# Jednoskalne H-mjere i inačice

**Erceg, Marko**

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Marko Erceg

# Jednoskalne H-mjere i inačice

**Doktorski rad**

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, 2016.

University of Zagreb
Faculty of Science
Department of Mathematics

Marko Erceg

# One-scale H-measures and variants

**Doctoral thesis**

Supervisor:
Prof. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, 2016.

# Predgovor

Pri proučavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi često se moramo suočiti sa slabo konvergentnim nizovima u prostoru $\mathrm{L}^2$, koji ne konvergiraju jako. Za takve nizove $(u_n)$ prirodno je promatrati omeđen niz u $\mathrm{L}^1$ dan s $|u_n|^2$. Općenito, taj niz ne konverigra slabo u $\mathrm{L}^1$, već samo slabo $*$ (*vague*) u prostoru omeđenih Radonovih mjera ($\mathcal{M}_b = \mathrm{C}_0'$), k *defektnoj mjeri* $\nu$.

U načelu, postoje dvije različite vrste nekompaktnih nizova, i to *koncentracija* i *titranje*. Preciznije, za $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ takvu da je $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} = 1$ i $\varepsilon_n \to 0^+$ nizovi

a) *koncentracija*: $u_n(\mathbf{x}) := \varepsilon_n^{-d/2}\varphi(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\varepsilon_n})$

b) *titranje*: $u_n(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x})e^{\frac{2\pi i \mathsf{k}\cdot\mathbf{x}}{\varepsilon_n}}$

konvergiraju slabo k nuli, ali ne i jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, dok su pripadne defektne mjere jednake $\nu = \delta_{\mathbf{x}_0}$ (za koncentracijski niz), te $|\varphi|^2\lambda$ (za titrajući niz), pri čemu je $\lambda$ Lebesgueova mjera. Iz ovih primjera je vidljivo da defektne mjere nisu dovoljne za potpuno određivanje razlika između različitih nekompaktnih nizova (npr. titrajući nizovi različitih smjerova $\mathsf{k}$ i frekvencija $1/\varepsilon_n$ imaju jednake defektne mjere). Ovaj nedostatak informacija može se (djelomično) riješiti koristeći mikrolokalne objekte defnirane u punom faznom prostoru kao što su *H-mjere* i *polukalsične mjere*, te pogotovo nedavno uvedenim objektima, *jednoskalnim H-mjerama*, koje su svojevrsno poopćenje i H-mjera i poluklasičnih mjera. Ukratko, H-mjere, za razliku od poluklasičnih mjera i jednoskalnih H-mjera, nemaju karakterističnu duljinu (skalu).

Međutim, proučavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi često zahtijeva zamjenu Hilbertovog prostora općenitijim Banchovim prostorima $\mathrm{L}^p$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$. Kako su prethodni objekti vezani uz $\mathrm{L}^2$ prostor, postoji potreba za odgovarajućim poopćenjima i proširenjima postojeće teorije. Nedavnim uvođenjem H-distribucija dobilo se proširenje H-mjera na $\mathrm{L}^p$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, prostore, dok, po našem znanju, poopćenje objekata s karakterističnom duljinom (poluklasičnih mjera i jednoskalnih H-mjera) do sad nije napravljeno.

Odnos H-mjera i poluklasičnih mjera uvelike ovisi o $(\omega_n)$-*titrajućem* i (ovdje uvedenom) $(\omega_n)$-*koncentrirajućem* svojstvu, pa osim pregleda osnovnih rezultata H-mjera i poluklasičnih mjera, u prvom poglavlju detaljnije proučavamo ta dva svojstva. Nadalje, u zadnjem dijelu poglavlja prezentiramo primjenu poluklasičnih mjera u proučavanju homogenizacijskog limesa evolucijskih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, te komentiramo dva moguća pristupa. U prvom se proučava poluklasična mjera $\mu_{sc}$ pridružena nizu rješenja $(u_n)$, dok se u drugom pristupu za fiksno vrijeme $t$ promatra poluklasična mjera $\mu_{sc}^t$ pridružena nizu $(u_n(t,\cdot))$, čime dobivamo familiju mjera $(\mu_{sc}^t)_{t\in\mathbf{R}^+}$.

U drugom poglavlju proučavamo jednoskalne H-mjere koje je nedavno uveo Luc

Tartar [53, 54]. Za razliku od izvornog Tartarovog pristupa, ovdje prikazujemo alternativni dokaz temeljen na inačici Prve komutacijske leme i teoremu o jezgri. U nastavku poglavlja proučavamo lokalizacijsko načelo, te dobivamo rezultat kojim je značajno proširen rezultat iz [53], a koji potom primjenjujemo u izvođenju lokalizacijskih svojstava H-mjera i poluklasičnih mjera, te konačno i inačice kompaknosti kompenzacijom s karakterističnom duljinom.

Proširenje jednoskalnih H-mjera, *jednoskalne H-distribucije*, na $\mathrm{L}^p$ prostore, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, je tema trećeg poglavlja. Jedna od tehničkih poteškoća u odnosnu na prethodno poglavlje je činjenica da je u tom kontekstu nužno raditi s glatkim funkcijama pa se račun znatno komplicira. Donosimo rezultat postojanja kojim jednoskalne H-distribucije postaju poopćenja jednoskalnih H-mjera, ali i *H-distribucija* [10], te izvodimo lokalizacijsko svojstvo.

U posljednjem, četvrtom poglavlju promatrane su neke inačice postojećih mikrolokalnih objekata, s i bez karakteristične duljine, pogodne za probleme u kojima komponente varijable $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d)$ nisu ravnopravne, već su u nekom općem odnosu $x^1 : x^2 : \cdots : x^d = \alpha_1 : \alpha_1 : \cdots : \alpha_d$. Za paraboličko skaliranje $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_d = 1$ pripadna inačica (bez karakteristične duljine) je upravo *parabolička H-mjera* [6].

Nastajanje ovog rada ne bi bilo moguće bez velike podrške i pomoći prijatelja i kolega. Za početak bih se svakako htio zahvaliti Nenadu koji me već s diplomskim radom uveo u ovo područje matematike, a zatim me strpljivo i prijateljski vodio kroz cijeli doktorski studij, uključujući i izradu ovog rada. Bez njega puno toga ne bi bilo moguće, pa tako niti ovaj moj doktorat. Jako veliku ulogu u izradi ovo rada je imao i Martin s kojim sam proveo mnogobrojne sata na Skypeu, ali i uživo, gdje smo zajedničkim snagama učili i razumijevali probleme poluklasične analize, što je imalo utjecaja na mnoge stranice ovog rada. Hvala ti Martine. Htio bih zahvaliti i ostalim članovima Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu na korisnim primjedbama i komentarima tokom svih ovih godina, a posebno Marku (velikom :)), Darku, Marinu i Ivanu.

Bilo je tu naravno i puno posla koji nije direktno vezan uz slova ovog uratka, ali pri tome nikako nije manje vrijedan. Pa tako veliko hvala Juri što me usmjerio k matematici, Kreši na probijanju leda prvim člankom, roditeljima na velikoj podršci, vječnom uzroru bratu, a i svim (do sad ne spomenutim) prijateljima koje neću nabrajati da ne bih nekoga nepravedno izostavio...ili evo da probam: Iva, Andrej, Andrija, Ane, Barni, Bine, Bojan, Cimi, Čika, Čoka, Dodo, Draško, Drle, Ena, Frančesko, Gunji, Inja, Jelčić, Jelena, Jere, Juka, Kereta, Kriste, Kršni, Mare, Matea, Matej, Matija, Mili, Monika, Nine, Petar, Pero, Rafo, Rudi, Ruso, Slipa, Tea, Tiho, Torinjo, Vujčić... Fala svima!

U Zagrebu, lipnja 2016.

Marko Erceg

**Ključne riječi:** H-mjere, Wignerove mjere, H-distribucije, poluklasični limes, kompaktnost kompenzacijom

**Key words:** H-measures, Wigner measures, H-distributions, semiclassical limit, compactness by compensation

**Mathematics subject classification:** 35B27, 35K10, 35S05, 46F05, 46G10, 54D35

# Sadržaj

# I. H-mjere i poluklasične mjere

*H-mjere* (ili *mikrolokalne defektne mjere*) i *poluklasične mjere* (ili *Wignerove mjere*) su objekti koji na neki način mjere odstupanje od jake konvergencije slabo konvergentnih nizova u $\mathrm{L}^2$ prostoru. S jedne strane H-mjere nemaju karakterističnu duljinu (parametar koji teži nuli), ali zato rezultat u Fourierovom prostoru projiciraju na jediničnu sferu, dok poluklasične mjere imaju karakterističnu duljinu čijim izborom se određuje na kojoj skali u Fourierovom prostoru djeluju. Konstrukcija H-mjera je motivirana problemima iz *teorije homogenizacije*, dok su poluklasične mjere dobile ime po tome što pripadaju području matematike zvanom *poluklasična analiza* u kojem se proučavaju razni problemi u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i funkcionalne analize uz prisustvo malog parametra, čime se analiza obično dijeli ovisno u kojem se režimu nalazimo.

Većina uspješnih primjena H-mjera se oslanja na *lokalizacijskom svojstvu* (Teorem 2) koje je usko vezano s poopćenom metodom *kompaknosti kompenzacijom* za jednadžbe s varijablinim koeficijentima (Teorem 3). *Prijenosno svojstvo* je drugo važno svojstvo H-mjera (npr. pogledati [2, 8, 52]), ali u ovom radu ćemo koristiti samo svojstvo širenja poluklasičnih mjera (odjeljak 5) čime ilustriramo njihovu uspješnu primjenu u proučavanju visokofrekventnih limesa, odnosno parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s karakterističnom duljinom.

U prvom odjeljku dajemo pregled nekih svojstava H-mjera kao i njihovu primjenu na osnovnim primjerima slabo konvergentnih nizova (titranje i koncentracija) u kojima ističemo da H-mjere ne mogu dobiti cjelovitu informaciju. Konkretno, H-mjere ne razlikuju titranja istih smjerova, ali različitih frekvencija (Primjer 1), što je uzrokovano projekcijom na sferu u Fourierovom prostoru. Uočeni problem nastavljamo proučavati u drugom odjeljku gdje provodimo detaljnu analizu nizova u odnosu na različite režime pripadnih skala, odnosno karakterističnih duljina, koristeći dva uvjeta: $(\omega_n)$-*titrajuće* i $(\omega_n)$-*koncentrirajuće* svojstvo. Najvažniji rezultat ovog odjeljka, ali ujedno i glavna motivacija za njegovo stvaranje, je Teorem 4 koji je rasvijetlio neka pitanja kod poluklasičnih mjera u trećem odjeljku (npr. komentari nakon Leme 10 i Korolara 3). Osim toga, u trećem odjeljku ističemo problem s gubitkom informacije poluklasičnih mjera za neke karakteristične duljine (primjeri 7 i 8), što zajedno s uočenim problemom kod H-mjera motivira uvođenje jednoskalnih H-mjera u sljedećem poglavlju. U četvrtom odjeljku komentiramo odnos H-mjera i poluklasičnih mjera gdje je pokazano da taj odnos ovisi o svojstvima iz drugog odjeljka. U posljednjem odjeljku proučavamo homogenizacijski limes paraboličke jednadžbe u različitim režimima primjenom poluklasičnih mjera, te komentiramo dva moguća pristupa. U prvom se promatra poluklasična mjera $\mu_{sc}$ pridružena nizu rješenja $(u_n)$, dok se u drugom pristupu za fiksno vrijeme $t$ promatra poluklasična mjera $\mu^t_{sc}$ pridružena nizu $(u_n(t,\cdot))$ čime dobivamo familiju mjera $(\mu^t_{sc})_{t\in\mathbf{R}^+}$.

## 1. H-mjere

H-mjere, ili kako se još nazivaju, mikrolokalne defektne mjere su početkom devedesetih godina dvadesetog stoljeća neovisno uveli Luc Tartar i Patrick Gérard. Riječ je o Radonovim mjerama na kosferičnom svežnju $\Omega\times\mathrm{S}^{d-1}$ nad domenom $\Omega\subseteq\mathbf{R}^d$. Kako su se najprije pojavile u vezi s nekim problemima iz homogenizacije, Tartar ih je nazvao H-mjerama. One su Radonove mjere, definirane kao limes kvadratičnih izraza $\mathrm{L}^2$ funkcija.

Prije definicije samih H-mjera potrebno je uvesti jednostavne pseudodiferencijalne operatore. Neka su zadane $\psi\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ i $\varphi\in\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$. Pridružimo im *operator množenja*

$B_\varphi$ i *Fourierov množitelj* $\mathcal{A}_\psi$ na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
B_\varphi &: \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r) \to \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)\,, \quad B_\varphi \mathsf{u}(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x})\mathsf{u}(\mathbf{x})\,,\\
\mathcal{A}_\psi &: \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r) \to \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)\,, \quad \widehat{\mathcal{A}_\psi \mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi}) := \psi(\boldsymbol{\xi})\hat{\mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,,
\end{aligned}$$

pri čemu je *Fourierova pretvorba* dana s $\mathcal{F}\mathsf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}\mathsf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, dok je *inverzna Fourierova pretvorba* dana s $\bar{\mathcal{F}}\mathsf{u}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathsf{u})^\vee(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}\mathsf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Očito vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|B_\varphi\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r))} &= \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\,,\\
\|\mathcal{A}_\psi\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r))} &= \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

U definiciji H-mjera su probne funkcije u dualnom prosotru definirane na jediničnoj sferi $\mathrm{S}^{d-1}$ pa ih radijalno proširujemo na $\mathbf{R}^d_* := \mathbf{R}^d \setminus \{\mathsf{0}\}$ dobivajući funkcije homogene reda nula. Preciznije, za $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ promatramo $\psi\circ\boldsymbol{\pi}$ pri čemu je $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}$ projekcija $\mathbf{R}^d_*$ na $\mathrm{S}^{d-1}$ po zrakama kroz ishodište, čime dobivamo funkciju iz $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ (za konstrukciju s proširenjima po općenitijim krivuljama pogledati četvrto poglavlje). Kraće tada pišemo $\mathcal{A}_\psi = \mathcal{A}_{\psi\circ\boldsymbol{\pi}}$.

Upravo definirani operatori se javljaju u definiciji H-mjera i baš je sljedeći rezultat bio ključan za razvoj teorije. Navodimo ga bez dokaza, koji se može naći u [52, Lemma 1.7].

**Lema 1. (prva komutacijska lema)** *Neka su zadane* $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ *i* $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$. *Tada je komutator* $C := [\mathcal{A}_\psi, B_\varphi] = \mathcal{A}_\psi B_\varphi - B_\varphi\mathcal{A}_\psi$ *kompaktan operator na prostoru* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

∎

Postojanje H-mjera dano je sljedećim teoremom kojeg navodimo u nešto drugačijem obliku nego što je to originalno napravljeno u [26, Theorem 1] i [52, Theorem 1.1] (usporediti s [2, Theorem 1]). Također, radi općenitosti cijelo vrijeme radimo s lokalnim prostorima čime dobivamo neomeđene Radonove mjere.

**Teorem 1. (postojanje H-mjera)** *Ako* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, *onda postoji podniz* $(\mathsf{u}_{n'})$ *i* $r\times r$ *hermitska nenegativna matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}_H$ *na produktu* $\Omega\times\mathrm{S}^{d-1}$ *takvi da za svaki izbor probnih funkcija* $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ *i* $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$, *vrijedi*

$$\begin{aligned}
\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\Big)\psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\,d\boldsymbol{\xi} &= \langle \boldsymbol{\mu}_H, (\varphi_1\bar{\varphi}_2)\boxtimes\psi\rangle\\
&= \int_{\Omega\times\mathrm{S}^{d-1}} \varphi_1(\mathbf{x})\bar{\varphi}_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})\,d\bar{\boldsymbol{\mu}}_H(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,.
\end{aligned}$$

*Mjeru* $\boldsymbol{\mu}_H$ *nazivamo* H-mjerom *pridruženom (pod)nizu* $(\mathsf{u}_{n'})$.

∎

Objasnimo preciznije oznake korištene u iskazu prethodnog teorema, a kojih ćemo se držati u cijelom radu. Varijable u fizikalnom prostoru $\Omega$, otvoreni podskup $\mathbf{R}^d$, obično označavamo s $\mathbf{x} = (x^1,\dots,x^d)$, dok pripadne dualne varijable s $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_d)$. Tenzorski produkt vektora u $\mathbf{C}^r$ označavamo s $\otimes$, a definiran je s $(\mathsf{a}\otimes\mathsf{b})\mathsf{v} = (\mathsf{v}\cdot\mathsf{b})\mathsf{a}$, pri čemu $\cdot$ označava kompleksni skalarni produkt antilinearan po drugoj varijabli ($\mathsf{a}\cdot\mathsf{b} := \sum_{i=1}^r a^i\bar{b}^i$), čime dobivamo da je matrični prikaz operatora $\mathsf{a}\otimes\mathsf{b}$ dan s $[\mathsf{a}\otimes\mathsf{b}]_{ij} = a^i\bar{b}^j$. S $\langle\cdot,\cdot\rangle$ označavamo pripadni seskvilinearni dualni produkt, koji uzimamo da je antilinearan po prvom argumentu i linearan po drugom. Upravo je ovo razlog zašto se u posljednoj jednakosti u iskazu prethodnog teorama javlja konjugirana mjera. Kada se matrične funkcije pojavljuju u oba argumenta, time podrazumjevamo $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \int \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \int \mathsf{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^*)$. Radi jednostavnosti zapisa, također definiramo dualni produkt u slučaju kada se matrična funkcija javlja u prvom, a skalarana funkcija u drugom argumentu (što je slučaj iz iskaza prethodnog teorema) s $\langle \mathbf{A}, \varphi\rangle = [\langle A^{ij}, \varphi\rangle]_{ij}$. S $\mathrm{C}_c(X)$ označavamo prostor neprekinutih funkcija s kompaktnim nosačem na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru $X$, dok pripadni zatvarač u $\mathrm{L}^\infty$ normi s $\mathrm{C}_0(X)$ koji je (pravi) potprostor prostora jednoliko neprekinutih omeđenih funkcija $\mathrm{C}_{ub}(X)$. Nadalje, ukoliko nije drugačije naglašeno, pod (kompleksnom) Radonovom mjerom na $X$ podrazumijevamo objekt iz $\mathcal{M}(X) := (\mathrm{C}_c(X))'$, dok su omeđene Radonove mjere elementi prostora $\mathcal{M}_b(X) := (\mathrm{C}_0(X))'$.

Često ćemo radi jednostavnosti biti neprecizni i nećemo posebno naglašavati prelazak na podniz. S druge strane, niz je *čist* (u terminima H-mjera) ako je pripadna H-mjera jedinstvena za svaki njegov podniz.

Prvi integral u prethodnoj formuli mogli smo zapisati u terminima pseudodiferencijalnih operatora $\mathcal{A}_\psi$ i $B_\varphi$ korištenjem Plancherelove formule

$$\int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\Big)\psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\,d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\mathcal{A}_\psi(\varphi_1 \mathsf{u}_{n'})(\mathbf{x}) \otimes \varphi_2 \mathsf{u}_{n'}(\mathbf{x})\Big)\,d\mathbf{x}\,,$$

što ćemo koristiti u trećem poglavlju.

Primjetimo da smo koristili Fourierovu pretvorbu za što je potrebno imati funkcije definirane na čitavom prostoru $\mathbf{R}^d$. Međutim, to lako postižemo proširivanjem funkcija nulom van $\Omega$ nakon što smo ih najprije lokalizirali množenjem s probnim funkcijama s kompaktnim nosačem. To je standarni postupak koji ćemo po potrebi uvijek raditi i nećemo posebno naglašavati.

Uočimo da pri perturbaciji niza $(\mathsf{u}_n)$ jako konvergentnim nizom $(\mathsf{v}_n)$ s limesom nula, dobiveni niz $(\mathsf{u}_n + \mathsf{v}_n)$ definira identičnu H-mjeru $\boldsymbol{\mu}_H$. Posebno, jako konvergentnom nizu u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ pridružena je trivijalna H-mjera $\boldsymbol{\mu}_H = \mathbf{0}$, ali vrijedi i obrat što je posljedica sljedećeg korolara koji slijedi izravno po definiciji H-mjera danoj prethodnim teoremom.

**Korolar 1.** *Ako niz* $\mathsf{u}_n \otimes \mathsf{u}_n$ *konvergira slabo∗ k mjeri* $\boldsymbol{\nu}$ *u* $\mathcal{M}(\Omega; \mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$, *onda za svaki* $\varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ *vrijedi:*

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \varphi\rangle = \langle \boldsymbol{\mu}_H, \varphi \boxtimes 1\rangle\ .$$

∎

Međutim, čak i da smo krenuli od nizova u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)$, trivijalna H-mjera daje jaku konvergenciju samo u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$. Tipičan primjer je *disperzijski niz* (vidi [36, Primjer I.3]).

Kako H-mjere proučavaju limese kvadratičnih izraza slabo konvergentnih nizova, to se i osnovni primjeri H-mjera [52] odnose na pojave koje uzrokuju odstupanje slabe od jake konvergencije (titranje i koncentracija).

**Primjer 1.** **(titranje)** Neka je $v \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ periodička funkcija s jediničnim periodom u svakoj varijabli i srednjom vrijednosti jednakoj nula, odnosno, u Fourierovom razvoju funkcije $v$ danom s

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{\mathsf{k}\in\mathbf{Z}^d} v_{\mathsf{k}} e^{2\pi i \mathsf{k}\cdot\mathbf{x}}\,,$$

imamo $v_{\mathsf{0}} = 0$.

Za $\varepsilon_n \to 0^+$ je tada s $u_n(\mathbf{x}) := v(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_n})$ definiran niz u istom prostoru, a kojem je slabi limes jednak srednjoj vrijednosti funkcije $v$, odnosno $u_n \rightharpoonup v_0 = 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, pa ima smisla promatrati pripadnu H-mjeru.

Štoviše, niz $(u_n)$ je čist, a pripadna (jedinstvena) H-mjera je dana s

$$\mu_H = \sum_{\mathsf{k}\in\mathbf{Z}^d\setminus\{0\}} |v_{\mathsf{k}}|^2 \lambda \boxtimes \delta_{\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}} \,,$$

pri čemu je $\lambda$ Lebesgueova mjera u fizikalnom, a $\delta_{\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}}$ su Diracove mjere u dualnom prostoru. Primjetimo da H-mjera ne ovisi o izboru niza $(\varepsilon_n)$, odnosno H-mjera ne razlikuje titranja istih smjerova, a različitih frekvencija. ∎

**Primjer 2. (koncentracija)** Za danu funkciju $v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, niz pozitivnih brojeva $\varepsilon_n \to 0^+$ i $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$ promatramo niz

$$u_n(\mathbf{x}) := \varepsilon_n^{-\frac{d}{2}} v\Big(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\varepsilon_n}\Big) \,.$$

Lako se provjeri da je niz $(u_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, te da konvergira slabo nuli.

Definirani niz je također čist s pripadnom H-mjerom oblika $\delta_{\mathbf{x}_0} \boxtimes \nu$, gdje je $\nu$ mjera s površinskom gustoćom $N$ ($\nu$ je apsolutno neprekinuta s obzirom na površinsku mjeru) na $\mathrm{S}^{d-1}$, koja je dana formulom:

$$N(\boldsymbol{\eta}) := \int_0^\infty |\hat{v}(t\boldsymbol{\eta})|^2 t^{d-1} dt \,,$$

odnosno za svaki $\phi \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1})$ vrijedi:

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(\boldsymbol{\xi})|^2 \phi\Big(\mathbf{x}_0, \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} \,.$$

Kao i u prošlom primjeru, H-mjera ne vidi brzinu koncentracije $\frac{1}{\varepsilon_n}$, već samo točku $\mathbf{x}_0$ u koju se niz sažima. ∎

Većina uspješnih primjena H-mjera zasnovana je na lokalizacijskom načelu (vidi [2, 52]) iz kojeg određujemo skup točaka na kojem je mjera nošena. Prije samog iskaza lokalizacijskog svojstva, prisjetimo se definicije *Sobovljevih prostora* koristeći Fourierovu pretvorbu, te pripadnih oznaka diferencijalnih operatora.

