \ell) = ((\ell)_i, (\ell)_j), \quad \forall i, j, \ell \in \mathbb{N}.$$

Funkcija f je rekurzivna jer se njezine komponentne funkcije mogu zapisati kao kompozicija rekurzivnih funkcija $(i, \ell) \mapsto (\ell)_i$ i projekcija P_1^3, P_2^3 i P_3^3. Naime, lako se provjeri da vrijedi $f(i, j, \ell) = ((P_3^3(i, j, \ell))_{P_1^3(i,j,\ell)}, (P_3^3(i, j, \ell))_{P_2^3(i,j,\ell)})$ za sve $i, j, \ell \in \mathbb{N}$. Definiramo sada funkciju $\Psi : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sa

$$\Psi(i, j, \ell) = \{((\ell)_i, (\ell)_j)\}, \quad \forall i, j, \ell \in \mathbb{N}.$$

Tada je Ψ r.r.o. prema propoziciji 2.8 (1). Definiramo $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ s

$$\Phi(\ell) = \mathbb{N}_{\overline{\ell}}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Tada primjenom propozicije 2.10 slijedi da je Φ r.r.o. Definirajmo sada $\Phi' : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ s

$$\Phi'(\ell) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i, j \in \{0, \dots, \overline{\ell}\}\}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijedi $\Phi'(\ell) = \Phi(\ell) \times \Phi(\ell)$ za svaki $\ell \in \mathbb{N}$ pa je prema propoziciji 2.9 Φ' r.r.o. Sada definirajmo skup

$$V = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : |i - j| > 1\}.$$

Za skup V se lako vidi da je rekurzivan. Konačno, definirajmo funkciju $\Lambda' : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sa

$$\Lambda'(\ell) = \Phi'(\ell) \cap V, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Tada je Λ' r.r.o. prema propoziciji 2.13. Sada primjenom propozicije 2.14 najprije imamo

$$\Lambda(\ell) = \bigcup_{(i,j) \in \Lambda'(\ell)} \Psi(i, j, \ell) = \bigcup_{(i,j) \in \Lambda'(\ell)} \{((\ell)_i, (\ell)_j)\}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

stoga je Λ r.r.o. funkcija. Sada je skup $U = \{\ell \in \mathbb{N} : \Lambda(\ell) \subseteq T\}$ rekurzivno prebrojiv prema lemi 2.15.

Dokažimo (5). Označimo zadani skup s V. Neka je T skup iz (3). Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N}^4 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Lambda(j, p, q, \ell) = \{((\ell)_i, j) : i \in \{p, \dots, q\}\}, \quad \forall j, p, q \in \mathbb{N}.$$

Funkcija Λ je r.r.o. što dobivamo primjenom propozicije 2.14. Imamo $V = \{(j,p,q,\ell) \in \mathbb{N}^4 : \Lambda(j,p,q,\ell) \subseteq T\}$ pa je prema lemi 2.15 on rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo (6). Označimo zadani skup s W. Neka je Z skup iz (2). Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N}^4 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Lambda(j,p,q,\ell) = \{((\ell)_i, j) : i \in \{p,\dots,q\}\}, \quad \forall j,p,q \in \mathbb{N}.$$

Funkcija Λ je r.r.o. što dobivamo primjenom propozicije 2.14. Imamo $W = \{(j,p,q,\ell) \in \mathbb{N}^4 : \Lambda(j,p,q,\ell) \subseteq Z\}$ pa je prema lemi 2.15 on rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 4.7. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i neka je $a \in X$ izračunljiva točka u (X,d,α). Tada vrijedi*

(1) Skup $\{\ell \in \mathbb{N} : a \in I_\ell\}$ je rekurzivno prebrojiv.

(2) Skup $\left\{\ell \in \mathbb{N} : a \in J_{(\ell)_0}\right\}$ je rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Dokažimo (1). Označimo

$$S = \{\ell \in \mathbb{N} : a \in I_\ell\}.$$

Tvrdimo da je S rekurzivno prebrojiv. Najprije, jer je a rekurzivna točka, postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$d(a, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.2.1}$$

Tvrdimo,

$$a \in I_\ell \iff \exists k_0 \in \mathbb{N} \ d(\lambda_\ell, \alpha_{f(k_0)}) + 2^{-k_0} < \rho_\ell.$$

Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(\lambda_\ell, \alpha_{f(k_0)}) + 2^{-k_0} < \rho_\ell$. Tada zbog (4.2.1) prema nejednakosti trokuta imamo

$$d(a,\lambda_\ell) \le d(a, \alpha_{f(k_0)}) + d(\alpha_{f(k_0)}, \lambda_\ell) < 2^{-k_0} + d(\alpha_{f(k_0)}, \lambda_\ell) < \rho_\ell.$$

Stoga je $a \in I_\ell$. Obratno, pretpostavimo sada da je $a \in I_\ell$. Tada je $d(a,\lambda_\ell) < \rho_\ell$ pa definiramo $D := \frac{\rho_\ell - d(a,\lambda_\ell)}{2}$. Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k_0} < D$. Zbog (4.2.1) imamo $d(\alpha_{f(k_0)}, a) < 2^{-k_0}$. Sada je

$$\begin{aligned} d(\lambda_\ell, \alpha_{f(k_0)}) + 2^{-k_0} &\le d(\lambda_\ell, a) + d(a, \alpha_{f(k_0)}) + 2^{-k_0} \\ &< \rho_\ell - 2D + 2 \cdot 2^{-k_0} < \rho_\ell. \end{aligned}$$

Definirajmo sada funkciju $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$g(\ell, k_0) = \rho_\ell - d(\lambda_\ell, \alpha_{f(k_0)}) - 2^{-k_0}$$

za sve $\ell, k_0 \in \mathbb{N}$. Funkcija g je izračunljiva kao zbroj izračunljivih funkcija $(\ell, k_0) \mapsto \rho_\ell$, $(\ell, k_0) \mapsto -d(\lambda_\ell, \alpha_{f(k_0)})$ i $(j, k_0) \mapsto -2^{-k_0}$. Pritom je funkcija $(\ell, k_0) \mapsto -d(\lambda_\ell, \alpha_{f(k_0)})$ izračunljiva kao posljedica propozicije 2.22 svojstva (3). Definiramo

$$T_1 = \{(\ell, k_0) \in \mathbb{N}^2 : g(\ell, k_0) > 0\}.$$

Prema propoziciji 2.24 je T_1 rekurzivno prebrojiv. Sada imamo

$$\ell \in S \iff \exists k_0 \in \mathbb{N}\ (\ell, k_0) \in T_1$$

pa je prema propoziciji 2.7 skup S rekurzivno prebrojiv.

Dokažimo (2). Neka je S skup iz (1). Označimo

$$T = \left\{\ell \in \mathbb{N} : a \in J_{(\ell)_0}\right\}.$$

Tvrdimo da je skup T rekurzivno prebrojiv. Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ s

$$\Lambda(\ell) = [\ell], \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Funkcija Λ je r.r.o. prema propoziciji 2.11. Skup $S_1 = \{\ell \in \mathbb{N} : \Lambda(\ell) \subseteq S\}$ je rekurzivno prebrojiv prema lemi 2.15. pa neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi $g(\mathbb{N}) = S_1$. Označimo skup

$$Q = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : [i] \subseteq [j]\right\}.$$

Definiramo funkcije $A : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $B : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ s $A(i, j) = [i]$ i $B(i, j) = [j]$ za svaki $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Funkcije A i B su r.r.o. prema propozicijama 2.11 i 2.8 (2). Skup Q je jednak skupu

$$\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : A(i, j) \subseteq B(i, j)\right\}$$

pa je prema propoziciji 2.8 on rekurzivan. Definiramo funkciju $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$G(\ell) \simeq \mu k[(g(k), (\ell)_0) \in Q], \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Sada se lako vidi da je dom G $= T$ pa je stoga T rekurzivno prebrojiv. $\square$

4.3 Efektivni pokrivači

U daljnjem tekstu oznaka $\langle A, j, \lambda \rangle$ znači da vrijedi

$$A \subseteq J_j \text{ i } \forall i \in [j] \ (I_i \cap A \neq \emptyset \wedge \rho_i < \lambda).$$

Uočimo da $\langle A, j, \lambda \rangle$ i $\lambda \leq \lambda'$ povlači $\langle A, j, \lambda' \rangle$.

Lema 4.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su A, B kompaktni, neprazni, disjunktni podskupovi od X. Tada vrijedi*

(a) Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da $\langle A, j, \varepsilon \rangle$.

(b) Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\lambda > 0$ takav da je $\lambda < \varepsilon$ i ako su $j, j' \in \mathbb{N}$ i $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ takvi da vrijedi

$$\langle A', j, \lambda \rangle \text{ i } \langle B', j', \lambda \rangle$$

tada su J_j i $J_{j'}$ formalno disjunktni.

Dokaz. Dokažimo (a). Definiramo familiju $\mathcal{U} = \{B(\alpha_i, r) : i \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}^+, r < \varepsilon\}$. Familija $\mathcal{U}$ je otvoren pokrivač od X jer je niz (α_i) gust u X. Skup A je kompaktan pa stoga postoje $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ pri čemu je $U_1 = B(\alpha_{i_1}, r_1), \dots, U_n = B(\alpha_{i_n}, r_n)$ i $A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$. Možemo pretpostaviti da je $U_j \cap A \neq \emptyset$ za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$. Odaberemo $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$(\alpha_{i_k}, r_k) = (\lambda_{j_k}, \rho_{j_k}), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $[j] = \{j_1, \dots, j_n\}$. To je traženi j. Dokažimo sada (b). Skupovi A i B su kompaktni, neprazni i disjunktni, pa je stoga $d(A, B) > 0$. Definiramo

$$\lambda = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{d(A, B)}{4} \right\}.$$

Neka su $j, j' \in \mathbb{N}$, $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$ takvi da vrijedi $\langle A', j, \lambda \rangle$ i $\langle B', j', \lambda \rangle$. Neka su sada $i \in [j]$ i $i' \in [j']$. Tvrdimo da vrijedi

$$d(\lambda_i, \lambda_{i'}) > \rho_i + \rho_{i'}.$$

Najprije, zbog $\langle A', j, \lambda \rangle$ imamo $\rho_i < \lambda$ i $I_i \cap A' \neq \emptyset$. Zbog $I_i \cap A' \neq \emptyset$ postoji $a \in A \cap I_i$ takav da je $d(a, \lambda_i) < \rho_i$. Analogno, zbog $\langle B', j', \lambda \rangle$ imamo $I_{i'} \cap B \neq \emptyset$ i $\rho_{i'} < \lambda$. Zbog

$I_{i'} \cap B' \neq \emptyset$ postoji neki $b \in B \cap I'$ takav da je $d(b, \lambda_{i'}) < \rho_{i'}$. Prema definiciji udaljenosti skupova imamo $d(a, b) \geq d(A, B) \geq 4\lambda$. Sada imamo sljedeći niz nejednakosti:

$$\begin{aligned} 4\lambda \leq d(a, b) &\leq d(a, \lambda_{i'}) + d(\lambda_{i'}, b) \\ &\leq d(a, \lambda_i) + d(\lambda_i, \lambda_{i'}) + d(\lambda_{i'}, b) \\ &< \rho_i + \rho_{i'} + d(\lambda_i, \lambda_{i'}). \end{aligned}$$

Iz $\rho_i < \lambda$ i $\rho_{i'} < \lambda$ imamo $\rho_i + \rho_{i'} < 2\lambda$ odnosno $4\lambda - \rho_i - \rho_{i'} > 2\lambda > \rho_i + \rho_{i'}$ iz čega slijedi

$$d(\lambda_i, \lambda_{i'}) > 4\lambda - \rho_i - \rho_{i'} > \rho_i + \rho_{i'}$$

čime smo dokazali tvrdnju. □

Lema 4.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $A_1, \ldots, A_n$ kompaktni neprazni podskupovi od X. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje brojevi $j_1, \ldots, j_n$ takvi da vrijedi $A_1 \subseteq J_{j_1}, \ldots, A_n \subseteq J_{j_n}$, te takvi da za sve $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi*

$$A_p \cap A_q = \emptyset \implies J_{j_p} \text{ i } J_{j_q} \text{ su formalno disjunktni.}$$

Brojeve $j_1, \ldots, j_n$ možemo tako odabrati da postoji $\lambda > 0$ takav da vrijedi $\lambda < \varepsilon$ i

$$\langle A_1, j_1, \lambda \rangle \wedge \cdots \wedge \langle A_n, j_n, \lambda \rangle.$$

Dokaz. Označimo s C skup

$$C = \{(p, q) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} : A_p \cap A_q = \emptyset\}.$$

Za svaki $(p, q) \in C$ vrijedi $A_p \cap A_q = \emptyset$ pa prema lemi 4.8 postoji $\lambda_{(p,q)} > 0$ takav da je $\lambda_{(p,q)} < \varepsilon$ te takav da $\langle A_p, j, \lambda_{(p,q)} \rangle$ i $\langle A_q, j', \lambda_{(p,q)} \rangle$ povlače da su J_j i $J_{j'}$ formalno disjunktni. Uzmimo $\lambda = \min \left\{ \lambda_{(p,q)} : (p, q) \in C \right\}$. Prema lemi 4.8 slijedi da postoje $j_1, \ldots, j_n$ takvi da vrijedi $\langle A_1, j_1, \lambda \rangle \wedge \cdots \wedge \langle A_n, j_n, \lambda \rangle$ čime smo dokazali traženu tvrdnju. □

Lema 4.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $A \subseteq X$ kompaktan neprazan te $r > 0$ i $j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $\langle A, j, r \rangle$. Tada je* $\mathrm{fdiam}(j) < 4r + \mathrm{diam}\ A$.

Dokaz. Za J_j gledamo pripadni niz parova $(\lambda_{(j)_0}, \rho_{(j)_0}), \ldots, (\lambda_{(j)_{\bar{j}}}, \rho_{(j)_{\bar{j}}})$. Neka su $i, i', i'' \in [j]$ takvi da je fdiam(j) $= d(\lambda_i, \lambda_{i'}) + 2\rho_{i''}$. Vrijedi $B(\lambda_i, \rho_i) \cap A \neq \emptyset$. Za taj i vrijedi da postoji $a \in A$ takav da $d(\lambda_i, a) < \rho_i$. Također, za i' postoji b takav da $d(\lambda_{i'}, b) < \rho_{i'}$. Sada po nejednakosti trokuta vrijedi $d(\lambda_i, \lambda_{i'}) \leq d(\lambda_i, a) + d(a, b) + d(b, \lambda_j) < \rho_i + \rho_{i'} + \mathrm{diam}\ A < 2r + \mathrm{diam}\ A$. Zaključak: $\mathrm{fdiam}(j) < 4r + \mathrm{diam}\ A$. □

4.4 Izbor formalnih lanaca

Imamo sljedeću tvrdnju (vidi [6]). Dokaz navodimo kako bi demonstrirali tehnike iz poglavlja 2.

Lema 4.11. *Postoji rekurzivna funkcija $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$J_{\xi(l)} = \bigcup \mathcal{H}_l, \ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Neka je $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana s

$$\Psi(j) = [j], \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Tada je Ψ r.r.o. funkcija prema propoziciji 2.11. Neka je $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana s

$$\Lambda(l) = \bigcup_{0 \leq i \leq \bar{l}} \Psi((l)_i), \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da je Λ r.r.o. Najprije definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s $f(l,z) = (l)_z$ za sve $l, z \in \mathbb{N}$. Funkcija f je rekurzivna prema definiciji jer je jednaka funkciji σ iz poglavlja 2. Definiramo funkciju $\Psi' : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ s

$$\Psi'(l,z) = \Psi(f(l,z)), \quad \forall l, z \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji 2.8 (2) Ψ' je r.r.o. Sada iz propozicije 2.14 slijedi da je Λ r.r.o. funkcija. Za svaki $l \in \mathbb{N}$ je skup $\Lambda(l)$ neprazan jer je svaki od $\Psi(j)$ neprazan. Stoga postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\Psi(j) = \Lambda(l)$. Prema propoziciji 2.8(5) postoji rekurzivna funkcija $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\Lambda(l) = \Psi(\xi(l))$. Imamo

$$J_{\xi(l)} = \bigcup_{j \in \Psi(\xi(l))} I_j = \bigcup_{j \in \Lambda(l)} I_j = \bigcup_{0 \leq i \leq \bar{l}} \left(\bigcup_{j \in \Psi((l)_i)} I_j \right) = \bigcup_{0 \leq i \leq \bar{l}} J_{(l)_i}$$

pa je $J_{\xi(l)} = \bigcup \mathcal{H}_l$. □

4.5 Formalni lanac koji prekriva luk

Lema 4.12. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $f : [0, r] \to X$ neprekidna injekcija pri čemu je $r > 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$, takav da za svaki $n > n_0$ postoje brojevi $j_0, \ldots, j_{n-1} \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi*

1. $\langle f([\frac{i}{n}r, \frac{i+1}{n}r]), j_i, \varepsilon\rangle$ *za svaki* $i \in \{0, \dots, n-1\}$*;*

2. *Skupovi* J_{j_i} *i* $J_{j_{i'}}$ *su formalno disjunktni za sve* $i, i' \in \{0, \dots, n-1\}$ *takve da vrijedi* $|i - i'| > 1$*;*

3. $\mathrm{fdiam}(j_i) < \varepsilon$ *za svaki* $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Dokaz. Zbog kompaktnosti od $[0, r]$ je f uniformno neprekidna. Neka je $\varepsilon > 0$. Za taj ε postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x, x' \in [0, r]$ vrijedi $|x - x'| < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{5}$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\frac{r}{n_0} < \delta$. Odaberimo sada proizvoljan $n > n_0$. Za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ definiramo $x_i = \frac{ir}{n}$. Sada je $|x_{i+1} - x_i| = \frac{r}{n} < \frac{r}{n_0} < \delta$ za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Označimo

$$A_i = f\left(\left[\frac{i}{n}r, \frac{i+1}{n}r\right]\right),$$

za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Zbog uniformne neprekidnosti je

$$\text{diam } A_i = \sup\{d(f(x), f(x')) : x, x' \in [x_i, x_{i+1}]\}\} \leq \frac{\varepsilon}{5},\ \forall i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Nije teško zaključiti da za sve $i, i' \in \{0, \dots, n-1\}$ takve da je $|i - i'| > 1$ vrijedi $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$. Naime, kada bi za neke $i, i' \in \{0, \dots, n-1\}$ takve da je $|i - i'| > 1$ vrijedilo $A_i \cap A_{i'} \neq \emptyset$ tada bi postojao neki $y \in A_i \cap A_{i'}$. Za taj y bi zbog $y \in A_i$ postojao $x \in [x_i, x_{i+1}]$ takav da je $f(x) = y$, a zbog $y \in A_{i'}$ bi postojao $x' \in [x_{i'}, x_{i'+1}]$ takav da je $f(x') = y$. No, zbog $|i - i'| > 1$ je $[x_i, x_{i+1}] \cap [x_{i'}, x_{i'+1}] = \emptyset$ pa je $x \neq x'$, što nam ukupno daje kontradikciju s injektivnošću od f.

Prema lemi 4.9 postoje brojevi $j_0, \dots, j_{n-1} \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$A_0 \subseteq J_{j_0}, \dots, A_{n-1} \subseteq J_{j_{n-1}},$$

te takvi da za sve $p, q \in \{0, \dots, n-1\}$ vrijedi

$$A_p \cap A_q = \emptyset \implies J_p \text{ i } J_q \text{ su formalno disjunktni,}$$

te postoji $\lambda > 0$ takav da vrijedi $\lambda < \frac{\varepsilon}{5}$ i $\langle A_1, j_1, \lambda\rangle \wedge \dots \wedge \langle A_n, j_n, \lambda\rangle$. Zaključujemo da za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ prema lemi 4.10 vrijedi

$$\mathrm{fdiam}(j_i) < 4\lambda + \mathrm{diam} A_i < \varepsilon.$$

$\square$

Poglavlje 5

Svojstvo efektivnog pokrivanja

Za izračunljiv metrički prostor (X, d, α) kažemo da ima **svojstvo efektivnog pokrivanja** (vidi [1]) ako je skup

$$\left\{(w, j) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_w \subseteq J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv. Svojstvo efektivnog pokrivanja je vrlo važno, no općenito dokazati da neki izračunljiv metrički prostor ima to svojstvo nije jednostavno, ali je važno jer se glavni rezultati ovog rada ne bi mogli primijeniti upravo u slučaju kada ambijentni prostor ima to svojstvo. Izračunljiv euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ je jedan važan primjer koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja.

U ovom poglavlju ćemo stoga najprije detaljno raspisati dokaz dovoljnog uvjeta za svojstvo efektivnog pokrivanja opisanog u [6] (Teorem 3.1), te zatim pomoću njega raspisati dokaz iz [6] (Primjer 3.2) da izračunljiv euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ ima svojstvo efektivnog pokrivanja. U nastavku navodimo neke posljedice koje svojstvo efektivnog pokrivanja zajedno s uvjetom da su zatvorene kugle kompaktne ima na korekurzivno prebrojive nizove skupova u izračunljivom metričkom prostoru.

5.1 Dovoljan uvjet za svojstvo efektivnog pokrivanja

Sljedeća argumentacija je izvorno opisana u poglavlju 3 u [6] u odjeljku 3.2.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je

$$A = \left\{(i, i') \in \mathbb{N}^2 : \text{ uređen par } (\lambda_i, \rho_i) \text{ je formalno sadržan u } (\lambda_{i'}, \rho_{i'})\right\}.$$

Skup A je jednak skupu Q_1 iz propozicije 4.3, a prema istoj propoziciji on je i rekurzivno prebrojiv. Neka je

$$B = \left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : (i, i') \in A \text{ za neki } i' \in [j]\right\}. \tag{5.1.1}$$

Za $i, j \in \mathbb{N}$ imamo $(i, j) \in B$ ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $0 \leq k \leq \bar{j},\ (i, (j)_k) \in A$. Stavimo $C = \{(i, j, k) : (i, (j)_k) \in A\}$. Definiramo funkciju $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ s $f(i, j, k) = (i, (j)_k)$. Vrijedi $f^{-1}(A) = C$. Skup $D = \left\{(i, j, k) : 0 \leq k \leq \bar{j}\right\}$ je rekurzivan i vrijedi $0 \leq k \leq \bar{j},\ (i, (j)_k) \in A$ ako i samo ako $(i, j, k) \in C \cap D$. Dakle, $B = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \exists k \in \mathbb{N}\ (i, j, k) \in C \cap D\}$ pa je stoga B rekurzivno prebrojiv. Vrijedi

$$(i, j) \in B \Rightarrow I_i \subseteq J_j,\ \forall i, j \in \mathbb{N}. \tag{5.1.2}$$

Lema 5.1. *Neka je (X, d) metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle. Neka je U otvoren skup te $x \in X$, $r > 0$ takvi da je $\widehat{B}(x, r) \subseteq U$. Tada postoji $r' > r$ takav da je $\widehat{B}(x, r') \subseteq U$.*

Dokaz. Dokaz ide svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da takav r' ne postoji. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in \widehat{B}(x, r + 2^{-n})$ takav da $x_n \notin U$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in \widehat{B}(x, r+1)$. Jer je $\widehat{B}(x, r+1)$ kompaktan skup slijedi da postoji podniz (x_{n_i}) od (x_n) koji konvergira nekom $a \in X$. Tada $d(x, x_{n_i}) \to d(x, a)$ pa iz $d(x_{n_i}, x) \leq r + 2^{-n_i}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ slijedi $d(x, a) \leq r$. Zaključujemo da je $a \in \widehat{B}(x, r)$ tj. $a \in U$. No, zbog konvergencije (x_{n_i}) prema $a \in U$ slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{n_i} \in U$. Kontradikcija. $\square$

Lema 5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, $a_0, \ldots, a_n \in X$, $r_0, \ldots, r_n \in \langle 0, +\infty\rangle$. Neka je K kompaktan skup u (X, d) takav da $K \subseteq B(a_0, r_0) \cup \cdots \cup B(a_n, r_n)$. Tada postoji $\lambda > 0$ takav da je za svaki $x \in K$ uređen par (x, λ) formalno sadržan u (a_i, r_i) za neki $i \in \{0, \ldots, n\}$.*

Dokaz. Dokaz ide svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da takav λ ne postoji, tj. da vrijedi

$$\begin{aligned}&(\forall \lambda > 0)(\exists x \in K)\\ &\qquad\qquad (x, \lambda) \text{ nije formalno sadržan niti u jednom } (a_i, r_i),\ i \in \{0, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

Iz ovog slijedi tvrdnja

$$\begin{aligned}&(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in K)\\ &\qquad\qquad (x_n, 2^{-n}) \text{ nije formalno sadržan niti u jednom } (a_i, r_i),\ i \in \{0, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

Niz (x_n) se nalazi u kompaktnom skupu K pa postoji konvergentan podniz (x_{n_i}) koji konvergira nekom $\tilde{x} \in K$. Familija $\{B(a_0, r_0), \dots, B(a_n, r_n)\}$ pokriva K pa slijedi da je $\tilde{x} \in B(a_i, r_i)$ za neki $i \in \{0, \dots, n\}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(a_i, x_{n_k}) + 2^{-n_k} \leq d(a_i, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, x_{n_k}) + 2^{-n_k}.$$

No, zbog $d(a_i, \tilde{x}) < r_i$ i $\lim_{k \to \infty} d(\tilde{x}, x_{n_k}) + 2^{-n_k} = 0$ slijedi $d(a_i, x_{n_k}) + 2^{-n_k} < r_i$ za neki $k \in \mathbb{N}$ tj. uređen par $(x_{n_k}, 2^{-n_k})$ je formalno sadržan u (a_i, r_i). Kontradikcija. □

Lema 5.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle te takav da postoji r.r.o. funkcija $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sa sljedećim svojstvom:*

$$\widehat{I}_i \subseteq \bigcup_{j \in \Phi(i,k)} I_j \text{ i } \rho_j \leq 2^{-k}, \ \forall j \in \Phi(i,k), \ \forall i, k \in \mathbb{N}. \tag{5.1.3}$$

Tada postoji r.r.o. funkcija $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ koja također zadovoljava svojstvo (5.1.3) *te takva da vrijedi sljedeće: ako je U otvoren skup u (X, d) te $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\widehat{I}_i \subseteq U$, onda postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\bigcup_{j \in \Psi(i,k)} I_j \subseteq U$ za svaki $k \geq k_0$.*

Dokaz. Definiramo funkciju $\Lambda : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$\Lambda(i, j) = d(\lambda_i, \lambda_j) - \rho_i - \rho_j,$$

za svaki $i, j \in \mathbb{N}$. Tvrdimo najprije da iz $\Lambda(i, j) > 0$ slijedi $\widehat{I}_i \cap I_j = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neka točka $x \in X$ takva da vrijedi $x \in \widehat{I}_i \cap I_j$. Iz $x \in \widehat{I}_i$ slijedi $d(x, \lambda_i) \leq \rho_i$. S druge strane, zbog $x \in I_j$ slijedi $d(x, \lambda_j) < \rho_j$.