Za $s \in \mathbf{R}$ definiramo

$$\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d) := \Big\{ u \in \mathcal{S}' : \Big(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2\Big)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d) \Big\} \,,$$

uz normu $\|u\|_{\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)} := \|(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}$. Često ćemo koristiti ekvivalentnu normu danu s $u \mapsto \|(1+|\boldsymbol{\xi}|^{|s|})^{\operatorname{sign} s}\hat{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}$. Za $s = 0$ je ekvivalencija očita, dok u slučaju $s \neq 0$ koristimo da su sve norme na $\mathbf{R}^2$ ekvivalentne, pa za svaki $p \in [1, \infty\rangle$ postoje $C_p, D_p > 0$ takve da za svaki $x \in \mathbf{R}$ imamo $C_p(1+|x|^p) \leqslant (1+|x|)^p \leqslant D_p(1+|x|^p)$ iz čega slijedi

$$\frac{C_{2k}}{D_{k|s|}} \leqslant \frac{(1+|\boldsymbol{\xi}|^{|s|})^{2k}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{k|s|}} \leqslant \frac{D_{2k}}{C_{k|s|}} \,,$$

pri čemu je $k \in \mathbf{N}$ takav da $k|s| \geqslant 1$, čime dobivamo ekvivalenciju gornjih normi na $\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)$.

Poopćenje prethodnih prostora je dano s *lokalnim Sobovljevim prostorim*:

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : (\forall\, \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega))\ \varphi u \in \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)\Big\}\,.$$

Prostor $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ opskrbljujemo najslabijom topologijom u kojoj su sva preslikavanja $u \mapsto \varphi u$ neprekinuta (pogledati [8, p. 1207] i tamo spomenute reference). Posebno, prostor $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ je opskrbljen standarnom Fréchetovom lokalno konveksnom toplologijom. (pogledati [3] i tamo spomenute reference).

Parcijalne derivacije u fizikalnom prostoru označavamo s $\partial_k := \frac{\partial}{\partial x^k}$, a u dualnom prostoru s $\partial^k := \frac{\partial}{\partial \xi_k}$. Nadalje, služimo se Schwartzovim oznakama: *multiindeks* je $d$-torka prirodnih brojeva $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ za koju definiramo *duljinu* $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ i *faktorijel* $\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \cdots \alpha_d!$, dok za $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ definiramo *potenciranje* $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := (x^1)^{\alpha_1} \cdots (x^d)^{\alpha_d}$. Na multiindeksima uvodimo parcijalni uređaj $\leqslant$ na način da je $\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$ ako i samo ako za svaki $j \in 1..d$ vrijedi $\beta_j \leqslant \alpha_j$. Definiramo i *binomni koeficijent* formulom

$$\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} := \frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})!}$$

za $\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$, dok je inače jednak 0. Za derivacije ćemo koristiti pokrate $\partial_{\boldsymbol{\alpha}} := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$ u fizikalnom, odnosno $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} := (\partial^1)^{\alpha_1} \cdots (\partial^d)^{\alpha_d}$ u dualnom prostoru.

Iskažimo sada lokalizacijsko načelo H-mjera kao u [26, Corollary 2.2], dok se u [52, Theorem 1.6] može pronaći tvrdnja za $m = 1$.

**Teorem 2. (lokalizacijsko načelo za H-mjere)** *Ako* $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *određuje H-mjeru* $\boldsymbol{\mu}_H$*, te za dani* $m \in \mathbf{N}$

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n) \longrightarrow \mathsf{0} \qquad \textit{(jako) u prostoru } \mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^q)\,, \tag{1}$$

*gdje su* $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}(\Omega; \mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$*, tada vrijedi*

$$\mathbf{p}_{pr} \boldsymbol{\mu}_H^\top = \mathbf{0}\,,$$

*pri čemu je*

$$\mathbf{p}_{pr}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = m} (2\pi i)^m \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

*glavni simbol diferencijalnog operatora u (1).* ∎

Izravno iz rezultata prethodnog teorema možemo zaključiti da je nosač H-mjere $\boldsymbol{\mu}_H$ sadržan u skupu

$$\Sigma_{\mathbf{p}_{pr}} := \Big\{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega \times \mathrm{S}^{d-1} : \operatorname{rank} \mathbf{p}_{pr} < r\Big\}$$

točaka gdje $\mathbf{p}_{pr}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ nije lijevo invertibilna.

Direktna posljedica lokalizacijskog načela je poopćenje kompaktnosti kompenzacijom za jednadžbe s varijabilnim (ali neprekinutim) koeficijentima, što je predstavilo značajan korak u razvoju teorije s obzirom da su se ranije mogle tretirati samo jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Ukratko, kompaktnost kompenzacijom se primjenjuje u situaciji kad nas zanima limes (nelinearnih) kvadratičnih izraza niza $(\mathsf{u}_n)$ koji slabo konvergira u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ prema $\mathsf{u}_0$, te dodatno zadovoljava određenu diferencijalnu relaciju. Ovdje ćemo prezentirati prilagođenu verziju tvrdnje dane u [53, Corollary 28.11] za slučaj jednadžbi višeg reda i vektorskih funkcija. Dokaz ćemo izostaviti jer će svi ključni koraci biti prezentirani u dokazu varijante kompaknosti kompenzacijom s karakterističnom duljinom na kraju drugog poglavlja.

**Teorem 3. (kompaknost kompenzacijom)** *Neka* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *zadovoljava da je (1) pretkompaktno u* $\mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^q)$ *gdje je* $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}(\Omega;\mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, *dok je* $Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{Q}(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}$ *takav da* $Q(\cdot;\mathsf{u}_n) \xrightharpoonup{*} \nu$ *u* $\mathcal{M}(\Omega)$, *pri čemu* $\mathbf{Q} \in \mathrm{C}(\Omega;\mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$ *i* $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}$.

*Tada*

*a)* $(\forall\,(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in \Omega\times\mathrm{S}^{d-1})(\forall\,\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}})\ Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda}) \geqslant 0 \quad\Longrightarrow\quad \nu \geqslant Q(\cdot,\mathsf{u})$,

*b)* $(\forall\,(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in \Omega\times\mathrm{S}^{d-1})(\forall\,\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}})\ Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \nu = Q(\cdot,\mathsf{u})$,

*gdje je*

$$\Lambda_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} := \{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{C}^r : \mathbf{p}_{pr}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\lambda} = \mathsf{0}\}\,,$$

*dok je* $\mathbf{p}_{pr}$ *dan u Teoremu 2.* ∎

Prezentirajmo primjenu prethodnog teorema na jednostavnom primjeru (vidi [52, Section 1.3]) s konstantnim koeficijentima (koji je stoga bio dohvatljiv i s klasičnom teorijom).

**Primjer 3.** Neka $\mathsf{u}_n = (u_n^1, u_n^2) \rightharpoonup \mathsf{u} = (u^1, u^2)$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$ zadovoljava da su nizovi $(\partial_1 u_n^1)$ i $(\partial_2 u_n^2)$ omeđeni u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$ (pa stoga i sadržani u kompaktnim skupovima u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$). Time dobivamo da je

$$\partial_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathsf{u}_n + \partial_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{u}_n$$

pretkompaktno u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2;\mathbf{C}^2)$, te je $\Lambda_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} = \{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{C}^2 : \xi_1\lambda_1 = \xi_2\lambda_2 = 0\}$, odnosno

$$\bigcup_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} \Lambda_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} = \{(\lambda_1, 0) : \lambda_1\in\mathbf{C}\} \cup \{(0,\lambda_2) : \lambda_2 \in \mathbf{C}\}\,,$$

jer $\xi_1$ i $\xi_2$ ne mogu istovremeno biti nula na $\mathrm{S}^1$. Budući da se kvadratna forma $Q(\boldsymbol{\lambda}) := \lambda_1\bar{\lambda}_2$ očito poništava na gornjem skupu, po prethodnom teoremu slijedi $u_n^1\bar{u}_n^2 \xrightharpoonup{*} u^1\bar{u}^2$. ∎

Lokalizacijsko svojstvo H-mjera se, osim kod izvođenja prethodnog rezultata kompaknosti kompenzacijom, koristilo u brojnim problemima iz teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kao što su homogenizacija malih amplituda [6, 52], teorija upravljanja [15, 39], eksplicitnim ocjenama u homogenizaciji [7, 52], postojanju entropijskih rješenja u zakonima sačuvanja [46], te usrednjavanju brzinama [26, 37]. Također, lokalizacijsko svojstvo je bitno kod primjene *prijenosnog svojstva* H-mjera [2, 8, 52].

## 2. Karakteristična duljina nizova

U ovom odjeljku ćemo prezentirati dva svojstva koja određuju *karakterističnu duljinu* promatranog niza (npr. frekvencija titranja).

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ i $(\omega_n)$ niz pozitivnih brojeva takav da $\omega \to 0^+$. Za niz $(\mathsf{u}_n)$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ kažemo da je $(\omega_n)$-*titrajući* ako

$$(\forall \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)) \qquad \lim_{R\to\infty} \limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant \frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = 0 \,,$$

dok je $(\omega_n)$-*koncentrirajući* ako je ispunjeno

$$(\forall \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)) \qquad \lim_{R\to\infty} \limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant \frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = 0 \,.$$

Radi jednostavnosti svaki niz pozitivnih brojeva koji konvergira nuli zovemo *karakterističnom duljinom*. Nadalje, često će nam biti bitan odnos dviju karakterističnih duljina pa ga opisujemo koristeći standarne definicije asimptotskog ponašanja funkcija, s tim da su ovdje pojmovi obratni jer, umjesto neomeđenih nizova, promatramo nizove koji konvergiraju nuli. Za dvije karakteristične duljine $(\omega_n)$ i $(\tilde{\omega}_n)$ definiramo:

- $(\omega_n)$ je *brža* od $(\tilde{\omega}_n)$ ukoliko $\omega_n = o(\tilde{\omega}_n)$, odnosno $\lim_n \frac{\omega_n}{\tilde{\omega}_n} = 0$.
- $(\omega_n)$ *nije sporija* od $(\tilde{\omega}_n)$ ukoliko $\omega_n = O(\tilde{\omega}_n)$, odnosno $\limsup_n \frac{\omega_n}{\tilde{\omega}_n} < \infty$.
- $(\omega_n)$ je *istog reda* kao $(\tilde{\omega}_n)$ ukoliko $\omega_n = \Theta(\tilde{\omega}_n)$, odnosno $\omega_n = O(\tilde{\omega}_n)$ i $\tilde{\omega}_n = O(\omega_n)$.
- $(\omega_n)$ je *sporija* od $(\tilde{\omega}_n)$ ukoliko je $(\tilde{\omega}_n)$ brža od $(\omega_n)$.
- $(\omega_n)$ *nije brža* od $(\tilde{\omega}_n)$ ukoliko $(\tilde{\omega}_n)$ nije sporija od $(\omega_n)$.

Pojam $(\omega_n)$-titrajnosti je usko vezan uz proučavanje poluklasičnih mjera, pa se pojavljuje već u prvim člancima o poluklasičnim mjerama, ali bez lokaliziranja s probnom funkcijom $\varphi$ (vidi [27, Section 3] i [41, Theoreme III.1(3)]), dok se u novijim istraživanjima koristi definicija kao što smo je ovdje prezentirali (vidi [25, Def. 3.3] i [29, Def. 1.6]). Pojam $(\omega_n)$-koncentriranosti nismo do sad vidjeli u literaturi, ali će se već u trećem odjeljku vidjeti da je također povezan s poluklasičnim mjerama (vidi Korolar 3), a kasnije i s jednoskalnim H-mjerama, dok zajedno s uvjetom $(\omega_n)$-titrajnosti u potpunosti karakterizira karakterističnu duljinu promatranog niza.

Prethodne uvjete možemo shvatiti na način da se iz njih može iščitati na kojoj skali se nalazi informacija promatranog niza u Fourierovom prostoru. Drugim riječima, niz je $(\omega_n)$-titrajući (koncentrirajući) ako se u Fourierovom prostoru njegova informacija nalazi na skali ne većoj (ne manjoj) od $\frac{1}{\omega_n}$. Upravo ćemo većinu vremena u ovom odjeljku posvetiti matematičkom opravdavanju ove tvrdnje.

Iz [41, Remarque III.9] se može vidjeti da će niz $(\mathsf{u}_n)$ biti $(\omega_n)$-titrajući ako za svaku probnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ postoji $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}^d_0 \setminus \{0\}$ i $C > 0$ takvi da $\omega_n^{|\boldsymbol{\alpha}|} \|\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\varphi \mathsf{u}_n)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant C$. Napomenimo još jednom da je u navedenoj referenci korištena drugačija definicija $(\omega_n)$-titrajnosti (bez probnih funkcija) pa se i sama tvrdnja nešto razlikuje. Mi ćemo dati nešto drugačiji uvjet koji će obuhvatiti i uvjet $(\omega_n)$-koncentriranosti.

**Lema 2.** *Niz $(\mathsf{u}_n)$ je $(\omega_n)$-titrajući (koncentrirajući) ako za svaku probnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ postoji $s > 0$ $(s < 0)$ i $C > 0$ takvi da $\omega_n^s \|\varphi \mathsf{u}_n\|_{\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)} \leqslant C$.*

Dem. Neka je $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ po volji odabrana. Promotrimo najprije slučaj $s > 0$ i

$(\omega_n)$-titrajuće svojstvo. Iz pretpostavke imamo

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} =& R^{-2s}\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{R}{\omega_n}} R^{2s}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} \leqslant R^{-2s}\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{R}{\omega_n}} |\omega_n\boldsymbol{\xi}|^{2s}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}\\ \leqslant& R^{-2s}\omega_n^{2s}\int\limits_{\mathbf{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^s|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} \leqslant \frac{C^2}{R^{2s}}\,.\end{aligned}$$

Budući da je ocjena na desnoj strani neovisan o $n$, te ide nuli za $R\to\infty$, niz $(\mathsf{u}_n)$ je $(\omega_n)$-titrajući.

Neka je sad $s<0$. Slično kao i gore ocjenjujemo

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} =& (\omega_n^2+R^{-2})^{-s}\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}} (\omega_n^2+R^{-2})^{s}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}\\ \leqslant& (\omega_n^2+R^{-2})^{-s}\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}} (\omega_n^2+|\omega_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{s}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}\\ \leqslant& C^2(\omega_n^2+R^{-2})^{-s}\,,\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je niz $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-koncentrirajući.

**Q.E.D.**

U sljedeća dva primjera ispitat ćemo gornja svojstva na titrajućem i koncentracijskom nizu, te ujedno malo preciznije ilustrirati značenje tih svojstava.

**Primjer 4. (titranje)** Za $\varepsilon_n\to 0^+$ i $\mathsf{k}\in\mathbf{Z}^d\setminus\{\mathsf{0}\}$ definirajmo $u_n(\mathbf{x}):=e^{2\pi i\frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n}\cdot\mathbf{x}}$. Ranije smo u Primjeru 1 komentirali da niz $(u_n)$ slabo konvergira nuli u prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$. Konkretno, niz $(u_n)$ predstavlja titranje u smjeru vektora $\mathsf{k}$ uz frekvenciju $\frac{1}{\varepsilon_n}$. Upravo je frekvencija podatak koji određuje gdje je nošen titrajući niz u Fourierovom prostoru, pa njega želimo identificirati gornjim uvjetima.

Provjerimo za koje karakteristične duljine $(\omega_n)$ će niz $(u_n)$ biti $(\omega_n)$-titrajući, odnosno $(\omega_n)$-koncentrirajući.

Za $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ i $\omega_n\to 0^+$, koristeći $\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})=\hat\varphi\Big(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n}\Big)$, imamo

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} &= \int\limits_{\mathbf{R}^d}\Big|\hat\varphi\Big(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n}\Big)\Big|^2\chi_{c\mathrm{K}(\mathsf{0},R)}(\omega_n\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}\\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^d}|\hat\varphi(\boldsymbol{\eta})|^2\chi_{c\mathrm{K}(\mathsf{0},R)}\Big(\omega_n\boldsymbol{\eta}+\Big(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\Big)\mathsf{k}\Big)\,d\boldsymbol{\eta}\,,\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili zamjenu varijabli $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n}$, dok je $\chi_{c\mathrm{K}(\mathsf{0},R)}$ karakteristična funkcija komplementa otvorene kugle, $\{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant R\}$.

Analogno dobivamo

$$\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{\mathbf{R}^d}|\hat\varphi(\boldsymbol{\eta})|^2\chi_{\mathrm{K}[\mathsf{0},\frac{1}{R}]}\Big(\omega_n\boldsymbol{\eta}+\Big(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\Big)\mathsf{k}\Big)\,d\boldsymbol{\eta}\,.$$

U daljnjem računu ćemo pretpostaviti da $c := \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ postoji u skupu $[0, \infty]$, a onda ćemo analizu gornjih integrala razdvojiti u ovisnosti o vrijednosti tog limesa. Ukoliko to nije slučaj, samo bismo prešli na odgovarajući podniz. Promatramo $\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$, a ne $\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}$ jer ćemo u cijelom ovom radu konzistentno karakterističnu duljinu problema stavljati u brojnik, dok karakterističnu duljinu koja dolazi od korištene metode u nazivnik.

a) $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty$. Tada $\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k} \longrightarrow 0$ po točkama, a onda za svaki $R > 0$ imamo i da

$$\chi_{c\mathrm{K}(\mathsf{0},R)}\left(\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k}\right) \longrightarrow 0\,,$$

odnosno

$$\chi_{\mathrm{K}[\mathsf{0},\frac{1}{R}]}\left(\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k}\right) \longrightarrow 1\,,$$

po točkama. Kako je $|\hat{\varphi}(\cdot)|^2$ integrabilna funkcija ($\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$), po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant \frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = 0\,,$$

te

$$\lim_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = \|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,.$$

b) $c = \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} \in \langle 0, \infty\rangle$. Tada $\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k} \longrightarrow \frac{\mathsf{k}}{c}$ po točkama, a onda za svaki $R > \max\left\{\frac{|\mathsf{k}|}{c}, \frac{c}{|\mathsf{k}|}\right\}$ imamo i da

$$\chi_{c\mathrm{K}(\mathsf{0},R)}\left(\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k}\right)\,,\ \chi_{\mathrm{K}[\mathsf{0},\frac{1}{R}]}\left(\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k}\right) \longrightarrow 0$$

po točkama. Po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji sada slijedi

$$\lim_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant \frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = \lim_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = 0\,.$$

c) $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0$. Tada $\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k} \longrightarrow \infty$ po točkama, a onda za svaki $R > 0$ imamo i da

$$\chi_{c\mathrm{K}(\mathsf{0},R)}\left(\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k}\right) \longrightarrow 1\,,$$

odnosno

$$\chi_{\mathrm{K}[\mathsf{0},\frac{1}{R}]}\left(\omega_n \boldsymbol{\eta} + \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)\mathsf{k}\right) \longrightarrow 0\,,$$

po točkama. Po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant \frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = \|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,,$$

te

$$\lim_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} = 0\,.$$

Konačno zaključujemo da je niz $(u_n)$ $(\omega_n)$-titrajući ako $\omega_n = O(\varepsilon_n)$, dok je $(\omega_n)$-koncentrirajući za $\varepsilon_n = O(\omega_n)$. Posebno, imamo da je niz $(u_n)$ $(\omega_n)$-titrajući i koncentrirajući ako $\omega_n = \Theta(\varepsilon_n)$.

Može se pokazati da gornje razmatranje vrijedi i za općeniti titrajni niz $(u_n)$ dan Primjerom 1.

∎

Istaknimo da se analiza prethodnog primjera jednostavnije mogla provesti korištenjem Leme 2.

Ako je niz $(u_n)$ iz prethodnog primjera $(\omega_n)$-titrajući (koncentrirajući), tada iz dobivenog rezultata izravno slijedi da je također $(\tilde{\omega}_n)$-titrajući (koncentrirajući) za sve karakteristične duljine $(\tilde{\omega}_n)$ takve da $\tilde{\omega}_n = O(\omega_n)$ $(\omega_n = O(\tilde{\omega}_n))$. Nadalje, uočavamo da u slučaju kad je niz i $(\omega_n)$-titrajući i $(\omega_n)$-koncentrirajući, konvergencija nizova $(\omega_n)$ i $(\varepsilon_n)$ je istog reda, odnosno možemo reći da $\frac{1}{\omega_n}$ dobro aproksimira frekvenciju titranja. Ista ova svojstva moći ćemo uočiti i u sljedećem primjeru s koncentracijskim nizom.

**Primjer 5.** **(koncentracija)** Neka je $u_n(x) := \varepsilon_n^{-d/2} v(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\varepsilon_n})$, pri čemu su $(\varepsilon_n)$, $v$ i $\mathbf{x}_0$ kao u Primjeru 2. Kao i u prošlom primjeru, $\frac{1}{\varepsilon_n}$ je veličina koju želimo identificirati.

Za $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji imamo da $\varphi u_n - \varphi(\mathbf{x}_0)u_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$. Zaista, nakon zamjene varijabli $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\varepsilon_n}$ dobivamo

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)|^2 |u_n(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^d} |\varphi(\varepsilon_n \mathbf{y} + \mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x}_0)|^2 |v(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{y}\,.$$

Kako $\varphi(\varepsilon_n\mathbf{y}+\mathbf{x}_0)-\varphi(\mathbf{x}_0) \longrightarrow 0$ po točkama, te je $4\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}|v(\cdot)|^2$ integrabilna funkcija, možemo primjeniti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji.

Neka je $(\omega_n)$ proizvoljna karakteristična duljina. Budući da $\varphi u_n - \varphi(\mathbf{x}_0)u_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, nije teško pokazati da je dovoljno proučavati izraz

$$\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{R}{\omega_n}} |\hat{u}_n(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} = \varepsilon_n^d \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{R}{\omega_n}} |\hat{v}(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{|\boldsymbol{\eta}|\geqslant R\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}} |\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2\, d\boldsymbol{\eta}\,,$$

pri čemu smo u prvoj jednakosti koristili $\hat{u}_n(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_n^{d/2} e^{-2\pi i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}_0}\hat{v}(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})$, dok smo u drugoj jednakosti koristili zamjenu varijabli $\boldsymbol{\eta} = \varepsilon_n\boldsymbol{\xi}$.

Sada je jasno da je niz $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-titrajući za $\omega_n = O(\varepsilon_n)$, dok je u slučaju $\varepsilon_n = O(\omega_n)$ $(\omega_n)$-koncentrirajući.

∎

Iz prethodna dva primjera uočavamo da karakteristična duljina $(\omega_n)$ za koju je niz $(\omega_n)$-titrajući i koncentrirajući dobro opisuje skalu koja određuje promatrani niz. Iz tog razloga niz $(\omega_n)$ ima smisla zvati *karakterističnom duljinom promatranog niza*.

Svojstva koja smo komentirali nakon prvog primjera, te ih dodatno potkrijepili i s drugim primjerom, vrijede i općenito, što ćemo prezentirati u sljedećim lemama. Time će biti opravdana intepretacija ovih uvjeta dana na početku odjeljka.

**Lema 3.** *Ako je* $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ $(\omega_n)$*-titrajući (koncentrirajući) tada je i* $(\tilde\omega_n)$*-titrajući (koncentrirajući) za svaku karakterističnu duljinu* $(\tilde\omega_n)$ *takvu da* $\tilde\omega_n = O(\omega_n)$ $(\omega_n = O(\tilde\omega_n))$*.*

Dem. Neka je $\tilde\omega_n \to 0^+$ takav da $\tilde\omega_n = O(\omega_n)$. Tada postoji konstanta $m > 0$ takva da $\frac{\omega_n}{\tilde\omega_n} > m$ pa za $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ imamo

$$\int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\tilde\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi = \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\omega_n}\frac{\omega_n}{\tilde\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi \leqslant \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{mR}{\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi\,.$$

Prijelazom na limes po $n$ pa po $R$ dobivamo da izraz na desnoj strani nejednakosti ide nuli, pa onda to isto vrijedi i za izraz s lijeve strane nejednakosti, što povlači da je promatrani niz i $(\tilde\omega_n)$-titrajući.

Ako je niz $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-koncentrirajući, uzimamo $(\tilde\omega_n)$ takav da $\omega_n = O(\tilde\omega_n)$ iz čega slijedi da postoji konstanta $M > 0$ takva da $\frac{\omega_n}{\tilde\omega_n} < M$. Kao i gore, iz nejednakosti

$$\int\limits_{|\boldsymbol\xi|\leqslant\frac{1}{R\tilde\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi = \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}\frac{\omega_n}{\tilde\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi \leqslant \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\leqslant\frac{1}{\frac{R}{M}\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi\,,$$

slijedi da je niz $(\mathsf{u}_n)$ $(\tilde\omega_n)$-koncentrirajući.

**Q.E.D.**

**Lema 4.** *Neka je* $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ $(\omega_n)$*-titrajući i* $(\omega_n)$*-koncentrirajući za* $\omega_n \to 0^+$*. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

*a) Postoji* $\tilde\omega_n \to 0^+$ *sporija od* $(\omega_n)$ *za koju je* $(\mathsf{u}_n)$ $(\tilde\omega_n)$*-titrajući.*

*b) Postoji* $\tilde\omega_n \to 0^+$ *brža od* $(\omega_n)$ *za koju je* $(\mathsf{u}_n)$ $(\tilde\omega_n)$*-koncentrirajući.*

*c)* $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$*.*

Dem. Svojstvo (c) povlači (a) i (b) po Lemi 5 (vidi niže).

Neka vrijedi (a). Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ i $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ postoji $R > 0$ takav da vrijedi

$$\limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\tilde\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad \limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Neka je $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi $\frac{\omega_n}{\tilde\omega_n} < \frac{1}{R^2}$ pa za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi nejednakost

$$\int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\tilde\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi = \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\omega_n}\frac{\omega_n}{\tilde\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi \geqslant \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi\,,$$

iz čega slijedi

$$\limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi \leqslant \limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\tilde\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sada imamo

$$\limsup_n \|\varphi\mathsf{u}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} \leqslant \limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi + \limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\xi)|^2\,d\boldsymbol\xi < \varepsilon\,.$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ po volji odabran, zaključujemo da $\varphi \mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)$. Proizvoljnost probne funkcije $\varphi$ daje konačnu tvrdnju.

Dokaz tvrdnje da (b) povlači (c) ide u potpunosti analogno.

**Q.E.D.**

Ukoliko je niz $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-titrajući i koncentrirajući, tada je niz $(\omega_n)$ optimalan u sljedećem smislu. Neka je $(\tilde{\omega}_n)$ takav da je $(\mathsf{u}_n)$ također i $(\tilde{\omega}_n)$-titrajući i koncentrirajući. Tada je $(\tilde{\omega}_n)$ istog reda kao $(\omega_n)$ ili postoji jako konvergentni podniz $\mathsf{u}_{n'} \longrightarrow \mathsf{0}$. Naime, ukoliko $(\tilde{\omega}_n)$ i $(\omega_n)$ nisu istog reda tada postoji podniz za koji je $\tilde{\omega}_{n'} = o(\omega_{n'})$ ili $\omega_{n'} = o(\tilde{\omega}_{n'})$ pa po prethodnoj lemi slijedi $\mathsf{u}_{n'} \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$.

Time možemo reći da postojanje karakteristične duljine sporije/brže od karakteristične duljine promatranog niza povlači jaku konvergenciju (pod)niza.

**Lema 5.** *Ako* $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$*, tada je* $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$*-titrajući i koncentrirajući za svaku karakterističnu duljinu* $(\omega_n)$*.*

Dem. Tvrdnja trivijalno slijedi iz nejednakosti

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant \frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \|\varphi \mathsf{u}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)} \qquad \text{i} \qquad \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{1}{R\omega_n}} |\widehat{\varphi \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \|\varphi \mathsf{u}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)},$$

pri čemu je $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ proizvoljna.

**Q.E.D.**

Iz prethodnih tvrdnji i komentara uočavamo da nam je uvijek od interesa pronaći (ako postoji) karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ za koju će promatrani niz biti $(\omega_n)$-titrajući i koncentrirajući, tj. pronaći karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ koja je ujedno karakteristična duljina promatranog niza. Međutim, vrlo lako se konstruira primjer niza za koji ne postoji takva karakteristična duljina.

**Primjer 6.** Za $\varepsilon_n \to 0^+$ i $\mathsf{k}, \mathsf{s} \in \mathbf{Z}^d \setminus \{\mathsf{0}\}$ definirajmo nizove $u_n(\mathbf{x}) := e^{2\pi i \frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n} \cdot \mathbf{x}}$ i $v_n(\mathbf{x}) := e^{2\pi i \frac{\mathsf{s}}{\varepsilon_n^2} \cdot \mathbf{x}}$. Pokažimo da niz $(u_n + v_n)$ nema karakterističnu duljinu.

Po Primjeru 4 znamo da je jedna karakteristična duljina niza $(u_n)$ upravo $(\varepsilon_n)$, dok je za niz $(v_n)$ to $(\varepsilon_n^2)$. Nadalje, po Lemi 3 je $(u_n)$ također $(\varepsilon_n^2)$-titrajući, dok je $(v_n)$ također $(\varepsilon_n)$-koncentrirajući. Sada iz Leme 6 (vidi niže) slijedi da je $(u_n + v_n)$ $(\varepsilon_n^2)$-titrajući i $(\varepsilon_n)$-koncentrirajući.

Pretpostavimo da $(u_n + v_n)$ ima karakterističnu duljinu $(\omega_n)$. Kako $(u_n + v_n)$ ne konvergira jako, po Lemi 4 imamo da tada nužno moraju postojati konstante $m, M > 0$ takve da za dovoljno veliki $n$ vrijedi $m\varepsilon_n^2 \leqslant \omega_n \leqslant M\varepsilon_n$. Za takav $(\omega_n)$, opet po Lemi 3, niz $(u_n)$ je $(\omega_n)$-titrajući, dok je $(v_n)$ $(\omega_n)$-koncentrirajući. Iz jednakosti $u_n = (u_n + v_n) + (-v_n)$ i $v_n = (u_n + v_n) + (-u_n)$, te Leme 6, imamo da je $(u_n)$ $(\omega_n)$-koncentrirajući i $(v_n)$ $(\omega_n)$-titrajući. Tada iz Primjera 4 nužno slijedi da je $\limsup_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} < \infty$ i $\liminf_n \frac{\varepsilon_n^2}{\omega_n} > 0$ što nije moguće.

∎

**Lema 6.** *Neka su* $(\mathsf{u}_n)$ *i* $(\mathsf{v}_n)$ $(\omega_n)$*-titrajući (koncentrirajući). Tada je i* $(\mathsf{u}_n + \mathsf{v}_n)$ *također* $(\omega_n)$*-titrajući (koncentrirajući).*

Dem. Tvrdnja trivijalno slijedi iz nejednakosti trokuta. Naime, ako su $(\mathsf{u}_n)$ i $(\mathsf{v}_n)$ $(\omega_n)$-titrajući, iz nejednakosti

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{R}{\omega_n}} |\varphi(\widehat{\mathsf{u}_n + \mathsf{v}_n})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \left( \sqrt{\int_{|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi \mathsf{u}_n}|^2 \, d\boldsymbol{\xi}} + \sqrt{\int_{|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi \mathsf{v}_n}|^2 \, d\boldsymbol{\xi}} \right)^2,$$

dobivamo da je $(\mathsf{u}_n + \mathsf{v}_n)$ $(\omega_n)$-titrajući.

Analogno i za $(\omega_n)$-koncentracijsko svojstvo.

**Q.E.D.**

Vidjeli smo da postoje nizovi koji nemaju karakterističnu duljinu, odnosno za koje ne postoji karakteristična duljina $(\omega_n)$ takva da je promatrani niz $(\omega_n)$-titrajući i koncentrirajući. Međutim, pokazat ćemo da za svaki omeđeni niz postoji karakteristična duljina s obzirom na koju je titrajući, dok ćemo za koncentrirajuće svojstvo morati dodatno pretpostaviti da niz slabo konvergira nuli.

Ideja dokaza prethodnih tvrdnji sastoji se od tri koraka. Prvi korak je pokazati da za svaku probnu funkciju možemo naći *dobru* karakterističnu duljinu. Nakon toga je potrebno pokazati da za probne funkcije iz prebrojivog gustog skupa možemo naći jednu karakterističnu duljinu dobru za sve, te naposljetku koristimo standarni argument separabilnosti pa po gustoći dobivamo konačnu tvrdnju. Prvi korak ostavljamo za kraj tako da u sljedeće dvije leme pokazujemo drugi i treći korak.

**Lema 7.** *Za svaku prebrojivu familiju karakterističnih duljina postoji karakteristična duljina brža (sporija) od svih karakterističnih duljina iz promatrane familije.*

Dem. Neka je $\left\{\left(\omega_n^{(1)}\right), \left(\omega_n^{(2)}\right), \dots\right\}$ prebrojiva familija karakterističnih duljina.

Pokažimo najprije da postoji karakteristična duljina $(\tilde{\omega}_n)$ koja nije sporija od svih karakterističnih duljina iz dane prebrojive familije, odnosno da za svaki $k \in \mathbf{N}$ vrijedi $\tilde{\omega}_n = O(\omega_n^{(k)})$. Jedan takav niz možemo dobiti uzimajući dijagonalni niz $\tilde{\omega}_n := \min_{k \leqslant n} \omega_n^{(k)}$. Naime, za svaki $k \in \mathbf{N}$ imamo da za sve $n \geqslant k$ vrijedi $\tilde{\omega}_n \leqslant \omega_n^k$ iz čega slijedi $\tilde{\omega}_n \to 0^+$, te $\limsup_n \frac{\tilde{\omega}_n}{\omega_n^{(k)}} < \infty$. Konačno s $\omega_n := \tilde{\omega}_n^2$ je dana jedna karakterističina duljina brža od svih iz dane familije.

Dokaz postojanja karakteristične duljine koja nije brža od svih promatranih je ipak nešto zahtjevnije jer trebamo paziti da previše ne *usporimo* niz pa da više ne konvergira nuli. Naime, analogon prethodne konstrukcije bi bio $\omega_n := \max_{k \leqslant n} \omega_n^{(k)}$ za što nije teško konstruirati primjer za koji $(\omega_n)$ neće konvergirati nuli.

Međutim, i dalje ćemo koristiti dijagonalni postupak samo na malo suptilniji način tako da ćemo definirati niz $(l_m)$ koji će odrediti kada mijenjamo vrijednost niza $(\omega_n)$. Definirajmo $l_0 := 1$, a dalje nastavljamo induktivnim postupkom. Za proizvoljan $m \in \mathbf{N}$, iz konvergencije k nuli karakterističnih duljina, postoji $j_m \in \mathbf{N}$ takav da za sve $k \leqslant m$ i sve $n \geqslant j_m$ imamo $\omega_n^{(k)} \leqslant \frac{1}{(m+1)^2}$. Definirajmo $l_m := \max\{j_m, l_{m-1}+1\}$. Očito imamo da je $(l_m)$ strogo rastući niz, te $l_m \geqslant m+1 \to \infty$. Definirajmo $\omega_n := \frac{1}{m+1}$ za $l_m \leqslant n < l_{m+1}$ što je dobro definirano jer je $(l_m)$ strogo rastući i neomeđen. Pokažimo da $(\omega_n)$ konverigra nuli i da je sporiji od svih promatranih karakterističnih duljina.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, te odaberimo $m \in \mathbf{N}$ takav da $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$. Za $n \geqslant l_m$ imamo $\omega_n \leqslant \frac{1}{m+1} < \varepsilon$ iz čega slijedi $\omega_n \to 0^+$.

Za proizvoljan $k \in \mathbf{N}$ pokažimo da $\frac{\omega_n}{\omega_n^{(k)}} \to \infty$. Neka je $M > 0$ po volji odabran, a onda postoji $m_0 \in \mathbf{N}$ takav da $m_0 \geqslant \max\{k, M-1\}$. Uzmimo proizvoljni $n \geqslant j_{m_0}$. Tada postoji $m \geqslant m_0$ takav da $j_m \leqslant n < j_{m+1}$ iz čega dobivamo

$$\frac{\omega_n}{\omega_n^{(k)}} \geqslant \frac{(m+1)^2}{m+1} = m+1 \geqslant m_0 + 1 \geqslant M\,,$$

čime je dokaz završen.

**Q.E.D.**

Postojanje sporije karakteristične duljine je posljedica općenitijeg rezultata iz teorije skupova o Hausdorffovoj praznini (eng. Hausdorff gap), dok smo u prethodnoj lemi prezentirali samo jednu moguću konstrukciju.

**Lema 8.** *Neka je* $(\mathsf{u}_n)$ *omeđen u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *(vidi Napomenu 1 niže). Ako za svaku probnu funkciju* $\varphi_k$ *iz gustog prebrojivog podskupa* $\mathcal{G}\subseteq \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ *prostora* $\mathrm{L}^2_c(\Omega)$ *(u topologiji strogog induktivnog limesa prostora* $\mathrm{L}^2_c(\Omega)$*) postoji karakteristična duljina* $(\omega_n^{(k)})$ *takva da*

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_n \int_{A_{n,R}} |\widehat{\varphi_k \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} = 0\,,$$

*pri čemu je* $A_{n,R}=\Big\{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant R/\omega_n^{(k)}\Big\}$ $\Big(A_{n,R}=\Big\{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 1/R\omega_n^{(k)}\Big\}\Big)$*, tada postoji karakteristična duljina* $(\omega_n)$ *takva da je niz* $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$*-titrajući (koncentrirajući).*

Dem. Prema prethodnoj lemi i Lemi 3 postoji karakteristična duljina $(\omega_n)$ takva da sve funkcije iz $\mathcal{G}$ zadovoljavaju uvjet iz iskaza leme ako $\omega_n^{(k)}$ zamijenimo s $\omega_n$.

Preostalo je pokazati da će isto vrijediti i za sve funkcije iz $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$. Neka je $\varphi\in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$, $\varphi\not\equiv 0$. Tada za svaki $\varepsilon>0$ postoji $k\in\mathbf{N}$ i kompakt $K\subseteq\Omega$ takavi da $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\varphi_k\subseteq K$, $\|\varphi-\varphi_k\|_{\mathrm{L}^2(K)}<\varepsilon$. Kako je u ocjeni

$$\limsup_n \int\limits_{A_{n,R}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \limsup_n \int\limits_{A_{n,R}} \Big(|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}|^2 - |\widehat{\varphi_k\mathsf{u}_n}|^2\Big)\, d\boldsymbol{\xi} + \limsup_n \int\limits_{A_{n,R}} |\widehat{\varphi_k\mathsf{u}_n}|^2\, d\boldsymbol{\xi}\,,$$

drugi član s desne strane nejednakosti proizvoljno malen za dovoljno veliki $R>0$, dovoljno je ocijeniti prvi član, za koji imamo

$$\begin{aligned}
&\Big|\|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}\chi_{A_{n,R}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)} - \|\widehat{\varphi_k\mathsf{u}_n}\chi_{A_{n,R}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)}\Big|\\
&\quad\leqslant\Big(\|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}\chi_{A_{n,R}}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)} + \|\widehat{\varphi_k\mathsf{u}_n}\chi_{A_{n,R}}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)}\Big)\\
&\qquad\qquad\Big|\|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}\chi_{A_{n,R}}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)} - \|\widehat{\varphi_k\mathsf{u}_n}\chi_{A_{n,R}}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)}\Big|\\
&\quad\leqslant(2\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(K)}+\varepsilon)\sup_n \|\mathsf{u}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(K;\mathbf{C}^r)}\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon>0$ zaključujemo da je niz $(\mathsf{u}_n)$ uistinu $(\omega_n)$-titrajući (koncentrirajući).

**Q.E.D.**

**Napomena 1.** Kako prostor $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbf{C}^r)$ promatramo uz standarnu Fréchetovu lokalno konveksnu topologiju (vidi [3] i reference u tom radu), podskup prostora $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ je omeđen ako i samo ako je omeđen u smislu pripadnih polunormi koje generiraju lokalno konveksnu topologiju. Konkretno, ako je niz $(\mathsf{u}_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, tada je za svaku probnu funkciju $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ niz $(\varphi\mathsf{u}_n)$ omeđen u Hilbertovom prostoru $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)$ (naravno, ocjena ovisi o probnoj funkciji $\varphi$).

Istaknimo da je gornje svojstvo omeđenosti jače od pripadne metričke omeđenosti. ∎

Sada smo spremni pokazati rezultat postojanja karakteristične duljine za koju je omeđeni niz titrajući, odnosno koncentrirajući.

**Teorem 4.** *Za svaki omeđeni niz u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *postoji karakteristična duljina* $(\omega_n)$ *za koju je* $(\omega_n)$*-titrajući.*

*Nadalje, za omeđeni niz u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *postoji karakteristična duljina* $(\omega_n)$ *za koju je* $(\omega_n)$*-koncentrirajući ako i samo ako niz slabo konvergira nuli u istom prostoru.*

Dem. Neka je $(\mathsf{u}_n)$ omeđen niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Prema prethodnoj lemi za postojanje karakteristične duljine s obzirom na koju je niz $(\mathsf{u}_n)$ titrajući dovoljno je za proizvoljnu probnu funkciju $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ pokazati da postoji karakteristična duljina $(\omega_n)$ takva da

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_n \int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant \frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}=0\,.$$

Budući da je $\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}\in\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, po neprekinutosti mjere na padajućem nizu podskupova slijedi da za svake $k,n\in\mathbf{N}$ postoji $R_{n,k}>1$ takav da $\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant R_{n,k}}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}|^2\,d\boldsymbol{\xi}\leqslant\frac{1}{k}$.

Definirajmo $\omega_n:=\frac{1}{nR_{n,n}}$. Tada za svaki $n\in\mathbf{N}$ imamo

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{1}{\omega_n}}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}|^2\,d\boldsymbol{\xi}\leqslant\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant R_{n,n}}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}|^2\,d\boldsymbol{\xi}\leqslant\frac{1}{n}\,,$$

iz čega slijedi prvi dio tvrdnje.

Promotrimo sada $(\omega_n)$-koncentrirajuće svojstvo. Iz $\mathsf{u}_n\rightharpoonup\mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, po Rellichovom teoremu kompaknosti, slijedi da za svaku probnu funkciju $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ vrijedi $\varphi\mathsf{u}_n\longrightarrow\mathsf{0}$ u $\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, pa iz dokaza Leme 2 možemo zaključiti da za $\omega_n:=\|\varphi\mathsf{u}_n\|_{\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)}$ vrijedi

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_n\int_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\frac{1}{R\omega_n}}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}=0\,,$$

što je dovoljno, kao i kod titrajućeg svojstva, za postojanje karakteristične duljine s obzirom na koju je niz koncentrirajući.

S druge strane, neka je $(\omega_n)$ karakteristična duljina za koju je omeđeni niz $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-koncentracijski. Pokažimo da je tada nužno $\mathsf{u}_n\rightharpoonup\mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$.

Neka su $R>0$ i $M>0$ po volji odabrani. Iz $\omega_n\to0^+$ slijedi da postoji $n_0\in\mathbf{N}$ takav da za svaki $n\geqslant n_0$ vrijedi $\omega_n\leqslant\frac{1}{RM}$. Nadalje, iz omeđenosti niza $(\mathsf{u}_n)$ znamo da postoji podniz takav da $\mathsf{u}_{n'}\rightharpoonup\mathsf{u}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Posebno, za svaku probnu funkciju $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ vrijedi $\widehat{\varphi\mathsf{u}_{n'}}\longrightarrow\widehat{\varphi\mathsf{u}}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$.

Kako je $(\mathsf{u}_{n'})$ $(\omega_{n'})$-koncentracijski, te $R>0$ proizvoljan, iz nejednakosti

$$\limsup_{n'\geqslant n_0}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\frac{1}{R\omega_{n'}}}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}\geqslant\limsup_{n'\geqslant n_0}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant M}|\widehat{\varphi\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}=\|\widehat{\varphi\mathsf{u}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{K}(\mathsf{0},M);\mathbf{C}^r)}\,,$$

slijedi $\|\widehat{\varphi\mathsf{u}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{K}(\mathsf{0},M);\mathbf{C}^r)}=0$, a onda proizvoljnost konstante $M>0$ i probne funkcije $\varphi$, uz Plancherelovu formulu, povlači $\mathsf{u}\equiv\mathsf{0}$ (skoro svuda).

Kako za svaki podniz niza $(\mathsf{u}_n)$ postoji podniz koji slabo konvergira k nula, slijedi da cijeli niz slabo konvergira nuli.

**Q.E.D.**

Iz prethodnog teorema zaključujemo da je $(\omega_n)$-koncentracijsko svojstvo dobar kriterij za određivanje je li limes promatranog (po)niza jednak nuli.

Sada ćemo prezentirati upotpunjen rezultat Leme 5 za $(\omega_n)$-titrajuće svojstvo.

**Teorem 5.** *Niz* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *je jako konvergentan ako i samo ako je* $(\omega_n)$*-titrajući za sve karakteristične duljine* $(\omega_n)$.

Dem. Neka je $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{u}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Iz Leme 5 slijedi da je $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$ $(\omega_n)$-titrajući za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$, pa je po Lemi 6 dovoljno provjeriti da to isto vrijedi i za konstantni niz $\mathsf{v}_n := \mathsf{u}$, a to trivijalno vrijedi po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji.

Pretpostavimo sada da je niz $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-titrajući za svaku karakterističnu duljinu. Kao i u prvom dijelu dokaza, zaključujemo da isto vrijedi i za niz $\mathsf{v}_n := \mathsf{u}_n - \mathsf{u}$. Neka je $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ po volji odabrana. Potrebno je pokazati da $\varphi\mathsf{v}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)$.

Budući da $\varphi\mathsf{v}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ (nakon proširenja nulom) i $\operatorname{supp}\varphi\mathsf{v}_n \subseteq \operatorname{supp}\varphi$, po Rellichovom teoremu kompaktnosti slijedi da $\varphi\mathsf{v}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, odnosno

$$\|\varphi\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)} = \int\limits_{\mathbf{R}^d} \frac{|\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}\,d\boldsymbol{\xi} \longrightarrow 0\,.$$

Definirajmo $\omega_n := \|\varphi\mathsf{v}_n\|^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)}$. U jednakosti

$$\int\limits_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} + \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|<\frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}\,,$$

prvi član s desne strane jednakosti je proizvoljno malen za $R$ dovoljno velik (jednoliko po $n$) po pretpostavci, dok za drugi član imamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|<\frac{R}{\omega_n}} |\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} &= \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|<\frac{R}{\omega_n}} \frac{|\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)\,d\boldsymbol{\xi} \\
&\leqslant \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|<\frac{R}{\omega_n}} \frac{|\widehat{\varphi\mathsf{v}_n}(\boldsymbol{\xi})|^2}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}\Big(1+\frac{R^2}{\omega_n^2}\Big)\,d\boldsymbol{\xi} \\
&\leqslant \frac{\omega_n^2+R^2}{\omega_n^2}\omega_n^4 = \omega_n^2(\omega_n^2+R^2)\,,
\end{aligned}$$

što ide nuli za svaki $R$ kad $n\to\infty$.

**Q.E.D.**

Prethodni rezultat možemo shvatiti kao varijantu Riesz-Kolmogorovljevog teorema kompaktnosti o kojem će biti više riječi u sljedećem poglavlju (Teorem II.2) gdje ćemo dati nešto općenitiju tvrdnju prilagođenu i za $\mathrm{H}^{-l}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, $l\geqslant 0$, prostore.