Sada je $d(\lambda_i, \lambda_j) \leq d(x, \lambda_i) + d(x, \lambda_j) < \rho_i + \rho_j$, što je kontradikcija s $\Lambda(i, j) > 0$. Dakle, iz $\Lambda(i, j) > 0$ slijedi $\widehat{I}_i \cap I_j = \emptyset$. Primjenom propozicija 2.24 i 2.22 lako se dobije da su skupovi

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : \Lambda(i, j) > 0\}; \\ T_2 &= \left\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : \Lambda(i, j) < 2^{-k}\right\} \end{aligned}$$

rekurzivno prebrojivi. Stoga postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$ takve da vrijedi $f(\mathbb{N}) = T_1$ i $g(\mathbb{N}) = T_2$. Uočimo da je $T_1 \cup T_2 = \mathbb{N}^3$. Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa

$$G(i, j, k) = \mu n \left[(i, j, k) = f(n) \vee (i, j, k) = g(n)\right].$$

Budući da je G rekurzivna, slijedi da je funkcija $C : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definirana s

$$C(i, j, k) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } (i, j, k) = f(G(i, j, k)) \\ 1, & \text{ako je } (i, j, k) = g(G(i, j, k)) \wedge (i, j, k) \neq f(G(i, j, k)) \end{cases}$$

rekurzivna. Neka je $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definirana s

$$\Psi(i,k) = \{j \in \Phi(i,k) : \; C(i,j,k) = 1\}.$$

Očito je $\Psi(i,k) \subseteq \Phi(i,k)$ za sve $i,k \in \mathbb{N}$ pa je Ψ rekurzivno omeđena. Nadalje, funkcija $(i,k,j) \mapsto \chi_{\Psi(i,k)}(j) = \chi_{\Phi(i,k)}(j) \cdot C(i,j,k)$ je rekurzivna pa je Ψ r.r.o. Neka su $i,k \in \mathbb{N}$. Vrijedi $\widehat{I_i} \cap I_j = \emptyset$ za svaki $j \in \Phi(i,k) \setminus \Psi(i,k)$ pa je stoga

$$\widehat{I_i} \subseteq \bigcup_{j \in \Psi(i,k)} I_j.$$

Za svaki $j \in \Psi(i,k)$ vrijedi da je $\Lambda(i,j) < 2^{-k}$ tj. $d(\lambda_i, \lambda_j) - \rho_i - \rho_j < 2^{-k}$. Sada je $d(\lambda_i, \lambda_j) \leq \rho_i + 2 \cdot 2^{-k}$, tj. za svaki $x \in I_j$ po nejednakosti trokuta imamo

$$d(\lambda_i, x) \leq d(\lambda_i, \lambda_j) + d(\lambda_j, x) < (\rho_i + 2 \cdot 2^{-k}) + d(\lambda_j, x) < \rho_i + 3 \cdot 2^{-k}.$$

Iz ovog dobivamo da vrijedi $\bigcup_{j \in \Psi(i,k)} I_j \subseteq B(\lambda_i, \rho_i + 3 \cdot 2^{-k})$ za sve $i,k \in \mathbb{N}$. Neka je U otvoren skup u X takav da vrijedi $\widehat{I_i} \subseteq U$. Dakle, $\widehat{B}(\lambda_i, \rho_i) \subseteq U$. Prema lemi 5.1 postoji $r > \rho_i$ takav da je $\widehat{B}(\lambda_i, r) \subseteq U$. No, tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\rho_i + 3 \cdot 2^{-k} < r$ za svaki $k \geq k_0$, pa je stoga $\widehat{B}(\lambda_i, \rho_i + 3 \cdot 2^{-k}) \subseteq \widehat{B}(\lambda_i, r) \subseteq U$ za svaki $k \geq k_0$. Iz ovog zaključujemo da vrijedi $\bigcup_{j \in \Psi(i,k)} I_j \subseteq U$ za svaki $k \geq k_0$ što je i trebalo pokazati. □

Lema 5.4. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle te takav da postoji r.r.o. funkcija* $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *sa svojstvom* (5.1.3). *Neka je* B *skup definiran s* (5.1.1). *Neka je* Ψ *iz leme 5.3. Tada je* $\widehat{I_i} \subseteq J_v$ *ako i samo ako postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takav da je* $(j,v) \in B$ *za svaki* $j \in \Psi(i,k)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\widehat{I_i} \subseteq J_v$ za neke $i, v \in \mathbb{N}$. Iz leme 5.1 slijedi da postoji $r' > \rho_i$, te otvoren skup $U = B(\lambda_i, r')$ i kompaktan skup $K = \widehat{B}(\lambda_i, r')$ takvi da je

$$\widehat{I_i} \subseteq U \subseteq K \subseteq J_v.$$

Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\bigcup_{j \in \Psi(i,k)} I_j \subseteq U$ za svaki $k \geq k_0$. Prema lemi 5.2 postoji $\lambda > 0$ takav da je za svaki $x \in K$ uređeni par (x, λ) formalno sadržan u (λ_w, ρ_w) za neki $w \in [v]$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k \geq k_0$ i $2^{-k} < \lambda$. Tada imamo $\bigcup_{j \in \Psi(i,k)} I_j \subseteq U$ pa je stoga $\lambda_j \in K$ za svaki $j \in \Psi(i,k)$. Neka je $j \in \Psi(i,k)$. Sada zbog $\rho_j \leq 2^{-k} < \lambda$ slijedi da je uređen par (λ_j, ρ_j) formalno sadržan u (λ_w, ρ_w) za neki $w \in [v]$. Dakle, $(j,v) \in B$.

Obratno, neka su $i, v, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $(j,v) \in B$ za svaki $j \in \Psi(i,k)$. Iz implikacije (5.1.2) imamo da je $I_j \subseteq J_v$ za svaki $j \in \Psi(i,k)$. Sada zbog $\widehat{I_i} \subseteq \left(\bigcup_{j \in \Psi(i,k)} I_j\right) \subseteq J_v$ slijedi $\widehat{I_i} \subseteq J_v$. □

Teorem 5.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle te takav da postoji r.r.o. funkcija $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sa svojstvom (5.1.3). Tada (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja.*

Dokaz. Neka je Ψ iz leme 5.3. Neka je $\Lambda : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ definirana s

$$\Lambda(i, k, v) = \{(j, v) : j \in \Psi(i, k)\}.$$

Iz propozicije 2.14 slijedi da je Λ r.r.o. funkcija. Neka je B skup definiran s (5.1.1). Stavimo

$$C = \{(i, v, k) : \Lambda(i, k, v) \subseteq B\}.$$

Iz leme 2.15 slijedi da je C rekurzivno prebrojiv. Sada iz leme 5.4 imamo da je $\widehat{I}_i \subseteq J_v$ ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, v, k) \in C$. Konačno, iz propozicije 2.7 slijedi da je

$$\left\{(i, v) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_i \subseteq J_v\right\}$$

rekurzivno prebrojiv skup. Dakle, (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja. $\square$

Korolar 5.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle, $a \in X$ rekurzivna točka, (x_i) rekurzivan niz u X te $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je*

$$B(a, M) \subseteq \bigcup_{0 \leq j \leq F(M,k)} B(x_j, 2^{-k}), \quad \forall M, k \in \mathbb{N}.$$

Tada (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja.

Dokaz. Budući je a rekurzivna slijedi da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $d(a, \alpha_{f(i)}) < 2^{-i}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Sada tražimo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da vrijedi

$$\widehat{I}_i \subseteq B(a, g(i)), \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Neka je $x \in \widehat{I}_i$. Tada je $d(x, \lambda_i) \leq \rho_i$. Imamo

$$d(x, a) \leq d(x, \lambda_i) + d(\lambda_i, a) \leq \rho_i + d(\lambda_i, \alpha_{f(i)}) + 2^{-i}.$$

Na funkciju $i \mapsto \rho_i + d(\lambda_i, \alpha_{f(i)}) + 2^{-i}$ primijenimo propoziciju 2.25 čime dobivamo rekurzivnu funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da je

$$\rho_i + d(\lambda_i, \alpha_{f(i)}) + 2^{-i} < g(i), \ \forall i \in \mathbb{N},$$

pa je $x \in B(a, g(i))$. Dakle, vrijedi $\widehat{I}_i \subseteq B(a, g(i))$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Niz (x_i) je rekurzivan pa stoga postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$B(x_j, 2^{-(k+1)}) \subseteq B(\alpha_{h(j,k)}, 2^{-k}),\ \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Naime, zbog rekurzivnosti od (x_i) postoji funkcija $\tilde{g} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $d(x_j, \alpha_{\tilde{g}(j,k)}) < 2^{-k}$ za sve $j, k \in \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s $h(j, k) = \tilde{g}(j, k+1)$. Vrijedi $d(x_j, \alpha_{h(j,k)}) < 2^{-(k+1)}$ za sve $j, k \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in B(x_j, 2^{-(k+1)})$. Sada po nejednakosti trokuta imamo

$$d(x, \alpha_{h(j,k)}) \leq d(x, x_j) + d(x_j, \alpha_{h(j,k)}) < 2 \cdot 2^{-(k+1)} = 2^{-k}$$

pa je stoga $x \in B(\alpha_{h(j,k)}, 2^{-k})$. Dakle, h je tražena funkcija. No, tada je

$$\widehat{I}_i \subseteq B(a, g(i)) \subseteq \bigcup_{0 \leq j \leq F(g(i), k+1)} B(\alpha_{h(j,k)}, 2^{-k}),\ \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Definiramo funkciju $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s

$$m(j, k) = \mu i[\langle i \rangle_1 = h(j, k) \wedge q_{\langle i \rangle_2} = 2^{-k}],\ \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Sada definiramo $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ s

$$\Phi(i, k) = \{m(j, k) : 0 \leq j \leq F(g(i), k+1)\},\ \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

Funkcija Φ je r.r.o. što slijedi direktno iz propozicije 2.14. Nadalje, Φ zadovoljava svojstvo (5.1.3), pa prema teoremu 5.5 (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja. □

Primjer 5.7. Dokažimo da izračunljiv euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ ima svojstvo efektivnog pokrivanja (vidi primjer 3.2 u [6], ideja za dokaz je slična onoj iz dokaza leme 2.1 iz [6]). Uočimo da je α izračunljiv kao niz $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Nadalje, točka $O = (0, \dots, 0)$ je izračunljiva točka u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$. Stoga, prema korolaru 5.6 dovoljno je dokazati da postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$B(O, M) \subseteq \bigcup_{0 \leq i \leq F(M,k)} B(\alpha_i, 2^{-k}), \quad \forall M, k \in \mathbb{N}. \tag{5.1.4}$$

Neka su $M, k \in \mathbb{N}$ i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sqrt{n} \cdot 2^{-k_0} < 1$. Najprije uočimo da vrijedi

$$B(O, M) \subseteq [-M, M]^n. \tag{5.1.5}$$

Naime, ako je $(x_1,\dots,x_n)\in B(O,M)$ tada je $x_1^2+\dots+x_n^2<M^2$. No, tada mora vrijediti $\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}\le M$ jer u protivnom bi $|x_i|>M$ povlačilo $x_i^2>M^2$ za neki $i\in\{1,\dots,n\}$ i bilo bi $x_1^2+\dots+x_n^2>M^2$ što je kontradikcija. Sada iz $\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}\le M$ imamo $|x_i|\le M$ za svaki $i\in\{1,\dots,n\}$, odnosno $(x_1,\dots,x_n)\in[-M,M]^n$ iz čega sada slijedi (5.1.5).

Neka je $x=(x_1,\dots,x_n)\in[-M,M]^n$. Tada je $|x_1|,\dots,|x_n|\le M$. Nadalje, postoje $\ell_1,\dots,\ell_n\in\mathbb{Z}$ takvi da je $\frac{\ell_j}{2^{k+k_0}}\le x_j<\frac{\ell_j+1}{2^{k+k_0}}$ za svaki $j\in\{1,\dots,n\}$. No tada imamo $\left|\frac{\ell_j}{2^{k+k_0}}-x_j\right|<2^{-(k+k_0)}$ za svaki $j\in\{1,\dots,n\}$. Nadalje, zbog $x_j\in[-M,M]$ i $M\in\mathbb{N}$ dovoljno je uzeti $\ell_j\in\mathbb{Z}$ takve da vrijedi $\frac{\ell_j}{2^{k+k_0}}\in[-M,M]$ odnosno $\ell_j\in\{-2^{k+k_0}\cdot M,\dots,2^{k+k_0}\cdot M\}$.

Računamo sada udaljenost

$$d(x,(\tfrac{\ell_1}{2^{k+k_0}},\dots,\tfrac{\ell_n}{2^{k+k_0}}))=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tfrac{\ell_i}{2^{k+k_0}})^2\right)^{1/2}<\sqrt{n}\cdot 2^{-(k+k_0)}.$$

Odnosno, sada zbog $\sqrt{n}\cdot 2^{-k_0}<1$ imamo

$$d\left(x,\left(\tfrac{\ell_1}{2^{k+k_0}},\dots,\tfrac{\ell_n}{2^{k+k_0}}\right)\right)<2^{-k}.$$

Stoga je $x\in B((\frac{\ell_1}{2^{k+k_0}},\dots,\frac{\ell_n}{2^{k+k_0}}),2^{-k})$. Dakle, imamo

$$[-M,M]^n\subseteq\bigcup_{\ell_i\in\{-2^{k+k_0}\cdot M,\dots,2^{k+k_0}\cdot M\}}B((\tfrac{\ell_1}{2^{k+k_0}},\dots,\tfrac{\ell_n}{2^{k+k_0}}),2^{-k})\tag{5.1.6}$$

Neka je $\gamma:\mathbb{N}^{3n}\to\mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$\gamma(a_1,b_1,c_1,\dots,a_n,b_n,c_n)=\mu i\left[\alpha_i=\left((-1)^{c_1}\tfrac{a_1}{b_1+1},\dots,(-1)^{c_n}\tfrac{a_n}{b_n+1}\right)\right],$$
$$\forall a_1,b_1,c_1,\dots,a_n,b_n,c_n\in\mathbb{N}.$$

Definiramo $F:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ s

$$F(M,k)=\max_{0\le a_1,b_1,c_1,\dots,a_n,b_n,c_n\le M\cdot 2^{k+k_0}}\gamma(a_1,b_1,c_1,\dots,a_n,b_n,c_n),\ \forall M,k\in\mathbb{N}.$$

Pokažimo najprije da je F rekurzivna funkcija. Najprije iz [6] slijedi da postoji funkcija $\zeta:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$\mathbb{N}_M^n\subseteq\{((i)_0,\dots,(i)_{\bar{i}}):i\in\{0,\dots,\zeta(n,M)\}\},\ \forall M,n\in\mathbb{N}.\tag{5.1.7}$$

Imamo

$$F(M,k) = \max_{0 \leq j \leq \zeta(3n, M \cdot 2^{k+k_0})} \gamma((\mathrm{ost}((j)_0, M \cdot 2^{k+k_0}+1), \dots, \mathrm{ost}((j)_{3n-1}, M \cdot 2^{k+k_0}+1))),$$

$$\forall M, k \in \mathbb{N}.$$

Sada iz ovog i propozicije 2.3 slijedi da je F rekurzivna funkcija. Dokažimo da vrijedi

$$\bigcup_{\ell_i \in \{-2^{k+k_0} \cdot M, \dots, 2^{k+k_0} \cdot M\}} B((\tfrac{\ell_1}{2^{k+k_0}}, \dots, \tfrac{\ell_n}{2^{k+k_0}}), 2^{-k}) \subseteq \bigcup_{0 \leq i \leq F(M,k)} B(\alpha_i, 2^{-k}), \ \forall M, k \in \mathbb{N}. \tag{5.1.8}$$

Neka je $x \in B((\frac{\ell_1}{2^{k+k_0}}, \dots, \frac{\ell_n}{2^{k+k_0}}), 2^{-k})$ pri čemu su $\ell_i \in \{-2^{k+k_0} \cdot M, \dots, 2^{k+k_0} \cdot M\}$ za $i \in \{1, \dots, n\}$. Neka su $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(-1)^{c_j} \frac{a_j}{b_j+1} = \frac{\ell_j}{2^{k+k_0}}$ za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$. Pritom brojeve a_j, b_j, c_j možemo odabrati tako da vrijedi $a_j, b_j, c_j \in \{0, \dots, M \cdot 2^{-(k+k_0)}\}$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\gamma(a_1, b_1, c_1, \dots, a_n, b_n, c_n) = i$. Imamo $x \in B(\alpha_i, 2^{-k})$, te $0 \leq i \leq F(M,k)$ iz čega zaključujemo $x \in \bigcup_{0 \leq i \leq F(M,k)} B(\alpha_i, 2^{-k})$ odnosno vrijedi (5.1.8).

Konačno, iz (5.1.5), (5.1.6) i (5.1.8) slijedi (5.1.4). Stoga prema korolaru 5.6 slijedi da izračunljiv euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ ima svojstvo efektivnog pokrivanja. $\square$

5.2 Korekurzivno prebrojivi nizovi skupova

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je (T_n) niz zatvorenih podskupova od X. Za niz (T_n) kažemo da je korekurzivno prebrojiv ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$X \setminus T_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i,n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.2.1}$$

Lema 5.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$ korekurzivno prebrojiv. Neka je (T_n) korekurzivno prebrojiv niz zatvorenih podskupova od X. Tada je $(S \cap T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ korekurzivno prebrojiv niz zatvorenih podskupova od X.*

Dokaz. Skup S je korekurzivno prebrojiv pa stoga postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$X \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{g(i)}.$$

Niz (T_n) je korekurzivno prebrojiv pa stoga postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$X \setminus T_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i,n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, vrijedi $X \setminus (S \cap T_n) = (X \setminus S) \cup (X \setminus T_n) = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{g(i)}\right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i,n)}\right)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tražimo rekurzivnu funkciju $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takvu da vrijedi

$$(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{g(i)}) \cup (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{f(i,n)}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{h(i,n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiramo

$$h(i,n) = \begin{cases} g(\langle i \rangle_1), & \langle i \rangle_2 \text{ paran.} \\ f(\langle i \rangle_1, n), & \langle i \rangle_2 \text{ neparan.} \end{cases}$$

za svaki $i, n \in \mathbb{N}$. □

Lema 5.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja i kompaktne zatvorene kugle. Neka je (S_n) korekurzivno prebrojiv niz zatvorenih skupova i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $S_n \subseteq I_{h(n)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je skup $\{(j,n) \in \mathbb{N}^2 : S_n \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $X \setminus S_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{f(i,n)}$, $J_{f(i,n)} \subseteq J_{f(i+1,n)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Da takva funkcija postoji argumentiramo na sljedeći način. Najprije, zbog korekurzivne prebrojivosti niza (S_n) postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $X \setminus S_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{g(i,n)}$ za sve $i, n \in \mathbb{N}$. Neka su $\Phi : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $\Psi : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcije definirane s $\Phi(i,n,k) = [k]$ i $\Psi(i,n,k) = \{g(0,n), \ldots, g(i,n)\}$ za sve $i, n, k \in \mathbb{N}$. Funkcije Φ i Ψ su r.r.o. prema propoziciji 2.10. Prema tvrdnji 5 propozicije 2.8 je skup

$$S = \Big\{(i,n,k) \in \mathbb{N}^3 : \Phi(i,n,k) = \Psi(i,n,k)\Big\}$$

rekurzivan, pa je stoga $\chi_S : \mathbb{N}^3 \to \{0,1\}$, karakteristična funkcija od S rekurzivna. Definiramo $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s $f(i,n) = \mu k[\chi_S(i,n,k) = 1]$. Dokažimo najprije da je $J_{f(i,n)} \subseteq J_{f(i+1,n)}$ za sve $i, n \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in J_{f(i,n)}$. Tada je $x \in \bigcup_{m \in [f(i,n)]} I_m$ tj. $x \in I_{g(j,n)}$ za neki $j \in \{0, \ldots, i\}$. No, $\{0, \ldots, i\} \subseteq \{0, \ldots, i+1\}$ povlači da je $x \in I_{g(j,n)}$ za $j \in \{0, \ldots, i+1\}$ pa je x iz skupa $\bigcup_{m \in [f(i+1,n)]} I_m$ odnosno $x \in J_{f(i+1,n)}$. Dokažimo sada da je

$$X \setminus S_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{f(i,n)}, \ \forall i, n \in \mathbb{N}.$$

Imamo redom niz jednakosti

$$X \setminus S_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{g(i,n)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\{g(0,n),\dots,g(i,n)\}} I_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{f(i,n)}.$$

Dakle, f je tražena funkcija.

Neka su sada $j, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $S_n \subseteq J_j$. Vrijedi $S_n \subseteq \widehat{I}_{h(n)}$ pa zbog $\widehat{I}_{h(n)} \setminus S_n \subseteq X \setminus S_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{f(i,n)}$ imamo da $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{f(i,n)}$ sadrži $\widehat{I}_{h(n)} \setminus S_n$. No tada $J_j \cup (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_{f(i,n)})$ sadrži $\widehat{I}_{h(n)}$. Zbog kompaktnosti od $\widehat{I}_{h(n)}$ postoje $i_1^n, i_2^n, \dots, i_m^n \in \mathbb{N}$ takvi da $J_j \cup (\bigcup_{j=1}^m J_{f(i_j^n,n)})$ sadrži $\widehat{I}_{h(n)}$. Neka je $n_0 = \max\{i_1^n, \dots, i_m^n\}$. Zbog $J_{f(i,n)} \subseteq J_{f(i+1,n)}$ za sve $i, n \in \mathbb{N}$ slijedi da $\bigcup_{j=1}^m J_{f(i_j^n,n)} \subseteq J_{f(n_0,n)}$ pa je

$$\widehat{I}_{h(n)} \subseteq J_j \cup (\bigcup_{j=1}^{m} J_{f(i_j^n,n)}) \subseteq J_j \cup J_{f(n_0,n)}.$$

Obratno, neka je sada $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\widehat{I}_{h(n)} \subseteq J_j \cup J_{f(n_0,n)}$. Zbog $S_n \subseteq \widehat{I}_{h(n)}$ slijedi $S_n \subseteq J_j \cup J_{f(n_0,n)}$. Iz $J_{f(i,n)} \subseteq X \setminus S_n$ za sve $i, n \in \mathbb{N}$ slijedi da je $S_n \subseteq J_j$. Ovime smo dokazali da za svaki $j, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n \subseteq J_j$ ako i samo ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\widehat{I}_{h(n)} \subseteq J_j \cup J_{f(n_0,n)}$.

Zbog svojstva efektivnog pokrivanja je skup $T = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_i \subseteq J_j\right\}$ rekurzivno prebrojiv, pa neka je $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ rekurzivna funkcija takva da vrijedi $G(\mathbb{N}) = T$. Neka je $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je

$$J_{\varphi(i,j)} = J_i \cup J_j, \ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Postojanje takve funkcije φ pokazujemo na sličan način kao i postojanje funkcije f. Naime, neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcije definirane s $\Phi(i,j,k) = [k]$ i $\Psi(i,j,k) = [i] \cup [j]$. Funkcija Φ je r.r.o. prema propoziciji 2.10, funkcija Ψ je r.r.o. prema propoziciji 2.8 (3). Sada je prema tvrdnji (5) propozicije 2.8 skup

$$S = \left\{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 : \Phi(i,j,k) = \Psi(i,j,k)\right\}$$

rekurzivan, pa je $\chi_S : \mathbb{N}^3 \to \{0,1\}$, karakteristična funkcija od S rekurzivna. Definiramo $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ s $\varphi(i,j) = \mu k[\chi_S(i,j,k) = 1]$. Sada je

$$J_{\varphi(i,j)} = \bigcup_{m\in[i]\cup[j]} I_m = \left(\bigcup_{m\in[i]} I_m\right) \cup \left(\bigcup_{m\in[j]} I_m\right) = J_i \cup J_j.$$

Dakle, φ je tražena funkcija.

Dokazali smo $S_n \subseteq J_j$ ako i samo ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\widehat{I}_{h(n)} \subseteq J_j \cup J_{f(n_0,n)}$. Ovo je ekvivalentno tome da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\widehat{I}_{h(n)} \subseteq J_{\varphi(j,f(n_0,n))}$. Izrazimo li to pomoću skupa T, to je ekvivalentno s time da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $(h(n), \varphi(j, f(n_0, n))) \in T$. Neka je $\phi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana s

$$\phi(j, n, k) = (h(n), \varphi(j, f(k, n))), \ \forall j, n, k \in \mathbb{N}.$$

Tada je prema svojstvu (3) propozicije 2.7 skup $\phi^{-1}(T)$ rekurzivno prebrojiv, a vrijedi da je

$$(h(n), \varphi(j, f(n_0, n))) \in T$$

ekvivalentno s $(j, n, n_0) \in \phi^{-1}(T)$. Skup

$$\left\{(j, n) \in \mathbb{N}^2 : \exists n_0 \in \mathbb{N} \ (j, n, n_0) \in \phi^{-1}(T)\right\}$$

je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.7, i to prema svojstvu (1), pa je stoga i skup

$$\left\{(j, n) \in \mathbb{N}^2 : S_n \subseteq J_j\right\}$$

rekurzivno prebrojiv što je i trebalo pokazati. □

Korolar 5.10. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor sa svojstvom efektivnog pokrivanja i koji ima kompaktne zatvorene kugle. Neka je S korekurzivno prebrojiv kompaktan podskup od (X, d, α). Tada je skup*

$$\{j \in \mathbb{N} : S \subseteq J_j\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Definiramo niz (S_n) sa $S_n = S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $S \subseteq I_{i_0}$. Definiramo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s $h(n) = i_0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $S_n \subseteq I_{h(n)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema lemi 5.9 skup $T = \{(j, n) \in \mathbb{N}^2 : S_n \subseteq J_j\}$ je rekurzivno prebrojiv. Skup $U = \{j \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} \ (j, n) \in T\}$ je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.7, svojstvu (1). Prema definiciji niza (S_n) je $S_n = S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $U = \{j \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} \ S \subseteq J_j\}$, a uvjet $S \subseteq J_j$ ne ovisi o n, iz čega konačno imamo da je $U = \{j \in \mathbb{N} : S \subseteq J_j\}$. Iz ovoga zaključujemo da je skup $\{j \in \mathbb{N} : S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv. □

Propozicija 5.11. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja i kompaktne zatvorene kugle. Neka je* S *korekurzivno prebrojiv skup u* (X, d, α) *koji je kompaktan. Tada je skup*

$$\Omega = \{l \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_l \textit{ pokriva } S\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija iz leme 4.11. Tada prema definiciji pokrivača i funkcije ξ vrijedi da familija $\mathcal{H}_l$ pokriva S ako i samo ako $S \subseteq J_{\xi(l)}$. Neka je $\Omega' = \{j \in \mathbb{N} : S \subseteq J_j\}$. Skup Ω' je rekurzivno prebrojiv prema korolaru 5.10. No, tada je skup $\Omega = \{l \in \mathbb{N} : \xi(l) \in \Omega'\}$ prema propoziciji 2.7 (3) rekurzivno prebrojiv. $\square$

Poglavlje 6

Izračunljiva kompaktnost na zatvorenim kuglama

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $S \subseteq X$ kažemo da je **poluizračunljivo kompaktan** (vidi [9]) ako je S kompaktan i skup

$$\{j \in \mathbb{N} : S \subseteq J_j\}$$

je rekurzivno prebrojiv. Za S kažemo da je **izračunljivo kompaktan** ako je S poluizračunljivo kompaktan i rekurzivno prebrojivo zatvoren.

Glavni cilj ovog poglavlja je definirati poopćenje ovih pojmova na nekompaktne skupove.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S **izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama** ako vrijedi sljedeće:

(1) $S \cap \widehat{B}(x, r)$ je kompaktan skup za svaki $x \in X$ i $r > 0$;

(2) skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j\}$ je rekurzivno prebrojiv;

(3) S je rekurzivno prebrojivo zatvoren.

Ako za S vrijede samo svojstva (1) i (2) tada kažemo da je S **poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama**. Stoga, S je izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama ako i samo ako je S poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama i S je rekurzivno prebrojivo zatvoren.

Propozicija 6.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S poluizračunljivo kompaktan skup u tom prostoru. Tada je S poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama.*

Dokaz. Želimo pokazati da je skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv.

Pretpostavimo da su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$. Neka je $x \in S \setminus J_j$. Tada $x \notin \widehat{I}_i$ i postoji neki $k_x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_{k_x}$ i takav da su I_i i I_{k_x} formalno disjunktni. Skup $S \setminus J_j$ je zatvoren, stoga i kompaktan jer je S kompaktan pa to povlači da postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \dots, x_n \in S \setminus J_j$ takvi da vrijedi $S \setminus J_j \subseteq I_{k_{x_0}} \cup \dots \cup I_{k_{x_n}}$. Vrijedi

$$S \subseteq J_j \cup I_{k_{x_0}} \cup \dots \cup I_{k_{x_n}}.$$

Stoga, postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$S \subseteq J_j \cup J_l, \quad I_i \text{ i } J_l \text{ su formalno disjunktni.} \tag{6.0.1}$$

S druge strane, pretpostavimo da (6.0.1) vrijedi za neke $i, j, l \in \mathbb{N}$. Tada je $\widehat{I}_i \cap J_l = \emptyset$ i stoga $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$. Stoga imamo sljedeći zaključak: $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$ ako i samo ako postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (6.0.1).

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $(j, l) \mapsto [j] \cup [l]$ je r.r.o. pa stoga postoji izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi $[j] \cup [l] = [\varphi(j, l)]$ za sve $j, l \in \mathbb{N}$. Stoga je $J_j \cup J_l = J_{\varphi(j,l)}$ za sve $j, k \in \mathbb{N}$ te koristeći činjenicu da je S poluizračunljivo kompaktan zaključujemo da je skup $\{(j, l) \in \mathbb{N}^2 : S \subseteq J_j \cup J_l\}$ rekurzivno prebrojiv. Ovo implicira da je skup svih $(i, j, l) \in \mathbb{N}^3$ takvih da vrijedi (6.0.1) rekurzivno prebrojiv (propozicija 4.6) i zaključujemo da je skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv. □

Uočimo da su poluizračunljivo kompaktni skupovi točno oni poluizračunljivo kompaktni skupovi na zatvorenim kuglama koji su kompaktni. Naime, ako je S kompaktan skup, tada je $S \subseteq \widehat{I}_{i_0}$ za neki $i_0 \in \mathbb{N}$, pa stoga ako je S poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama tada je skup $\{j \in \mathbb{N} : \widehat{I}_{i_0} \cap S \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv. No, ovaj skup je očito jednak skupu $\{j \in \mathbb{N} : S \subseteq J_j\}$.

Sljedeće dvije propozicije pokazuju da su poluizračunljivo kompaktni skupovi na zatvorenim kuglama ujedno i korekruzivno prebrojivo zatvoreni.

Propozicija 6.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. Tada je skup*

$$\Omega = \{i \in \mathbb{N} : \widehat{I}_i \cap S = \emptyset\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $S \neq \emptyset$. Neka je

$$\Gamma = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j\}.$$

Pretpostavimo da je $i \in \Omega$. Tada je $\widehat{I}_i \cap S = \emptyset$ što povlači $\widehat{I}_i \neq X$ pa stoga postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da su I_i i J_j formalno disjunktni. Očito je $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$, stoga je $(i,j) \in \Gamma$.

Obratno, uzmimo $j \in \mathbb{N}$ takav da su I_i i J_j formalno disjunktni i $(i,j) \in \Gamma$. Tada je $\widehat{I}_i \cap J_j = \emptyset$. No, sada imamo $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$ i to može biti samo ako je $\widehat{I}_i \cap S = \emptyset$. Stoga je $i \in \Omega$.

Imamo sljedeći zaključak:

$$i \in \Omega \iff \text{postoji } j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i,j) \in \Gamma \text{ i } I_i \text{ i } J_j \text{ su formalno disjunktni.}$$

Sada iz činjenice da je Γ rekurzivno prebrojiv te propozicije 4.6 zaključujemo da je skup Ω rekurzivno prebrojiv. $\square$

Propozicija 6.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. Tada je S korekurzivno prebrojivo zatvoren.*

Dokaz. Neka je $x \in X \setminus S$. Jer je S zatvoren, imamo $B(x,r) \subseteq X \setminus S$ za neki $r > 0$. Uzmimo racionalnu točku $a \in X$ i pozitivan racionalan broj λ takav da je $\lambda < \frac{r}{2}$ i $x \in B(a,\lambda)$. Tada je $\widehat{B}(a,\lambda) \cap S = \emptyset$. Imamo sljedeći zaključak: za svaku točku $x \in X \setminus S$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i$ i $\widehat{I}_i \cap S = \emptyset$.

Neka je $\Omega = \{i \in \mathbb{N} : \widehat{I}_i \cap S = \emptyset\}$. Sada iz prethodno dokazane činjenice slijedi da je

$$X \setminus S = \bigcup_{i \in \Omega} I_i.$$

No, skup Ω je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 6.2 što znači da je S korekurzivno prebrojivo zatvoren. $\square$

Općenito, obrat prethodne propozicije ne vrijedi. Naime, korekurzivno prebrojiv skup ne mora biti poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama čak i ako je kompaktan. Štoviše, čak niti jednočlan korekurzivno prebrojivo zatvoren skup ne mora biti poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. No, ako je jednočlan skup poluizračunljivo kompaktan tada točka koju on sadrži mora biti izračunljiva.

Propozicija 6.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i $x \in X$ takav da je $\{x\}$ poluizračunljivo kompaktan skup. Tada je x izračunljiva točka.*

Dokaz. Skup $\{x\}$ je poluizračunljivo kompaktan pa stoga za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\{x\} \subseteq J_j \text{ i } \operatorname{fdiam}(j) < 2^{-k}. \tag{6.0.2}$$

Nadalje, skup svih $(k, j) \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijedi (6.0.2) je rekurzivno prebrojiv pa stoga postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi (6.0.2) za svaki $k \in \mathbb{N}$ i svaki $j = \varphi(k)$. Prema definiciji od J_j imamo $J_j = I_{(j)_0} \cup \cdots \cup I_{(j)_{\bar{j}}}$ i $I_{(j)_0} = B(\lambda_{(j)_0}, \rho_{(j)_0})$. Stoga je $d(x, \lambda_{(\varphi(k))_0}) < 2^{-k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, iz čega zaključujemo da je x izračunljiva točka. $\square$

Čak štoviše, imamo sljedeću tvrdnju.

Propozicija 6.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $x \in X$. Tada je skup $\{x\}$ izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama ako i samo ako je x izračunljiva točka.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ takav da je $\{x\}$ izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. Tada je $\{x\}$ poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama te prema propoziciji 6.4 je x izračunljiva točka.

Obratno, neka je x izračunljiva točka. Skup $\{x\}$ je konačan pa je stoga i kompaktan. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\{x\} \cap I_i \neq \emptyset$. Iz $\{x\} \cap I_i \neq \emptyset$ slijedi $x \in I_i$. No, $x \in I_i$ je ekvivalentno s $d(x, \lambda_i) < \rho_i$. Dakle, imamo

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \{x\} \cap I_i \neq \emptyset \iff x \in I_i \iff d(x, \lambda_i) < \rho_i. \tag{6.0.3}$$

Definiramo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(i) = \rho_i - d(x, \lambda_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Funkcija f je izračunljiva prema pretpostavci da je x izračunljiva te propoziciji 2.22. Naime, ako je x izračunljiva tada je $i \mapsto d(x, \lambda_i)$ izračunljiva funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sada iz 2.22 imamo da je f izračunljiva. Stoga je prema propoziciji 2.24 skup $\{i \in \mathbb{N} : f(i) > 0\}$ rekurzivno prebrojiv. Sada tvrdnja (6.0.3) povlači da je skup $\{i \in \mathbb{N} : \{x\} \cap I_i \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv.

Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\{x\} \subseteq J_j$. Tada zbog $J_j = \bigcup_{i\in[j]} I_i$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i$ i $i \in [j]$. S druge strane, neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $x \in I_i$ i $i \in [j]$. Tada $J_j = \bigcup_{i\in[j]} I_i$ povlači $x \in J_j$.

Nadalje, skup svih $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijedi $x \in I_i$ i $i \in [j]$ je rekurzivno prebrojiv pa je stoga i skup $\{j \in \mathbb{N} : \{x\} \subseteq J_j\}$ rekurzivno prebrojiv, odnosno dobili smo da je $\{x\}$ poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. Zaključujemo da je skup $\{x\}$ izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. □

U izračunljivim metričkim prostorima koji imaju svojstvo efektivnog pokrivanja i u kojima su zatvorene kugle kompaktne pojam izračunljive kompaktnosti na zatvorenim kuglama je ekvivalentan pojmu koizračunljivo prebrojive zatvorenosti.

Propozicija 6.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Pretpostavimo da (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja i kompaktne zatvorene kugle. Neka je $S \subseteq X$ zatvoren skup. Tada je S korekurzivno prebrojivo zatvoren ako i samo ako je S poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama.*

Dokaz. Promotrimo najprije slučaj $S \neq X$. Pretpostavimo da je S korekurzivno prebrojiv. Tada postoji funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $J_{f(k)} \subseteq J_{f(k+1)}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i vrijedi

$$X \setminus S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_{f(k)}.$$

Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da je $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$. Slijedi da je skup $\widehat{I}_i \setminus J_j$ sadržan u $X \setminus S$. Skup $\widehat{I}_i \setminus J_j$ je kompaktan pa stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\widehat{I}_i \setminus J_j \subseteq J_{f(k)}$ i vrijedi

$$\widehat{I}_i \subseteq J_j \cup J_{f(k)}. \tag{6.0.4}$$

S druge strane, ako vrijedi (6.0.4) za neke $i, j, k \in \mathbb{N}$, tada je $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$ jer je $S \cap J_{f(k)} = \emptyset$. Stoga je $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$ ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi (6.0.4). Skup svih $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$ takvih da vrijedi (6.0.4) je rekurzivno prebrojiv jer (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja te možemo pronaći izračunljivu funkciju $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takvu da vrijedi $J_j \cup J_{f(k)} = J_{\phi(j,k)}$ za svaki $j, k \in \mathbb{N}$. Stoga je skup svih $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ takvih da je $\widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j$ rekurzivno prebrojiv što znači da je S poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama.

U slučaju $S = X$ imamo da je S korekurzivno prebrojiv prema definiciji. Skup

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_i \cap S \subseteq J_j\}$$

je jednak skupu $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \widehat{I}_i \subseteq J_j\}$ koji je prema pretpostavci da X ima svojstvo efektivnog pokrivanja rekurzivno prebrojiv. Zaključujemo da je S poluizračunljivo kompaktan u (X, d, α). Obrat sada slijedi iz propozicije 6.3. □

Izravna posljedica prethodne propozicije jest da u izračunljivom metričkom prostoru koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja i u kojem su zatvorene kugle kompaktne, izračunljivo zatvoreni skupovi su ekvivalentni skupovima koji su izračunljivo kompaktni na zatvorenim kuglama.

Korolar 6.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja i koji ima kompaktne zatvorene kugle. Neka je $S \subseteq X$ zatvoren skup. Tada je S izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama ako i samo ako je S izračunljivo zatvoren.* □

Poglavlje 7

Izračunljivost topološke zrake

Za zatvoren skup S u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je **topološka zraka** ako je S homeomorfan s $[0, \infty\rangle$. Ako je $f : [0, \infty\rangle \to S$ homeomorfizam, tada $f(0)$ zovemo **krajnjom točkom**.

U ovom poglavlju dokazujemo da svaka poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama topološka zraka s izračunljivom krajnjom točkom mora biti izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama (a time i izračunljiva). Posljedica ovog teorema jest da svaka korekurzivno prebrojiva topološka zraka koja ima izračunljivu krajnju točku u metričkom prostoru koji ima kompaktne zatvorene kugle i svojstvo efektivnog pokrivanja mora biti izračunljiva.

7.1 Jednostrana neograničenost topološke zrake

Najprije dokazujemo da topološka zraka mora biti „jednostrano neograničena" u sljedećem smislu: ako je $f : [0, \infty\rangle \to S$ homeomorfizam tada $f(t)$ konvergira u beskonačnost kada t konvergira u beskonačnost. U iskazu sljedeće leme dajemo precizan opis ovog svojstva.

Lema 7.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$ zatvoren skup takav da je $S \cap B$ kompaktan skup za svaku zatvorenu kuglu B u (X, d) i takav da postoji homeomorfizam $f : [0, +\infty\rangle \to S$. Tada za svaku zatvorenu kuglu B postoji $t_0 \in [0, \infty\rangle$ takav da*

$$f(t) \notin B, \ \forall t \geq t_0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi negacija tvrdnje u iskazu leme, odnosno

$$(\exists B)(\forall t_0 \in [0, \infty\rangle)(\exists t \geq t_0) f(t) \in B.$$

Iz ovog slijedi da postoji niz (t_n) u $[0, +\infty\rangle$ takav da vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(t_n \geq n) \wedge (f(t_n) \in B).$$

Očito vrijedi i $f(t_n) \in S \cap B$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i obzirom da je $S \cap B$ kompaktan tada postoji konvergentan podniz $s_k := (f(t_{n_k}))$ od $(f(t_n))$ koji konvergira u $S \cap B$ a time i u S. Obzirom da je f homeomorfizam (stoga $f^{-1} : S \to [0, \infty\rangle$ postoji i neprekidna je) slijedi da je i niz $f^{-1}(s_k)$ također jedan konvergentan niz u $[0, +\infty\rangle$. Lako se pokaže da je svaki podniz od (t_n) neograničen. No, tada je specijalno $f^{-1}(s_k)$ neograničen, što je u kontradikciji s prethodno iskazanom tvrdnjom da je $f^{-1}(s_k)$ konvergentan. □

Napomenimo da tvrdnja prethodne leme ne vrijedi bez pretpostavke da je $S \cap B$ kompaktan za svaku zatvorenu kuglu B. Na primjer, neka je $(\mathbb{R}, d)$ realan pravac s euklidskom metrikom i $S = [0, 1\rangle$. Tada je S homeomorfan s $[0, \infty\rangle$, no S je očito ograničen.

Propozicija 7.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $a \in X$. Neka je $f : [0, \infty\rangle \to X$ neprekidna funkcija. Ako je $m \in \mathbb{N}$ takav da je skup*

$$B_m = \{t \in [0, \infty\rangle : d(a, f(t)) = m\}$$

neprazan, tada postoji $t_0 \in [0, \infty\rangle$ takav da vrijedi

$$t_0 = \min B_m.$$

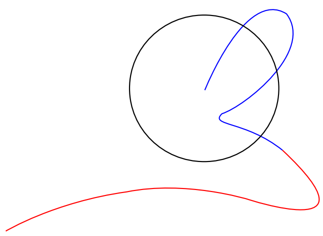
Dokaz. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je B_m neprazan. Definiramo funkciju $\varphi : X \to \mathbb{R}$ s $\varphi(x) = d(a, x)$ za svaki $x \in X$. Znamo da je φ neprekidna s obzirom na d i na euklidsku metriku u $\mathbb{R}$. Definirajmo sada funkciju $\psi : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ s $\psi(x) = d(a, f(t))$ za svaki $t \in [0, \infty\rangle$. Uočimo, $\psi = \varphi \circ f$ pa je ψ neprekidna. Uočimo, $F = \{t \in [0, \infty\rangle : \psi(t) = m\} = \psi^{-1}(\{m\})$, a skup $\{m\}$ je zatvoren u $\mathbb{R}$ pa je stoga F zatvoren i odozdo omeđen u $\mathbb{R}$ pa stoga sadrži najmanji element t_0. □

7.2 Teorem izračunljivosti za topološku zraku

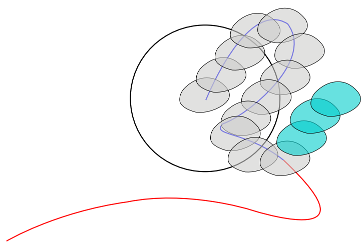
Neka je S poluizračunljivo kompaktna topološka zraka s izračunljivom krajnjom točkom u izračunljivom metričkom prostoru. Želimo pokazati da je S izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama. Neka je a racionalna točka koja je blizu krajnjoj točki od S. Želimo za zadane $n, k \in \mathbb{N}$ pronaći racionalne otvorene skupove $C_0, \ldots, C_\ell$ čiji dijametri su manji od 2^{-k} i takvi da svi zajedno pokrivaju $S \cap \widehat{B}(a,n)$ te svaki od njih siječe S. Ako uspijemo pronaći takve skupove, tada će izračunljiva prebrojivost od S lako slijediti. Intuitivno, možemo zamišljati da je slika dijela od S koji se nalazi u kugli $\widehat{B}(a,n)$ sve oštrija i oštrija kako k teži u beskonačno.