Pretpostavka slabe konvergencije nam je trebala da bismo imali jedinstvenost limesa. Na primjer, za $\mathsf{u},\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ niz

$$\mathsf{u}_n := \begin{cases} \mathsf{u} & , \quad 2|n \\ \mathsf{v} & , \quad 2\not|\, n \end{cases}$$

je očito omeđen i $(\omega_n)$-titrajući, ali nema jedinstveno gomilište. Dakle, ako pretpostavku slabe konvergencije zamijenimo omeđenošću, zaključak bi bio da svaki podniz promatranog niza ima jako konvergentan podniz.

Analogon prethodnog teorema vrijedi i za $(\omega_n)$-koncentracijsko svojstvo, s tim da će po Teoremu 4 pripadni limes niza biti $\mathsf{0}$.

**Korolar 2.** *Omeđeni niz u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *jako konverigra nuli ako i samo ako je* $(\omega_n)$*-koncentrirajući za sve karakteristične duljine* $(\omega_n)$*.*

Dem. Tvrdnja je jednostavna posljedica Leme 5 s jedne strane, te Teorema 4 i Leme 4 s druge strane.

Naime, ako niz jako konvergira nuli tada iz Leme 5 slijedi da je niz $(\omega_n)$-koncentrirajući za svaku karakterističnu duljinu.

S druge strane, po Teoremu 4 znamo da postoji karakteristična duljina $(\omega_n)$ takva da je pripadni niz $(\omega_n)$-titrajući. Nadalje, iz pretpostavke znamo da je niz i $(\omega_n)$-koncentrirajući i $(\omega_n^2)$-koncentrirajući pa primjenom Leme 4 dobivamo rezultat.

**Q.E.D.**

Tvrdnju Teorema 5 mogli smo dokazati analogno dokazu prethodnog korolara promatranjem niza $\mathsf{v}_n := \mathsf{u}_n - \mathsf{u}$, međutim, prezentirani dokaz Teorema 5 je zanimljiv alternativni pristup kako sam dokaz ne koristi tvrdnje Teorema 4.

## 3. Poluklasične mjere

Poluklasične mjere je najprije uveo Patrick Gérard [27], dok su kasnije Pierre-Louis Lions i Thierry Paul [41] prezentirali konstrukciju koristeći Wignerovu pretvorbu, pa se često poluklasične mjere još nazivaju *Wignerovim mjerama*. Riječ je o Radonovim mjerama na kotangencijalnom svežnju $\Omega\times\mathbf{R}^d$ nad domenom $\Omega\subseteq\mathbf{R}^d$.

Kao što smo već istaknuli, primjena poluklasičnih mjera vezana je uz probleme s karakterističnom duljinom kao što su proučavanje mikrolokalne gustoće energije polulinearne valne jednadžbe [28, 25], poluklasični limes Schrödingerovih jednadžbi [16, 41, 55] i višečestičnih sustava u kvantnoj teoriji [24], usrednjeni limes u kvantnoj teoriji [1, 40], te homogenizacijski limes [29, 41] kojeg ćemo proučavati u posljednjem odjeljku ovog poglavlja.

Ovdje ćemo prezentirati rezultat postojanja poluklasičnih mjera u obliku sličnom rezultatu postojanja H-mjera (Teorem 1) prateći Tartarov pristup [53, Chapter 32], ali i dalje ekvivalentnom originalnoj Gérardovoj definiciji [27, Proposition 3.1]. Na taj način ne trebamo uvoditi pojam (poluklasičnih) pseudodiferencijalnih operatora, čime sam iskaz postaje jednostavniji.

**Teorem 6. (postojanje poluklasičnih mjera)** *Ako je* $(\mathsf{u}_n)$ *omeđen niz u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$*, i* $(\omega_n)$ *niz pozitivnih brojeva takav da* $\omega_n\to 0^+$*, onda postoji podniz* $(\mathsf{u}_{n'})$ *i* $r\times r$ *hermitska nenegativna matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_{n'})}$ *na produktu* $\Omega\times\mathbf{R}^d$ *takvi da za svaki izbor probnih funkcija* $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ *i* $\psi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$*, vrijedi*

$$\lim_{n'}\int\limits_{\mathbf{R}^d}\Big(\widehat{\varphi_1\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\otimes\widehat{\varphi_2\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\Big)\psi(\omega_{n'}\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} = \langle\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_{n'})},(\varphi_1\bar\varphi_2)\boxtimes\psi\rangle$$

$$= \int\limits_{\Omega\times\mathbf{R}^d}\varphi_1(\mathbf{x})\bar\varphi_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})\,d\bar{\boldsymbol{\mu}}_{sc}^{(\omega_{n'})}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,.$$

*Mjeru* $\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_{n'})}$ *nazivamo* poluklasičnom mjerom (s karakterističnom duljinom $(\omega_{n'})$) *pridruženom (pod)nizu* $(\mathsf{u}_{n'})$.

∎

Kao i kod H-mjera, često ćemo radi jednostavnosti biti neprecizni i nećemo posebno naglašavati prelazak na podniz, te ćemo također pojednostaviti notaciju koristeći $\boldsymbol{\mu}_{sc} = \boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_n)}$, osim u slučajevima kad neće biti jasno koja se karakteristična duljina koristi. Kad cijeli niz određuje jedinstvenu poluklasičnu mjeru (ne trebamo prelaziti na podniz) kažemo da je niz $(\omega_n)$-*čist* (u terminu poluklasičnih mjera).

Za razliku od H-mjera, u definiciji poluklasičnih mjera nije nužno da pripadni niz $(\mathsf{u}_n)$ konvergira (slabo) nuli. To je moguće jer je rezultat inačice komutacijske leme s karakterističnom duljinom jači od klasičnog (vidi Lemu II.3). Štoviše, poluklasičnu mjeru možemo rastaviti na zbroj mjere koja ovisi samo o slabom limesu promatranog niza i poluklasične mjere pridružene nizu koji slabo konvergira nuli [27, Proposition 3.1].

**Lema 9.** *Neka* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *i* $\omega_n \to 0^+$. *Ako je* $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-*čist (u terminu poluklasičnih mjera), tada je i niz* $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$ *također* $(\omega_n)$-*čist te vrijedi*

$$\boldsymbol{\mu}_{sc} = (\mathsf{u}\otimes\mathsf{u})\lambda\boxtimes\delta_0 + \boldsymbol{\nu}_{sc}\,, \tag{3}$$

*pri čemu su* $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ *i* $\boldsymbol{\nu}_{sc}$ *poluklasične mjere pridružene nizovima* $(\mathsf{u}_n)$ *i* $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$, *dok je* $\lambda$ *Lebesgueova mjera u varijabli* $\mathbf{x}$, *i* $\delta_0$ *je Diracova masa u* $\boldsymbol{\xi} = 0$. *Posebno, za dijagonalne elemente vrijedi*

$$\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc} \geqslant |\mathsf{u}|^2\lambda\boxtimes\delta_0\,.$$

∎

Iako je u pripadnoj referenci naveden samo dio prethodne tvrdnje, dokaz ne navodimo jer će slijediti iz Napomene II.4 i Korolara II.7.

Na temelju prethodnog korolara uočavamo da, osim odstupanje od jake konvergencije, poluklasičnom mjerom možemo dobiti da je slabi limes pripadnog (pod)niza jednak nuli. Naime, ako je za neku karakterističnu duljinu poluklasična mjera trivijalna, slabi limes pripadnog niza je nužno nula, što možemo povezati s prethodnim odjeljkom uzimajući u obzir Teorem 4 i karakterizaciju $(\omega_n)$-koncentracijskog svojstva koja će biti dana Korolarom 3. Nadalje, ako $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{u}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, tada su po definiciji poluklasične mjere svih karakterističnih duljina pridruženih nizu $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$ trivijalne, odnosno poluklasične mjere svih karakterističnih duljina pridruženih nizu $(\mathsf{u}_n)$ su jednake $(\mathsf{u}\otimes\mathsf{u})\lambda\boxtimes\delta_0$. Obrat posljednje tvrdnje će vrijediti kao posljedica sljedeće leme.

Kako konstantna funkcija $\psi \equiv 1$ nije u $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, potreban nam je dodatni uvjet na promatrani niz da bismo dobili pripadnu defektnu mjeru iz poluklasične mjere [25, Lemma 3.4(i)].

**Lema 10.** *Neka je* $(\mathsf{u}_n)$ *omeđen u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *i neka niz* $\mathsf{u}_n\otimes\mathsf{u}_n$ *konvergira slabo* $*$ *k mjeri* $\boldsymbol{\nu}$ *u* $\mathcal{M}(\Omega;\mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$. *Niz* $(\mathsf{u}_n)$ *je* $(\omega_n)$-*titrajući za neku karakterističnu duljinu* $(\omega_n)$ *ako i samo ako za svaki* $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ *vrijedi:*

$$\langle\boldsymbol{\nu},\varphi\rangle = \left\langle\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_n)},\varphi\boxtimes 1\right\rangle\,.$$

∎

Vratimo se pitanju jake pretkompaknosti slabo konvergentnog niza. Izravna posljedica prethodne leme je poznata činjenica da $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ ako i samo postoji karakteristična duljina $(\omega_n)$ za koju je niz $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-titrajući i pripadne poluklasične mjere karakteristične duljine $(\omega_n)$ su trivijalne. Međutim, kako po Teoremu 4 znamo da uvijek postoji karakteristična duljina s obzirom na koju je pripadni niz titrajući, prethodnu ekvivalenciju možemo preformulirati na sljedeći način: $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ ako i samo ako su pripadne poluklasične mjere svih karakterističnih duljina trivijalne. Štoviše, koristeći (3) dodatno znamo da je niz $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ jako konvergentan ako i samo ako su pripadne poluklasične mjere svih karakterističnih duljina jednake $(\mathsf{u} \otimes \mathsf{u})\lambda \boxtimes \delta_{\mathsf{0}}$.

Međutim, osim u trivijalnom slučaju kad je za neku karakterističnu duljinu poluklasična mjera trivijalna, što povlači da je slabi limes (pod)niza jednak nuli, za sad ne možemo iz poluklasičnih mjera rekonstruirati limes (slabi ili jaki) pripadnog (pod)niza. U tom smjeru ćemo dobiti neke rezultate koristeći svojstva uvjeta $(\omega_n)$-koncentriranosti, a koji govori je li ishodište Fourierovog prostora mjere nula s obzirom na poluklasičnu mjeru.

**Korolar 3.** *Neka je $(\mathsf{u}_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ i $(\omega_n)$-čist (u terminu poluklasičnih mjera), tada je $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_n)}(\Omega \times \{\mathsf{0}\}) = 0$ ako i samo ako je $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-koncentrirajući.*

Dem. Primjetimo najprije da tvrdnja ima smisla kako je $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}$ nenegativan funkcional (Radonov integral) pa po Rieszovom teoremu o reprezentaciji [11, Teorem IV.20] postoji Radonova mjera $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}$ (koristimo istu oznaku) na Borelovoj $\sigma$-algebri takva da za sve $\phi \in \mathrm{C}_c(\Omega \times \mathbf{R}^d)$ vrijedi

$$\langle \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}, \phi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}^d} \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc} \, .$$

Iz toga lako izvodimo da je $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}(\Omega \times \{\mathsf{0}\}) = 0$ ekvivalentno s

$$(\forall \varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega)) \qquad \int\limits_{\Omega \times \mathbf{R}^d} |\varphi(\mathbf{x})|^2 \chi_{\{\mathsf{0}\}}(\boldsymbol{\xi}) \, d\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \, ,$$

pri čemu je $\chi_{\{\mathsf{0}\}}$ jednako 1 u ishodištu, a 0 inače.

Označimo sa $\zeta \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ glatku režuću funkciju takvu da je $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, te da je identički jednaka 1 na $\mathrm{K}[\mathsf{0}, 1]$, dok $\operatorname{supp} \zeta \subseteq \mathrm{K}(\mathsf{0}, 2)$. Nadalje, definirajmo $\zeta_m := \zeta(m\,\cdot)$.

Koristeći Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji i nenegativnost dijagonalnih elemenata matrice $\boldsymbol{\mu}_{sc}$, iz definicije poluklasičnih mjera za proizvoljni $i \in 1..d$ slijedi

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\Omega \times \mathbf{R}^d} |\varphi(\mathbf{x})|^2 \chi_{\{\mathsf{0}\}}(\boldsymbol{\xi}) \, d\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \lim_m \int\limits_{\Omega \times \mathbf{R}^d} |\varphi(\mathbf{x})|^2 \zeta_m(\boldsymbol{\xi}) \, d\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= \lim_m \lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi u^i_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \zeta_m(\omega_n \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \\ &\geqslant \lim_m \sup \lim_n \sup \int\limits_{|\omega_n \boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{1}{m}} |\widehat{\varphi u^i_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \geqslant 0 \, , \end{aligned}$$

pri čemu smo u posljednjem koraku koristili činjenicu da je $\zeta_m$ jednaka 1 na $\mathrm{K}[\mathsf{0}, \frac{1}{m}]$. Dakle,

$$(\forall i \in 1..d) \qquad \lim_m \limsup_n \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{1}{m\omega_n}} |\widehat{\varphi u^i_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = 0 \, ,$$

odnosno svaka komponenta $(u_n^i)$ je $(\omega_n)$-koncentrirajući niz, iz čega slijedi da je i cijeli $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-koncentrirajući.

Obratnu implikaciju dobivamo iz ocjene

$$(\forall\, i \in 1..d) \qquad \int\limits_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi u_n^i}(\boldsymbol{\xi})|^2 \zeta_m(\omega_n \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant \frac{2}{m\omega_n}} |\widehat{\varphi u_n^i}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}\,,$$

i ekvivalencije dane na početku dokaza.

**Q.E.D.**

Prema prethodnom korolaru i Teoremu 4 postoji karakteristična duljina za koju je (u oznakama Leme 9) $\mathsf{tr}\boldsymbol{\nu}_{sc}(\Omega \times \{\mathsf{0}\}) = 0$ što izravno povlači da postoji karakteristična duljina za koju se nejednakost iz iskaza Leme 9 postiže, pa možemo zaključiti: ako je za svaku karakterističnu duljinu $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = U(\mathbf{x})^2 \lambda(\mathbf{x}) \boxtimes \delta_{\mathsf{0}}(\boldsymbol{\xi})$ za neku nenegativnu funkciju $U$, onda $|\mathsf{u}_n| \longrightarrow U$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Kako poluklasične mjere ne ovise o predznaku pripadnog niza, bolji rezultat od ovog i ne možemo očekivati. Nadalje, ako znamo da je promatrani niz $(\mathsf{u}_n)$ slabo konvergentan, tada pripadni slabi limes $\mathsf{u}$ za svaki kompakt $K \subseteq \Omega$ zadovoljava $\|\mathsf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(K;\mathbf{C}^r)} = \min_{(\omega_n)} \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_n)}(K \times \{\mathsf{0}\})$.

Pogledajmo kao i kod H-mjera dva osnovna primjera slabo konvergentnih nizova (titranje i koncentracija) [27, 41].

**Primjer 7.** (**titranje**) Neka su $v$, $(\varepsilon_n)$ i $(u_n)$ kao u Primjeru 1.

Niz $(u_n)$ je $(\omega_n)$-čist za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ za koju limes $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ postoji u $[0, \infty]$, a pripadne (jedinstvene) poluklasične mjere su dane s

$$\mu_{sc}^{(\omega_n)} = \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0 \\ \sum_{\mathsf{k}\in\mathbf{Z}^d\setminus\{\mathsf{0}\}} |v_{\mathsf{k}}|^2 \lambda \boxtimes \delta_{\frac{\mathsf{k}}{c}} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0, \infty\rangle \\ \|v\|^2_{\mathrm{L}^2([0,1]^d)} \lambda \boxtimes \delta_{\mathsf{0}} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty \end{cases}.$$

Uočavamo da poluklasične mjere ovise o izboru karakteristične duljine, pa tako imaju mogućnost određivanja kojeg je reda frekvencija titranja $\frac{1}{\varepsilon_n}$. Međutim, u nekim slučajevima poluklasična mjera ne sadrži informaciju o smjeru titranja $\mathsf{k}$.

Konkretno, po rezultatima analize u Primjeru 4 uočavamo da je na ovom primjeru poluklasična mjera trivijalna u slučaju kad niz nije $(\omega_n)$-titrajući, što je u skladu s prijašnjim razmatranjem kako $(u_n)$ ne konverigra jako, dok je koncentrirana u ishodištu Fourierovog prostora kad niz nije $(\omega_n)$-koncentrirajući, što se također slaže s tvrdnjom prethodnog korolara. ∎

**Primjer 8.** (**koncentracija**) Neka su $v$, $\mathbf{x}_0$, $(\varepsilon_n)$ i $(u_n)$ kao u Primjeru 2.

Definirani niz je također $(\omega_n)$-čist za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ za koju limes $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ postoji u $[0, \infty]$, a pripadne (jedinstvene) poluklasične mjere su dane s

$$\mu_{sc}^{(\omega_n)} = \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0 \\ \delta_{\mathbf{x}_0} \boxtimes \nu_c & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0, \infty\rangle \\ \|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \delta_{\mathbf{x}_0} \boxtimes \delta_{\mathsf{0}} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty \end{cases},$$

pri čemu je $\nu_c = c^d |\hat{v}(c\,\cdot)|^2 \lambda$ Lebesgueova mjera s težinom $c^d|\hat{v}(c\,\cdot)|^2$ u Fourierovom prostoru, odnosno u tom slučaju imamo

$$\left\langle \mu_{sc}^{(\omega_n)}, \phi \right\rangle = c^d \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(c\boldsymbol{\xi})|^2 \phi(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}\,.$$

I u ovom primjeru poluklasične mjere sadrže informaciju o karakterističnoj duljini niza (brzini koncentracije $\frac{1}{\varepsilon_n}$), međutim, u slučaju kad je karakterističina duljina mjere sporija od $(\varepsilon_n)$, odnosno kad niz nije $(\omega_n)$-titrajući (vidi Primjer 5) poluklasična mjera ne sadrži informaciju o točki u koju se niz sažima. ∎

Kao i kod H-mjera, od značajnog je interesa odrediti nosač poluklasične mjere, za što će koristiti sljedeća tvrdnja koju smo iskazali u nešto drugačijem obliku nego u [15, 27, 41], jer imamo sustav diferencijalnih relacija, pa su koeficijenti matrične funkcije. Budući da se uz manje preinake može prilagoditi dokaz iz spomenutih referenci i na ovaj slučaj, te ćemo u drugom poglavlju pokazati još općenitiju tvrdnju (vidi Korolar II.10), dokaz ćemo preskočiti.

**Teorem 7.** **(lokalizacijsko načelo poluklasičnih mjera)** *Neka je* $(\mathsf{u}_n)$ *omeđen u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, $\varepsilon_n \to 0^+$, *i neka za* $m \in \mathbf{N}$ *vrijedi*

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n) \longrightarrow \mathsf{0} \quad \textit{(jako) u prostoru} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^q)\,,$$

*gdje su* $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}^\infty(\Omega;\mathrm{M}_{q\times r}(\mathbf{C}))$.

*Tada pripadna poluklasična mjera* $\boldsymbol{\mu}_{sc} = \boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\varepsilon_{n'})}$ *zadovoljava*

$$\mathbf{p}_{sc}\boldsymbol{\mu}_{sc}^{\top} = \mathbf{0}\,,$$

*pri čemu je*

$$\mathbf{p}_{sc}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\,.$$

∎

Analogno rezultatu za H-mjere, iz prethodnog teorema slijedi da je nosač mjere $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ sadržan u skupu točaka gdje simbol $\mathbf{p}_{sc}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ nema lijevi inverz.

**Napomena 2.** Za omeđene nizove u $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)$, pripadne H-mjere i poluklasične mjere su omeđene Radonove mjere pa izrazi u teoremima 1 i 6 imaju smisla za $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\Omega)$. ∎

## 4. Odnos H-mjera i poluklasičnih mjera

Prirodno se postavlja pitanje je li dovoljno promatrati samo H-mjere ili samo poluklasične mjere, odnosno, možemo li znanjem jednog od ta dva objekta rekonstruirati drugi. Budući da poluklasične mjere imaju karakterističnu duljinu, što nije slučaj s H-mjerama, za očekivati je da, ukoliko je to moguće, poluklasične mjere budu općenitji objekt.

Tome u prilog idu i svojsva titrajnog (primjeri 1 i 7) i koncentracijskog niza (primjeri 2 i 8). Naime, u oba slučaja postoji karakteristična duljina $(\omega_n)$ za koju H-mjeru možemo dobiti iz pripadne poluklasične mjere projekcijom Fourierovog prostora na jediničnu sferu po zrakama kroz ishodište (vidi sljedeći teorem), dok je karakteristična duljina $(\omega_n)$ s tim svojstvom upravo karakteristična duljina promatranog niza u terminima drugog odjeljka.

Prethodno razmatranje vrijedi i općenito o čemu govori sljedeći poznati rezultat [15, Proposition 4], [25, Lemma 3.4]. Međutim, tvrdnju iskazujemo u nešto drugačijem obliku koristeći ekvivalenciju danu Korolarom 3, te tvrdnju Teorema 4.

**Teorem 8.** *Neka je omeđen niz* $(\mathsf{u}_n)$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ $(\omega_n)$*-čist (u terminu poluklasičnih mjera),* $(\omega_n)$*-titrajuć, te* $(\omega_n)$*-koncentrirajuć za neku karakterističnu duljinu* $(\omega_n)$*, s pripadnom poluklasičnom mjerom* $\boldsymbol{\mu}_{sc} = \boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_n)}$.

*Tada* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *je čist (u terminu H-mjera), te za svaki izbor probnih funkcija* $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ *i* $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^{d-1})$*, vrijedi*

$$\langle \boldsymbol{\mu}_H, \varphi \boxtimes \psi \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}_{sc}, \varphi \boxtimes (\psi \circ \boldsymbol{\pi}) \rangle ,$$

*pri čemu je* $\boldsymbol{\mu}_H$ *H-mjera pridružena nizu* $(\mathsf{u}_n)$. ∎

Prethodnim teoremom smo dobili da se H-mjera može dobiti iz poluklasične mjere (uz odgovarajući izbor karakteristične duljine) za sve nizove koji imaju karakterističnu duljinu (kao što je slučaj s nizovima iz primjera 1 i 2). Međutim, u Primjeru 6 smo pokazali da nemaju svi nizovi karakterističnu duljinu, čak i ako im je slabi limes jednak 0.

Konkretno, niz $u_n + v_n = e^{2\pi i \frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n}\cdot\mathbf{x}} + e^{2\pi i \frac{\mathsf{s}}{\varepsilon_n^2}\cdot\mathbf{x}}$ dan Primjerom 6 je čist i $(\omega_n)$-čist za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ za koju limes $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ postoji u $[0,\infty]$, te su pripadne mjere $\mu_H$ i $\mu_{sc}^{(\omega_n)}$ dane s

$$\begin{aligned} \mu_H &= \lambda \boxtimes \left(\delta_{\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}} + \delta_{\frac{\mathsf{s}}{|\mathsf{s}|}}\right), \\ \mu_{sc}^{(\omega_n)} &= \lambda \boxtimes \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0 \\ \delta_{\frac{\mathsf{k}}{c}} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ \delta_{\mathsf{0}} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty \ \& \ \lim_n \frac{\varepsilon_n^2}{\omega_n} = 0 \\ (\delta_{\frac{\mathsf{s}}{c}} + \delta_{\mathsf{0}}) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^2}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ 2\delta_{\mathsf{0}} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^2}{\omega_n} = \infty \end{cases} . \end{aligned}$$

Kako niti za jedan izbor karakteristične duljine $(\omega_n)$ pripadna poluklasična mjera ne sadrži istovremeno podatak o oba vektora smjera titranja $\mathsf{k}$ i $\mathsf{s}$, dok H-mjera sadrži, zaključujemo da za ovaj primjer H-mjeru ne možemo rekonstuirati iz poluklasične mjere.