Pitanje jest kako pronaći takve skupove $C_0, \dots, C_\ell$? Neka je $f : [0, \infty\rangle \to S$ homeomorfizam. Prema lemi 7.1 postoji $t_0 > 0$ takav da je $f(t)$ izvan $\widehat{B}(a,n)$ odmah nakon $t = t_0$. Na slici 1 (a) plava krivulja jest $f([0,t_0])$, a crna kružnica je rub od $\widehat{B}(a,n)$. Stoga je $S \cap \widehat{B}(a,n)$ sadržan u $f([0,t_0])$ što povlači da postoji 2^{-k}-lanac s racionalnim karikama $C_0, \dots, C_\ell$ koji prekriva $S \cap \widehat{B}(a,n)$ i $f(0) \in C_0$. (Slika 1 (b)). Ovi uvjeti se mogu efektivno testirati prema rezultatima iz poglavlja 4 i stoga možemo na efektivan način pronaći takve skupove.

Primijetimo da ovdje nismo naveli uvjet da svaka od tih karika siječe S stoga je pitanje da li navedeni uvjeti možda povlače taj uvjet? Odgovor je negativan. Na slici 1 (b) vidimo da tri plave karike ne sijeku S. Stoga je glavno pitanje: koje dodatne uvjete trebamo zahtijevati na lanac $C_0, \dots, C_l$ tako da te dodatne uvjete možemo efektivno testirati te da ukupno iz svih navedenih uvjeta slijedi da svaka karika $C_0, \dots, C_\ell$ siječe S?



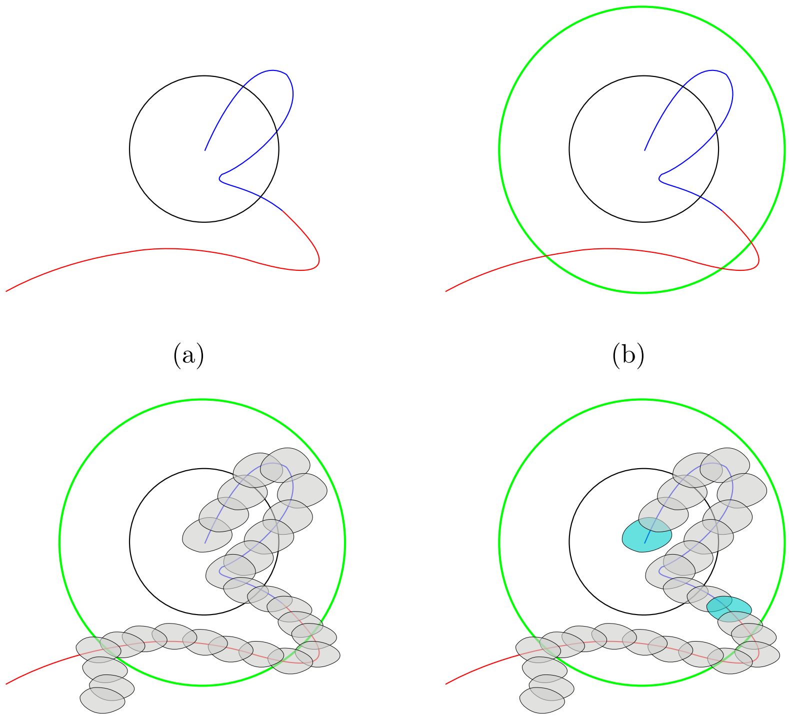
(a)



(b)

Slika 1

Krenimo sada od situacije prikazane na slici 2 (a). Skup $f([0,t_0])$ je kompaktan, pa stoga postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f([0,t_0]) \subseteq \widehat{B}(a,m)$. Na slici 2 (b) zelena kružnica je rub od $\widehat{B}(a,m)$. Sada prekrijemo $S \cap \widehat{B}(a,m)$ na isti način kao što smo prekrili $S \cap \widehat{B}(a,n)$ 2^{-k}-lancem $C_0, \dots, C_\ell$ takvim da je $f(0) \in C_0$ (Slika 2 (c)). Ponovo, neke karike od $C_0, \dots, C_\ell$ ne sijeku S (zadnje tri karike na slici 2 (c)). Međutim, za neki $p \in \{0, \dots, \ell-1\}$ moguće je zaključiti da karike $C_0, \dots, C_p$ prekrivaju $S \cap \widehat{B}(a,n)$ te su formalno sadržane u $\widehat{B}(a,m)$ (ove uvjete možemo efektivno testirati). Ovi uvjeti će zajedno povlačiti da svaka karika $C_0, \dots, C_p$ siječe S. Na slici 2 (d) lanac $C_0, \dots, C_p$ je lanac između plavih karika, uključujući i plave karike.



(a) (b) (c) (d)

Slika 2

Sada je sve spremno da iskažemo i dokažemo glavni teorem ovog poglavlja. Dokazat ćemo nešto općenitiju tvrdnju koja uključuje dodatan zatvoren skup F disjunktan s topološkom zrakom. Uloga tog dodatnog skupa bit će jasna u kasnijim poglavljima kada ćemo dokazivati rezultate o izračunljivosti za 1-mnogostrukosti. Navedene ideje ovog poglavlja provodimo u dokazu sljedećeg teorema.

Teorem 7.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S zatvoren skup u (X, d) koji je kao potprostor od (X, d) topološka zraka čija je krajnja točka izračunljiva. Pretpostavimo da je F zatvoren skup u (X, d) koji je disjunktan s S i takav da je $S \cup F$ poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. Tada je S rekurzivno prebrojivo zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je $f : [0, \infty\rangle \to S$ homeomorfizam. Neka je $a \in X$ racionalna točka takva da je $d(a, f(0)) < 1$. Označimo sa $S_n := S \cap \widehat{B}(a, n)$ i $F_n = F \cap \widehat{B}(a, n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $n, k \in \mathbb{N}$. Prema lemi 7.1 postoji $r > 0$ takav da $f(x) \notin \widehat{B}(a, n)$ za svaki $x \geq r$. Skup $f([0, r])$ je kompaktan pa stoga postoji neki $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ takav da je

$f([0,r]) \subseteq B(a,m)$. Ponovo primjenom leme 7.1 postoji $r' > r$ takav da $f(x) \notin \widehat{B}(a,m)$ za svaki $x \geq r'$. Uočimo,

$$S_n \subseteq f([0,r]) \subseteq S_m \subseteq f([0,r']). \tag{7.2.1}$$

Definiramo

$$D = \max\{d(a, f(x)) : x \in [0,r]\}.$$

Vrijedi $d(a,f(x)) \leq D$ za svaki $x \in [0,r]$, a zbog inkluzije $f([0,r]) \subseteq B(a,m)$ je $D < m$. Definirajmo

$$\mu := \frac{m-D}{2}.$$

Prema lemi 4.8 postoji $\lambda > 0$ takav da, ako su $j, j' \in \mathbb{N}$ i $A \subseteq f([0,r'])$, tada

$$(\langle F_m, j, \lambda\rangle \text{ i } \langle A, j', \lambda\rangle) \implies J_j \text{ i } J_{j'} \text{ su formalno disjunktni.} \tag{7.2.2}$$

Neka je $\varepsilon = \min\{\mu, \lambda\}$. Neka je $u \in \mathbb{N}$ takav da $\langle F_m, u, \lambda\rangle$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-k_0} < \mu$.

Primjenom leme 4.12 na luk $f[0,r']$ za $\min\{\varepsilon, 2^{-(k+k_0)}\}$ slijedi da postoji $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geq 1$, te brojevi $j_0, \ldots, j_{n'-1} \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

(i) $\langle f([\frac{i}{n'}r, \frac{i+1}{n'}r]), j_i, \min\{\varepsilon, 2^{-(k+k_0)}\}\rangle$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n'-1\}$;

(ii) Skupovi J_{j_i} i $J_{j_{i'}}$ su formalno disjunktni za sve $i, i' \in \{0, \ldots, n'-1\}$ takve da vrijedi $|i - i'| > 1$;

(iii) $\operatorname{fdiam}(j_i) < \min\{\varepsilon, 2^{-(k+k_0)}\}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n'-1\}$.

Iz (7.2.2) slijedi da su J_u i J_{j_i} formalno disjunktni za svaki $i \in \{0, \ldots, n'-1\}$. Neka je $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je $((\ell)_0, \ldots, (\ell)_{\overline{\ell}}) = (j_1, \ldots, j_{(n'-1)})$.

Tada čitav $\mathcal{H}_\ell$ pokriva $f([0,r'])$, $\operatorname{fmesh}(\ell) < 2^{-(k+k_0)}$ i J_u i $\mathcal{H}_\ell$ su formalno disjunktni. Također, primijetimo da je $f(0) \in J_{(\ell)_0}$. Zbog $S_m \subseteq f([0,r'])$ slijedi $S_m \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell$. Sada imamo da $\mathcal{H}_\ell$ počinje u $f(0)$ i završava u $f(r')$, te vrijedi $f([0,r']) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell$. Zbog $r \in [0,r']$ i svojstva (i), postoji $p \in \{0, \ldots, \overline{\ell}\}$ takav da vrijedi $f(r) \in J_{(\ell)_p}$, $f([0,r]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{0 \leq p}$ te da svaka karika od $\mathcal{H}_\ell^{0 \leq p}$ siječe $f([0,r])$. Stoga vrijedi $S_n \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{0 \leq p}$.

Tvrdimo da je $\mathcal{H}_\ell^{0 \leq p}$ formalno sadržan u $B(a,m)$. To je prema definiciji ekvivalentno tvrdnji da je svaka karika $J_{(\ell)_i}$, $0 \leq i \leq p$ tog lanca formalno sadržana u $B(a,m)$. Neka je

$J_{(\ell)_i}$ karika lanca $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$. Dovoljno je pokazati da je $I_{k'}$ formalno sadržan u $B(a,m)$ odnosno $d(\lambda_{k'},a)+\rho_{k'}<m$, za svaki $k'\in[(\ell)_i]$. Svaka karika $J_{(\ell)_i}$ za $i\in\{0,\dots,p\}$ siječe $f([0,r])$ pa stoga za svaki $i\in\{0,\dots,p\}$ postoji $k''\in[(\ell)_i]$ takav da $I_{k''}\cap f([0,r])\neq\emptyset$, odnosno $B(\lambda_{k''},\rho_{k''})\cap f([0,r])\neq\emptyset$. No sada iz $B(\lambda_{k''},\rho_{k''})\cap f([0,r])\neq\emptyset$ slijedi da postoji neki $b\in B(\lambda_{k''},\rho_{k''})\cap f([0,r])$. Neka je $k'\in[(\ell)_i]$. Najprije uočimo da vrijedi $\mathrm{fdiam}(\ell)_i<\mu$ za svaki $i\in\left\{0,\dots,\overline{\ell}\right\}$. Zaista, neka je $i\in\left\{0,\dots,\overline{\ell}\right\}$ tada je

$$\mathrm{fdiam}((\ell)_{\mathrm{i}})\leq\mathrm{fmesh}(\ell)<2^{-(k+k_0)}<2^{-k_0}<\mu. \tag{7.2.3}$$

Sada prema nejednakosti trokuta, i zbog (7.2.3) imamo

$$d(\lambda_{k'},a)+\rho_{k'}\leq d(\lambda_{k'},b)+d(b,a)+\rho_{k'}<D+2\mathrm{fdiam}((\ell)_i)<D+2\mu=m.$$

Stoga je $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$ zaista formalno sadržan u $B(a,m)$.

Tvrdimo sada da mora biti $p<\overline{\ell}$. Pretpostavimo suprotno, da je $p\geq\overline{\ell}$. Tada zbog $p\in\left\{0,\dots,\overline{\ell}\right\}$ mora biti $p=\overline{\ell}$. Imamo $f(r')\in J_{(\ell)_{\overline{\ell}}}$ (jer lanac $\mathcal{H}_\ell$ završava u $f(r')$). No, budući da prema definiciji od r' imamo $f(r')\notin\widehat{B}(a,m)$, slijedi da karika $J_{(\ell)_{\overline{\ell}}}$ nije sadržana u $B(a,m)$ što povlači da $J_{(\ell)_{\overline{\ell}}}$ nije niti formalno sadržana u $B(a,m)$. Kontradikcija. Dakle, mora biti $p<\overline{\ell}$. Ovime smo pokazali da za zadane $n,k\in\mathbb{N}$ uvijek možemo pronaći $\ell,m,p,u\in\mathbb{N}$ takve da vrijedi

1. $\mathcal{H}_\ell$ je formalni lanac;
2. J_u i $\mathcal{H}_\ell$ su formalno disjunktni;
3. $f(0)\in J_{(\ell)_0}$;
4. $S_n\cup F_n\subseteq\bigcup\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}\cup J_u$;
5. $S_m\cup F_m\subseteq\bigcup\mathcal{H}_\ell\cup J_u$;
6. $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$ je formalno sadržan u $B(a,m)$;
7. $p<\overline{\ell}$ i $m\geq 1$;
8. $\mathrm{fmesh}(\ell)<2^{-k}$.

Promotrimo sada skup

$$T=\left\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6 : \text{za } n,k,m,\ell,p,u \text{ vrijede svojstva 1 do 8}\right\}.$$

Tvrdimo da je T rekurzivno prebrojiv kao presjek rekurzivno prebrojivih skupova.

Definiramo redom skupove:

$$\Omega_1 = \{(m, \ell, u) \in \mathbb{N}^3 : S_m \cup F_m \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell \cup J_u\};$$

$$\Omega_2 = \{\ell \in \mathbb{N} : f(0) \in J_{(\ell)_0}\};$$

$$\Omega_3 = \{\ell \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_\ell \text{ je formalni lanac}\};$$

$$\Omega_4 = \{(n, \ell, p, u) \in \mathbb{N}^4 : S_n \cup F_n \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{0\leq p} \cup J_u\};$$

$$\Omega_5 = \{(m, \ell, p) \in \mathbb{N}^3 : \mathcal{H}_\ell^{0\leq p} \text{ je formalno sadržan u } B(a, m)\};$$

$$\Omega_6 = \{(p, \ell) \in \mathbb{N}^2 : p < \overline{\ell}\};$$

$$\Omega_7 = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 : \text{fmesh}(\ell) < 2^{-k}\};$$

$$\Omega_8 = \{(\ell, u) \in \mathbb{N}^2 : \mathcal{H}_\ell \text{ i } J_u \text{ su formalno disjunktni.}\}.$$

Za skupove Ω_i, $i = 1, \dots, 8$ dokazujemo redom da su rekurzivno prebrojivi. Najprije uočimo

$$S_n \cup F_n = (S \cup F) \cap \widehat{B}(a, n)$$

Neka je $w \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $((w), \dots, (w)_{\overline{w}}) = ((\ell)_0, \dots, (\ell)_{\overline{\ell}}, u)$. Tada imamo $[w] = [\ell] \cup \{u\}$ i vrijedi:

$$\bigcup \mathcal{H}_\ell \cup J_u = \bigcup_{i\in[w]} J_i \cup J_u = \bigcup_{i\in[\ell]\cup\{u\}} J_i = \bigcup \mathcal{H}_w.$$

Definiramo skup

$$V = \{(u, \ell, w) \in \mathbb{N}^3 : ((w), \dots, (w)_{\overline{w}}) = ((\ell)_0, \dots, (\ell)_{\overline{\ell}}, u)\}.$$

Skup V je rekurzivan, stoga prema propoziciji 2.7 (2) postoji rekurzivna funkcija $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$(u, \ell, \phi(u, \ell)) \in V, \quad \forall u, \ell \in \mathbb{N}.$$

Neka je $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $a = \alpha_{i_0}$. Neka je $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadana s

$$\psi(n) = \mu i[\alpha_i = \alpha_{i_0} \wedge \rho_i = n], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Konačno, neka je $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija iz leme 4.11. Tada imamo

$$\Omega_1 = \{(n, \ell, u) \in \mathbb{N}^3 : (S \cup F) \cap \widehat{I}_{\psi(n)} \subseteq J_{\xi(\phi(u,\ell))}\}$$

Skup $S \cup F$ je poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama pa je stoga skup

$$W = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : (S \cup F) \cap \widehat{I}_i \subseteq J_j\}$$

rekurzivno prebrojiv. Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ sa

$$G(n,\ell,u) = (\psi(n), \xi(\phi(u,\ell))), \quad \forall n,\ell,u \in \mathbb{N}^3.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
(n,\ell,u) \in \Omega_1 &\iff (S \cup F) \cap \widehat{I}_{\psi(n)} \subseteq J_{\xi(\phi(u,\ell))} \\
&\iff (\psi(n), \xi(\phi(u,\ell))) \in W \\
&\iff G(n,\ell,u) \in W \\
&\iff (n,\ell,u) \in G^{-1}(W).
\end{aligned}$$

Stoga je prema propoziciji 2.7 (3) Ω_1 rekurzivno prebrojiv. Skup Ω_2 je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 4.7. Prema propoziciji 4.6 (4) skup Ω_3 je rekurzivno prebrojiv. Dokažimo da je Ω_4 rekurzivno prebrojiv. Neka je $w \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $((w), \dots, (w)_{\overline{w}}) = ((\ell)_0, \dots, (\ell)_p, u)$. Imamo

$$\bigcup \mathcal{H}_\ell^{0 \le p} \cup J_u = \bigcup_{i \in \{(\ell)_0, \dots, (\ell)_p\} \cup \{u\}} J_i = \bigcup_{i \in [w]} J_i = \bigcup \mathcal{H}_w.$$

Definiramo skup

$$V = \{(u,\ell,p,w) \in \mathbb{N}^3 : ((w), \dots, (w)_{\overline{w}}) = ((\ell)_0, \dots, (\ell)_p, u)\}$$

Skup V je rekurzivan pa stoga postoji funkcija $\phi : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$(u,\ell,p,\phi(u,\ell,p)) \in V, \quad \forall u,\ell,p \in \mathbb{N}.$$

Prema lemi 4.11 postoji funkcija $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$J_{\zeta(\ell)} = \bigcup \mathcal{H}_\ell, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo

$$\Omega_4 = \{(n,\ell,p,u) \in \mathbb{N}^4 : (S \cup F) \cap \widehat{I}_{\psi(n)} \subseteq J_{\zeta(\phi(u,\ell,p))}\}.$$

Definiramo funkciju $H : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}^2$ sa

$$H(n,\ell,p,u) = (\psi(n), \zeta(\phi(u,\ell,p))), \quad \forall n,\ell,p,u \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}(n,\ell,p,u)\in\Omega_4 &\iff (S\cup F)\cap\widehat{I}_{\psi(n)}\subseteq J_{\zeta(\phi(u,\ell,p))}\\ &\iff (\psi(n),\zeta(\phi(u,\ell,p)))\in W\\ &\iff H(n,\ell,p,u)\in W\\ &\iff (n,\ell,p,u)\in H^{-1}(W).\end{aligned}$$

Stoga je prema propoziciji 2.7 (3) Ω_4 rekurzivno prebrojiv. Skup Ω_5 je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 4.4 (3). Skup Ω_6 je rekurzivan, karakteristična funkcija mu je $\chi_{\Omega_6}(p,\ell)=\overline{sg}(\ell\dot{-}p)$, pa je time on i rekurzivno prebrojiv. Skup Ω_7 je rekurzivno prebrojiv prema propozicijama 4.2 i 2.24. Definiramo funkciju $\Lambda:\mathbb{N}^2\to\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ s $\Lambda(\ell,u)=[\ell]\times\{u\}$ za svaki $\ell,u\in\mathbb{N}$. Funkcija Λ je r.r.o. prema propozicijama 2.11, 2.8 (1) i 2.9. Nadalje, skup $A=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : J_i \text{ i } J_j \text{ su formalno disjunktni }\}$ je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 4.6 (3). Sada je skup $B=\{(\ell,u)\in\mathbb{N}^2:\Lambda(\ell,u)\subseteq A\}$ rekurzivno prebrojiv prema lemi 2.15. Ukupno, lako se pokaže da vrijedi $(\ell,u)\in B \iff (\ell,u)\in\Omega_8$ stoga imamo da je Ω_8 rekurzivno prebrojiv. Definirajmo sada redom skupove

$$\begin{aligned}
\Omega_1'&=\Big\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6:(m,\ell,u)\in\Omega_1\Big\};\\
\Omega_2'&=\Big\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6:\ell\in\Omega_2\Big\};\\
\Omega_3'&=\Big\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6:\ell\in\Omega_3\Big\};\\
\Omega_4'&=\Big\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6:(n,\ell,p,u)\in\Omega_4\Big\};\\
\Omega_5'&=\Big\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6:(m,\ell,p)\in\Omega_5\Big\};\\
\Omega_6'&=\Big\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6:(p,\ell)\in\Omega_6\Big\};\\
\Omega_7'&=\Big\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6:(k,\ell)\in\Omega_7\Big\};\\
\Omega_8'&=\Big\{(n,k,m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^6:(\ell,u)\in\Omega_8\Big\};
\end{aligned}$$

Primjenom propozicije 2.6 lako dobivamo da je tada Ω_i' rekurzivno prebrojiv za svaki $i\in\{1,\dots,8\}$. Sada vrijedi

$$T=\bigcap_{k=1}^{8}\Omega_k'.$$

Dakle, T je rekurzivno prebrojiv kao presjek rekurzivno prebrojivih skupova. Nadalje, pokazali smo da za svaki $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ možemo pronaći $(m,\ell,p,u)\in\mathbb{N}^4$ takav da je

$(n, k, m, \ell, p, u) \in T$. Prema propoziciji 2.7 svojstvu (2) postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^4$ takva da je $(n, k, \varphi(n, k)) \in T$ za svaki $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Preciznije, postoje izračunljive funkcije $\tilde{m}, \tilde{\ell}, \tilde{p}, \tilde{u} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$(n, k, \tilde{m}(n, k), \tilde{\ell}(n, k), \tilde{p}(n, k), \tilde{u}(n, k)) \in T, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

U nastavku želimo pokazati da ako imamo brojeve $n, k, m, \ell, p, u \in \mathbb{N}$ takve da vrijede svojstva 1 do 8 (što svakako vrijedi u slučaju kada je $m = \tilde{m}(n, k)$, $\ell = \tilde{\ell}(n, k)$, $p = \tilde{p}(n, k)$ i $u = \tilde{u}(n, k)$) da tada slijedi da svaka karika od $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$ siječe S. Najprije, tvrdimo da postoji $t \in [0, \infty\rangle$ takav da je $d(a, f(t)) = m$. Pretpostavimo suprotno, da za svaki $t \in [0, +\infty\rangle$ je ili $d(a, f(t)) > m$ ili $d(a, f(t)) < m$. Promotrimo skupove $B(a, m)$ i $X \setminus \widehat{B}(a, m)$. Definiramo $S_1 = S \cap B(a, m) = \{x \in S : d(a, x) < m\}$ i $S_2 = S \cap (X \setminus \widehat{B}(a, m)) = \{x \in S : d(a, x) > m\}$. Za svaki $x \in S$ vrijedi $x \in S_1$ ili $x \in S_2$. Stoga je $S = S_1 \cup S_2$ i $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Skup S_1 je neprazan zbog $d(a, f(0)) < 1$, a skup S_2 je neprazan prema lemi 7.1. Dakle, skupovi S_1 i S_2 su dva u S otvorena, disjunktna i neprazna skupa koji pokrivaju S što znači da je S nepovezan. Kontradikcija s povezanošću od S. Dakle, mora postojati $t \in [0, \infty\rangle$ takav da je $d(a, f(t)) = m$.

Iz propozcijie 7.2 slijedi da postoji t_0 takav da vrijedi

$$t_0 = \min\{t \in [0, \infty\rangle : d(a, f(t)) = m\}.$$

Očito je $d(a, f(t)) < m$ za svaki $t \in [0, t_0\rangle$. U protivnom, kada bi postojao neki $t \in [0, t_0\rangle$ takav da je $d(a, f(t)) \geq m$ tada bi zbog neprekidnosti od f i povezanosti od $f([0, t])$ imali da postoji neki $t_1 \in [0, t_0\rangle$ takav da je $d(a, f(t_1)) = m$, čime bi imali kontradikciju s minimalnošću od t_0. Stoga je $f([0, t_0]) \subseteq S_m$. Sada iz svojstva 5 imamo da vrijedi

$$f([0, t_0]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell \cup J_u.$$

Prema svojstvu 3 je $f([0, t_0]) \cap \bigcup \mathcal{H}_\ell \neq \emptyset$, a prema svojstvu 2 imamo $\bigcup \mathcal{H}_\ell \cap J_u = \emptyset$. Iz činjenice da je $f([0, t_0])$ povezan slijedi

$$f([0, t_0]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell.$$

Stoga imamo da je $f(t_0) \in J_{(\ell)_v}$za neki $v \in \left\{0, \ldots, \overline{\ell}\right\}$. Tvrdimo da je $p < v$ prema svojstvu 6. U protivnom, kada bi bilo $p \geq v$ tada je $J_{(l)_v}$ karika lanca $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$, no ona nije formalno sadržana u $B(a, m)$ jer je $f(t_0) \in J_{(\ell)_v}$ a $f(t_0) \in \widehat{B}(a, m) \setminus B(a, m)$, što se protivi svojstvu 6.