Ipak, ako promatramo sve poluklasične mjere u gornjem primjeru, iz njih su vidiljivi svi podaci ($\mathsf{k}$, $\mathsf{s}$, $(\varepsilon_n)$ i $(\varepsilon_n^2)$). Međutim, postoje primjeri u kojima poluklasične mjere za niti jednu karakterističnu duljinu ne vide neki dio informacije. Konkretno u [15, p. 172] je dan primjer za koji su sve poluklasične mjere trivijalne ili koncentrirane u ishodištu. Primjer sa istim svojstvom je i

$$u_n(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i n^j \mathsf{k}\cdot\mathbf{x}} ,$$

pri čemu je $\mathsf{k} \in \mathbf{Z}^d \setminus \{\mathsf{0}\}$. Naime, $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, ali ne konverigra jako, te su sve poluklasične mjere trivijalne ili jednake $C\lambda \boxtimes \delta_{\mathsf{0}}$, pri čemu $C > 0$ ovisi o izboru karakteristične duljine. S druge strane, pripadna H-mjera je jednaka $\lambda \boxtimes \delta_{\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}}$.

Na temelju prethodnog razmatranja možemo zaključiti da su H-mjere i poluklasične mjere u općem odnosu. S jedne strane poluklasične mjere gube dio informacije za neke (ili čak sve) karakteristične duljine, dok H-mjere ne razlikuju nizove različitih karakterističnih duljina kao što su titrajni nizovi istog smjera, ali različitih frekevencija. Ovo je bila i jedna od motivacija Tartaru za uvođenje novog objekta, jednoskalne H-mjere, kojeg proučavamo u idućem poglavlju.

## 5. Homogenizacijski limes

Kao što smo već istaknuli u trećem odjeljku, Patrick Gérard je u [27] uveo poluklasične mjere koristeći poluklasične pseudodiferencijalne operatore koji su se od tada počeli intezivno proučavati i koristiti u kvantnoj mehanici [15, 29, 41], a ovdje ćemo dati kratak pregled bitnih pojmova i rezultata, dok se detaljnija razrada može naći u [42, 55, 56].

Konkretno, Gérard je promatrao poluklasične pseudodiferencijalne operatore sa simbolom $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ dane u *standarnoj kvantizaciji*

$$[a(\mathbf{x}, \omega D)\mathsf{u}](\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \omega\boldsymbol{\xi}) \mathsf{u}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}\,,$$

pri čemu $\mathsf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ i $0 < \omega \leqslant \omega_0 < \infty$ (u primjenama se uglavnom na mjesto $\omega$ stavlja niz $\omega_n \to 0^+$). Međutim, kao i kod klasičnih pseudofiderencijalnih operatora, za svaki $\tau \in [0, 1]$ možemo definirati općenitiju *$\tau$-kvantizaciju* s

$$[\mathrm{Op}_\tau^{(\omega)}(a)\mathsf{u}](\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a((1-\tau)\mathbf{x} + \tau\mathbf{y}, \omega\boldsymbol{\xi}) \mathsf{u}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}\,.$$

Standarnu kvantizaciju dobivamo za $\tau = 0$, dok za $\tau = \frac{1}{2}$ dobivamo *Weylovu kvantizaciju* $a^W(\mathbf{x}, \omega D) = \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}^{(\omega)}(a)$ koja je od posebnog značaja u kvantnoj mehanici jer je hermitski operator na $\mathrm{L}^2$ za realni simbol $a$.

Gornje operatore možemo proširiti na $\mathcal{S}'$ čime dobivamo da je za svaki $\tau$ i $\omega$ operator $\mathrm{Op}_\tau^{(\omega)} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ neprekinut. Posebno, ako se restringiramo na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ dobivamo da je $\mathrm{Op}_\tau^{(\omega)}$ naprekinut s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ jednoliko po $\omega$ (operatorska norma ovisi samo o derivacijama simbola $a$).

Općenito operatori dani istim simbolima, ali u različitim kvantizacijama nisu jednaki, međutim, operatorsku normu u $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r))$ njihove razlike možemo ocijeniti s parametrom $\omega$, odnosno, za $\omega_n \to 0^+$ i $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ imamo

$$\|\mathrm{Op}_\tau^{(\omega_n)}(a) - \mathrm{Op}_{\tau'}^{(\omega_n)}(a)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r))} \longrightarrow 0\,,$$

što je povezano s činjenicom da komutator poluklasičnih pseudodiferencijalnih operatora u istim kvantizacijama (i različitim simbolima) teži nuli u operatorskoj normi, odnosno za $a, b \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ vrijedi

$$\Big\|[\mathrm{Op}_\tau^{(\omega_n)}(a), \mathrm{Op}_\tau^{(\omega_n)}(b)]\Big\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r))} \longrightarrow 0\,,$$

pri čemu je $[A, B] = AB - BA$. Za slučajeve $\tau = 1$ i $\tau' = 0$, i (samo) neprekinute simbole prethodna tvrdnja je dana u Lemi II.3.

Za razliku od Gérarda, Pierre-Louis Lions i Thierry Paul u [41] konstruiraju poluklasične mjere koristeći *Wignerovu pretvorbu* funkcija $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ danu s

$$[\mathbf{W}^{(\omega)}(\mathsf{f}, \mathsf{g})](\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, \mathsf{f}\Big(\mathbf{x} + \frac{\omega\mathbf{y}}{2}\Big) \otimes \mathsf{g}\Big(\mathbf{x} - \frac{\omega\mathbf{y}}{2}\Big)\, d\mathbf{y}\,,$$

koja je neprekinuti bilinearni funkcional sa $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r) \times \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ u $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d; \mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$, te $\mathbf{W}^{(\omega_n)}(\mathsf{f}, \mathsf{g})^* = \mathbf{W}^{(\omega_n)}(\mathsf{g}, \mathsf{f})$. Ovu pretvorbu je uveo mađarski teorijski fizičar Eugene Wigner 1932. godine i od tada se neprestano koristi u modelima kvantne mehanike, dok je Lionsov i Paulov rezultat zapravo identifikacija poluklasičnog limesa Wignerove pretvorbe.

Alternativna konstrukcija nije neočekivana jer Wignerova pretvorba i (poluklasični) pseudodiferencijalni operatori za $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ i $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ zadovoljavaju (vidi [29] i [55, Chapter 2])

$$ {}_{\mathcal{S}'}\langle\, \overline{W^{(\omega)}(f,g)}, a \,\rangle_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}'}\langle\, g, a^W(\cdot, \omega D) f \,\rangle_{\mathcal{S}} \,, $$

pri čemu je raspored poteza nešto drugačiji od formula u spomenutim referencama jer u ovom radu koristimo da je dualni produkt antilinearan po prvog argumentu. Štoviše, prethodna relacija vrijedi i za pseudodiferencijalni operator u $\tau$-kvantizaciji i $\tau$-*Wignerovu pretvorbu*:

$$ [\mathbf{W}_\tau^{(\omega)}(f,g)](\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, \mathsf{f}(\mathbf{x} + \omega(1-\tau)\mathbf{y}) \otimes \mathsf{g}(\mathbf{x} - \omega\tau\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \,. $$

Naime, za $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ i $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ uz zamjenu varijabli $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \omega\tau\mathbf{y}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{x} + \omega(1-\tau)\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\xi}' = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{\xi}$ iz koje imamo $\mathbf{x} = (1-\tau)\mathbf{x}' + \tau\mathbf{y}'$, $\mathbf{y} = \frac{1}{\omega}(\mathbf{y}' - \mathbf{x}')$, $\mathbf{x} = \omega\boldsymbol{\xi}'$, te kojoj je pripadni Jacobijan jednak 1, dobivamo

$$ \begin{aligned} {}_{\mathcal{S}'}\langle\, \overline{W_\tau^{(\omega)}(f,g)}, a \,\rangle_{\mathcal{S}} &= \iiint_{\mathbf{R}^{3d}} e^{-2\pi i \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}} f(\mathbf{x} + \omega(1-\tau)\mathbf{y}) \overline{g(\mathbf{x} - \omega\tau\mathbf{y})} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, d\mathbf{y} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \iiint_{\mathbf{R}^{3d}} e^{2\pi i (\mathbf{x}' - \mathbf{y}')\cdot\boldsymbol{\xi}'} f(\mathbf{y}') \overline{g(\mathbf{x}')} a((1-\tau)\mathbf{x}' + \tau\mathbf{y}', \omega\boldsymbol{\xi}')\, d\mathbf{y}' d\mathbf{x}' d\boldsymbol{\xi}' \\ &= {}_{\mathcal{S}'}\langle\, g, \mathrm{Op}_\tau^{(\omega)}(a) f \,\rangle_{\mathcal{S}} \,, \end{aligned} $$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti koristili Fubinijev teorem. Budući da su $W_\tau^{(\omega)}(\cdot,\cdot)$ i $\mathrm{Op}_\tau^{(\omega)}(a)$ neprekinuti na $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, odnosno $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, te je $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ gusto u $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, gornje vrijedi za $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Koristeći prethodni identitet, neprekinutost operatora $\mathrm{Op}_\tau^{(\omega)}$ na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, te ocjenu razlike pseudodiferencijalnih operatora u različitim kvantizacijama, možemo iskazati razultat u nešto općenitijem obliku nego što je dan u [27, Proposition 3.1] i [41, Théorème III.1]. Dodatno, pokazat ćemo da je donja (izvorna) definicija uistinu ekvivalentna s onom danom Teoremom 6.

**Teorem 9.** *Ako je $(\mathsf{u}_n)$ omeđen niz u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)$ i $(\omega_n)$ niz pozitivnih brojeva takav da $\omega_n \to 0^+$, onda postoji podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ takav da za svaki $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ i $\tau \in [0,1]$ vrijedi*

$$ \lim_{n'} {}_{\mathcal{S}'}\langle\, \overline{W_\tau^{(\omega_{n'})}(\mathsf{u}_n, \mathsf{u}_n)}, a \,\rangle_{\mathcal{S}} = \lim_{n'} \Big[ \langle\, \mathrm{Op}_\tau^{(\omega_{n'})}(a) u_n^i \mid u_n^j \,\rangle_{\mathrm{L}^2} \Big]_{ij} = \langle \boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_{n'})}, a \rangle \,, $$

*gdje je $\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_{n'})}$ poluklasična mjera karakteristične duljine $(\omega_{n'})$ dana Teoremom 6.*

Dem. Iz ocjene razlike pseudodiferencijalnih operatora u različitim kvantizacijama slijedi da je dovoljno tvrdnju pokazati za $\tau = 0$.

Označimo s $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{sc}$ pripadnu mjeru niza $(\mathsf{u}_n)$ dobivenu ovom konstrukcijom. Samo ćemo pokazati da je za proizvoljnu probnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ mjera pridružena nizu $(\varphi \mathsf{u}_n)$ dobivena ovom konstrukcijom jednaka $|\varphi|^2 \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{sc}$, a onda se argumentom kao u [53, pp. 394-395] dobiva da se mjere $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{sc}$ i $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ uistinu podudaraju.

Naime, koristeći $\varphi u_n^i = \mathrm{Op}_0^{(\omega_{n'})}(\varphi) u_n^i$ za proizvoljni $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n'} \langle \mathrm{Op}_0^{(\omega_{n'})}(a)(\varphi u^i) \mid \varphi u_n^j \rangle_{\mathrm{L}^2} &= \lim_{n'} \langle \bar{\varphi} \mathrm{Op}_0^{(\omega_{n'})}(a) \mathrm{Op}_0^{(\omega_{n'})}(\varphi) u_n^i \mid u_n^j \rangle_{\mathrm{L}^2} \\
&= \lim_{n'} \langle \bar{\varphi} \mathrm{Op}_0^{(\omega_{n'})}(\varphi) \mathrm{Op}_0^{(\omega_{n'})}(a) u_n^i \mid u_n^j \rangle_{\mathrm{L}^2} \\
&= \lim_{n'} \langle |\varphi|^2 \mathrm{Op}_0^{(\omega_{n'})}(a) u_n^i \mid u_n^j \rangle_{\mathrm{L}^2} \\
&= \lim_{n'} \langle \mathrm{Op}_0^{(\omega_{n'})}(|\varphi|^2 a) u^i \mid u_n^j \rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle \tilde{\mu}_{sc}^{ij}, |\varphi|^2 a \rangle = \langle |\varphi|^2 \tilde{\mu}_{sc}^{ij}, a \rangle \,,
\end{aligned}$$

čime smo dobili tvrdnju.

**Q.E.D.**

Napomenimo da u iskazu prethodnog teorema nismo mogli staviti $W_\tau^{(\omega_{n'})}(\mathsf{u}_n, \mathsf{u}_n)^\top$ jer je Wignerova pretvorba hermitska matrica samo za $\tau = \frac{1}{2}$, dok općenito imamo $W_\tau^{(\omega)}(\mathsf{f}, \mathsf{g})^* = W_{1-\tau}^{(\omega)}(\mathsf{g}, \mathsf{f})$.

Ukoliko je niz $(\mathsf{u}_n)$ zadan na $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, proširujemo ga nulom, dok u slučaju da je niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ prethodnu konstrukciju prilagođavamo tako da promatramo niz $(\varphi \mathsf{u}_n)$ pri čemu je $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, te potom definiramo neomeđenu Radonovu mjeru slično kao u posljednjem koraku Leme II.5. Preciznije, neka je $(K_m)$ niz kompakata u $\Omega$ koji ga iscrpljuje, odnosno $K_m \subseteq \mathsf{Int}\, K_{m+1}$ i $\bigcup_m K_m = \Omega$. Nadalje, sa $(\zeta_m)$ označimo niz funkcija u $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ takvih da je $\zeta_m \equiv 1$ na $K_m$, $0 \leqslant \zeta_m \leqslant 1$ i $\mathrm{supp}\, \zeta_m \subseteq K_{m+1}$. Označimo s $\boldsymbol{\mu}_{sc}^m$ mjeru dobivenu primjenom prethodnog teorema na niz $(\zeta_m \mathsf{u}_n)$. Očito je $\mathrm{supp}\, \boldsymbol{\mu}_{sc}^m \subseteq K_{m+1}$, a iz $\zeta_m = \zeta_m \zeta_{m+1}$ slijedi da je $\boldsymbol{\mu}_{sc}^m = |\zeta_m|^2 \boldsymbol{\mu}_{sc}^{m+1}$, odnosno $\boldsymbol{\mu}_{sc}^m$ i $\boldsymbol{\mu}_{sc}^{m+1}$ se podudaraju na $K_m$. Sada za $\Phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^d)$ definiramo

$$\langle \boldsymbol{\mu}_{sc}, \Phi \rangle := \langle \boldsymbol{\mu}_{sc}^m, \Phi \rangle \,,$$

pri čemu je $m \in \mathbf{N}$ takav da $\mathrm{supp}\, \Phi \subseteq K_m \times \mathbf{R}^d$, iz čega slijedi $\boldsymbol{\mu}_{sc} \in \mathcal{M}(\Omega \times \mathbf{R}^d; \mathrm{M}_r(\mathbf{C}))$ (za detalje pogledati Lemu II.5).

Za razliku od Tartarovog pristupa (teoremi 1, 6, te kasnije i II.1) gdje pozitivnost pripadne mjere slijedi izravno iz definicije, ali zato pokazivanje da pripadni objekt ovisi samo o produktu probnih funkcija u fizikalnom prostoru zahtijeva veći tehnički napor, prethodnim pristupom pozitivnost nije trivijalna. Gérardov prvotni pristup se zasnivao na Gårdingovim nejednakostima (vidi [15, Lemme 3], [55, Theorem 2.13], [56, Theorem 4.32]), dok je u [41] korištena Husimijeva pretvorba (konvolucija sa standarnim izglađivačem). Kasnije je Gérard uz pomoć Tartara pojednostavio Lionsov i Paulov dokaz tako da se pozitivnost dobila pomoću Bôchner-Schwartzovog teorema [28, 29].

Konstrukcija pomoću Wignerove pretvorbe se pokazala vrlo korisnom kod primjene u proučavanju parcijalnih diferencijalnih jednažbi. Konkretno, za niz vektorskih funkcija $(\mathsf{u}_n)$ iz $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^+ \times \Omega; \mathbf{C}^r)$ koji zadovoljava diferencijalne relacije

$$\begin{cases} \varepsilon_n \partial_t \mathsf{u}_n + \mathbf{P}_n \mathsf{u}_n = \mathsf{f}_n & \text{u} \quad \mathbf{R}^+ \times \Omega \\ \mathsf{u}_n(0, \cdot) = \mathsf{u}_n^0 & \end{cases} ,$$

pri čemu $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, $\varepsilon_n \to 0^+$, te $\mathbf{P}_n$ je (pseudo)diferencijalni operator, od fizikalnog je značaja izraz $|\mathsf{u}_n(t, \mathbf{x})|^2$ (npr. u slučaju Schrödingerove jednadžbe izraz $\int_A |\mathsf{u}_n(t, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}$ predstavlja vjerojatnost pronalaska čestice na području $A$ u vremenu $t$) pa želimo identificirati njegovu vrijednost na limesu. Ako postoji karakteristična duljina $(\omega_n)$ za koju je niz $(\mathsf{u}_n(t,\cdot))$ $(\omega_n)$-titrajući za (skoro) svaki $t$, spomenuti limes se može rekonstruirati iz poluklasične mjere $\boldsymbol{\mu}^t_{sc}$ karakteristične duljine $(\omega_n)$ pridružene (pod)nizu $(\mathsf{u}_{n'}(t,\cdot))$ integriranjem po Fourierovoj varijabli $\boldsymbol{\xi}$ (vidi Lemu 10)

$$\lim_{n'} |\mathsf{u}_n(t,\mathbf{x})|^2 = \int_{\mathbf{R}^d} \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}^t_{sc}\, d\boldsymbol{\xi}\,,$$

pa je cilj odrediti diferencijalnu relaciju za $\boldsymbol{\mu}^t_{sc}$ tako da iz znanja poluklasične mjere u početnom trenutku $t=0$ (poluklasična mjera pridružena (pod)nizu $(\mathsf{u}^0_{n'})$) možemo dobiti $\boldsymbol{\mu}^t_{sc}$ bez znanja niza rješenja $(\mathsf{u}_n)$. Opisani postupak se zove *homogenizacijski limes* ili *poluklasični limes* ako opisuje probleme kvantne mehanike, dok ćemo ovo svojstvo poluklasičnih mjera (analogno kao kod H-mjera) zvati *prijenosnim svojstvom*. Za precizniji opis prethodnog postupka, kao i detaljniju motivaciju upućujemo na [16, 29, 55].

Ovim pristupom za svaki $t$ nizu rješenja $(\mathsf{u}_n(t,\cdot))$ pridružujemo familiju poluklasičnih mjera $\boldsymbol{\mu}^t_{sc}$, dok smo alternativno mogli raditi da varijablu $t$ promatramo kao ravnopravnu varijablu te nizu rješenja $(\mathsf{u}_n)$ pridružimo (jednu) poluklasičnu mjeru $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ koja dodatno ovisi o $t$ i dualnoj varijabli $\tau$. Prednost prvog pristupa je u tome što je račun jednostavniji i što se jednostavno može zapisati Cauchyjeva zadaća za $\boldsymbol{\mu}^t_{sc}$ (vidi (7) niže), što kod $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ nije trivijalno jer imamo dodatnu varijablu $\tau$. Međutim, ukoliko radimo s čvrstim $t$, tj. s familijom mjera $\boldsymbol{\mu}^t_{sc}$, proučavanje jednadžbi u kojima (pseudo)diferencijalni operator $\mathbf{P}_n$ ovisi o $t$ je znatno kompliciranije (npr. tehnički je zahtjevnije odrediti svojstva preslikavanja $t \mapsto \boldsymbol{\mu}^t_{sc}$). Iz tog razloga ćemo se u glavnom rezultatu ovog odjeljka, Teoremu 11, držati pristupa gdje je $t$ ravnopravna varijabla, iako ćemo komentirati i prvi pristup.

Kako prostor probnih funkcija određuje potrebnu glatkoću koeficijenata operatora $\mathbf{P}_n$, cilj je raditi sa što većom klasom probnih funkcija. Iz tog razloga ćemo dati poopćenje Teorema 9. Najprije uvodimo novi prostor probnih funkcija

$$\mathcal{A} := \Big\{\Phi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d_{\mathbf{x}} \times \mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}}) : \mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{y}}\Phi \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d_{\mathbf{y}}; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d_{\mathbf{x}}))\Big\}\,,$$

gdje je $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d_{\mathbf{y}}; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d_{\mathbf{x}}))$ (apstraktni) Bôchnerov prostor (vidi [18] i pripadne reference), dok s $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{y}}$ označavamo Fourierovu pretvorbu samo u $\boldsymbol{\xi}$ uz dualnu varijablu $\mathbf{y}$. Nadalje, u [41] je pokazano da je $\mathcal{A}$ uz normu

$$\|\Phi\|_{\mathcal{A}} := \|\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{y}}\Phi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d;\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d))} = \int_{\mathbf{R}^d} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\,,$$

separabilan Banachov prostor, a $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ je jedan gust prebrojiv podskup. Nadalje, slično kao u [41, Proposition III.1] i [55, Proposition 2.18], možemo pokazati da je niz $(\mathbf{W}^{(\omega_n)}_\tau)$ iz Teorema 9 omeđen u $\mathcal{A}'$ (dualu prostora $\mathcal{A}$). Naime, za $\Phi \in \mathcal{A}$ imamo

$$\begin{aligned}
|{}_{\mathcal{A}'}\langle\, \mathbf{W}^{(\omega_n)}_\tau, \Phi\,\rangle_{\mathcal{A}}| &\leqslant \iint_{\mathbf{R}^{2d}} |\bar{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})||\mathsf{u}_n(\mathbf{x}+\omega_n\tau\mathbf{y}) \otimes \mathsf{u}_n(\mathbf{x}-\omega_n(1-\tau)\mathbf{y})|\, d\mathbf{x}d\mathbf{y}\\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\, \sup_{\mathbf{y}} \int_{\mathbf{R}^d} |\mathsf{u}_n(\mathbf{x}+\omega_n\tau\mathbf{y}) \otimes \mathsf{u}_n(\mathbf{x}-\omega_n(1-\tau)\mathbf{y})|\, d\mathbf{x}\\
&\leqslant \|\Phi\|_{\mathcal{A}} \|\mathsf{u}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)}\,.
\end{aligned}$$

Dakle, (do na prelazak na podniz) zaključujemo da postoji slabi $*$ limes niza $(\mathbf{W}^{(\omega_n)}_\tau)$ u prostoru $\mathcal{A}'$, a iz gustoće Schwartzovih funkcija slijedi da se taj limes podudara s poluklasičnom mjerom danom Teoremom 9, čime dobivamo sljedeće poopćenje.

**Teorem 10.** *Ako je* $(\mathsf{u}_n)$ *omeđen niz u* $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *i* $(\omega_n)$ *niz pozitivnih brojeva takav da* $\omega_n \to 0^+$, *onda postoji podniz* $(\mathsf{u}_{n'})$ *takav da za svaki* $\Phi \in \mathcal{A}$ *i* $\tau \in [0,1]$ *vrijedi*

$$\lim_{n'} {}_{\mathcal{A}'}\langle\, \overline{W_\tau^{(\omega_{n'})}(\mathsf{u}_n,\mathsf{u}_n)}, \Phi\,\rangle_{\mathcal{A}} = \langle \boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_{n'})}, \Phi\rangle\,,$$

*gdje je* $\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_{n'})}$ *poluklasična mjera karakteristične duljine* $(\omega_{n'})$ *dana Teoremom 6.* ∎

Prethodno opisan postupak homogenizacijskog limesa prezentirat ćemo na poopćenju primjera jednadžbe provođenja danog u [53, Chapter 32], dok se detaljnija analiza sličnog problema može pronaći u [22]. Prisjetimo se za početak tog Tartarovog rezultata.

Neka je $(u_n)$ niz u $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$ takav da $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$ slabo, te $u_n$ zadovoljava sljedeću jednadžbu provođenja

$$\partial_t u_n - \kappa\varepsilon_n\Delta u_n = f_n\,,$$

pri čemu $\varepsilon_n \to 0^+$ i $f_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$ jako.

Tada je Tartar pokazao da familija poluklasičnih mjera $\mu^t_{sc}$ pridruženih nizu $(u_n(t,\cdot))$ karakteristične duljine $\sqrt{\varepsilon_n}$ zadovoljava

$$\Big(\partial_t + 8\pi^2\kappa|\boldsymbol{\xi}|^2\Big)\mu^t_{sc} = 0\,. \tag{4}$$

Prije nego što prezentiramo postupak na općenitijoj (paraboličkoj) jednažbi, uvjerimo se da prethodni rezultat ima smisla, odnosno, da uistinu postoji netrivijalna familija poluklasičnih mjera koja zadovoljava prethodnu relaciju.

**Primjer 9.** Promatramo niz Cauchyjevih zadaća paraboličke jednadžbe u jednodimenzionalnom slučaju

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \varepsilon_n\partial_{xx}u_n + bu_x = 0 \\ \qquad\qquad u_n(0,x) = e^x\sin\Big(\dfrac{2\pi x}{\varepsilon_n^\beta}\Big) \end{cases},$$

pri čemu $\varepsilon_n \to 0^+$, $b\in\mathbf{R}$ i $\beta>0$. Karakteristična duljina jednadžbe je $(\varepsilon_n)$, dok ćemo za karakterističnu duljinu poluklasičnih mjera uzeti $\omega_n \to 0^+$.

Uvodeći supstituciju $v_n(t,x) = u(t,x)e^{\frac{b^2}{4\varepsilon_n}t - \frac{b}{2\varepsilon_n}x}$ dobivamo da $(v_n)$ zadovoljava jednadžbu provođenja

$$\begin{cases} \partial_t v_n - \varepsilon_n\partial_{xx}v_n = 0 \\ \qquad v_n(0,x) = e^{(1-\frac{b}{2\varepsilon_n})x}\sin\Big(\dfrac{2\pi x}{\varepsilon_n^\beta}\Big) \end{cases},$$

pa iz eksplicitne formule za rješenje dobivamo

$$\begin{aligned} u_n(t,x) =& \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_n t}}e^{-\frac{b^2}{4\varepsilon_n}t+\frac{b}{2\varepsilon_n}x}\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon_n t}}e^{(1-\frac{b}{2\varepsilon_n})\xi}\sin\Big(\frac{2\pi\xi}{\varepsilon_n^\beta}\Big)\,d\xi \\ =& e^{\varepsilon_n t}e^{-4\pi^2\varepsilon_n^{1-2\beta}t}e^{x-bt}\sin\Big(2\pi\varepsilon_n^{-\beta}(x-bt)+4\pi\varepsilon_n^{1-\beta}t\Big)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Lako se vidi da je gornjom formulom dano rješenje i u slučaju $b\in\mathbf{C}$, ali u daljnoj analizi koristimo da je $b$ realan.

Promatrat ćemo poluklasične mjere uz fiksno vrijeme $t$, odnosno poluklasične mjere pridružene nizovima $(u_n(t,\cdot))$, koje ćemo označavati s $\mu^t_{sc}$. Na taj način dobivamo familju mjera parametriziranih s $t$. S druge strane, također ćemo računati poluklasične mjere kojima je $t$ ravnopravna varijabla, odnosno poluklasične mjere pridružene nizu $(u_n)$, za što ćemo koristiti oznaku $\mu_{sc}$. Rezultat ćemo podijeliti na više slučajeva jer ćemo morati uzeti u obzir obje karakteristične duljine promatrane zadaće $((\varepsilon_n)$ i $(\varepsilon_n^\beta))$, te karakterističnu duljinu mjere $(\omega_n)$.

Za početak pogledajmo pripadnu poluklasičnu mjeru karakteristične duljine $(\omega_n)$ pridružene nizu početnih uvjeta. Kako funkcija $x \mapsto e^x$ ne ovisi o $n$, iz Leme 11 (vidi niže) i Primjera 7 izravno slijedi:

$$\mu^{00}_{sc} = \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = 0 \\ \frac{1}{4}e^{2x}\lambda \boxtimes \left(\delta_{-\frac{1}{c}} + \delta_{\frac{1}{c}}\right) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ \frac{1}{2}e^{2x}\lambda \boxtimes \delta_0 & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = \infty \end{cases} .$$

Vratimo se sada nizu rješenja. Svaki od faktora u formuli za $u_n$ konverigra po točkama nečemu iz $\langle 0,\infty\rangle$ ili je omeđen, osim člana $e^{-4\pi^2\varepsilon_n^{1-2\beta}t}$ koji ovisno o izrazu $1-2\beta$ može po točkama konvergirati nuli, čime bi cijeli niz $u_n$ konverigrao nuli u prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$, a time bi i pripadna poluklasična mjera bila trivijalna. Stoga, analizu najprije razdvajamo u ovisnosti o vrijednosti izraza $1-2\beta$.

Ukoliko je $\beta > \frac{1}{2}$, tada je $2\beta - 1 > 0$ pa nam član $e^{-4\pi^2\varepsilon_n^{1-2\beta}t}$ daje da za svaki $t$ niz $(u_n(t,\cdot))$ jako konvergira nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, pa onda isto vrijedi za cijeli niz $(u_n)$ u prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$. Iz toga slijedi da su pripadne mjere trivijalne:

$$(\forall\, t \in \mathbf{R}^+) \quad \mu^t_{sc} = 0 \qquad \text{i} \qquad \mu_{sc} = 0\,.$$

Promotrimo sada zanimljiviji slučaj kad je $\beta \leqslant \frac{1}{2}$. Niz funkcija $e^{\varepsilon_n t}e^{-4\pi^2\varepsilon_n^{1-2\beta}t}e^{x-bt}$ jednoliko po kompaktima konvergira k $e^x e^{-(4\pi^2+b)t}$ u slučaju $\beta = \frac{1}{2}$, dok k $e^x e^{-bt}$ u slučaju $0 < \beta < \frac{1}{2}$, pa po Lemi 11 taj izraz možemo izostaviti iz daljne analize. Ostalo nam je dakle proučiti izraz sa sinusom.

Koristeći adicijsku formulu za sinus zbroja, dobivamo

$$\begin{aligned} \sin\Big(2\pi\varepsilon_n^{-\beta}(x-bt) + 4\pi\varepsilon_n^{1-\beta}t\Big) &= \sin\Big(2\pi\varepsilon_n^{-\beta}(x-bt)\Big)\cos\Big(4\pi\varepsilon_n^{1-\beta}t\Big) \\ &\quad + \cos\Big(2\pi\varepsilon_n^{-\beta}(x-bt)\Big)\sin\Big(4\pi\varepsilon_n^{1-\beta}t\Big)\,. \end{aligned}$$

Kako je $1-\beta > 0$, to drugi pribrojnik konvergira jako nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$, pa ga možemo zanemariti jer ne utječe na poluklasičnu mjeru. Nadalje, po Lemi 11 u prvom pribrojniku možemo zanemariti $\cos\Big(4\pi\varepsilon_n^{1-\beta}t\Big)$ jer jednoliko po kompaktima konvergira k 1.

U slučaju kad varijablu $t$ promatramo kao ravnopravnu, iz zapisa

$$\sin\Big(2\pi\varepsilon_n^{-\beta}(x-bt)\Big) = -\frac{i}{2}e^{2\pi i\varepsilon_n^{-\beta}(-b,1)\cdot(t,x)} + \frac{i}{2}e^{2\pi i\varepsilon_n^{-\beta}(b,-1)\cdot(t,x)} \tag{6}$$

i Primjera 7 slijedi da je poluklasična mjera $\mu_{sc}$ pridružena nizu $(u_n)$ karakteristične duljine $(\omega_n)$ u slučaju $\beta = \frac{1}{2}$ jednaka

$$\mu_{sc}(t,x;\tau,\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} = 0 \\ \frac{1}{4}e^{2x}e^{-2(4\pi^2+b)t}\lambda(t,x)\Big(\delta_{(-\frac{b}{c},\frac{1}{c})} + \delta_{(\frac{b}{c},-\frac{1}{c})}\Big)(\tau,\xi) & , \quad \lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ \frac{1}{2}e^{2x}e^{-2(1+b)t}\lambda(t,x)\delta_{(0,0)}(\tau,\xi) & , \quad \lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} = \infty \end{cases} ,$$

dok za $\beta < \frac{1}{2}$ imamo

$$\mu_{sc}(t,x;\tau,\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = 0 \\ \frac{1}{4}e^{2x}e^{-2bt}\lambda(t,x)\Big(\delta_{(-\frac{b}{c},\frac{1}{c})} + \delta_{(\frac{b}{c},-\frac{1}{c})}\Big)(\tau,\xi) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ \frac{1}{2}e^{2x}e^{-2bt}\lambda(t,x)\delta_{(0,0)}(\tau,\xi) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = \infty \end{cases} .$$

Ukoliko računamo uz fiksan $t > 0$ tada iz

$$\sin\Big(2\pi\varepsilon_n^{-\beta}(x-bt)\Big) = \tau_{bt}\sin\Big(2\pi\varepsilon_n^{-\beta}x\Big)$$

i Leme 12 (vidi niže) slijedi da je poluklasična mjera $\mu_{sc}^t$ pridružena nizu $(u_n(t,\cdot))$ karakteristične duljine $(\omega_n)$ u slučaju $\beta = \frac{1}{2}$ jednaka

$$\mu_{sc}^t(x;\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} = 0 \\ \frac{1}{4}e^{2x}e^{-2(4\pi^2+b)t}\lambda(x)\Big(\delta_{\frac{1}{c}} + \delta_{-\frac{1}{c}}\Big)(\xi) & , \quad \lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ \frac{1}{2}e^{2x}e^{-2(1+b)t}\lambda(x)\delta_0(\xi) & , \quad \lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} = \infty \end{cases} ,$$

dok za $\beta < \frac{1}{2}$ imamo

$$\mu_{sc}^t(x;\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = 0 \\ \frac{1}{4}e^{2x}e^{-2bt}\lambda(x)\Big(\delta_{\frac{1}{c}} + \delta_{-\frac{1}{c}}\Big)(\xi) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ \frac{1}{2}e^{2x}e^{-2bt}\lambda(x)\delta_0(\xi) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n^\beta}{\omega_n} = \infty \end{cases} ,$$

pri čemu smo koristili da je Lebesgueova mjera $\lambda$ translatorno invarijantna.

U slučaju $\lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} \in \langle 0,\infty\rangle$ može se lijepo vidjeti da se zanemarivanjem varijable $t$ ipak gubi informacija. Preciznije, iz (potpune) mjere $\mu_{sc}$ u tom slučaju vidimo da je informacija u dualnom prostoru sadržana u točkama $(-\frac{b}{c},\frac{1}{c})$ i $(\frac{b}{c},-\frac{1}{c})$, što odgovara stvarnoj situaciji jer se iz (5) i (6) vidi da je titranje vodećeg reda uistinu po pravcu $t = -bx$. S druge strane, mjera $\mu_{sc}^t$ vidi samo $\xi$ komponentu prethodnog vektora, pa dodatno možemo zaključiti da općenito iz znanja mjere $\mu_{sc}^t$ ne možemo rekonstruirati mjeru $\mu_{sc}$.

Pogledajmo možemo li ipak primjenom lokalizacijskog svojstva za poluklasične mjere zaključitit nešto više o mjeri $\mu_{sc}$. Tvrdnja Teorema 7 nam nije dostatna jer ne želimo da su karakteristične duljine jednadžbe i mjere iste kako nas zanima slučaj $\lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} \in \langle 0,\infty\rangle$, pa koristimo rezultat Korolara II.10 iz kojeg slijedi da mjera $\mu_{sc}$ zadovoljava

$$(\tau + b\xi)\mu_{sc} = 0\,,$$

što povlači da je mjera nošena na pravcu $\tau + b\xi = 0$. Kako znamo da je nosač mjere $\mu_{sc}^t$ u dualnom prostoru sadržan u točkama $\xi = -\frac{1}{c}$ i $\xi = \frac{1}{c}$, za očekivati je da je nosač mjere $\mu_{sc}$ sadržan u presjeku pravaca $\tau + b\xi = 0$, $\xi = -\frac{1}{c}$ i $\xi = \frac{1}{c}$, odnosno u točkama $(-\frac{b}{c},\frac{1}{c})$ i $(\frac{b}{c},-\frac{1}{c})$, što je zaista i slučaj. Nažalost općenito iz $\operatorname{supp}\mu_{sc}^t \subseteq \mathbf{R}\times S$, $t\in\mathbf{R}^+$, ne slijedi nužno $\operatorname{supp}\mu_{sc} \subseteq \mathbf{R}^2\times(\mathbf{R}\times S)$ što će biti argumentirano Primjerom 10. Time prethodno razmatranje ostavljamo na razini intuicije.

Uvjerimo se da na ovom primjeru uistinu vrijedi Tartarova tvrdnja (4). Pretpostavke te tvrdnje u našim oznakama znače da je $b = 0$, za karakterističnu duljinu jednadžbe uzimamo $(\kappa\varepsilon_n)$, dok je karakteristična duljina pripadne poluklasične mjere $\omega_n = \sqrt{\varepsilon_n}$.

Uzmimo $t > 0$. Iz prethodnog računa vidimo da je ključan član za određivanje oblika mjere $\mu_{sc}^t$ niz $\frac{(\kappa\varepsilon_n)^\beta}{\omega_n} = \kappa^\beta \varepsilon_n^{\beta-\frac{1}{2}}$, pa u ovisnosti o parametru $\beta$ imamo sljedeće mogućnosti:

$$\mu_{sc}^t(x;\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \beta > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}e^{2x}e^{-8\pi^2 t}\lambda(x)\Big(\delta_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}} + \delta_{-\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}\Big)(\xi) & , \quad \beta = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e^{2x}\lambda(x)\delta_0(\xi) & , \quad 0 < \beta < \frac{1}{2} \end{cases} .$$

U slučaju $\beta > \frac{1}{2}$ je (4) očito trivijalno ispunjeno, kao i u slučaju $0 < \beta < \frac{1}{2}$ jer mjera ne ovisi o $t$, a po $\xi$ imamo $\delta_0$ koja poništava $|\xi|^2$. Konačno, u slučaju $\beta = \frac{1}{2}$ tvrdnja slijedi iz

$$\partial_t \mu_{sc}^t = -2\pi^2 e^x e^{-8\pi^2 t}\lambda(x)\Big(\delta_{-\frac{1}{\sqrt{\kappa}}} + \delta_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}\Big)(\xi)\,,$$

i

$$\begin{aligned} 8\pi^2\kappa\xi^2\mu_{sc}^t &= 8\pi^2\kappa\Big(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\Big)^2\frac{1}{4}e^{2x}e^{-8\pi^2 t}\lambda(x)\Big(\delta_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}} + \delta_{-\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}\Big)(\xi) \\ &= 2\pi^2 e^x e^{-8\pi^2 t}\lambda(x)\Big(\delta_{-\frac{1}{\sqrt{\kappa}}} + \delta_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}\Big)(\xi)\,. \end{aligned}$$

U prethodnom smo se računu uvjerili da poznavanjem niza rješenja možemo konstruirati pripadne poluklasične mjere koje, kad su ispunjene pretpostavke Tartarovog rezltata, uistinu i zadovoljavaju (4). Međutim, u primjenama nam je obično od interesa obratni smjer: iz niza početnih uvjeta i jednadžbe (4) želimo dobiti informaciju o pripadnoj familiji poluklasičnih mjera bez eksplicitnog poznavanja i samog niza rješenja. Da bismo mogli provesti ovaj postupak, najprije trebamo znati nešto o ovisnosti familije $\mu_{sc}^t$ o varijabli $t$. Može se pokazati [22, Proposition 2.5] da je ta ovisnost neprekinuta, odnosno da je preslikavanje $t \mapsto \mu_{sc}^t$ iz prostora $\mathrm{C}(\mathbf{R}^+;\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}))$, a zapravo je dovoljno pokazati da je za neki $T > 0$ preslikavanje $\mathsf{u}_n := u_n(t,\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ ekvineprekinuto. Sada sljedeća Cauchyjeva zadaća ima smisla:

$$\begin{cases} \partial_t\mu_{sc}^t + 8\pi^2\kappa\xi^2\mu_{sc}^t = 0 \\ \mu_{sc}^0 = \mu_{sc}^{00} \end{cases} . \tag{7}$$

Prethodna jednažba je zapravo obična diferencijalna jednažba pa je rješenje dano s

$$\mu_{sc}^t(x;\xi) = e^{-8\pi^2\kappa\xi^2 t}\mu_{sc}^{00}(x;\xi)\,,$$

odnosno, uvrštavajući vrijednost mjere $\mu_{sc}^{00}$ u ovisnosti o $\beta$, dobivamo upravo isti rezultat kao gore, čime smo opravdali ulogu relacija tipa (4).

Kako Tartarov rezultat vrijedi samo u slučaju $\omega_n = \sqrt{\varepsilon_n}$, općenito za $\omega_n = \varepsilon_n^\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$, nemamo nikakvu informaciju o pripadnoj poluklasičnoj mjeri. Međutim, promotrit ćemo kako izgledaju pripadne poluklasične mjere, te ćemo pokušati naslutiti koje bi relacije mogle zadovoljavati ovisno o $\alpha$.

Za $\alpha < \frac{1}{2}$ i čvrst $\beta \in \mathbf{R}$ imamo

$$\mu_{sc}^t(x;\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha < \beta \\ \frac{1}{4}e^{2x}\lambda(x)\Big(\delta_{\kappa^{-\beta}} + \delta_{\kappa^{-\beta}}\Big)(\xi) & , \quad \alpha = \beta \\ \frac{1}{2}e^{2x}\lambda(x)\delta_0(\xi) & , \quad \beta < \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Možemo uočiti da jednadžba (4) nije zadovoljena samo u slučaju $\alpha = \beta$ jer je u tom slučaju $\partial_t \mu_{sc}^t = 0$, ali $\xi^2 \mu_{sc}^t \neq 0$. Međutim, ipak imamo da je za svaki $\alpha < \frac{1}{2}$ zadovoljeno

$$\partial_t \mu_{sc}^t = 0\,.$$

Štoviše, gornju relaciju možemo opravdati i činjenicom da za svaki $t \in \mathbf{R}^+$ imamo $\mu_{sc}^t = \mu_{sc}^{00}$.

S druge strane, za $\alpha > \frac{1}{2}$ ovisno o $\beta$ imamo

$$\mu_{sc}^t(x;\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \beta > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} e^{2x} e^{-2t} \lambda(x) \delta_0(\xi) & , \quad \beta = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} e^{2x} \lambda(x) \delta_0(\xi) & , \quad \beta < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ovdje također jednadžba (4) nije zadovoljena samo u jednom slučaju i to $\beta = \frac{1}{2}$ jer je očito $\xi^2 \mu_{sc}^t = 0$, ali $\partial_t \mu_{sc}^t \neq 0$. Ipak, za svaki $\beta$ vrijedi

$$\xi^2 \mu_{sc}^t = 0\,,$$

što je posljedica činjenice da je za svaki $t \in \mathbf{R}^+$, $\operatorname{supp} \mu_{sc}^t \subseteq \mathbf{R} \times \{0\}$. Kako u ovom slučaju nemamo diferencijalnu jednadžbu po $t$, ne možemo dobiti eksplicitnu vezu mjere $\mu_{sc}^t$ i $\mu_{sc}^{00}$.

Dakle, slutnja bi bila da za poluklasičnu mjeru karakteristične duljine $(\varepsilon_n^\alpha)$ vrijedi

$$\left(H\Big(\frac{1}{2} - \alpha\Big)\partial_t + H\Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big) 8\pi^2 \kappa \xi^2\right) \mu_{sc}^t = 0\,,$$

pri čemu je

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Heavisideova funkcija. Nešto općenitiju tvrdnju ćemo pokazati u ostatku ovog poglavlja.

∎

**Lema 11.** *Neka je niz* $(\mathsf{u}_n)$ *omeđen u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *i* $(\omega_n)$*-čist za neku karakterističnu duljinu* $(\omega_n)$*, te neka je* $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ *pripadna poluklasična mjera. Ako niz neprekinutih funkcija* $(v_n)$ *jednoliko po kompaktima konvergira k* $v$*, tada je niz* $(v_n \mathsf{u}_n)$ *također* $(\omega_n)$*-čist, te je pripadna poluklasična mjera dana s* $|v|^2 \boldsymbol{\mu}_{sc}$*.*

Dem. Kako $\varphi v_n \longrightarrow \varphi v$ u $\mathrm{L}_c(\Omega)$, istim računom kao u dokazu Leme 8 imamo da u definiciji poluklasične mjere, danoj Teoremom 6, pridružene nizu $(v_n \mathsf{u}_n)$ možemo $v_n$ zamijeniti s $v$ pa time dobivamo tvrdnju.

**Q.E.D.**

**Lema 12.** *Neka je niz* $(\mathsf{u}_n)$ *omeđen u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ *i* $(\omega_n)$*-čist za neku karakterističnu duljinu* $(\omega_n)$*, te neka je* $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ *pripadna poluklasična mjera. Tada je za svaki* $\mathsf{h} \in \mathbf{R}^d$ *niz* $(\tau_{\mathsf{h}} \mathsf{u}_n)$ *također* $(\omega_n)$*-čist, te je pripadna poluklasična mjera dana s* $\tau_{\mathsf{h}} \boldsymbol{\mu}_{sc}$*, pri čemu je* $\tau_{\mathsf{h}}$ *translacija samo po* $\mathbf{x}$ *varijabli.*

Dem. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$ i $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Iz standardnih svojstava Fourierove pretvorbe imamo

$$\begin{aligned}(\widehat{\varphi_1 \tau_{\mathsf{h}} \mathsf{u}_n}) \otimes (\widehat{\varphi_2 \tau_{\mathsf{h}} \mathsf{u}_n}) &= e^{-2\pi i \cdot \cdot \mathsf{h}} e^{2\pi i \cdot \cdot \mathsf{h}} \Big(\widehat{(\tau_{-\mathsf{h}}\varphi_1) \mathsf{u}_n}\Big) \otimes \Big(\widehat{(\tau_{-\mathsf{h}}\varphi_2) \mathsf{u}_n}\Big) \\ &= \Big(\widehat{(\tau_{-\mathsf{h}}\varphi_1) \mathsf{u}_n}\Big) \otimes \Big(\widehat{(\tau_{-\mathsf{h}}\varphi_2) \mathsf{u}_n}\Big)\,,\end{aligned}$$

iz čega slijedi da za poluklasičnu mjeru $\boldsymbol{\nu}_{sc}$ pridruženu nizu $(\tau_{\mathsf{h}}\mathsf{u}_n)$ vrijedi

$$\langle \boldsymbol{\nu}_{sc}, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi \rangle = \Big\langle \boldsymbol{\mu}_{sc}, \Big(\tau_{-\mathsf{h}}(\varphi_1\bar{\varphi}_2)\Big) \boxtimes \psi \Big\rangle = \langle \tau_{\mathsf{h}}\boldsymbol{\mu}_{sc}, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi \rangle \,,$$

iz čega dobivamo $\boldsymbol{\nu}_{sc} = \tau_{\mathsf{h}}\boldsymbol{\mu}_{sc}$.

**Q.E.D.**

Prethodne dvije leme također vrijede za H-mjere (kao i jednoskalne H-mjere iz sljedećeg poglavlja), uz jaču pretpostavku $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^r)$.