Dokažimo sada da svaka karika lanca $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$ siječe S. Pretpostavimo da je $i \in \{0,\dots,p\}$ takav da $J_{(\ell)_i} \cap S = \emptyset$. Očito je $i \neq 0$ (jer je $f(0) \in J_{(\ell)_0}$), pa stoga mora biti $0 < i < v$. Sada su $U = J_{(\ell)_0} \cup \dots \cup J_{(\ell)_{i-1}}$ i $V = J_{(\ell)_{i+1}} \cup \dots \cup J_{(\ell)_{\overline{\ell}}}$ dva otvorena disjunktna skupa koji pokrivaju $f([0,t_0])$ i svaki od njih siječe $f([0,t_0])$ ($f(0) \in J_{(\ell)_0}$, $f(t_0) \in J_{(\ell)_v}$). Ovo je nemoguće jer je $f([0,t_0])$ povezan.

Stoga je $J_{(\ell)_i} \cap S \neq \emptyset$ za svaki $i \in \{0,\dots,p\}$ tj. svaka karika od $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$ siječe S. Dodatna činjenica koju želimo provjeriti za lanac $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$ jest sljedeća: ako je $s \in [0,\infty\rangle$ takav da je $f([0,s]) \subseteq B(a,n)$, tada $f(s)$ leži u nekoj karici od $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$. Ali ako je s takav da je $f([0,s]) \subseteq B(a,n)$, tada je $f([0,s]) \subseteq S_n$ a prema svojstvu 4 zajedno sa činjenicom da je $f([0,s])$ povezan, imamo da je $f([0,s]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$. Specijalno, $f(s)$ leži u nekoj karici od $\mathcal{H}_\ell^{0\leq p}$.

Ovime smo pokazali da za svaki $n,k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

1) formalni dijametar svake karike lanca $\mathcal{H}_{\tilde{\ell}(n,k)}^{0\leq \tilde{p}(n,k)}$ je manji od 2^{-k};

2) svaka karika lanca $\mathcal{H}_{\tilde{\ell}(n,k)}^{0\leq \tilde{p}(n,k)}$ siječe S;

3) ako je $s \in [0,\infty\rangle$ takav da vrijedi $f([0,s]) \subseteq B(a,n)$, tada $f(s)$ leži u nekoj karici od $\mathcal{H}_{\tilde{\ell}(n,k)}^{0\leq \tilde{p}(n,k)}$.

Uočimo sljedeće: ako je $c \in S$, tada je $c = f(s)$ za neki $s \in [0,\infty\rangle$ te postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $f([0,s]) \subseteq B(a,n)$. Tada $c = f(s)$ leži u nekoj karici od $\mathcal{H}_{\tilde{\ell}(n,k)}^{0\leq \tilde{p}(n,k)}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je sada $i \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da vrijedi $I_i \cap S \neq \emptyset$. Neka je $c \in I_i \cap S$. Koristeći lemu 4.5 zaključujemo da postoje $n,k \in \mathbb{N}$ takvi da c pripada nekoj karici od $\mathcal{H}_{\tilde{\ell}(n,k)}^{0\leq \tilde{p}(n,k)}$ koja je formalno sadržana u I_i. Stoga, postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da

$$w \leq \tilde{p}(n,k) \text{ i } J_{(\tilde{\ell}(n,k))_w} \subseteq_F I_i. \tag{7.2.4}$$

S druge strane, ako (7.2.4) vrijedi za neke $n,k,w \in \mathbb{N}$, tada I_i siječe S jer ga siječe $J_{(\tilde{\ell}(n,k))_w}$. Stoga, $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoje $n,k,w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (7.2.4). Sada iz propozicije 4.3 (2) slijedi da je skup $\{i \in \mathbb{N} : I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv, odnosno skup S je rekurzivno prebrojivo zatvoren. $\square$

U slučaju kada je $F = \emptyset$ imamo sljedeći korolar.

Korolar 7.4. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor i neka je* S *poluizračunljivo kompaktan skup na zatvorenim kuglama u* (X, d, α). *Pretpostavimo da je* S *topološka zraka s izračunljivom krajnjom točkom. Tada je* S *izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama.* $\square$

U specijalnom slučaju kada je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor sa svojstvom efektivnog pokrivanja i koji ima kompaktne zatvorene kugle, imamo sljedeći korolar.

Korolar 7.5. *Neka je* (X, d, α) *izračunljivi metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle i svojstvo efektivnog pokrivanja. Neka je* $S \subseteq X$ *korekurzivno prebrojivo zatvoren u* (X, d, α) *te* $f : [0, +\infty\rangle \to S$ *homeomorfizam takav da je* $f(0)$ *izračunljiva točka u* (X, d, α). *Tada je* S *izračunljivo zatvoren.* $\square$

Poglavlje 8

Izračunljivost topološke linije

Nakon što smo u prethodnom poglavlju utvrdili izračunljivost topološke zrake koja je poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama, pitamo se da li sličan dokaz vrijedi i za *topološku liniju*.

Za zatvoren skup S u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je **topološka linija** ako je S homeomorfan $\mathbb{R}$. U ovom poglavlju bavimo se pitanjem izračunljivosti topološke linije koja je poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama. Dokazat ćemo da svaka topološka linija koja je poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama mora biti izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama.

Najprije primijetimo da, ako je S topološka linija i $f : \mathbb{R} \to S$ homeomorfizam te ako postoji $r \in \mathbb{R}$ takav da je $f(r)$ izračunljiva točka i skupovi $f(\langle -\infty, r])$ i $f([r, \infty\rangle)$ su poluizračunljivo kompaktni na zatvorenim kuglama, tada možemo primijeniti teorem 7.5 na te skupove i lagano zaključiti da je S poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama kao unija skupova koji su poluizračunljivo kompaktni na zatvorenim kuglama. Međutim, nije jasno pod kojim uvjetima možemo naći takav r. Stoga, moramo primijeniti drugačije metode da dokažemo takvu tvrdnju.

8.1 Obostrana neograničenost topološke linije

Slično kao i u slučaju topološke zrake najprije pokazujemo da topološka linija mora biti „obostrano neograničena“.

Lema 8.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je S podskup od X takav da je $S \cap B$ kompaktan skup za svaku zatvorenu kuglu B u (X, d) i takav da postoji homeomorfizam*

$f : \mathbb{R} \to S$. Tada za svaku zatvorenu kuglu B postoji $t_0 \in [0, \infty\rangle$ takav da $f(t) \notin B$ za svaki $t \geq t_0$ ili $t \leq -t_0$.

Dokaz. Definiramo skupove $S_1 = f(\langle -\infty, 0])$ i $S_2 = f([0, +\infty\rangle)$. Skupovi S_1 i S_2 su zatvoreni u S, stoga su za svaku zatvorenu kuglu B u (X, d) skupovi $S_1 \cap B$ i $S_2 \cap B$ zatvoreni u S a time i u $S \cap B$ koji je kompaktan. Stoga su $S_1 \cap B$ i $S_2 \cap B$ kompaktni skupovi. S_1 je homeomorfan $[0, +\infty\rangle$, homeomorfizam je funkcija $h_1 : [0, +\infty\rangle \to S_1$ definirana s $h_1(x) = f(-x)$, za svaki $x \in [0, +\infty\rangle$. S_2 je homeomorfan $[0, +\infty\rangle$, preko homeomorfizma $h_2 : [0, +\infty\rangle \to S_2$ definiranog s $h_2(x) = f(x)$, za svaki $x \in [0, +\infty\rangle$. Primjenom leme 7.1 na S_1 i na S_2 dobivamo traženu tvrdnju. □

8.2 Teorem izračunljivosti za topološku liniju

Teorem 8.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S zatvoren skup u (X, d) koji je, kao potprostor od (X, d), topološka linija. Pretpostavimo da je F zatvoren podskup od (X, d) koji je disjunktan sa S i takav da je $S \cup F$ poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{R} \to S$ homeomorfizam. Neka je $a \in X$ racionalna točka koja je blizu $f(0)$ tj. takva da je $d(a, f(0)) < 1$. Označimo sa $S_n := S \cap \widehat{B}(a, n)$ i $F_n := F \cap \widehat{B}(a, n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\delta > 0$ takav da vrijedi $f([-\delta, \delta]) \subseteq B(a, 1)$. Takav δ postoji zbog neprekidnosti od f. Neka su $A, B, C \in \mathbb{N}$ i $k_0 \in \mathbb{N}$ takvi da $f(-\delta) \in I_A$, $f(\delta) \in I_B$ i $f(0) \in I_C$, $\rho_A < \frac{2^{-k_0}}{4}$, $\rho_B < \frac{2^{-k_0}}{4}$, $\rho_C < \frac{2^{-k_0}}{4}$ i

$$2^{-k_0} < \min\{d(I_A, f([0, \infty\rangle)), d(I_B, f(\langle -\infty, 0]), d(I_C, F))\}. \tag{8.2.1}$$

Fiksirajmo sada $n, k \in \mathbb{N}$. Prema lemi 8.1 postoji $r > 0$ takav da $f(x) \notin \widehat{B}(a, n)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $(x \geq r \vee x \leq -r)$. Skup $f([-r, r])$ je kompaktan (kao neprekidna slika segmenta $[-r, r]$), pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $f([-r, r]) \subseteq B(a, m)$. Sada, ponovnom primjenom leme 8.1 postoji $r' > r$ takav da vrijedi $f(x) \notin \widehat{B}(a, m)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $(x \geq r' \vee x \leq -r')$.
Tvrdimo

$$S_n \subseteq f([-r, r]) \subseteq S_m \subseteq f([-r', r']). \tag{8.2.2}$$

Dokažimo $S_n \subseteq f([-r, r])$. Neka je $x \in S_n$. Tada je $x \in S \cap \widehat{B}(a, n)$. Dakle, $x = f(t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Prema odabiru broja r, vrijedi $f(t) \notin \widehat{B}(a, n)$ za sve $|t| \geq r$. Stoga, zbog

$x \in \widehat{B}(a,n)$, mora biti $t \in \langle -r, r\rangle$. No, sada je $f(t) \in f(\langle -r,r\rangle) \subseteq f([-r,r])$, što dokazuje tvrdnju.

Dokažimo $f([-r,r]) \subseteq S_m$. Imamo $f([-r,r]) \subseteq S$. Prema definiciji od m imamo $f([-r,r]) \subseteq \widehat{B}(a,m)$, pa ukupno imamo $f([-r,r]) \subseteq S_m$.

Dokažimo $S_m \subseteq f([-r',r'])$. Neka je $x \in S_m$. Tada je $x \in S \cap \widehat{B}(a,m)$. Dakle, $x = f(t)$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Prema odabiru broja r', vrijedi $f(t) \notin \widehat{B}(a,m)$ za sve $|t| \geq r'$. Stoga, zbog $x \in \widehat{B}(a,m)$, mora biti $t \in \langle -r', r'\rangle$. No, sada je $f(t) \in f(\langle -r',r'\rangle) \subseteq f([-r',r'])$, što dokazuje tvrdnju.

Definiramo

$$D = \max\{d(a, f(x)) : x \in [-r,r]\}.$$

Vrijedi $d(a,f(x)) \leq D$ za svaki $x \in [-r,r]$, a zbog inkluzije $f([-r,r]) \subseteq B(a,m)$ je $D < m$. Definirajmo

$$\mu := \frac{m-D}{2}.$$

Prema lemi 4.8 postoji $\lambda > 0$ takav da, ako su $j, j' \in \mathbb{N}$ i $G \subseteq f([-r',r'])$, tada

$$(\langle F_m, j, \lambda\rangle \text{ i } \langle G, j', \lambda\rangle) \implies J_j \text{ i } J_{j'} \text{ su formalno disjunktni.} \tag{8.2.3}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ takav da je $\varepsilon < \min\{\mu, \lambda, 2^{-(k+k_0+3)}\}$. Neka je $u \in \mathbb{N}$ takav da

$$\langle F_m, u, \varepsilon\rangle. \tag{8.2.4}$$

Definiramo funkciju $\psi : [0, 2r'] \to [-r', r']$ sa

$$\psi(x) = t - r', \ \forall t \in [0, 2r'].$$

Definiramo funkciju $g : [0, 2r'] \to X$ s

$$g(t) = (f \circ \psi)(t), \ \forall t \in [0, 2r']$$

Primjenom leme 4.12 na $g : [0, 2r'] \to X$ slijedi da možemo pronaći brojeve $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geq 1$, $D' = \frac{2r'}{n'}$ i brojeve $j_0, \ldots, j_{n'-1} \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi

1. $\langle g([iD', (i+1)D']), j_i, \varepsilon\rangle$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n'-1\}$;

2. Skupovi J_{j_i} i $J_{j_{i'}}$ su formalno disjunktni za sve $i, i' \in \{0, \ldots, n'-1\}$ takve da vrijedi $|i - i'| > 1$;

3. $\mathrm{fdiam}(j_i) < \varepsilon$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n' - 1\}$.

Broj n' možemo odabrati baš takav da vrijedi $D' < \min\{\frac{r'-r}{2}, \frac{r}{2}\}$. Neka je $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je $((\ell)_0, \ldots, (\ell)_{\overline{\ell}}) = (j_0, \ldots, j_{(n'-1)})$. Označimo sada $C_i = J_{j_i}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n' - 1\}$ dakle

$$\mathcal{H}_\ell = (C_0, \ldots, C_{\overline{\ell}}).$$

Zbog svojstva 2 slijedi da je $\mathcal{H}_\ell$ formalni lanac. Nadalje, zbog svojstva 3 imamo

$$\mathrm{fmesh}(\ell) = \max_{0 \le i \le \overline{\ell}} \mathrm{fdiam}((\ell)_i) < \varepsilon.$$

Lanac $\mathcal{H}_\ell$ očito prekriva $g([0, 2r'])$ odnosno $f([-r', r'])$. Stoga je $S_m \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell$. Prema (8.2.3) su J_u i $\mathcal{H}_\ell$ formalno disjunktni. Odaberimo redom brojeve $p, q, e \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi

1) $-r + r' \in [pD', (p+1)D']$;

2) $r' \in [eD', (e+1)D']$;

3) $r + r' \in [qD', (q+1)D']$;

Uočimo da vrijedi $f(-r) \in J_{j_p}$, $f(0) \in J_{j_e}$ i $f(r) \in J_{j_q}$. Tvrdimo da vrijedi $p < e < q < \overline{\ell}$.

Dokažimo $p < e$. Imamo

$$pD' \le r' - r \le (e+1)D' - 2D' < eD'.$$

Odnosno, nakon dijeljenja s D' imamo $p < e$.

Dokažimo $e < q$.

$$eD' \le r' + r - r \le (q+1)D' - r < (q+1)D' - 2D' < qD'.$$

Stoga nakon dijeljenja s D' imamo $e < q$.

Dokažimo da vrijedi $q < \overline{\ell}$. Najprije imamo

$$(q+1)D' < qD' + \frac{r'-r}{2} \le r + r' + \frac{r'-r}{2} = \frac{3r'+r}{2} < \frac{3r'}{2} + \frac{r}{2} < 2r'.$$

Dakle, $(q+1)D' < 2r'$. Prema definiciji od ℓ vrijedi $\overline{\ell} = n' - 1$. Sada imamo

$$qD' = (q+1)D' - D' < 2r' - D' = (n'-1)D' = \overline{\ell}D',$$

pa nakon dijeljenja s D' imamo $q < \overline{\ell}$.

Tvrdimo da su I_A i $\mathcal{H}_\ell^{e\leq\overline{\ell}}$ formalno disjunktni. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $i \in \mathbb{N}$, $e \leq i \leq \overline{\ell}$ takav da I_A i C_i nisu formalno disjunktni. Tada postoji $j \in [(\ell)_i]$ takav da vrijedi $d(\lambda_A, \lambda_j) \leq \rho_A + \rho_j$. Uočimo da prema konstrukciji od $\mathcal{H}_\ell$ svaka karika lanca $\mathcal{H}_\ell^{e\leq\overline{\ell}}$ siječe $f([0,\infty\rangle)$. Stoga postoji $y \in C_i \cap f([0,\infty\rangle)$. Sada je prema nejednakosti trokuta

$$\begin{aligned} d(I_A, f[0,\infty\rangle) &\leq d(f(-\delta), y) \\ &\leq d(f(-\delta), \lambda_A) + d(\lambda_A, \lambda_j) + d(\lambda_j, y) \\ &\leq 2\rho_A + \rho_j + \operatorname{diam} C_i < \frac{2^{-k_0}}{2} + 2\varepsilon < 2^{-k_0} \end{aligned}$$

što je kontradikcija s (8.2.1). Dakle, I_A i $\mathcal{H}_\ell^{e\leq\overline{\ell}}$ su formalno disjunktni. Na sličan način se pokaže da su I_B i $\mathcal{H}_\ell^{0\leq e}$ formalno disjunktni. Također, koristeći (8.2.4) može se pokazati da su I_C i J_u formalno disjunktni.

Iz definicije brojeva p i q možemo zaključiti da vrijedi

$$[-r, r] \subseteq \bigcup_{p\leq i\leq q} [iD' - r', (i+1)D' - r']$$

što nam daje

$$f([-r,r]) \subseteq \bigcup_{p\leq i\leq q} f([iD' - r', (i+1)D' - r']) = \bigcup_{p\leq i\leq q} g([iD', (i+1)D']) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{p\leq q}.$$

Stoga

$$S_n \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{p\leq q}.$$

Tvrdimo da je čitav lanac $\mathcal{H}_\ell^{p\leq q}$ formalno sadržan u $B(a,m)$. To je ekvivalentno tvrdnji da je svaka karika C_i, $p \leq i \leq q$ tog lanca formalno sadržana u $B(a,m)$. Neka je C_i karika lanca $\mathcal{H}_\ell^{p\leq q}$. Dovoljno je pokazati da je $I_{k'}$ formalno sadržan u $B(a,m)$ odnosno $d(\lambda_{k'}, a) + \rho_{k'} < m$, za svaki $k' \in [(\ell)_i]$. Neka je i takav da vrijedi $p \leq i \leq q$. Dokažimo najprije da vrijedi $C_i \cap f([-r,r]) \neq \emptyset$. Dovoljno je provjeriti da je

$$[iD' - r', (i+1)D' - r'] \cap [-r, r] \neq \emptyset.$$

Za $i = p$ ovaj presjek sadrži $-r$ a za $i = q$ on sadrži r. Ako je $p < i$, tada je $p + 1 \leq i$ i $(p+1)D' - r' \leq iD' - r'$ što povlači da je $-r \leq iD' - r'$. Na analogan način dobivamo da $i < q$ povlači $(i+1)D' - r' \leq r$. Stoga, ako je i između p i q, tada je segment

$[iD' - r', (i+1)D' - r']$ sadržan u $[-r, r]$. Neka je $k' \in [(\ell)_i]$. Želimo pokazati da je $I_{k'}$ formalno sadržan u $B(a, m)$. Najprije uočimo da vrijedi $\operatorname{fdiam}(\ell)_i < \mu$ za svaki $i \in \left\{0, \ldots, \overline{\ell}\right\}$. Zaista, neka je $i \in \left\{0, \ldots, \overline{\ell}\right\}$ tada je

$$\operatorname{fdiam}((\ell)_{\mathrm{i}}) \leq \operatorname{fmesh}(\ell) < \varepsilon < \mu. \tag{8.2.5}$$

Jer C_i siječe $f([-r, r])$, postoji $b \in C_i$ takav da je $b \in f([-r, r])$. Tada je

$$d(\lambda_{k'}, b) \leq \operatorname{diam}(C_i) \leq \operatorname{fdiam}((\ell)_i) \text{ i } \rho_{k'} \leq \operatorname{fdiam}((\ell)_i).$$

Sada prema nejednakosti trokuta, i zbog (8.2.5) imamo

$$d(\lambda_{k'}, a) + \rho_{k'} \leq d(\lambda_{k'}, b) + d(b, a) + \rho_{k'} < D + 2\operatorname{fdiam}((\ell)_i) < D + 2\mu = m.$$

Stoga je $d(\lambda_{k'}, a) + \rho_{k'} < m$ i $I_{k'}$ odnosno $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ je zaista formalno sadržan u $B(a, m)$.

Ovime smo pokazali da za zadane $n, k \in \mathbb{N}$ uvijek možemo pronaći brojeve $m, \ell, p, q, e, u \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi

1. $\mathcal{H}_\ell$ je formalni lanac;
2. $\mathcal{H}_\ell$ i J_u su formalno disjunktni;
3. $S_n \cup F_n \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{p \leq q} \cup J_u$;
4. $S_m \cup F_m \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell \cup J_u$;
5. $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ je formalno sadržan u $B(a, m)$;
6. $p < e < q < \overline{\ell}$ i $m \geq 1$;
7. $\operatorname{fmesh}(\ell) < 2^{-(k+k_0)}$;
8. I_A i $\mathcal{H}_\ell^{e \leq \overline{\ell}}$ su formalno disjunktni;
9. I_B i $\mathcal{H}_\ell^{0 \leq e}$ su formalno disjunktni.
10. I_C i J_u su formalno disjunktni;

Promotrimo sada skup

$$\begin{aligned} T_1 = \{&(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : \\ &\text{za } n, k, m, \ell, p, q, e, u \text{ vrijede svojstva 1 do 10}\}. \end{aligned}$$

Tvrdimo da je T_1 rekurzivno prebrojiv kao presjek rekurzivno prebrojivih skupova. U svrhu dokazivanja te tvrdnje definiramo redom skupove

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{\ell \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_\ell \text{ je formalni lanac}\};\\
\Omega_2 &= \{(\ell, u) : \mathcal{H}_\ell \text{ i } J_u \text{ su formalno disjunktni}\};\\
\Omega_3 &= \{(n, \ell, p, q, u) \in \mathbb{N}^5 : S_n \cup F_n \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{p\leq q} \cup J_u\};\\
\Omega_4 &= \{(m, \ell, u) \in \mathbb{N}^3 : S_m \cup F_m \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell \cup J_u\};\\
\Omega_5 &= \{(m, \ell, p, q) \in \mathbb{N}^4 : \mathcal{H}_\ell^{p\leq q} \text{ je formalno sadržan u } B(a, m)\};\\
\Omega_6 &= \{(\ell, p, e, q, m) \in \mathbb{N}^5 : p < e < q < \overline{\ell} \text{ i } m \geq 1\};\\
\Omega_7 &= \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 : \text{fmesh}(\ell) < 2^{-(k+k_0)}\};\\
\Omega_8 &= \{(e, \ell) \in \mathbb{N}^2 : I_A \text{ i } \mathcal{H}_\ell^{e\leq\overline{\ell}} \text{ su formalno disjunktni}\};\\
\Omega_9 &= \{(e, \ell) \in \mathbb{N}^2 : I_B \text{ i } \mathcal{H}_\ell^{0\leq e} \text{ su formalno disjunktni}\};\\
\Omega_{10} &= \{u \in \mathbb{N} : I_C \text{ i } J_u \text{ su formalno disjunktni}\};
\end{aligned}$$

Pritom u slučaju $p > q$ smatramo da je $\bigcup \mathcal{H}_\ell^{p\leq q} = \emptyset$.

Za skupove Ω_k, $k = 1, \dots, 10$ dokazujemo redom da su rekurzivno prebrojivi.

Skup Ω_1 je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 4.6 (4). Skup Ω_2 je rekurzivno prebrojiv prema lemi 4.6 (5). Dokažimo da je Ω_3 rekurzivno prebrojiv. Neka je $w \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $((w), \dots, (w)_{\overline{w}}) = ((\ell)_p, \dots, (\ell)_q, u)$. Imamo

$$\bigcup \mathcal{H}_\ell^{p\leq q} \cup J_u = \bigcup_{i\in\{(\ell)_p,\dots,(\ell)_q\}\cup\{u\}} J_i = \bigcup_{i\in[w]} J_i = \bigcup \mathcal{H}_w.$$

Definiramo skup

$$V = \{(u, \ell, p, q, w) \in \mathbb{N}^5 : ((w), \dots, (w)_{\overline{w}}) = ((\ell)_p, \dots, (\ell)_q, u)\}$$

pri čemu uzimamo $((\ell)_p, \dots, (\ell)_q, u) = (u)$ ako je $p > q$. Skup V je rekurzivan pa stoga postoji funkcija $\phi : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$(u, \ell, p, q, \phi(u, \ell, p, q)) \in V, \quad \forall u, \ell, p, q \in \mathbb{N}.$$

Neka je $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $a = \alpha_{i_0}$. Neka je $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadana s

$$\psi(n) = \mu i[\alpha_i = \alpha_{i_0} \wedge \rho_i = n], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prema lemi 4.11 postoji funkcija $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$J_{\zeta(\ell)} = \bigcup \mathcal{H}_\ell, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo

$$\Omega_3 = \{(n, \ell, p, q, u) \in \mathbb{N}^5 : (S \cup F) \cap \widehat{I}_{\psi(n)} \subseteq J_{\zeta(\phi(u,\ell,p,q))}\}.$$

Sada se rekurzivna prebrojivost od Ω_3 dokazuje na isti način kao u dokazu teorema 7.3. Tvrdnja da je Ω_4 rekurzivno prebrojiv dokazuje se analogno.

Skup Ω_5 je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 4.4, tvrdnji (4). Skup Ω_6 je rekurzivan, karakteristična funkcija mu je

$$\chi_{\Omega_6}(\ell, p, e, q, m) = sg(e \dot{-} p) sg(q \dot{-} e) sg(\overline{\ell} \dot{-} q) sg(m),$$

za sve $\ell, p, e, q, m \in \mathbb{N}$, pa je i time on i rekurzivno prebrojiv. Skup Ω_7 je rekurzivno prebrojiv prema propozicijama 4.2 i 2.24. Skupovi Ω_8 i Ω_9 su rekurzivno prebrojivi što dobivamo primjenom propozicije 4.6 (6). Konačno, skup Ω_{10} je rekurzivno prebrojiv zbog propozicije 4.6 (2).

Definirajmo sada redom skupove

$$\begin{aligned}
\Omega'_1 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : \ell \in \Omega_1\Big\}\,;\\
\Omega'_2 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : (\ell, u) \in \Omega_2\Big\}\,;\\
\Omega'_3 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : (n, \ell, p, q, u) \in \Omega_3\Big\}\,;\\
\Omega'_4 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : (m, \ell, u) \in \Omega_4\Big\}\,;\\
\Omega'_5 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : (m, \ell, p, q) \in \Omega_5\Big\}\,;\\
\Omega'_6 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : (\ell, p, e, q, m) \in \Omega_6\Big\}\,;\\
\Omega'_7 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : (k, \ell) \in \Omega_7\Big\}\,;\\
\Omega'_8 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : (e, \ell) \in \Omega_8\Big\}\,;\\
\Omega'_9 &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : (e, \ell) \in \Omega_9\Big\}\,;\\
\Omega'_{10} &= \Big\{(n, k, m, \ell, p, q, e, u) \in \mathbb{N}^8 : u \in \Omega_{10}\Big\}\,;
\end{aligned}$$

Primjenom propozicije 2.6 lako dobivamo da je tada Ω'_i rekurzivno prebrojiv za svaki $i \in \{1, \ldots, 10\}$. Sada se lako vidi da vrijedi

$$T_1 = \bigcap_{k=1}^{10} \Omega'_k.$$

Dakle, T_1 je rekurzivno prebrojiv kao presjek rekurzivno prebrojivih skupova.

Primijetimo da na ovom popisu nemamo uvjet "svaka karika lanca $\mathcal{H}_\ell^{p\leq q}$ siječe S". To je iz razloga što taj uvjet ne možemo efektivno provjeriti.

Skup T_1 je rekurzivno prebrojiv pa zaključujemo da postoji rekurzivna funkcija $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^6$ takva da vrijedi

$$(n, k, \phi(n, k)) \in T \tag{8.2.6}$$

za sve $n, k \in \mathbb{N}$. Ovime zaključujemo prvi dio dokaza.

U nastavku želimo pokazati da ako imamo brojeve $m, \ell, p, q, e \in \mathbb{N}$ takve da vrijede svojstva 1 do 10, tada svaka karika od $\mathcal{H}_\ell^{p\leq q}$ siječe S. Pritom možemo uzeti $n \geq 1$. Za $i \in \{0, \dots, \overline{\ell}\}$ neka je $C_i = J_{(\ell)_i}$, odnosno

$$\mathcal{H}_\ell = (C_0, \dots, C_{\overline{\ell}}).$$

Prvo dokazujemo sljedeće: ako su $t, s \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $t \leq 0 \leq s$, tada vrijedi

1. $f([t, s]) \subseteq \widehat{B}(a, m)$ povlači $f([t, s]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell$;
2. $f([t, s]) \subseteq \widehat{B}(a, n)$ povlači $f([t, s]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{p\leq q}$.

Ako je $f([t, s]) \subseteq \widehat{B}(a, m)$, tada je $f([t, s]) \subseteq S_m$ i prema svojstvu 4 imamo

$$f([t, s]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell \cup J_u$$

te su $\bigcup \mathcal{H}_\ell$ i J_u formalno disjunktni prema svojstvu 2. Skup $f([t, s])$ je povezan, pa stoga mora u cijelosti biti sadržan u jednom od ovih skupova. No, to ne može biti J_u jer je $f(0) \in f([t, s])$ i $f(0)$ pripada I_C koji je prema svojstvu 10 disjunktan s J_u. Stoga je $f([t, s]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell$. Na analogan način se pokaže da $f([t, s]) \subseteq \widehat{B}(a, n)$ povlači $f([t, s]) \subseteq \bigcup \mathcal{H}_\ell^{p\leq q}$.

Zbog $f([-\delta, \delta]) \subseteq B(a, 1) \subseteq B(a, m)$ se $f(-\delta)$ i $f(\delta)$ nalaze u nekim karikama $C_{\tilde{\alpha}}$ i $C_{\tilde{\beta}}$ respektivno, pri čemu su $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \{0, \dots, \overline{\ell}\}$.

Primjenom propozicije 7.2 na funkcije $h_1, h_2 : [0, \infty\rangle \to X$ definirane sa

$$h_1(t) = f(t);$$
$$h_2(t) = f(-t), \ \forall t \in [0, \infty\rangle$$

zaključujemo da postoje brojevi

$$t_0 = \min\{t \in [0, \infty\rangle : d(a, f(t)) = m\};$$
$$s_0 = \min\{s \in [0, \infty\rangle : d(a, f(-s)) = m\}.$$

Uočimo da vrijedi $t_0 > 0$ i $s_0 > 0$ jer u protivnom bi imali kontradikciju s $d(a, f(0)) < 1$. Naime, ako bi imali $t_0 = 0$ tada bi imali $f(0) \notin B(a, m)$, što je kontradikcija s $f(0) \in B(a, 1) \subseteq B(a, m)$. Dakle, mora biti $t_0 > 0$. Slično se pokaže da mora biti $s_0 > 0$. Točke $f(-s_0)$ i $f(t_0)$ su u nekim karikama C_v i C_w od $\mathcal{H}_\ell$ tj. $f(-s_0) \in C_v$ i $f(t_0) \in C_w$. Jasno, niti C_v niti C_w nije formalno sadržana u $B(a, m)$ jer su $f(-s_0), f(t_0) \in \widehat{B}(a, m) \setminus B(a, m)$.

Tvrdimo da vrijedi $p - 1 \leq \tilde{\alpha} < e$ i $e < \tilde{\beta} \leq q + 1$.

Dokažimo $p \leq \tilde{\alpha} + 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. $p > \tilde{\alpha} + 1$. Tada je $p > \tilde{\alpha} + 1$ i $\tilde{\alpha}+1 < p < q$. Karika $C_{\tilde{\alpha}}$ je tada disjunktna s karikama $C_p, \dots, C_q$. No vrijedi, $f([-\delta, \delta]) \subseteq B(a, n)$ jer je $n \geq 1$ i $f(-\delta) \in C_p \cup \cdots \cup C_q$, a prema definiciji od $\tilde{\alpha}$ je $f(-\delta) \in C_{\tilde{\alpha}}$, što je kontradikcija. Dakle, $p \leq \tilde{\alpha} + 1$.

Tvrdimo da je $\tilde{\alpha} < e$. Pretpostavimo suprotno, da vrijedi $\tilde{\alpha} \geq e$. Tada se karika $C_{\tilde{\alpha}}$ nalazi među karikama $C_e, \dots, C_{\overline{\ell}}$ i vrijedi $f(-\delta) \in C_{\tilde{\alpha}}$. S druge strane, $f(-\delta) \in I_A$, no ovo je sada kontradikcija sa svojstvom 8. Dakle, mora biti $\tilde{\alpha} < e$. Ukupno, imamo da vrijedi

$$p - 1 \leq \tilde{\alpha} < e. \tag{8.2.7}$$

Dokažimo $e < \tilde{\beta} \leq q + 1$. Dokazujemo prvo da vrijedi $e < \tilde{\beta}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $e \geq \tilde{\beta}$. Tada se karika $C_{\tilde{\beta}}$ nalazi među karikama $C_0, \dots, C_e$ i vrijedi $f(\delta) \in C_{\tilde{\beta}}$. S druge strane imamo $f(\delta) \in I_B$, što daje kontradikciju sa svojstvom 9. Zaključak: $e < \tilde{\beta}$.

Dokažimo $\tilde{\beta} \leq q + 1$. Pretpostavimo da vrijedi $\tilde{\beta} > q + 1$. Tada je karika $C_{\tilde{\beta}}$ je disjunktna s karikama $C_p, \dots, C_q$ a one pokrivaju S_n pa time i $f(\delta) \in C_{\tilde{\beta}}$ što je kontradikcija. Dakle mora biti $\tilde{\beta} \leq q + 1$. Ovime smo pokazali da vrijedi

$$e < \tilde{\beta} \leq q + 1. \tag{8.2.8}$$

Tvrdimo sada da je $v < p$ i $q < w$. Dokažimo najprije da je $v < p$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $p \leq v$. Tada imamo dva slučaja: $p = v$ i $p < v$.

Promotrimo prvi slučaj, kada je $p = v$. Znamo da je čitav $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ sadržan u $B(a, m)$, pa je specijalno i C_p sadržan u $B(a, m)$. No, zbog $p = v$ imamo da je i C_v sadržan u

$B(a,m)$ što nas vodi na kontradikciju jer je $f(-s_0) \in C_v$ a prema definiciji od s_0 je $f(-s_0) \notin B(a,m)$.

Promotrimo sada drugi slučaj, kada je $p < v$. No tada je i $q < v$. U protivnom, ako bi imali $q \geq v$, tada za slučaj $q = v$ dobijemo da zbog pretpostvke da je $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ formalno sadržan u $B(a,m)$ je i C_v čitava sadržana u $B(a,m)$, što nije jer $f(-s_0) \in C_v$, a $f(-s_0) \notin B(a,m)$. Ako je $q > v$, tada zajedno s $p < v$ imamo $p < v < q$. Čitav $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ je sadržan u $B(a,m)$. No zbog $p < v < q$ slijedi da je i C_v sadržan u $B(a,m)$. No, zbog $f(-s_0) \in C_v$ i $f(-s_0) \notin B(a,m)$ to je kontradikcija. Stoga, mora biti $q < v$. Ukupno, imamo $p < q < v$. Dakle, $q < v$ odnosno $q+1 \leq v$, pa imamo zbog $\tilde{\beta} \leq q+1$ da je također i $\tilde{\beta} \leq v$. No, $\tilde{\beta} \neq v$ jer u slučaju $\tilde{\beta} = v$ je

$$d(f(-s_0), f(\delta)) < \text{diam } C_v \leq 2^{-k_0}$$

što je kontradikcija s (8.2.1). Zaključujemo da je $\tilde{\beta} < v$ odnosno $\tilde{\beta} + 1 \leq v$.

Tvrdimo sada da vrijedi

$$f([-s_0, -\delta]) \cap C_{\tilde{\beta}} = \emptyset.$$

U suprotnom, postoji $y \in f([-s_0, -\delta]) \cap C_{\tilde{\beta}}$ i imamo ocjenu

$$\begin{aligned} d(I_B, f(\langle -\infty, 0])) &\leq d(f(\delta), f(\langle -\infty, 0])) \\ &\leq d(f(\delta), f([-s_0, -\delta])) \leq d(f(\delta), y) \leq \text{diam } C_{\tilde{\beta}} < 2^{-k_0} \end{aligned}$$

što je kontradikcija s (8.2.1). Dakle, mora vrijediti

$$f([-s_0, -\delta]) \cap C_{\tilde{\beta}} = \emptyset. \tag{8.2.9}$$

Definiramo skupove U i V sa

$$U = \bigcup_{0 \leq i \leq \tilde{\beta}-1} C_i, \quad V = \bigcup_{\tilde{\beta}+1 \leq i \leq \overline{\ell}} C_i.$$

Čitav lanac $\mathcal{H}_\ell$ pokriva $f([-s_0, -\delta])$ te vrijedi (8.2.9), pa je stoga

$$f([-s_0, -\delta]) \subseteq U \cup V. \tag{8.2.10}$$

Zbog $f(-\delta) \in C_{\tilde{\alpha}}$ i $\tilde{\alpha} < e < \tilde{\beta}$ je

$$f([-s_0, -\delta]) \cap U \neq \emptyset. \tag{8.2.11}$$

Nadalje, zbog $f(-s_0) \in C_v$ i $\tilde{\beta} < v$ je

$$f([-s_0, -\delta]) \cap V \neq \emptyset. \tag{8.2.12}$$

Zbog pretpostavke $|i - i'| > 1 \implies C_i$ i $C_{i'}$ su formalno disjunktni, vrijedi da su C_i i $C_{i'}$ disjunktni kad god su $i, i' \in \{0, \ldots, \overline{\ell}\}$ takvi da vrijedi $i < \tilde{\beta} < i'$. Stoga zaključujemo da vrijedi

$$U \cap V = \emptyset. \tag{8.2.13}$$

Dakle iz (8.2.10), (8.2.11), (8.2.12) i (8.2.13) slijedi da $f([-s_0, -\delta])$ nije povezan, što je kontradikcija. Zaključak: $v < p$.

Dokažimo $q < w$. Pretpostavimo suprotno, tj. $q \geq w$. Dva su slučaja: $q = w$ i $q > w$. U slučaju kada je $q = w$ imamo zbog pretpostavke da je $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ formalno sadržan u $B(a, m)$ da je i C_q sadržan u $B(a, m)$ pa zbog $q = w$ slijedi C_w sadržan u $B(a, m)$. No tada je zbog $f(t_0) \in C_w$ i $f(t_0) \in B(a, m)$, a prema definiciji od t_0 vrijedi $f(t_0) \notin B(a, m)$. Kontradikcija.

U slučaju $q > w$, slijedi da je i $p > w$. U suprotnom vrijedi $p \leq w$. Tada imamo dva slučaja $p = w$ i $p < w$. Ako je $p = w$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ formalno sadržan u $B(a, m)$ imamo da je i C_p formalno sadržan u $B(a, m)$. Zajedno s $p = w$ imamo da je i C_w sadržan u $B(a, m)$, što je kontradikcija.

Promotrimo slučaj $p < w$. Tada zajedno s $q > w$ imamo $p < w < q$. Sada ponovo, zbog pretpostavke da je $\mathcal{H}_\ell^{p \leq q}$ čitav sadržan u $B(a, m)$ imamo zbog $p < w < q$ da je i C_w sadržana u $B(a, m)$. Posebno je i $f(t_0) \in C_w \subseteq B(a, m)$, što je kontradikcija s definicijom od t_0. Ukupno, imamo $w < p < q$. Dakle, $w < p$ odnosno $w \leq p - 1$, pa imamo zbog $p - 1 \leq \tilde{\alpha}$ da je $w \leq \tilde{\alpha}$. U slučaju kada je $w = \tilde{\alpha}$ imamo

$$d(f(-\delta), f(t_0)) < \operatorname{diam} C_w \leq 2^{-k_0}$$

što je kontradikcija. Dakle, vrijedi $w < \tilde{\alpha}$.

Tvrdimo sada da mora vrijediti $f([\delta, t_0]) \cap C_{\tilde{\alpha}} = \emptyset$. Naime, pretpostavimo suprotno, tj. $f([\delta, t_0]) \cap C_{\tilde{\alpha}} \neq \emptyset$. Neka je $y \in f([\delta, t_0]) \cap C_{\tilde{\alpha}}$. Imamo sada ocjenu

$$\begin{aligned} d(I_A, f([0, \infty\rangle)) &\leq d(f(-\delta), f([0, \infty\rangle)) \\ &\leq d(f(-\delta), f([\delta, t_0])) \leq d(f(-\delta), y) \leq \operatorname{diam} C_{\tilde{\alpha}} < 2^{-k_0} \end{aligned}$$

što je kontradikcija s odabirom skupa I_A. Dakle, zaista mora vrijediti

$$f([\delta, t_0]) \cap C_{\tilde{\alpha}} = \emptyset.$$

Definiramo skupove

$$U = \bigcup_{0 \le i \le \tilde{\alpha}-1} C_i, \quad V = \bigcup_{\tilde{\alpha}+1 \le i \le \bar{\ell}} C_i.$$

Čitav lanac $\mathcal{H}_\ell$ pokriva $f([-s_0, t_0])$ i vrijedi $f([\delta, t_0]) \cap C_{\tilde{\alpha}} = \emptyset$, pa je stoga $f([\delta, t_0]) \subseteq U \cup V$. Zbog $f(t_0) \in C_w$ i $w < \tilde{\alpha}$ je $f([\delta, t_0]) \cap U \neq \emptyset$. Nadalje, zbog $f(\delta) \in C_{\tilde{\beta}}$ i $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ je $f([\delta, t_0]) \cap V \neq \emptyset$. Zbog pretpostavke $|i - i'| > 1 \implies C_i$ i $C_{i'}$ su formalno disjunktni vrijedi da su C_i i $C_{i'}$ disjunktni kad god je $|i - i'| > 1$. Stoga zaključujemo da vrijedi $U \cap V = \emptyset$. Dakle, $f([\delta, t_0])$ nije povezan, što je kontradikcija. Zaključak: $q < w$.

Rezimirajmo, dokazali smo da vrijedi

$$v < p < q < w.$$

Iz ovoga sada lako možemo zaključiti da svaka karika lanca $\mathcal{H}_\ell^{p \le q}$ siječe S. Naime, neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $p \le i \le q$. Tada je $v < i < w$ i pretpostavimo da C_i ne siječe S. Tada su skupovi

$$U = C_0 \cup \cdots \cup C_{i-1} \text{ i } V = C_{i+1} \cup \cdots \cup C_{\bar{\ell}}$$

takvi da $f([s_0, t_0]) \subseteq U \cup V$ i $U \cap V = \emptyset$ te zbog $f(-s_0) \in C_v$, $f(t_0) \in C_w$ i $v < p < q < w$ oba ta skupa sijeku $f([s_0, t_0])$, što je kontradikcija s povezanošću od $f([s_0, t_0])$. Dakle, svaka karika lanca $\mathcal{H}_\ell^{p \le q}$ siječe S (pod pretpostavkom da je $n \ge 1$).

Sada lako možemo zaključiti da je S rekurzivno prebrojiv u $(X, d, \tilde{\alpha})$. Neka su $\tilde{m}$, $\tilde{\ell}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{e}$, $\tilde{u} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od ϕ iz (8.2.6). Ako je $c \in S$, tada je $c \in f([-t, t])$ za neki $t \ge 0$. Odaberemo $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$ takav da je $f([-t, t]) \subseteq B(a, n)$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka karika lanca $\mathcal{H}_{\tilde{\ell}(n,k)}^{\tilde{p}(n,k) \le \tilde{q}(n,k)}$ sadrži c.

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da vrijedi $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoje $n, k, w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$\tilde{p}(n,k) \le w \le \tilde{q}(n,k), n \ge 1 \text{ i } J_{(\tilde{\ell}(n,k))_w} \subseteq_F I_i. \tag{8.2.14}$$

Neka je $I_i \cap S \neq \emptyset$. Neka je $c \in I_i \cap S$. Tada prema lemi 4.5 zaključujemo da postoje $n, k \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$ takvi da c pripada nekoj karici od $\mathcal{H}_{\tilde{\ell}(n,k)}^{\tilde{p}(n,k) \le \tilde{q}(n,k)}$ koja je formalno sadržana u I_i. Stoga postoji $w \in \mathbb{N}$ takav da

$$\tilde{p}(n,k) \leq w \leq \tilde{q}(n,k) \text{ i } J_{(\tilde{\ell}(n,k))_w} \subseteq_F I_i. \tag{8.2.15}$$

Obratno, ako (8.2.15) vrijedi za neke $n, k, w \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ tada imamo $J_{(\tilde{\ell}(n,k))_w} \subseteq I_i$ što zajedno s $J_{(\tilde{\ell}(n,k))_w} \cap S \neq \emptyset$ povlači $I_i \cap S \neq \emptyset$. Stoga, $I_i \cap S \neq \emptyset$ ako i samo ako postoje $n, k, w \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi (8.2.15). Sada iz propozicije 4.3 (2) slijedi da je skup $\{i \in \mathbb{N} : I_i \cap S \neq \emptyset\}$ rekurzivno prebrojiv, odnosno skup S je rekurzivno prebrojivo zatvoren. $\square$

U slučaju da je $F = \emptyset$ imamo sljedeći korolar.

Korolar 8.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je S topološka linija u tom prostoru koja je poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama. Tada je S izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama.* $\square$

U slučaju kada je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor sa svojstvom efektivnog pokrivanja i koji ima kompaktne zatvorene kugle, imamo sljedeći korolar.

Korolar 8.4. *Neka je (X, d, α) izračunljivi metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle i svojstvo efektivnog pokrivanja. Neka je $S \subseteq X$ korekurzivno prebrojivo zatvoren skup u (X, d, α) koji je homeomorfan $\mathbb{R}$. Tada je S izračunljivo zatvoren.* $\square$

Poglavlje 9

Dodatni uvjeti na ambijentni prostor

Koristeći poopćenje izračunljivo kompaktnih skupova iz poglavlja 6 pokazuje se da, ako umjesto korekurzivno prebrojivih skupova gledamo poluizračunljivo kompaktne skupove na zatvorenim kuglama, možemo ispustiti svojstvo efektivnog pokrivanja te uvjet da ambijentni prostor ima kompaktne zatvorene kugle.

Neka je sada (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja te koji ima kompaktne zatvorene kugle. U poglavlju 7 dokazali smo korolar 7.5 koji tvrdi da je u takvom prostoru svaka korekurzivno prebrojiva topološka zraka s izračunljivom krajnjom točkom izračunljiva. Također smo u poglavlju 8 dokazali korolar 8.4 koji tvrdi da je u takvom prostoru svaka korekurzivno prebrojiva topološka linija izračunljiva.

Međutim, postoje još dva slučaja. Pitamo se što možemo zaključiti u slučaju kada izračunljiv metrički prostor ima točno jedno od tih dvaju svojstava. U ovom poglavlju ćemo pokazati da ako zahtijevamo dodatne uvjete na prostor da su tada zaista oba uvjeta nužna, odnosno moraju doći u paru kako bi dobili zaključke kao u korolaru 7.5 odnosno 8.4.