Ranije smo već komentirali kako kod proučavanja evolucijskih jednadžbi koristeći mikrolokalne defektne funkcionale (npr. poluklasične mjere) postoje dva pristupa. U prvom pristupu se uz čvrst $t$ promatra niz rješenja $(u_n(t,\cdot))$ kojem se pridružuje familija poluklasičnih mjera $\mu^t_{sc}$, dok se u drugom pristupu $t$ promatra kao ravnopravna varijabla pa se nizu rješenja $(u_n)$ pridružuje mjera $\mu_{sc}$ koja dodatno ovisi o $t$, ali i o pripadnoj dualnoj varijabli $\tau$. Koliko nam je poznato, trenutno samo u nekim vrlo ograničenim slučajevima postoji jasna veza između $\mu^t_{sc}$ i $\mu_{sc}$. Sljedećim primjerom ćemo ilustrirati neke probleme.

**Primjer 10.** Za dane $v_1 \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R})$ i $v_2 \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ definirajmo niz funkcija

$$u_n(t,x) := \varepsilon_n^{-1} v_1\Big(\frac{t}{\varepsilon_n}\Big) v_2\Big(\frac{x}{\varepsilon_n}\Big) \,,$$

pri čemu $\varepsilon_n \to 0^+$. Kako je $v_1(t)v_2(x) \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$, $(u_n)$ je standarni koncentracijski niz (vidi primjere 2 i 8), pa imamo

$$\mu^{(\omega_n)}_{sc} = \begin{cases} 0 & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0 \\ \delta_{(0,0)} \boxtimes \nu_c & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0, \infty \rangle \\ \|v_1\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R})} \|v_2\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R})} \delta_{(0,0)} \boxtimes \delta_{(0,0)} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty \end{cases} ,$$

pri čemu je $\nu_c = c^2 |\hat{v}_1(c\cdot) v_2(c\cdot)|^2 \lambda$.

Pogledajmo sada pripadne poluklasične mjere uz čvrst $t$. Kako $v_1(\frac{t}{\varepsilon_n})$ ne ovisi o $x$ i zbog kompaktnog nosača (kao niz brojeva) konvergira nuli, za svaki $t$ imamo $u_n(t,\cdot) \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$. Dakle, za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ je $\mu^{t,(\omega_n)}_{sc} = 0$.

Time smo dobili da u ovom primjeru znanjem familija mjera $\mu^{t,(\omega_n)}_{sc}$ ne možemo ništa zaključiti o mjeri $\mu_{sc}$, pa ni o pripadnom nosaču $\operatorname{supp}\mu_{sc}$. ∎

Prethodni primjer bi mogao sugerirati da je bolji pristup u kojem koristimo $t$ kao ravnopravnu varijablu, pa ćemo se mi tog pristupa držati. Međutim, tada je tehnički zahtjevnije promatrati svojstvo širenja (npr. (7)) jer je netrivijalno kako povezati poluklasičnu mjeru pridruženu nizu rješenja s poluklasičnom mjerom pridruženom nizu početnih uvjeta zbog dodatne varijable $\tau$ koja se pojavila. S druge strane, ovo nam ne stvara nikakve probleme kada $t$ promatramo kao parametar, pa smo u (7) jednostavno imali $\mu^0_{sc} = \mu^{00}_{sc}$.

Sljedećim teoremom dajemo poopćenje relacije (4) u slučaju općenitije (paraboličke) jednadžbe koje je već spomenuto u [53, pp. 405.–406.], ali također i u smislu da promatramo proizvoljnu karakterističnu duljinu mjere. Nadalje, radit ćemo s mjerom $\mu_{sc}$ gdje je $t$ uzeta kao ravnopravna varijabla, ali ćemo nakon dokaza teorema komentirati i rezultat koji bi se dobio za familije mjera $\mu^t_{sc}$.

Prije iskaza sljedećeg teorema, prisjetimo se da s $\partial_k$ i $\partial^l$ označavamo parcijalne derivacije po varijablama $x^k$ i $\xi_l$. Dodatno, radi jednostavnijeg zapisa uvodimo $x^0 = t$ i $\xi_0 = \tau$, pa je onda i $\partial_0 = \partial_t$, odnosno $\partial^0 = \partial^\tau$. Nadalje, služit ćemo se Einsteinovom konvencijom o sumaciji, odnosno, podrazumijevamo sumaciju po varijablama koje se javljaju i u indeksu i u eksponentu (npr. $(\partial_k a)(\partial^k b) = \sum_k (\partial_k a)(\partial^k b)$).

**Teorem 11.** *Neka je* $(u_n)$ *niz u* $\mathrm{H}^1_{\rm loc}(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$, $u_n \rightharpoonup 0$ *u* $\mathrm{L}^2_{\rm loc}(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$ *slabo, te neka zadovoljavaju niz jednadžbi*

$$\partial_t u_n - \varepsilon_n \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) + \mathsf{b}\cdot\nabla\bar u_n = f_n\,, \tag{8}$$

*pri čemu* $\varepsilon_n \to 0^+$, $\mathbf{A}\in \mathrm{W}^{1,\infty}(\langle 0,T\rangle\times\Omega;\mathrm{M_d}(\mathbf{C}))$, $\mathsf{b}\in \mathrm{C}^1(\langle 0,T\rangle\times\Omega;\mathbf{C}^d)$, *te* $f_n \longrightarrow 0$ *u* $\mathrm{L}^2_{\rm loc}(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$ *jako. Neka je* $\mu_{sc}$ *poluklasična mjera pridružena (pod)nizu* $(u_n)$ *karakteristične duljine* $(\omega_n)$.

*Tada za* $c_1 = \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} \in [0,\infty\rangle$ *vrijedi*

$$\Big(8\pi^2 c_1 \mathrm{Sym}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} - 4\pi\mathsf{Im}\,\mathsf{b}\cdot\boldsymbol{\xi}\Big)\mu_{sc} = 0\,, \tag{9}$$

*dok za* $c_1 = \infty$ *imamo*

$$8\pi^2 \mathrm{Sym}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\mu_{sc} = 0\,. \tag{10}$$

*Ako je* $\mathsf{Im}\,\mathsf{b} = 0$, *tada dodatno za* $c_2 = \lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} \in [0,\infty\rangle$ *vrijedi*

$$\partial_t\mu_{sc} + \mathsf{b}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mu_{sc} - (\partial_k b^j)\xi_j(\partial^k\mu_{sc}) + (8\pi^2 c_2^2 \mathrm{Sym}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} - \mathsf{div}\,\mathsf{b})\mu_{sc} = 0\,, \tag{11}$$

*pri čemu su* $j\in 1..d$ *i* $k\in 0..d$, *odnosno (10) za* $c_2=\infty$. ∎

Prije dokaza teorema istaknimo da nismo pretpostavili nenegativnost matrične funkcije $\mathbf{A}$ tako da (8) nije nužno parabolička jednadžba (npr. Schrödingerova jednadžba je također obuhvaćena). Zbog te općenitosti smo u nemogućnosti koristiti standarne rezultate postojanja rješenja pa smo pretpostavili postojanje rješenja u prostoru $\mathrm{L}^2_{\rm loc}(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$.

Iz tehničkih razloga smo dodatno pretpostavili da je niz rješenja sadržan u prostoru $\mathrm{H}^1_{\rm loc}(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$, ali ne nužno i da je omeđen u tom prostoru. Ta bi se pretpostavka mogla izostaviti tako da niz $(u_n)$ izgladimo konvolucijom sa standarnim izglađivačem kako su pripadne poluklasične mjere nizova čija razlika jako konvergira nuli jednake.

Nadalje, pojasnimo u kojem smislu shvaćamo jednadžbu (11) (u (9) i (10) nema derivacija mjere pa onda i nemamo nikakvih problema). Općenito, poluklasične mjere su Radonove mjere, odnosno distribucije reda nula. Iz toga slijedi da je $\partial_k\mu_{sc}$ distribucija reda 1 pa se onda može proširiti do neprekinutog funkcionala na $\mathrm{C}^1_c$, čime je $g\partial_k\mu_{sc}$ i dalje iz $(\mathrm{C}^1)'$ za $g$ klase $\mathrm{C}^1$ (nije nužno da $g$ bude s kompaktnim nosačem). Dakle, (11) možemo shvatiti u prostoru $(\mathrm{C}^1_c(\langle 0,T\rangle\times\Omega\times\mathbf{R}^{1+d}))'$.

Dokažimo sada prethodni teorem.

Dem. Prije samog dokaza podsjetimo se da uvijek koristimo kompleksni skalarni produkt pa je to razlog zašto se javlja kompleksno konjugiranje u skalarnom produktu u (8).

Informaciju o poluklasičnoj mjeri pridruženoj nizu $(u_n)$ karakteristične duljine $\omega_n \to 0^+$ dobit ćemo tako da iz (8) izvedemo diferencijalnu relaciju za niz $w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) = u_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n s)\bar u_n(t,\mathbf{x})$, a potom primjenom Teorema 10 (uz $\tau=0$) dobiti odgovarajuću relaciju za pripadnu poluklasičnu mjeru.

Najprije moramo napraviti odgovarajuću lokalizaciju nosača niza $(u_n)$, te koristiti konstrukciju opisanu nakon Teorema 9. Dakle, neka je $(K_m)$ niz kompakata u $\langle 0,T\rangle \times \Omega$ koji ga iscrpljuju, odnosno $K_m \subseteq \mathsf{Int}\, K_{m+1}$ i $\bigcup_m K_m = \langle 0,T\rangle \times \Omega$. Nadalje, sa $(\zeta_m)$ označimo niz režućih funkcija u $\mathrm{C}_c^\infty(\langle 0,T\rangle \times \Omega)$ takvih da je $\zeta_m \equiv 1$ na $K_m$, $0 \leqslant \zeta_m \leqslant 1$ i $\operatorname{supp} \zeta_m \subseteq K_{m+1}$, te neka je $\mu_{sc}^m$ poluklasična mjera pridružena (pod)nizu $v_n := \zeta_m u_n$, dok $w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) := v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n s)\bar{v}_n(t,\mathbf{x})$. Tvrdnju ćemo pokazati za $\mu_{sc}^m$, odnosno na $\mathsf{Int}\, K \times \mathbf{R}^{1+d}$, iz čega će po spomenutoj konstrukciji tvrdnja slijediti za (cijelu) poluklasičnu mjeru $\mu_{sc}$ pridruženu (pod)nizu $(u_n)$.

Izaberimo probnu funkciju $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{1+d}_{t,\mathbf{x}} \times \mathbf{R}^{1+d}_{\tau,\boldsymbol{\xi}})$ takvu da je $\operatorname{supp} \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$ kompaktno sadržan u $\mathsf{Int}\, K_m \times L$ za neki kompakt $L \subseteq \mathbf{R}^{1+d}$. Istaknimo ovdje malu nepreciznost u oznakama. Naime, $\tau$ je dualna varijabla varijable $t$ i u potpunosti je neovisna o parametru kvantizacije $\tau$ koji se javlja, na primjer, u Teoremu 10, a koji će u ovom dokazu uvijek biti jednak 0.

Jednadžba (8) vrijedi na $\mathsf{Int}\, K_m$ ukoliko $u_n$ zamijenimo s $v_n = \zeta_m u_n$, pa onda posebno i u točkama $(t,\mathbf{x})$ i $(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y})$ za $(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) \in \operatorname{supp} \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$ i $n \geqslant n_0$ pri čemu $n_0$ ovisi o skupovima $K_m$ i $\operatorname{supp}\Phi$, te nizu $(\omega_n)$.

Neka je $(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) \in \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$. Evaluirajmo (8) u točki $(t,\mathbf{x})$, konjugirajmo i pomnožimo s $v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y})$, te tako dobiveni izraz pribrojimo izrazu koji dobijemo evaluiranjem (8) u točki $(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y})$ i množenjem s $\bar{v}_n(t,\mathbf{x})$. Time dobivamo

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t \bar{v}_n)(t,\mathbf{x}) v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) + \bar{v}_n(t,\mathbf{x})(\partial_t v_n)(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \\
&\quad - \varepsilon_n \Big( \mathsf{div}\,(\overline{\mathbf{A}\nabla v_n})(t,\mathbf{x}) v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \\
&\qquad + \bar{v}_n(t,\mathbf{x}) \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla v_n)(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \Big) \\
&\quad + \Big( \bar{\mathsf{b}}(t,\mathbf{x}) \cdot (\nabla v_n)(t,\mathbf{x}) \Big) v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \\
&\qquad + \bar{v}_n(t,\mathbf{x}) \Big( \mathsf{b}(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \cdot (\nabla \bar{v}_n)(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \Big) \\
&\quad = \bar{f}_n(t,\mathbf{x}) v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) + f_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \bar{v}_n(t,\mathbf{x}) \,.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Kako je po pretpostavci $v_n$ iz $\mathrm{H}^1(\langle 0,T\rangle \times \Omega)$, svi članovi u gornjoj jednakosti su dobro definirani i sadržani su u prostoru $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d} \times \mathbf{R}^{1+d})$.

Sada ćemo analizirati limes pri $n \to \infty$ pojedinih članova gornjeg izraza uz probnu funkciju $\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$. Preciznije, gornji izraz pomnožimo s $\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$, a potom integriramo po svim varijablama. Međutim, prije toga ćemo još malo srediti članove u oblik pogodan za korištenje teorema 9 i/ili 10. Najprije pokažimo da desna strana konvergira jako nuli u prostoru $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d} \times \mathbf{R}^{1+d})$. Iz ocjene

$$
\iint_{\mathbf{R}^{1+d}} |f_n(t,\mathbf{x}) v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y})| \, dt d\mathbf{x} \leqslant \|f_n\|_{\mathrm{L}^2(\operatorname{supp}\zeta - \omega_n(s,\mathbf{y}))} \|u_n\|_{\mathrm{L}^2(\operatorname{supp}\zeta)} \,,
$$

slijedi da je za omeđene $s$ i $\mathbf{y}$ (i dovoljno veliki $n$) funkcija $(s,\mathbf{y}) \mapsto \iint_{\mathbf{R}^{1+d}} |f_n(t,\mathbf{x}) v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y})| \, dt d\mathbf{x}$ jednoliko omeđena, a $f_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\langle 0,T\rangle \times \Omega)$ povlači da po točkama konvergira nuli, pa Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji daje tvrdnju. Analogno zaključimo i za drugi pribrojnik na desnoj strani.

Prva dva pribrojnika u (12) s derivacijom po $t$ su jednaka $(\partial_t w_n)(t,\mathbf{x})$ pa imamo

$$
\begin{aligned}
\left\langle \partial_t \bar{w}_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi \right\rangle &= -\left\langle \bar{w}_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}(\partial_t \Phi) \right\rangle \\
&= -\left\langle \bar{\mathcal{F}}_{(s,\mathbf{y})\to(\tau,\boldsymbol{\xi})} \bar{w}_n, \partial_t \Phi \right\rangle = -\left\langle \overline{W_0^{(\omega_n)}(v_n,v_n)}, \partial_t \Phi \right\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Kako je $\partial_t\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{1+d} \times \mathbf{R}^{1+d})$, po Teoremu 9 slijedi da prelaskom na limes u gornjem izrazu dobivamo

$$-\left\langle \mu_{sc}^m, \partial_t\Phi \right\rangle = \left\langle \partial_t\mu_{sc}^m, \Phi \right\rangle . \tag{13}$$

Sredimo sada posljednja dva člana s lijeve strane jednakosti u (12) koja sadrže $\mathsf{b}$.

$$\begin{aligned}
&\Big(\bar{\mathsf{b}}(t,\mathbf{x}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} v_n)(t,\mathbf{x})\Big) v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y}) \\
&\qquad + \bar{v}_n(t,\mathbf{x})\Big(\mathsf{b}(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}\bar{v}_n)(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y})\Big) \\
&\quad = \mathsf{b}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\bar{w}_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) \\
&\qquad + \Big((\bar{\mathsf{b}}(t,\mathbf{x}) - \mathsf{b}(t,\mathbf{x})) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} v_n(t,\mathbf{x})\Big) v_n(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y}) \\
&\qquad + \Big((\mathsf{b}(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y}) - \mathsf{b}(t,\mathbf{x})) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\bar{v}_n(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y})\Big)\bar{v}_n(t,\mathbf{x}) \\
&\quad = \mathsf{b}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\bar{w}_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) \\
&\qquad - 2i\Big(\operatorname{\mathsf{Im}}\mathsf{b}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} v_n(t,\mathbf{x})\Big) v_n(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y}) \\
&\qquad + \frac{\mathsf{b}(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y}) - \mathsf{b}(t,\mathbf{x})}{\omega_n} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\bar{w}_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) ,
\end{aligned} \tag{14}$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti koristili $\nabla_{\mathbf{y}} w_n = \omega_n \nabla_{\mathbf{x}} w_n$. Prvi i treći član posljednje jednakosti su izraženi preko $w_n$ što je pogodno za prijelaz na limes, dok je drugi član trivijalan ako je $\mathsf{b}$ realna.

Dakle, nakon množenja s $\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$ i integriranja, za prvi član imamo:

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{\mathsf{b}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} w_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi \right\rangle &= \left\langle \nabla_{\mathbf{x}}\bar{w}_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}(\Phi\mathsf{b}) \right\rangle \\
&= -\left\langle \bar{w}_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}(\operatorname{\mathsf{div}}_{\mathbf{x}}(\Phi\mathsf{b})) \right\rangle \\
&= -\left\langle \overline{W_0^{(\omega_n)}(v_n,v_n)}, \operatorname{\mathsf{div}}_{\mathbf{x}}(\Phi\mathsf{b}) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Kako je $\mathsf{b}$ klase $\mathrm{C}^1$ i $\Phi$ ima kompakatan nosač u varijablama $(t,\mathbf{x})$, to je $\operatorname{\mathsf{div}}_{\mathbf{x}}(\Phi\mathsf{b}) \in \mathcal{A}$, pa primjenom Teorema 10 na limesu dobivamo

$$-\left\langle \mu_{sc}^m, \operatorname{\mathsf{div}}_{\mathbf{x}}(\Phi\mathsf{b}) \right\rangle = \left\langle \nabla_{\mathbf{x}}\mu_{sc}^m \cdot \mathsf{b}, \Phi \right\rangle , \tag{15}$$

a kao što smo ranije istaknuli je $\mathsf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mu_{sc}^m$ element prostora $(\mathrm{C}_0^1(\mathbf{R}^{1+d} \times \mathbf{R}^{1+d}))'$.

Prijelaz na limes u trećem članu je tehnički zahtjevniji kako i član s $\mathsf{b}$ ovisi o $n$. Prije samog računa uočimo da je ovaj član trivijalan u slučaju da je $\mathsf{b}$ konstantna. Uz primjenu standarnog vektorskog računa slijedi

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\bar{\mathsf{b}}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot) - \bar{\mathsf{b}}}{\omega_n} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} w_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi \right\rangle \\
&\quad = \left\langle \nabla_{\mathbf{y}}\bar{w}_n, (\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)\frac{\mathsf{b}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot) - \mathsf{b}}{\omega_n} \right\rangle \\
&\quad = -\left\langle \bar{w}_n, (\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi) \cdot \frac{\bar{\mathsf{b}}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot) - \bar{\mathsf{b}}}{\omega_n} \right\rangle \\
&\qquad - \left\langle \bar{w}_n, (\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)\operatorname{\mathsf{div}}_{\mathbf{x}}\mathsf{b}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Kako $\frac{\mathsf{b}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)-\mathsf{b}}{\omega_n}$ i $\mathsf{div}_{\mathbf{x}}\mathsf{b}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)$ ovise o $s$ i $\mathbf{y}$, ne možemo jednostavno primijeniti inverznu Fourierovu pretvorbu tako da ćemo najprije srediti te članove. Kako je $\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$ s kompaktnim nosačem i $(\bar{w}_n)$ je omeđen u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{1+d}\times\mathbf{R}^{1+d})$, dovoljno je pokazati da za svaki $j\in 1..d$ niz funkcija $\frac{b^j(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)-b^j}{\omega_n}$ jednoliko po kompaktima konvergira k funkciji $\nabla_{(t,\mathbf{x})}b^j\cdot(s,\mathbf{y})$, odnosno $\mathsf{div}_{\mathbf{x}}\mathsf{b}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)$ k $\mathsf{div}_{\mathbf{x}}\mathsf{b}$. Dokažimo konvergenciju prvog niza.

Po teoremu srednje vrijednost za svaki $j\in 1..d$ postoji $\theta^j_n\in\langle 0,1\rangle$ (ovisi dodatno o $t,\mathbf{x},s$ i $\mathbf{y}$) takav da

$$\frac{b^j(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y})-b^j(t,\mathbf{x})}{\omega_n}-\nabla_{(t,\mathbf{x})}b^j(t+\theta^j_n\omega_n s,\mathbf{x}+\theta^j_n\omega_n\mathbf{y})\cdot(s,\mathbf{y})=0\,.$$

Već smo ranije komentirali da $(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})\in\operatorname{supp}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$ za dovoljno veliki $n$ povlači $(t,\mathbf{x}),(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y})\in K_m$. Budući da je $\mathsf{b}$ klase $\mathrm{C}^1$, $\nabla_{(t,\mathbf{x})}\mathsf{b}$ je jednoliko neprekinuta na kompaktu, a onda iz $|\theta^j_n\omega_n(s,\mathbf{y})|\leqslant C\omega_n$ za dovoljno veliki $n$ imamo da je za svaki $j\in 1..d$ razlika

$$\Big(\nabla_{(t,\mathbf{x})}b^j(t,\mathbf{x})-\nabla_{(t,\mathbf{x})}b^j(t+\theta^j_n\omega_n s,\mathbf{x}+\theta^j_n\omega_n\mathbf{y})\Big)\cdot(s,\mathbf{y})$$

mala jednoliko po $t,\mathbf{x},s$ i $\mathbf{y}$, čime smo dobili tvrdnju. Kako je i $\mathsf{div}_{\mathbf{x}}\mathsf{b}$ jednoliko neprekinuta na kompaktu, analogno dobivamo tvrdnju za drugi niz.

Time smo dobili da je ekvivalentno promatrati limes niza

$$-\left\langle\bar{w}_n,\mathsf{div}_{\mathbf{y}}\Big((\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)[\nabla_{(t,\mathbf{x})}b^j\cdot(s,\mathbf{y})]_j\Big)\right\rangle\;,$$

pri čemu smo koristili

$$\begin{aligned}&\mathsf{div}_{\mathbf{y}}\Big((\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)[\nabla_{(t,\mathbf{x})}b^j\cdot(s,\mathbf{y})]_j\Big)\\&\qquad=(\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)\cdot[\nabla_{(t,\mathbf{x})}\bar{b}^j\cdot(s,\mathbf{y})]_j+(\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)\mathsf{div}_{\mathbf{x}}\mathsf{b}\,.\end{aligned}$$

Nadalje, koristeći svojstva Fourierove pretvorbe imamo

$$\begin{aligned}\mathsf{div}_{\mathbf{y}}\Big((\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)[\nabla_{(t,\mathbf{x})}b^j\cdot(s,\mathbf{y})]_j\Big)&=\mathsf{div}_{\mathbf{y}}\Big((\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)[\partial_k b^j y^k]_j\Big)\\&=-\frac{i}{2\pi}\mathsf{div}_{\mathbf{y}}\Big[\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}(\partial^k\Phi\partial_k b^j)\Big]_j\\&=-\frac{i}{2\pi}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}(-2\pi i\xi_j\partial^k\Phi\partial_k b^j)\\&=-\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}(\xi_j\partial^k\Phi\partial_k b^j)\,,\end{aligned}$$

pri čemu nam za $k\in 0..d$ $\partial_k$ predstavlja parcijalnu derivaciju u varijabli $x^k$, dok s $\partial^k$ označavamo parcijalnu derivaciju u dualnoj varijabli $\xi_k$ uz $x^0=t$ i $\xi_0=\tau$. Također smo radi jednostavnosti zapisa koristili Einsteinovu konvenciju o sumaciji, pri čemu je $k\in 0..d$, dok je $j\in 1..d$.