Preciznije, u iskazu tvrdnje korolara 7.5 i 8.4 oba uvjeta na izračunljiv metrički prostor su nužni i kao kontraprimjere konstruiramo prostore (X, d, α) koji zadovoljavaju točno jedno od tih svojstava te primjere $S \subseteq X$ takve da je S topološka zraka ili topološka linija ali za koje *ne* vrijedi implikacija

$$S \text{ korekurzivno prebrojivo zatvoren} \implies S \text{ izračunljivo zatvoren.} \tag{9.0.1}$$

9.1 Nužnost svojstva efektivnog pokrivanja uz kompaktne zatvorene kugle

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija takva da vrijedi $f(0) = 0$ i $f(i+1) > f(i)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ i takva da vrijedi $\lim f(i) = b$ pri čemu je $b \in \mathbb{R}$ neizračunljiv broj. Primjer konstrukcije takve funkcije može se naći u [8].

Neka je $X = \mathbb{R}^2$, α niz iz primjera 2.18 (za $n = 2$) te metrika $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Tada je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Naime, $d(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{Q}$ za svaki $i, j \in \mathbb{N}$ pa je stoga funkcija $F : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{Q}$ zadana s

$$F(i, j, k) = d(\alpha_i, \alpha_j), \quad \forall i, j, k \in \mathbb{N}.$$

dobro definirana, te vrijedi da je F izračunljiva aproksimacija od $(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$.

Primjer 9.1. Neka je $Y = [0, \infty\rangle \times [0, b]$. Neka je d' metrika na Y zadana s

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in Y. \tag{9.1.1}$$

Neka je $q_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiv niz racionalnih brojeva takav da vrijedi $\mathrm{Im}\, q_1 = \mathbb{Q} \cap [0, \infty\rangle$. Nadalje, neka je $q_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiv niz racionalnih brojeva takav da vrijedi $\mathrm{Im}\, q_2 = \mathbb{Q} \cap [0, b]$. Konstrukcija takvog niza može se pronaći u [8].

Neka je $\beta : \mathbb{N} \to Y$ niz definiran s

$$\beta(i) = (q_1(\langle i \rangle_0), q_2(\langle i \rangle_1)), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je β gust niz u Y i funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $(i, j) \mapsto d(\beta_i, \beta_j)$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$, je izračunljiva. Dakle, (Y, d', β) je izračunljiv metrički prostor kao izračunljivi metrički potprostor od (X, d, α).

Neka je

$$S = (\{0\} \times [0, b]) \cup ([0, \infty\rangle \times \{b\}).$$

Tada je $S \subseteq Y$ i vrijedi

$$Y \setminus S = \langle 0, \infty\rangle \times [0, b\rangle. \tag{9.1.2}$$

Dokažimo da vrijedi

$$Y \setminus S = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} B(((i+1)f(j+1), 0), f(j+1)). \tag{9.1.3}$$

Neka je najprije $y = (y_1, y_2) \in Y \setminus S$. Tada zbog (9.1.2) vrijedi $y_1 > 0$ i $0 \leq y_2 < b$. Prema definiciji od f imamo $\lim_j f(j) = b$ pa je stoga

$$\lim_j if(j) = ib, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{9.1.4}$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$ib \leq y_1 < (i+1)b. \tag{9.1.5}$$

Iz (9.1.4) slijedi da postoji $j_1 \in \mathbb{N}$ takav da

$$(i+1)f(j_1+1) > y_1. \tag{9.1.6}$$

Nadalje, iz (9.1.4) i pretpostavke $0 \leq y_2 < b$ slijedi da postoji $j_2 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$f(j_2+1) > y_2. \tag{9.1.7}$$

Stavimo $j = \max\{j_1, j_2\}$. Sada prema definiciji od f imamo $f(j) \geq f(j_1)$ i $f(j) \geq f(j_2)$. Neka je M definiran sa

$$M = \max\{|(i+1)f(j+1) - y_1|, |y_2|\}.$$

Imamo dva slučaja. U prvom slučaju je $M = |(i+1)f(j+1) - y_1|$. Tada zbog (9.1.6) imamo $M = (i+1)f(j+1) - y_1$, a zbog (9.1.5) imamo $M < f(j+1)$.

U drugom slučaju je $M = |y_2|$. Tada zbog pretpostavke da je $0 \leq y_2 < b$ imamo $M = y_2$, a zbog (9.1.7) i $f(j+1) \geq f(j_2+1)$ imamo $M < f(j+1)$. U oba slučaja dobili smo da je $M < f(j+1)$, pa je stoga $y \in B(((i+1)f(j+1), 0), f(j+1))$ iz čega slijedi

$$Y \setminus S \subseteq \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} B(((i+1)f(j+1), 0), f(j+1)). \tag{9.1.8}$$

Obratno, neka je $y = (y_1, y_2) \in \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} B(((i+1)f(j+1), 0), f(j+1))$ odnosno $y \in B(((i+1)f(j+1), 0), f(j+1))$ za neke $i, j \in \mathbb{N}$. Tada je $\max\{|(i+1)f(j+1) - y_1|, |y_2|\} < f(j+1)$, a zbog $y \in Y$ imamo $y_1 \geq 0$ i $0 \leq y_2 \leq b$. No, sada je $y_1 > 0$ jer bi u protivnom iz $y_1 = 0$ imali $(i+1)f(j+1) < f(j+1)$ što je kontradikcija. Nadalje, mora vrijediti $y_2 < b$ jer u slučaju $y_2 = b$ bi imali $b < f(j+1)$, što je ponovo kontradikcija. Stoga zaključujemo da vrijedi $y \in \langle 0, \infty\rangle \times [0, b\rangle$, odnosno prema (9.1.2) $y \in Y \setminus S$. Sada iz ovog i (9.1.8) zaključujemo da vrijedi (9.1.3).

Neka je W skup

$$W = \{i \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N}\ (\lambda_i, \rho_i) = ((((\langle j\rangle_0 + 1)f(\langle j\rangle_1 + 1), 0), f(\langle j\rangle_1 + 1))\}.$$

Iz propozicije 2.7 svojstva (1) imamo da je W rekurzivno prebrojiv skup. Iz (9.1.3) slijedi

$$Y \setminus S = \bigcup_{i \in W} I_i.$$

Stoga je S korekurzivno prebrojiv u (Y, d', β).

Tvrdimo da S nije rekurzivno prebrojiv. Kada bi S bio rekurzivno prebrojiv tada bi zajedno sa činjenicom da je on korekurzivno prebrojiv imali da je on izračunljiv. Međutim, jer je Y zatvoren u $\mathbb{R}^2$, slijedi da je Y potpun. Prema članku [8] svaki izračunljiv podskup potpunog izračunljivog metričkog prostora sadrži gust izračunljiv niz. U tom slučaju, jer je S zatvoren, u S bi postojao gust izračunljiv niz (t_i). Odnosno (t_i) je izračunljiv niz u $\mathbb{R}^2$ prema propoziciji 3.1 i takav da vrijedi $t_i \in S$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Stoga, jer je $t_i \in \mathbb{R}^2$ imamo $t_i = (x_i, y_i)$ pri čemu su $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ izračunljivi brojevi u $\mathbb{R}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Sada, iz $t_i \in S$ i zbog gustoće od (t_i) u S postoje $t_i = (x_i, y_i) \in [0, \infty\rangle \times \{b\}$ iz čega slijedi $y_i = b$ pa iz ovog, te izračunljivosti od y_i slijedi i izračunljivost od b što je kontradikcija.

Stoga zaključujemo da je (Y, d', β) izračunljiv metrički prostor koji nema svojstvo efektivnog pokrivanja ali ima kompaktne zatvorene kugle, te je S topološka zraka u Y čija je krajnja točka izračunljiva, a za koju ne vrijedi implikacija (9.0.1). □

Primjer 9.2. Neka je $Y = \mathbb{R} \times [0, b]$. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiv niz takav da vrijedi Im $q = \mathbb{Q}$. Neka je $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^2$ definirana sa

$$\beta(i) = (q(\langle i\rangle_0), f(\langle i\rangle_1)), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je β izračunljiv niz u Y takav da je funkcija $(i, j) \mapsto d'(\beta_i, \beta_j)$ izračunljiva, pri čemu je d' definirana s (9.1.1).

Neka je

$$S = \mathbb{R} \times \{b\}.$$

Tada je $S \subseteq Y$ i vrijedi

$$Y \setminus S = \mathbb{R} \times [0, b\rangle. \tag{9.1.9}$$

Neka je $y \in Y \setminus S$. Tada je $y = (y_1, y_2)$ pri čemu su $y_1 \in \mathbb{R}$ i $0 \leq y_2 < b$. Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $f(j+1) > y_2$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|y_1 - q(i)| < f(j+1)$. Tvrdimo da vrijedi $y \in B((q(i), 0), f(j+1))$ odnosno $M = \max\{|y_1 - q(i)|, |y_2|\} < f(j+1)$. Pretpostavimo najprije da je $M = |y_1 - q(i)|$. Tada prema odabiru broja i vrijedi $|y_1 - q(i)| < f(j+1)$.

U drugom slučaju je $M = |y_2|$. Tada zbog $0 \leq y_2 < b$ te $y_2 < f(j+1)$ vrijedi $|y_2| < f(j+1)$. Stoga, imamo $M < f(j+1)$, odnosno $y \in B((q(i), 0), f(j+1))$. Iz ovog zaključujemo

$$Y \setminus S \subseteq \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} B((q(i), 0), f(j+1)).$$

Obratno, neka je $y = (y_1, y_2) \in \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} B((q(i), 0), f(j+1))$. Tada je $y \in B((q(i), 0), f(j+1))$ za neke $i, j \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi $M = \max\{|y_1 - q(i)|, |y_2|\} < f(j+1)$. Prema definiciji funkcije f imamo

$$0 \leq f(j) < b, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{9.1.10}$$

Imamo dva slučaja. U prvom slučaju, neka je $M = |y_1 - q(i)|$. Tada je $|y_2| \leq |y_1 - q(i)| < f(j+1)$ iz čega zajedno s (9.1.10) slijedi $|y_2| < b$. Zajedno s $y \in Y$, slijedi $0 \leq y_2 < b$. U drugom slučaju je $M = |y_2|$. Tada je $|y_1 - q(i)| \leq |y_2| < f(j+1) < b$, što ponovo sa činjenicom da je $y \in Y$ povlači $0 \leq y_2 < b$. Nadalje, $y \in Y$ povlači $y_1 \in \mathbb{R}$. Ukupno, imamo $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times [0, b\rangle$. Zaključujemo da vrijedi

$$Y \setminus S = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} B((q(i), 0), f(j+1)). \tag{9.1.11}$$

Definiramo skup

$$Z = \{i' \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N} \ (\lambda_{i'}, \rho_{i'}) = ((q(\langle j \rangle_0), 0), f(\langle j \rangle_1 + 1))\}.$$

Iz (9.1.11) sada lako zaključujemo da vrijedi

$$Y \setminus S = \bigcup_{i' \in Z} I_{i'},$$

pa je stoga S korekurzivno prebrojiv u (Y, d', β).

Tvrdimo da S nije rekurzivno prebrojiv u (Y, d', β). Kada bi S bio rekurzivno prebrojiv tada bi bio izračunljiv i postojao bi izračunljiv gust niz (t_i) u S, odnosno (t_i) je izračunljiv niz u $\mathbb{R}^2$ prema propoziciji 3.1 i takav da vrijedi $t_i \in S$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Stoga, jer je $t_i \in \mathbb{R}^2$

imamo $t_i = (x_i, y_i)$ pri čemu su $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ izračunljivi brojevi u $\mathbb{R}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Sada, iz $t_i \in S$ slijedi $y_i = b$ pa je b izračunljiv broj što je kontradikcija.

Stoga zaključujemo da je (Y, d', β) izračunljiv metrički prostor koji nema svojstvo efektivnog pokrivanja ali ima kompaktne zatvorene kugle, te je S topološka linija u Y za koju ne vrijedi implikacija (9.0.1). $\square$

9.2 Nužnost kompaktnih zatvorenih kugala uz svojstvo efektivnog pokrivanja

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Kažemo da je funkcija f **efektivno uniformno neprekidna** ako postoji rekurzivna funkcija $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x, y \in S$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ iz $|x - y| < 2^{-\delta(k)}$ slijedi $|f(x) - f(y)| < 2^{-k}$. Neka su a i b izračunljivi realni brojevi takvi da je $a < b$. Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je **izračunljiva** ako je ona efektivno uniformno neprekidna te **sekvencijalno izračunljiva** odnosno $(f(x_i))$ je izračunljiv niz realnih brojeva za svaki izračunljiv niz realnih brojeva (x_i) koji je sadržan u $[a, b]$.

Neka je $X = C[0, 1]$, prostor neprekidnih funkcija na $[0, 1]$ s metrikom uniformne konvergencije

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \ \forall f, g \in C[0, 1].$$

Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo $\hat{\imath} = \max\{1, \bar{\imath}\}$. Neka je $\tilde{q} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ fiksirana izračunljiva surjekcija. Neka je $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana sa

1. $f_i\left(\frac{k}{\hat{\imath}}\right) = \tilde{q}_{(i)_k}, \ \forall k \in \{0, \ldots, \hat{\imath}\}$;

2. f_i je linearna na $\left[\frac{k}{\hat{\imath}}, \frac{k+1}{\hat{\imath}}\right], \ \forall k \in \{0, \ldots, \hat{\imath} - 1\}$.

Tada je (f_i) gust niz u $C[0, 1]$ i funkcija

$$(i, j) \mapsto d_\infty(f_i, f_j), \ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

je izračunljiva funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$. Stoga je $X' = (C[0, 1], d_\infty, (f_i))$ izračunljiv metrički prostor. Izračunljive točke u X' su upravo izračunljive funkcije $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Nadalje, X' ima svojstvo efektivnog pokrivanja. Dokaz navedenih tvrdnji se može pronaći u članku [8].

Uočimo da X nema kompaktne zatvorene kugle jer na primjer $\widehat{B}(0;1)$ nije sekvencijalno kompaktna. Kako bi to pokazali, definiramo niz funkcija:

$$g_n(t) = t^n, \ \forall t \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\{g_n\} \subseteq \widehat{B}(0,1)$ ali (g_n) nema konvergentan podniz u $\widehat{B}(0,1)$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je (g_{n_j}) podniz koji konvergira uniformno prema neprekidnoj funkciji $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Tada (g_{n_j}) konvergira i po točkama prema g. Neka je $t \in [0,1]$. Tada imamo $\lim g_{n_j}(t) = 0$ ako je $t \in [0,1\rangle$ i $\lim g_{n_j}(t) = 1$ za $t = 1$. Dakle (g_{n_j}) konvergira po točkama prema funkciji

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1\rangle; \\ 1, & t = 1; \end{cases}$$

koja nije neprekidna, što vodi na kontradikciju s neprekidnošću od g. Dakle, $\widehat{B}(0,1)$ nije sekvencijalno kompaktna pa stoga nije niti kompaktna.

Neka je $\tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je sekvencijalno izračunljiva ali nije izračunljiva i pritom vrijedi $\tilde{g}(x) \geq 0$ za svaki $x \in [0,1]$. Konstrukcija takve funkcije može se pronaći u [13].

Primjer 9.3. Definiramo skup

$$S = \{0 + t\tilde{g} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Tada je $S \subseteq X$ korekurzivno prebrojiv u X' ([8]). Pretpostavimo da je S rekurzivno prebrojiv u X'. Zbog potpunosti od X postoji izračunljiv gust niz u S ([8]). Neka je s_i element tog niza takav da je $s_i \neq 0$. Tada je $s_i = 0 + tg$ odnosno $s_i = tg$ za neki $t \neq 0$. Funkcija $g \neq 0$ pa postoji $x \in [0,1]$ takav da je $g(x) \neq 0$. Sada imamo $t = s_i(x)/g(x)$ odnosno t je kvocijent dva rekurzivna realna broja pa je stoga i on rekurzivan. Da pokažemo da je g izračunljiva, podijelimo s_i s t i analogno zaključimo da je $\frac{1}{t}s_i$ izračunljiva i $g = \frac{1}{t}s_i$ pa je stoga i g izračunljiva. No, to je kontradikcija sa svojstvom da je g sekvencijalno izračunljiva koja nije izračunljiva. Dakle, S je primjer topološke linije koja je korekurzivno prebrojiva ali nije izračunljiva u X'. □

Primjer 9.4. Neka je $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$g(x) = \tilde{g}(x) + 1, \ \forall x \in [0,1].$$

Tada je i g neprekidna sekvencijalno izračunljiva funkcija koja nije izračunljiva (jer je funkcija $\tilde{g}$ takva) te zbog $\tilde{g} \geq 0$ vrijedi $g(x) > 0$ za svaki $x \in [0,1]$.

Definirajmo sada skup

$$S = \{0 + tg : t \in [0, \infty\rangle\}.$$

Tada je $S \subseteq X$. Uočimo da je $f \in S$ ako i samo ako vrijedi $f = 0 + tg$ za neki $t \geq 0$. Neka je $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiv niz takav da vrijedi $\operatorname{Im} r = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Tada imamo $f \in S$ ako i samo ako

$$\left(\frac{f(r_j)}{g(r_j)} = \frac{f(0)}{g(0)}\right) \wedge (f(0)g(0) \geq 0), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

odnosno

$$(f(r_j)g(0) = f(0)g(r_j)) \wedge (f(0)g(0) \geq 0), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Neka je $M \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|g(x)| < M$ za svaki $x \in [0,1]$. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiv niz takav da vrijedi $\operatorname{Im} q = \mathbb{Q} \cap \langle 0, \infty\rangle$. Neka je

$$\begin{aligned} A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : |f_{\langle i\rangle_0}(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)| > 2Mq_{\langle i\rangle_1} \\ \vee f_{\langle i\rangle_0}(0)g(0) + q_{\langle i\rangle_1}M < 0\}. \end{aligned} \tag{9.2.1}$$

Najprije uočimo da je skup A rekurzivno prebrojiv, što nije teško zaključiti iz definicije skupa A te činjenice da ako je (r_j) izračunljiv niz racionalnih brojeva u $[0,1]$ da je tada i funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i,j) \mapsto f_i(r_j)$ izračunljiva. Neka je $(i,j) \in A$. Tada je u prvom slučaju $|f_{\langle i\rangle_0}(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)| > 2Mq_{\langle i\rangle_1}$. Tvrdimo da je $I_i \cap S = \emptyset$. Pretpostavimo da postoji $f \in I_i \cap S$. Tada je

$$f(r_j)g(0) - f(0)g(r_j) = 0 \wedge f(0)g(0) \geq 0, \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{9.2.2}$$

i

$$d(f, f_{\langle i\rangle_0}) < q_{\langle i\rangle_1}. \tag{9.2.3}$$

Sada je

$$\begin{aligned} &|(f_{\langle i\rangle_0}(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)) - (f(r_j)g(0) - f(0)g(r_j))| \\ &\qquad = |(f_{\langle i\rangle_0}(r_j) - f(r_j))g(0) - (f_{\langle i\rangle_0}(0) - f(0))g(r_j)| \\ &\qquad \leq |(f_{\langle i\rangle_0}(r_j) - f(r_j))g(0)| + |(f_{\langle i\rangle_0}(0) - f(0))g(r_j)| \\ &\qquad \leq 2d_\infty(f, f_{\langle i\rangle_0})M. \end{aligned}$$

Iz ovog, zbog (9.2.2) i (9.2.3) slijedi

$$|(f_{\langle i\rangle_0}(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)| \leq 2Mq_{\langle i\rangle_1}.$$

Ovo je kontradikcija. Dakle, mora vrijediti $I_i \cap S = \emptyset$. U drugom slučaju, neka je $f_{\langle i\rangle_0}(0)g(0) + q_{\langle i\rangle_1}M < 0$. Tvrdimo da mora vrijediti $I_i \cap S = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, neka je $f \in I_i \cap S$. Tada je $d_\infty(f_{\langle i\rangle_0}, f) < q_{\langle i\rangle_1}$ i $f(0)g(0) \geq 0$. Iz prvog uvjeta imamo

$$|f_{\langle i\rangle_0}(0)g(0) - f(0)g(0)| < q_{\langle i\rangle_1}M.$$

Sada je

$$0 \leq f(0)g(0) < f_{\langle i\rangle_0}(0)g(0) + q_{\langle i\rangle_1}M < 0.$$

što je kontradikcija. Dakle, mora biti $I_i \cap S = \emptyset$. Neka je sada

$$B = \{i \in \mathbb{N} : \exists j \ (i,j) \in A\}.$$

Tada je

$$\bigcup_{i \in B} I_i \subseteq C[0,1] \setminus S.$$

Neka je sada $f \in C[0,1] \setminus S$. Tada ili postoji $j \in \mathbb{N}$ i $\lambda > 0$ takav da vrijedi

$$|f(r_j)g(0) - f(0)g(r_j)| > 5\lambda M,$$

ili vrijedi $f(0)g(0) < 0$. U prvom slučaju uzmimo $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d_\infty(f, f_{\langle i\rangle_0}) < q_{\langle i\rangle_1} < \lambda.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
4Mq_{\langle i\rangle_1} < 5Mq_{\langle i\rangle_1} < 5M\lambda &< |f(r_j)g(0) - f(0)g(r_j)| \\
&\leq |f(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j) + f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j) - f(0)g(r_j)| \\
&\leq |f(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)| + |f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j) - f(0)g(r_j)| \\
&\leq |f(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)| + q_{\langle i\rangle_1}M \\
&\leq |f(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(r_j)g(0)| + |f_{\langle i\rangle_0}(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)| + q_{\langle i\rangle_1}M \\
&< 2q_{\langle i\rangle_1}M + |f_{\langle i\rangle_0}(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)|
\end{aligned}$$

odnosno

$$2Mq_{\langle i\rangle_1} < |f_{\langle i\rangle_0}(r_j)g(0) - f_{\langle i\rangle_0}(0)g(r_j)|$$

pa je $(i,j) \in A$. Promotrimo sada drugi slučaj, kada je $f(0)g(0) < 0$. Tada postoji $\lambda > 0$ takav da vrijedi $f(0)g(0) + 4\lambda M^2 < 0$. Uzmimo $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d_\infty(f_{\langle i\rangle_0}, f) < q_{\langle i\rangle_1} < 2\lambda M^2$. Sada je

$$|f_{\langle i\rangle_0}(0)g(0) - f(0)g(0)| < q_{\langle i\rangle_1}M.$$

odnosno

$$f(0)g(0) - q_{\langle i\rangle_1}M < f_{\langle i\rangle_0}(0)g(0) < f(0)g(0) + q_{\langle i\rangle_1}M$$

Pribrajanjem $q_{\langle i\rangle_1}M$ na sve dobivamo:

$$f(0)g(0) < f_{\langle i\rangle_0}(0)g(0) + q_{\langle i\rangle_1}M < f(0)g(0) + 2q_{\langle i\rangle_1}M < f(0)g(0) + 4\lambda M^2 < 0,$$

pa zaključujemo da vrijedi $(i,j) \in A$. U oba slučaja $f \in I_i$, gdje je $i \in B$, odnosno

$$\bigcup_{i\in B} I_i = C[0,1] \setminus S,$$

pa je stoga S korekurzivno prebrojiv.

U nastavku tvrdimo da S nije rekurzivno prebrojiv. Kada bi S bio rekurzivno prebrojiv tada bi zbog potpunosti od $C[0,1]$ postojao gust izračunljiv niz točaka u S. Označimo sa (s_i) jedan takav niz. Neka je s_i element tog niza različit od točke 0. Tada je $s_i = tg$ za neki $t > 0$. No, s_i je izračunljiva točka u $C[0,1]$ pa je $s_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija. Nadalje, imamo $s_i = tg$. Znamo da je $g \neq 0$, pa postoji $x \in [0,1]$ takav da je $g(x) \neq 0$. Sada imamo $t = s_i(x)/g(x)$ odnosno t je kvocijent dva rekurzivna realna broja pa je stoga i on rekurzivan. Da pokažemo da je g izračunljiva, podijelimo s_i s t i analogno zaključimo da je $\frac{1}{t}s_i$ izračunljiva i $g = \frac{1}{t}s_i$ pa je stoga i g izračunljiva. No, to je kontradikcija sa svojstvom da je g sekvencijalno izračunljiva koja nije izračunljiva.

Dakle, S nije rekurzivno prebrojiv pa nije niti izračunljiv. Skup S je stoga primjer topološke zrake koja je korekurzivno prebrojiva ali nije rekurzivno prebrojiva u prostoru X' koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja ali nema kompaktne zatvorene kugle. $\square$

Poglavlje 10

Izračunljivost 1-mnogostrukosti

Topološki prostor X je **1-mnogostrukost** ako je on Hausdorffov prostor s prebrojivom bazom topologije u kojem svaka točka ima okolinu, ne nužno otvorenu okolinu, koja je homeomorfna s $[0, \infty\rangle$. Rub mnogostrukosti ∂X je skup svih točaka $x \in X$ koje svaki homeomorfizam takve okoline od x i $[0, \infty\rangle$ preslikava u 0. Nadalje, svaka točka $x \in X \setminus \partial X$ ima okolinu u x koja je homeomorfna s $\mathbb{R}$. Ako je $\partial X \neq \emptyset$ tada za X kažemo da je **1-mnogostrukost s rubom**, a ako je $\partial X = \emptyset$ kažemo da je X **1-mnogostrukost bez ruba**.

Ako je X topološki prostor i $Y \subseteq X$ tada za Y kažemo da je 1-mnogostrukost ako je Y 1-mnogostrukost kao potprostor od X. Općenito se rub topološke 1-mnogostrukosti Y razlikuje od ruba od Y kao potprostora od X. Ako su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ homeomorfizam, te ako je X 1-mnogostrukost, tada je i Y također 1-mnogostrukost i vrijedi $f(\partial X) = \partial Y$.

Na primjer $\mathbb{R}$ i jedinična kružnica $\mathbb{S}^1$ u $\mathbb{R}^2$ su 1-mnogostrukosti bez ruba, dok su $[0, \infty\rangle$ i $[0, 1]$ 1-mnogostrukosti s rubom, $\partial[0, \infty\rangle = \{0\}$, $\partial[0, 1] = \{0, 1\}$. Svaka topološka linija je 1-mnogostrukost bez ruba, a ako je S topološka zraka s krajnjom točkom a, tada je S 1-mnogostrukost s rubom i $\partial S = \{a\}$. Nadalje, ako je S luk s krajnjim točkama a i b, tada je S mnogostrukost s rubom i $\partial S = \{a, b\}$.

Prema propoziciji 6.5 x je izračunljiva točka ako i samo ako je $\{x\}$ izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama, stoga teorem 7.3 povlači da je topološka zraka koja je poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama ujedno i izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama ako je njezin rub izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama.

10.1 Kontraprimjer za broj komponenata povezanosti

Pitanje kojim se bavimo u ovom poglavlju jest sljedeće: *da li za svaku 1-mnogostrukost M koja je poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama u izračunljivom metričkom prostoru vrijedi implikacija:*

$$\begin{aligned}&\partial M \text{ poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama}\\ &\qquad\qquad \Longrightarrow M \text{ izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama.}\end{aligned} \tag{10.1.1}$$

Odgovor je negativan, implikacija (10.1.1) ne vrijedi općenito. Kako bi to vidjeli navodimo sljedeći primjer. Kasnije ćemo pokazati da (10.1.1) vrijedi u slučaju da M ima konačno mnogo komponenata povezanosti.

Primjer 10.1. Neka su $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ i $(\mathbb{R}^2, d', \beta)$ izračunljivi euklidski prostori. Neka je S rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ koji nije rekurzivan. Iz činjenice da je S rekurzivno prebrojiv, prema propoziciji 3.4 slijedi da je skup $T = \mathbb{N} \setminus S$ korekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$. No, tada je je prema propoziciji 3.5 skup $T \times \mathbb{R}$ korekurzivno prebrojiv u $(\mathbb{R}^2, d', \beta)$. Neka je $M = T \times \mathbb{R}$. Zbog $T \subseteq \mathbb{N}$ imamo da je M 1-mnogostrukost. Nadalje, $\partial M = \emptyset$ pa je stoga ∂M (trivijalno) poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. No, 1-mnogostrukost M je poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama prema propoziciji 6.6. Tvrdimo da M nije izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama u $(\mathbb{R}^2, d', \beta)$. Pretpostavimo suprotno, da je M izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama u $(\mathbb{R}^2, d', \beta)$. Tada je M rekurzivno prebrojiva u $(\mathbb{R}^2, d', \beta)$, odnosno skup

$$W = \{i \in \mathbb{N} : M \cap I_i \neq \emptyset\}$$

je rekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}$. Najprije dokažimo tvrdnju

$$n \in T \iff \exists i \in \mathbb{N} \ \left((n, 0) \in I_i \wedge i \in W \wedge \rho_i < 1/2\right). \tag{10.1.2}$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \in T$. Tada je $(n, 0) \in M$. Tada zbog $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ imamo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(n, 0) \in I_i$ i $\rho_i < 1/2$. S druge strane, zbog $(n, 0) \in M$ imamo $i \in W$.

Obratno, neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $(n, 0) \in I_i$, $\rho_i < 1/2$ i $i \in W$. Tada zbog $i \in W$ imamo $M \cap I_i \neq \emptyset$, odnosno postoji $m \in T$ takav da je $(m, y) \in I_i$ za neki $y \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $m \neq n$. Tada je $d((n, 0), (m, y)) \geq 1$. Sada iz nejednakosti trokuta i činjenice $\rho_i < \frac{1}{2}$ imamo

$$d((n,0),(m,y)) \leq d((n,0),\lambda_i) + d(\lambda_i,(m,y)) < 2 \cdot \rho_i < 1$$

što ukupno daje kontradikciju. Dakle, mora vrijediti $m = n$, iz čega zajedno s $m \in T$ slijedi $n \in T$. Ovime smo dokazali tvrdnju 10.1.2. Sada je skup T rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.7 (1) jer je skup

$$\{(n,i) \in \mathbb{N}^2 : (n,0) \in I_i \wedge i \in W \wedge \rho_i < 1/2\}$$

rekurzivno prebrojiv kao presjek triju rekurzivno prebrojivih skupova. Prema definiciji od T imamo $T = \mathbb{N} \setminus S$ pri čemu je S rekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}$, stoga je T korekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}$. Kako je T rekurzivno prebrojiv imamo da je T rekurzivan. No tada je S rekurzivan što je kontradikcija s pretpostavkom da je S rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}$ koji nije rekurzivan. Dakle, M nije izračunljiva u $(\mathbb{R}^2, d', \beta)$, stoga (10.1.1) ne vrijedi. $\square$

10.2 Teorem izračunljivosti za 1-mnogostrukosti

Ako je X 1-mnogostrukost, tada je svaka komponenta povezanosti od X 1-mnogostrukost. Nadalje, $x \in X$ pripada rubu od X ako i samo ako x pripada rubu neke komponente povezanosti od X.

Sljedeći teorem klasifikacije 1-mnogostrukosti je ključan kako bi mogli dokazati glavni rezultat ovog poglavlja. Dokaz se može naći na primjer u [14].

Teorem 10.2. *Neka je M povezana 1-mnogostrukost. Tada je M homeomorfna s točno jedinim od prostora:* $[0,1]$, $\mathbb{S}^1$, $[0,\infty\rangle$, $\mathbb{R}$. $\square$

Ovaj teorem klasifikacije zajedno sa činjenicom da je svaka komponenta povezanosti 1-mnogostrukosti također 1-mnogostrukost nam omogućuje da pitanje izračunljivosti za zadanu 1-mnogostrukosti svedemo na pitanje izračunljivosti njezinih komponenata povezanosti. Preciznije, imamo sljedeći teorem.

Teorem 10.3. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $M \subseteq X$ poluizračunljivo kompaktan skup na zatvorenim kuglama koji je 1-mnogostrukost. Neka je K komponenta povezanosti od M.*

(1) Ako je K topološka linija ili topološka kružnica tada je K rekurzivno prebrojivo zatvoren.

(2) *Ako je K topološka zraka s izračunljivom krajnjom točkom ili luk s izračunljivim krajevima tada je K rekurzivno prebrojivo zatvoren.*

Dokaz. Kako je svaka 1-mnogostrukost M lokalno povezan topološki prostor, to su njezine komponente povezanosti otvoreni skupovi u M.

Neka je komponenta K topološka zraka s izračunljivom krajnjom točkom ili topološka linija. Tada je skup $F = M \setminus K$ zatvoren u M, ali jer je M kao poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama ujedno i zatvoren skup u (X, d), imamo da je F zatvoren u (X, d). Stoga je F zatvoren, disjunktan s K i $F \cup K$ je poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama. Sada teoremi 7.3 i 8.2 povlače da je K rekurzivno prebrojiv.

Neka je sada K topološka kružnica ili luk s izračunljivim krajevima. Tada je K kompaktan, a jer je disjunktan sa skupom $F = M \setminus K$ (koji je iz istog razloga kao i maloprije zatvoren), postoje brojevi $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$K \subseteq \widehat{I}_{i_0} \cup \dots \cup \widehat{I}_{i_n} \subseteq X \setminus F.$$

Tada imamo

$$K = K \cap (\widehat{I}_{i_0} \cup \dots \cup \widehat{I}_{i_n}) = (K \cup F) \cap (\widehat{I}_{i_0} \cup \dots \cup \widehat{I}_{i_n}) = (M \cap \widehat{I}_{i_0}) \cup \dots \cup (M \cap \widehat{I}_{i_n}).$$

Stoga za $j \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$K \subseteq J_j \iff M \cap \widehat{I}_{i_0} \subseteq J_j, \dots, M \cap \widehat{I}_{i_n} \subseteq J_j.$$

Iz ovog, te iz činjenice da je M poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama zaključujemo da je K poluizračunljivo kompaktan skup. Stoga je K kompaktna mnogostrukost s izračunljivim rubom (ukoliko je on neprazan), te je prema [9] K izračunljivo kompaktan skup. Posebno, K je rekurzivno prebrojiv. □

Teorem 10.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je M 1-mnogostrukost i pretpostavimo da su M i ∂M poluizračunljivo kompaktni na zatvorenim kuglama. Tada je svaka komponenta od M rekurzivno prebrojivo zatvorena u (X, d, α).*

Dokaz. Ako je M 1-mnogostrukost bez ruba tada je svaka komponenta povezanosti od M topološka kružnica ili topološka linija pa je prema teoremu 10.3 tvrdnji (1) svaka komponenta povezanosti rekurzivno prebrojiva.

U protivnom, prema tvrdnji (2) teorema 10.3, dovoljno je pokazati da je svaka točka od ∂M izračunljiva. Neka je $x \in \partial M$. Tada x ima okolinu N u M takvu da postoji homeomorfizam $f : N \to [0, \infty\rangle$ takav da je $f(x) = 0$. Iz ovoga je jasno da je x jedina točka u N koja pripada rubu od M. Slijedi da je $B(x, r) \cap \partial M = \{x\}$ za neki $r > 0$ i zaključujemo da je $\widehat{I}_i \cap \partial M = \{x\}$ za neki $i \in \mathbb{N}$. Jer je ∂M poluizračunljivo kompaktan skup na zatvorenim kuglama, slijedi da je $\widehat{I}_i \cap \partial M$ poluizračunljiv kompaktan skup, stoga je i $\{x\}$ poluizračunljivo kompaktan, no time je i x izračunljiva točka u (X, d, α). □

Obzirom da je unija konačno mnogo rekurzivno prebrojivih podskupova u (X, d, α) rekurzivno prebrojiv skup, imamo sljedeći teorem.

Teorem 10.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je M podskup od X koji je kao potprostor od (X, d) 1-mnogostrukost koja ima konačno mnogo komponenata povezanosti. Pretpostavimo da su M i ∂M poluizračunljivo kompaktni na zatvorenim kuglama. Tada je M izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama u (X, d, α).* □

Teorem 10.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle i svojstvo efektivnog pokrivanja. Neka je M 1-mnogostrukost u X koja ima konačno mnogo komponenata povezanosti. Pretpostavimo da su M i ∂M korekurzivno prebrojivi. Tada je M izračunljivo zatvorena u (X, d, α).* □

Korolar 10.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle i svojstvo efektivnog pokrivanja. Neka je M korekurzivno prebrojiva 1-mnogostrukost bez ruba u (X, d, α) s konačno mnogo komponenata povezanosti. Tada je M izračunljivo zatvoren skup.* □

Napomenimo da dobiveni rezultat za 1-mnogostrukosti ne vrijedi u uniformnoj verziji. Postoji korekurzivno prebrojiv niz kružnica u izračunljivom euklidskom prostoru koji nije izračunljiv. Konstrukcija takvog niza može se naći u [6].

Također, napomenimo da tvrdnje teorema 10.6 i korolara 10.7 ne moraju vrijediti u općenitom metričkom prostoru. Možemo pronaći primjere prostora (X, d, α) koji ima kompaktne zatvorene kugle, ali ne i svojstvo efektivnog pokrivanja (i obratno) te možemo naći primjer topološke zrake i linije za koje navedene tvrdnje ne vrijede. Spomenuti kontraprimjeri su detaljno opisani u prethodnom poglavlju.

Literatura

[1] Brattka, V., Presser, G.: "Computability on subsets of metric spaces" Theoretical Computer Science, 305:43–76, 2003.

[2] Brattka, V.: "Plottable real number functions and the computable graph theorem" SIAM J. Comput., 38(1):303–328, 2008.

[3] Burnik, K., Iljazović, Z.: "Topological rays and lines as co-c.e. sets" Informatik Berichte, FernUniversitat in Hagen, 10–21, 2013.

[4] Burnik, K., Iljazović, Z.: "Computability of 1-manifolds" Logical Methods in Computer Science, 10(2:8):1–28, 2014.

[5] Iljazović, Z.: "Chainable and Circularly Chainable Co-c.e. Sets in Computable Metric Spaces" Journal of Universal Computer Science, 15(6):1206–1235, 2009.

[6] Iljazović, Z.: "Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova" doktorska disertacija, 2010.

[7] Iljazović, Z.: "Co-c.e. Spheres and Cells in Computable Metric Spaces" Logical Methods in Computer Science, Vol. 7(3:05):1–21, 2011.

[8] Iljazović, Z.: "Local computability of computable metric spaces and computability of co-c.e. continua" Glasnik Matematički, 47(1):1–20, 2012.

[9] Iljazović, Z.: "Compact manifolds with computable boundaries" Logical Methods in Computer Science, Vol. 9(4:19):1–22, 2013.

[10] Kihara, T.: "Incomputability of Simply Connected Planar Continua" Computability, 1(2):131–152, 2012.

[11] Le Roux, S., Ziegler, M.: "Singular coverings and non-uniform notions of closed set computability" Math. Log. Q., 54:545–560, 2008.

[12] Miller, J.S.: "Effectiveness for Embedded Spheres and Balls" Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 66:127–138, 2002.

[13] Pour-El, M.B, Richards, I.: "Computability in Analysis and Physics" Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[14] Shastri, A. R.: "Elements of Differential Topology" CRC Press, Taylor and Francis Group, 2011.

[15] Specker, E.: "Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis." Constructivity in Mathematics (A. Heyting, ed.). North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 254–265, 1959.

[16] Turing, A. M.: "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem" Proc. London Math. Soc., 42:230–265, 1936.

[17] Vuković, M.: "Izračunljivost" skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2009.

[18] Weihrauch, K.: "Computable Analysis." Springer, Berlin, 2000.

Sažetak

Glavni problem kojim se bavimo u ovom radu je utvrditi vrijedi li neki analogon implikacije koja je dokazana u [9] za poluizračunljive kompaktne mnogostrukosti M i koja glasi

$$\partial M \text{ izračunljivo kompaktan} \implies M \text{ izračunljivo kompaktan} \qquad (\star)$$

također i za M koji je 1-mnogostrukost u nekom izračunljivom metričkom prostoru.

U uvodnom poglavlju dajemo pregled dosadašnjih rezultata vezanih za implikaciju $(\star)$. U poglavlju 2 dajemo pregled osnovnih pojmova iz klasične teorije izračunljivosti koje koristimo u ostatku rada.

U poglavlju 3 poopćujemo pojam izračunljivosti na metričke prostore. Izračunljiv metrički prostor je glavni ambijent u kojem iskazujemo i dokazujemo glavne rezultate.

Poglavlje 4 je pripremno poglavlje. U njemu uvodimo pojmove formalne izračunljivosti usko vezane za izračunljive metričke prostore. Svojstvo efektivnog pokrivanja, zajedno sa svojstvom da izračunljiv metrički prostor ima kompaktne zatvorene kugle pokazuje se ključno ako želimo dokazati da je korekurzivno prebrojiva zraka s izračunljivom krajnjom točkom izračunljiva. Dovoljan uvjet da metrički prostor ima svojstvo efektivnog pokrivanja iskazujemo i dokazujemo u poglavlju 5. Na kraju tog poglavlja raspisujemo i dokaz da $\mathbb{R}^n$ ima svojstvo efektivnog pokrivanja.

Pokazuje se da svojstvo efektivnog pokrivanja nije uvijek nužno kako bi dokazali implikaciju $(\star)$. Stoga u poglavlju 6 uvodimo pojmove *poluizračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama* i *izračunljivo kompaktan na zatvorenim kuglama*. U slučaju kada ambijentni prostor ima svojstvo efektivnog pokrivanja i kompaktne zatvorene kugle tada je svojstvo poluizračunljive kompaktnosti na zatvorenim kuglama ekvivalentno sa svojstvom korekurzivno prebrojive zatvorenosti skupa. Svojstvo efektivnog pokrivanja i svojstvo da prostor ima kompaktne zatvorene kugle vrijede uniformno u čitavom prostoru i kao takva su jaka svojstva, no kako bi dobili općenitije rezultate mi ih zamjenjujemo sa svojstvima

koje vrijede samo lokalno, na nekim podskupovima prostora, dakle svojstvom izračunljive kompaktnosti na zatvorenim kuglama.

Stoga rezultate za topološku zraku te za topološku liniju iskazujemo i dokazujemo bez pretpostavke da ambijentni prostor ima svojstvo efektivnog pokrivanja i kompaktne zatvorene kugle. U poglavlju 7 dajemo dokaz glavnog rezultata za topološku zraku, a u poglavlju 8 sličan rezultat dokazujemo za topološku liniju.

U poglavlju 9 proučavamo nužnost dodatnih uvjeta na ambijentni prostor kao što su svojstvo efektivnog pokrivanja te kompaktne zatvorene kugle, te dajemo primjere prostora koji pokazuju da u slučaju da izračunljiv metrički prostor ima samo jedno od ta dva svojstva da tada zaista mora imati i drugo (i obratno) kako bi dobili rezultate iskazane korolarima iz poglavlja 7 i 8.

Zajedno s već poznatim rezultatima o izračunljivosti za lančaste i cirkularno lančaste kontinuume iz [6], rezultati iz poglavlja za topološku zraku i liniju doveli su do pitanja izračunljivosti 1-mnogostrukosti što je glavna tema ovog rada. U poglavlju 10 proučavamo 1-mnogostrukosti u izračunljivim metričkim prostorima i dokazujemo glavni rezultat ovog rada: svaka poluizračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama 1-mnogostrukost čiji rub je poluizračunljiv i koja ima konačno mnogo komponenata povezanosti je izračunljivo kompaktna na zatvorenim kuglama.

Summary

In this paper we investigate whether some analogue of the implication that was proved in [9] for semi-computable compact manifolds M and which states

$$\partial M \text{ computably compact } \implies M \text{ computably compact} \tag{$\star$}$$

also holds when M is a 1-manifold in some computable metric space.

In the first introductory chapter we give an overview of the known results regarding the implication ($\star$).

In chapter 2 we give an overview of the basic notions from classic computability theory which we use in subsequent chapters. In chapter 3 we generalize computability to metric spaces. A computable metric space is the main ambient space in which we state and prove our main results.

Chapter 4 is preparatory. In this chapter, we introduce the notions of formal computability properties occuring in computable metric spaces. The effective covering property, together with the property of compact closed balls is shown to be key if we want to prove that each co-recursively enumerable topological ray with a computable endpoint is computable. A sufficient condition when a metric space has the effective covering property [6] is stated and proved in chapter 5. At the end of that chapter, we write out a proof that $\mathbb{R}^n$ has the effective covering property.

It turns out that the effective covering property is not always necessary to prove the main implication ($\star$). Therefore, in chapter 6 we introduce new notions of *semi-computable compact on closed balls* and *computable compact on closed balls*. In the case when the ambient space does have the effective covering property and compact closed balls, then the notion of semi-computable compact on closed balls is equivalent to the notion of co-recursively enumerable set. The effective covering property and the property of having compact closed balls are properties that hold uniformly in the whole space, which are

strong assumptions, so to obtain more general results we had replaced them with a local property of semi-computable compactness on closed balls.

Therefore, the main results for the topological ray and line we state and prove without the assumption on the ambient space that it has the effective covering property and compact closed balls and instead we use the newly introduced notions. In chapter 7 we give the proof of the main result for the topological ray and in chapter 8 we prove a similar result for the topological line.

In chapter 9 we study further the necessity of additional conditions on the ambient space. We give examples of spaces which show that in case the computable metric space has exactly one of the two additional conditions then the conclusions of chapters 7 i 8 fail to be true.

Together with the well known results on computability of chainable and circularly chainable continua given in [6], the results for the topological ray and line have led us to the main result of this thesis, the computability of 1-manifolds. In the final chapter 10 we study the computability of 1-manifolds in computable metric spaces and prove the main result of this thesis: every semicomputable compact on closed balls 1-manifold with computable boundary and finitely many connected components is computable compact on closed balls.

Životopis

Rođen sam 19. veljače 1985. u Zagrebu. Osnovnu i srednju školu sam pohađao u Zagrebu. Za vrijeme osnovne škole sam 1999. godine sudjelovao na državnom natjecanju iz informatike čime sam postao član Zagrebačkog Računalnog Saveza. Primarna zadaća tog saveza je prepoznati i poticati nadarene informatičare od njihove rane dobi. U sklopu tog saveza bio sam predavač za nekoliko programskih sadržaja. Kasnije, 2012. godine postao sam i tajnikom podudruge *„ABC Info“* čija je primarna zadaća i cilj priprema učenika osnovnih škola za natjecanja u rješavanju algoritamskih zadataka.

Završio sam srednju Tehničku školu Ruđera Boškovića, smjer tehničar za računalstvo. Maturalni rad pod naslovom *„Rezidentni programi“* izradio sam pod vodstvom profesora Milana Koraća 2003. godine. Iste godine upisao sam studij matematike, smjer računarstvo na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Kao apsolvent 2007. godine zaposlio sam se u Vipnetu kao razvojnik sustava za podršku poslovnom odlučivanju. 2011. godine mijenjam radnu poziciju u višeg administratora servisa i aplikacija. U sklopu te nove pozicije autor sam mnogih poboljšanja u radu sustava, te je moj rad zapažen na BIA (Best Idea Award) za 2013 godinu koje se održava svake godine u Vipnetu. Diplomski studij sam završio 2008. godine s diplomskim radom naslova *„Algoritmi za igre parnosti“* pod vodstvom doc.dr.sc. Mladena Vukovića te iste godine upisujem doktorski studij (smjer računarstvo) paralelno uz rad.

Na doktorskom studiju član sam seminara za teorijsko računarstvo u sklopu kojeg sam održao nekoliko predavanja. Na seminaru za numeričku matematiku i računarstvo prezentirao sam originalan rad pod naslovom *„Perplektički QR rastav centrosimetričnih matrica“*. Taj rad je kasnije, 2015. prihvaćen i objavljen u časopisu *Linear Algebra and its Applications* pod naslovom *„A structure-preserving QR factorization for centrosymmetric real matrices“*. U koautorstvu s doc.dr.sc. Zvonkom Iljazovićem objavio sam dva rada *„Topological rays and lines as co-c.e. sets“* [3] i *„Computability of 1-manifolds“* [4]. Aktivno sam sudjelovao na Computability and Complexity in Analysis (CCA) konferenciji održanoj u Nancyju, Francuskoj 2013. godine na kojoj sam održao predavanje na temu tih dvaju radova.

Početkom 2015. godine preselio sam u Nizozemsku u mjesto Hilversum gdje i trenutno živim. U Hilversumu sam se zaposlio u kompaniji *Spil Games* kao razvojnik IT sustava za podršku poslovnom odlučivanju (ETL developer).