Dakle,

$$-\left\langle\bar{w}_n,\mathsf{div}_{\mathbf{y}}\Big((\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)[\nabla_{(t,\mathbf{x})}b^j\cdot(s,\mathbf{y})]_j\Big)\right\rangle=\left\langle\overline{W_0^{(\omega_n)}(v_n,v_n)},\xi_j\partial^k\Phi\partial_k b^j\right\rangle\,,$$

pa prijelazom na limes konačno dobivamo

$$\left\langle \mu_{sc}^m, \xi_j \partial^k \Phi \partial_k b^j \right\rangle = -\left\langle \partial_k \bar{b}_j \partial^k (\xi_j \mu_{sc}^m), \Phi \right\rangle = \left\langle (-\mathsf{div}_{\mathbf{x}} \bar{\mathsf{b}} - \partial_k \bar{b}^j \xi_j \partial^k) \mu_{sc}^m, \Phi \right\rangle . \tag{16}$$

Ukoliko $\mathsf{Im}\,\mathsf{b} \neq 0$ tada u (14) moramo srediti i drugi član. Slično kao i u prijašnjim računima imamo

$$\begin{aligned} -2i\Big(\mathsf{Im}\,\mathsf{b}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} v_n(t,\mathbf{x})\Big) & v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \\ &= -2i \mathsf{Im}\,\mathsf{b}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{w}_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) \\ &\quad + 2i\Big(\mathsf{Im}\,\mathsf{b}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{v}_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y})\Big) \bar{v}_n(t,\mathbf{x}) \\ &= -2i \mathsf{Im}\,\mathsf{b}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{w}_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) \\ &\quad + \frac{2i}{\omega_n} \mathsf{Im}\,\mathsf{b}(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \bar{w}_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y}) . \end{aligned}$$

Sada smo dobili član reda $\Theta(\frac{1}{\omega_n})$ pa onda moramo cijelu jednadžbu pomnožiti s $\omega_n$ da bismo dobili nešto konačno, a time svi prijašnje izračunati članovi iščezavaju. Također i ovdje prvi član u gornjem izrazu iščezava tako da je ostalo samo analizirati drugi član za koji imamo

$$\begin{aligned} 2i \left\langle \mathsf{Im}\,\mathsf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} w_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi}) \to (s,\mathbf{y})} \Phi \right\rangle &= -2i \left\langle \bar{w}_n, \mathsf{div}_{\mathbf{y}} \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi}) \to (s,\mathbf{y})} \Phi \mathsf{Im}\,\mathsf{b} \right\rangle \\ &= -4\pi \left\langle \bar{w}_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi}) \to (s,\mathbf{y})} (\Phi \mathsf{Im}\,\mathsf{b} \cdot \boldsymbol{\xi}) \right\rangle \\ &= -4\pi \left\langle \overline{W_0^{(\omega_n)}(v_n, v_n)}, \Phi \mathsf{Im}\,\mathsf{b} \cdot \boldsymbol{\xi} \right\rangle , \end{aligned}$$

pa na limesu dobivamo

$$-4\pi \left\langle \mu_{sc}^m, \Phi \mathsf{Im}\,\mathsf{b} \cdot \boldsymbol{\xi} \right\rangle = \left\langle (-4\pi \mathsf{Im}\,\mathsf{b} \cdot \boldsymbol{\xi}) \mu_{sc}^m, \Phi \right\rangle . \tag{17}$$

Ostalo nam je još u (12) srediti članove uz $\mathbf{A}$. Za četvrti član u (12) imamo

$$\begin{aligned} -\varepsilon_n \bar{v}_n(t,\mathbf{x}) & \mathsf{div}_{\mathbf{x}} \Big(\mathbf{A}(\cdot+\omega_n s, \cdot+\omega_n \mathbf{y})(\nabla_{\mathbf{x}} v_n(\cdot+\omega_n s, \cdot+\omega_n \mathbf{y}))\Big)(t,\mathbf{x}) \\ &= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n} \bar{v}_n(t,\mathbf{x}) \mathsf{div}_{\mathbf{x}} \Big(\mathbf{A}(\cdot+\omega_n s, \cdot+\omega_n \mathbf{y})(\nabla_{\mathbf{y}} v_n(\cdot+\omega_n \cdot, \cdot+\omega_n \cdot))(s,\mathbf{y})\Big)(t,\mathbf{x}) \\ &= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2} \bar{v}_n(t,\mathbf{x}) \mathsf{div}_{\mathbf{y}} \Big(\mathbf{A}(t+\omega_n \cdot, \mathbf{x}+\omega_n \cdot)(\nabla_{\mathbf{y}} v_n(t+\omega_n \cdot, \mathbf{x}+\omega_n \cdot))\Big)(s,\mathbf{y}) \\ &= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2} \mathsf{div}_{\mathbf{y}} \Big(\mathbf{A}(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})\Big) , \end{aligned} \tag{18}$$

čime smo dobili da je ovaj član reda $\Theta(\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2})$.

Treći član u (12) sređujemo u nekoliko koraka. Najprije primjetimo

$$\begin{aligned} -\varepsilon_n v_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) & \mathsf{div}_{\mathbf{x}} (\bar{\mathbf{A}} \nabla_{\mathbf{x}} \bar{v}_n)(t,\mathbf{x}) \\ &= -\varepsilon_n \mathsf{div}_{\mathbf{x}} \Big(v_n(\cdot+\omega_n s, \cdot+\omega_n \mathbf{y}) \bar{\mathbf{A}} \nabla_{\mathbf{x}} \bar{v}_n\Big)(t,\mathbf{x}) \\ &\quad + \varepsilon_n \bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \bar{v}_n(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{v}_n(t+\omega_n s, \mathbf{x}+\omega_n \mathbf{y}) , \end{aligned}$$

a zatim za dobiveni prvi član imamo

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_n \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\Big(v_n(\cdot+\omega_n s,\cdot+\omega_n\mathbf{y})\bar{\mathbf{A}}\nabla_{\mathbf{x}}\bar{v}_n\Big)(t,\mathbf{x}) &= -\varepsilon_n \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\Big(\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}} w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})\Big)(t,\mathbf{x})\\
&\quad + \varepsilon_n \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\Big(\bar{v}_n\bar{\mathbf{A}}\nabla_{\mathbf{x}} v_n(\cdot+\omega_n s,\cdot+\omega_n\mathbf{y})\Big)(t,\mathbf{x})\\
&= -\varepsilon_n \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\Big(\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}} w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})\Big)(t,\mathbf{x})\\
&\quad + \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\Big(\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{y}} w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})\Big)\,,
\end{aligned}$$

dok drugi član zapisujemo kao

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_n\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\bar{v}(t,\mathbf{x})\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\bar{v}_n(t+\omega_n s,\mathbf{x}+\omega_n\mathbf{y})\\
&\qquad = \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\operatorname{tr}\Big(\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{y}}\Big(v_n(t+\omega_n\cdot,\mathbf{x}+\omega_n\cdot)\nabla_{\mathbf{x}}\bar{v}_n(t,\mathbf{x})\Big)(s,\mathbf{y})\Big)\\
&\qquad = \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\operatorname{tr}\Big(\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{y}}\nabla_{\mathbf{x}} w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})\Big)\\
&\qquad\quad - \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\operatorname{tr}\Big(\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{y}}\Big(\bar{v}_n(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}} v_n(t+\omega_n\cdot,\mathbf{x}+\omega_n\cdot)\Big)(s,\mathbf{y})\Big)\\
&\qquad = \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\operatorname{tr}\Big(\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{y}}\nabla_{\mathbf{x}} w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})\Big) - \frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\operatorname{tr}\Big(\bar{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\nabla^2_{\mathbf{y},\mathbf{y}} w_n(t,\mathbf{x},s,\mathbf{y})\Big)\,.
\end{aligned}$$

Od gornja četiri dobivena člana, samo je posljednji istog reda kao $\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}$, dok su ostali nižeg reda pa na limesu iščežavaju. Uz $c = \lim_n \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n} \in [0,\infty\rangle$, računamo limes posljednjeg člana za probnu funkciju $\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi$. Iz

$$\begin{aligned}
-\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\left\langle \operatorname{tr}\Big(\mathbf{A}\nabla^2_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\bar{w}_n\Big), \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi\right\rangle &= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\sum_{k,j=1}^{d}\left\langle a^{jk}\partial_{y^k}\partial_{y^j}\bar{w}_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi\right\rangle\\
&= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\sum_{k,j=1}^{d}\left\langle \bar{w}_n, \partial_{y^k}\partial_{y^j}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}(\bar{a}^{jk}\Phi)\right\rangle\\
&= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\sum_{k,j=1}^{d}\left\langle \bar{w}_n, \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}(-4\pi^2\xi_k\xi_j\bar{a}^{jk}\Phi)\right\rangle\\
&= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\left\langle \overline{W_0^{(\omega_n)}(v_n,v_n)}, -4\pi^2\Phi\mathbf{A}^*\cdot(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}))\right\rangle\,,
\end{aligned}$$

na limesu dobivamo

$$4\pi^2c^2\left\langle(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{A}^*\mu_{sc}^m,\Phi\right\rangle\,. \tag{19}$$

Izraz (18) je također istog reda kao $\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}$, pa imamo

$$
\begin{aligned}
-\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}&\left\langle \mathsf{div}_{\mathbf{y}}\Big(\bar{\mathbf{A}}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}\bar{w}_n\Big), \mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi\right\rangle \\
&= \frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\left\langle \nabla_{\mathbf{y}}\bar{w}_n, \mathbf{A}^\top(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi\right\rangle \\
&= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\left\langle \bar{w}_n, \mathsf{div}_{\mathbf{y}}\Big(\mathbf{A}^\top(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi\Big)\right\rangle \\
&= -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\left\langle \bar{w}_n, \nabla^2_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi\cdot\bar{\mathbf{A}}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)\right\rangle \\
&\quad -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\left\langle \bar{w}_n, (\partial_j\bar{a}^{kj}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot))(\partial_{y^k}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi)\right\rangle\,,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti iskoristili $\partial_{y^j}\bar{a}^{kj}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot) = \omega_n\partial_j\bar{a}^{kj}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)$. Kako je $\partial_j a^{kj}\in \mathrm{L}^\infty(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$, limes posljednjeg člana je nula. S druge strane, koristeći da je $\mathbf{A}$ jednoliko neprekinuta na kompaktima, u prvom članu analogno kao kod članova s $\mathsf{b}$ dobivamo da izraz $\mathbf{A}(\cdot+\omega_n\cdot,\cdot+\omega_n\cdot)$ možemo zamijeniti s $\mathbf{A}$. Time je dovoljno promatrati limes izraza

$$
-\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\left\langle \bar{w}_n, \nabla^2_{\mathbf{y},\mathbf{y}}\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi\cdot\bar{\mathbf{A}}\right\rangle = -\frac{\varepsilon_n}{\omega_n^2}\left\langle \overline{W_0^{(\omega_n)}(v_n,v_n)}, -4\pi^2\Phi\mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\right\rangle\,,
$$

koji je jednak

$$
4\pi^2c^2\left\langle (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{A}\mu^m_{sc},\Phi\right\rangle\,,
$$

pa zajedno s (19) imamo

$$
8\pi^2c^2\left\langle (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\cdot\mathrm{Sym}\mathbf{A}\mu^m_{sc},\Phi\right\rangle = 8\pi^2c^2\left\langle (\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{Sym}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})\mu^m_{sc},\Phi\right\rangle\,, \tag{20}
$$

pri čemu je $\mathrm{Sym}\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^*}{2}$ hermitski dio matrice $\mathbf{A}$. Naravno, ako je $\mathbf{A} = i\mathbf{B}+\mathbf{C}$ za $\mathbf{B}$ realnu i $\mathbf{C}$ realnu antisimetričnu, tada je gornji izraz jednak nuli pa konačan rezultat ne ovisi o $\mathbf{A}$ što je uglavnom nepovoljno. Naime, $i\mathbf{B}+\mathbf{C}+(i\mathbf{B}+\mathbf{C})^* = i(\mathbf{B}-\mathbf{B}^\top)$, a $(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{B}^\top)=0$ kao skalarni produkt simetrične i antisimetrične matrice. Međutim, u slučaju $\mathbf{A}=i\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ realna matrična funkcija, se prethodni račun može prilagoditi tako da se dobije analogan rezultat kao u [53, Chapter 32] gdje je promatrana Schrödingerova jednadžba (odnosno $\mathbf{A}=-i\mathbf{I}$ za jediničnu matricu $\mathbf{I}$).

Nakon što smo analizirali sve članove u (12), izvedimo sad relaciju koju zadovoljava pripadna poluklasična mjera.

Razmotrimo najprije slučaj $\mathsf{Im}\,\mathsf{b}=0$. Za $c=\lim_n\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n}\in[0,\infty\rangle$ iz (13), (15), (16) i (20) slijedi

$$
\left\langle \Big(\partial_t+\bar{\mathsf{b}}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}-\mathsf{div}_{\mathbf{x}}\bar{\mathsf{b}}-\partial_k\bar{b}^j\xi_j\partial_k+8\pi^2c^2(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{Sym}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})\Big)\mu^m_{sc},\Phi\right\rangle = 0\,.
$$

S druge strane, ukoliko je $c=\infty$ tada moramo cijelu jednadžbu pomnožiti s $\frac{\omega_n^2}{\varepsilon_n}$ pa na limesu izrazi (13), (15) i (16) iščezavaju tako da ostaje samo

$$
\left\langle 8\pi^2(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{Sym}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})\mu^m_{sc},\Phi\right\rangle = 0\,.
$$

U slučaju $\mathsf{Im}\,\mathsf{b}\neq 0$ pojavljuje se član reda $\frac{1}{\omega_n}$, (17), pa cijelu jednadžbu moramo pomnožiti s $\omega_n$, a onda daljna analiza ovisi o $c=\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$. Za $c\in[0,\infty\rangle$ iz (17) i (20) slijedi

$$
\left\langle \Big(-4\pi\mathsf{Im}\,\mathsf{b}\cdot\boldsymbol{\xi}+8\pi^2c(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{Sym}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})\Big)\mu^m_{sc},\Phi\right\rangle = 0\,,
$$

dok za $c = \infty$ opet imamo samo

$$\left\langle 8\pi^2(\boldsymbol{\xi}\cdot \mathrm{Sym}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi})\mu_{sc}^m, \Phi\right\rangle = 0\,.$$

U svakom od gornjih slučajeva argument na prvom mjestu dualnog produkta nalazi se u prostoru $(\mathrm{C}_0^1(\mathbf{R}^{1+d}\times\mathbf{R}^{1+d}))'$, a kako gornji identiteti vrijede za sve funkcije iz skupa

$$\left\{\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{1+d}_{t,\mathbf{x}}\times \mathbf{R}^{1+d}_{\tau,\boldsymbol{\xi}}) : (\exists\, L\in\mathcal{K}(\mathbf{R}^{1+d}))\ \mathrm{supp}\,\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi \subset\subset \mathsf{Int}\,K_m\times L\right\},$$

pri čemu $\mathcal{K}(X)$ označava familiju kompaktnih podskupova topološkog prostora $X$, koji je gust u $\mathrm{C}_0^1(\mathsf{Int}\,K_m\times\mathbf{R}^{1+d})$, možemo zaključiti da su u gornjim relacijama izrazi u prvom argumentu dualnog produkta trivijalni u $(\mathrm{C}_0^1(\mathsf{Int}\,K_m\times\mathbf{R}^{1+d}))'$. Naime, za svaku funkciju $\Phi$ iz prostora $\mathrm{C}_0^1(\mathsf{Int}\,K_m\times\mathbf{R}^{1+d})$ postoji niz $(\Phi_n)$ u $\mathrm{C}_c^\infty(\mathsf{Int}\,K_m\times\mathbf{R}^{1+d})$ takav da $\Phi_n\longrightarrow\Phi$ u $\mathrm{C}_0^1(\mathsf{Int}\,K_m\times\mathbf{R}^{1+d})$. Nadalje, za svaki $n$ postoji niz $(\Phi_n^k)$ iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathsf{Int}\,K_m\times\mathbf{R}^{1+d})$ takav da $\Phi_n^k\longrightarrow\mathcal{F}_{(\tau,\boldsymbol{\xi})\to(s,\mathbf{y})}\Phi_n$ u $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{1+d}\times\mathbf{R}^{1+d})$ pa koristeći neprekinutost Fourierove pretvorbe na $\mathcal{S}$, te činjenicu da je topologija prostora $\mathcal{S}$ jača od topologije prostora $\mathrm{C}_0^1(\mathsf{Int}\,K_m\times\mathbf{R}^{1+d})$ imamo $\bar{\mathcal{F}}_{(s,\mathbf{y})\to(\tau,\boldsymbol{\xi})}\Phi_n^k\longrightarrow\Phi_n\longrightarrow\Phi$ pa uzimanjem dijagonalnog podniza niza $(\bar{\mathcal{F}}_{(s,\mathbf{y})\to(\tau,\boldsymbol{\xi})}\Phi_n^k)$ dobivamo traženu aproksimaciju.

Iz proizvoljnosti $m$ zaključujemo da tvrdnja vrijedi na cijelom prostoru, a onda konačno kompleksnim konjugiranjem dobivamo tvrdnju teorema.

**Q.E.D.**

Ako $\mathsf{b}$ ovisi o $t$, u (11) se javlja derivacija po $\tau$ mjere $\mu_{sc}$ što naravno ne bismo mogli dobiti da smo proveli račun za $\mu_{sc}^t$. Ako u (8) dodamo član $\frac{1}{\varepsilon_n}Vu_n$ za $V\in\mathrm{C}^1(\langle 0,T\rangle\times\Omega)$, na limesu bismo imali član $\partial_t V\partial^\tau\mu_{sc}$, odnosno opet bi se javila derivacija u varijabli $\tau$.

Za kraj provjerimo da u slučaju $\beta=\frac{1}{2}$ i $c=\lim_n\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\omega_n}\in\langle 0,\infty\rangle$ poluklasična mjera iz Primjera 9

$$\mu_{sc} = \frac{1}{4}e^{2x}e^{-2(4\pi^2+b)t}\lambda(t,x)\Big(\delta_{(-\frac{b}{c},\frac{1}{c})}+\delta_{(\frac{b}{c},-\frac{1}{c})}\Big)(\tau,\xi)\,,$$

zadovoljava identitet (11). Naime, iz

$$\partial_t\mu_{sc} = -2(4\pi^2+b)\mu_{sc}\ ,\quad \partial_x\mu_{sc} = 2\mu_{sc}\ ,\quad 8\pi^2c^2\xi^2\mu_{sc} = 8\pi^2\mu_{sc}\ ,$$

slijedi

$$\partial_t\mu_{sc} + b\partial_x\mu_{sc} + 8\pi^2c^2\xi^2\mu_{sc} = 0\,,$$

što je upravo (11) uz pretpostavke Primjera 9.

# II. Jednoskalne H-mjere

Kao što smo uočili u prethodnom poglavlju, H-mjere imaju nedostatak što nisu pogodne za proučavanje problema s karakterističnom duljinom, odnosno, iz H-mjera ne možemo dobiti potpunu informaciju o promatranom slabo konvergentnom nizu (vidi primjere I.1 i I.2), dok kod poluklasičnih mjera za neke skale gubimo informaciju (vidi primjere I.7 i I.8).

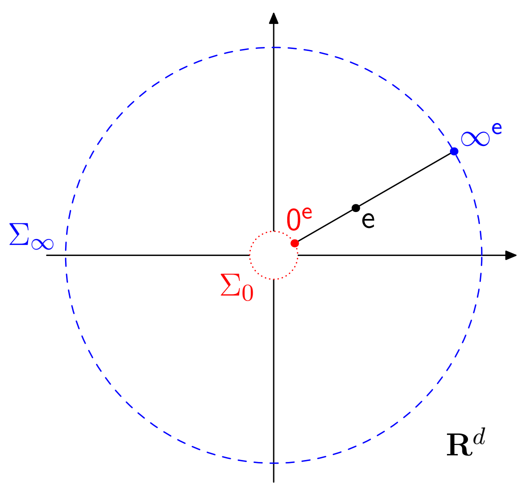
S ciljem otklanjanja prethodnog problema, ali i dobivanja objekta s dobrim svojstvima i H-mjera (za svaku karakterističnu duljinu se dobije barem dio informacije) i poluklasičnih mjera (mogućnost određivanja karakteristične duljine niza), Luc Tartar prije nekoliko godina u [53, Lemma 32.6] uvodi jednoskalne H-mjere.

Tartarova konstrukcija je zasnovana na promatranju pripadnih H-mjera na prostoru jedne dimenzije više od promatranog prostora, te korištenju odgovarajućih projekcija. Ovdje ćemo dati alternativni pristup u kojem koristimo varijantu prve komutacijske leme, te odgovarajući teorem o jezgri dobiven prilagođavanjem tvrdnje dane u [52, Lemma 1.10].

Nakon što komentiramo osnovna svojstva (od kojih možemo istaknuti vezu s H-mjerama i poluklasičnim mjerama), u drugom dijelu poglavlja se zadržavamo na lokalizacijskom svojstvu, gdje dajemo poboljšanje i poopćenje Tartarovog rezultata, te primjenu u vidu kompaknosti kompenzacijom s karakterističnom duljinom. Glavnina ovog odjeljka je obuhvaćena u [4].

## 1. Prostori probnih funkcija

Iz primjera I.1 i I.8 se može vidjeti da jedinična sfera u dualnom prosotru nije dostatna za dobivanje cjelovite informacije o promatranom nizu. Međutim, niti cijeli $\mathbf{R}^d$ nije u potpunosti zadovoljavajuć kako se iz primjera I.7 i I.8 može uočiti da za neke karakteristične duljine poluklasične mjere ne čuvaju sve informacije u beskonačnosti i miješaju različite dijelove tih informacija (npr. smjerove titranja) u ishodištu.




**Slika 1.** $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$, kompaktifikacija prostora $\mathbf{R}^d_*$.

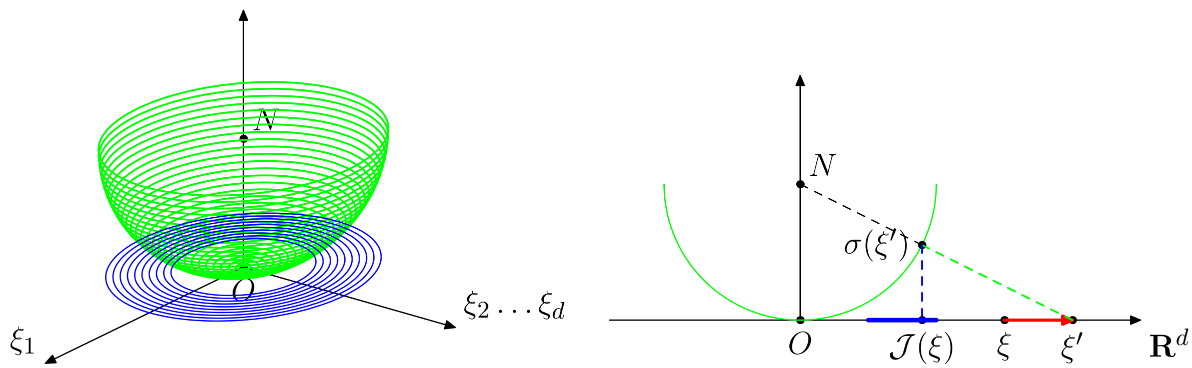
Kako bi prevladao prethodne nedostatke, za potrebe konstrukcije jednoskalnih H-mjera Tartar je odabrao za prostor probnih funkcija u Fourierovom prostoru neprekinute funkcije na odgovarajućoj *kompaktifikaciji* prostora $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$. Preciznije, neka je $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ skup dobiven dodavanjem dvije jedinične sfere $\Sigma_0$ i $\Sigma_\infty$, prvu oko ishodišta, a drugu u beskonačnosti, prostoru $\mathbf{R}^d_* := \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$. Točke s dodanih sfera označavamo s $0^{\mathsf{e}}$, odnosno $\infty^{\mathsf{e}}$, gdje je $\mathsf{e} \in \mathrm{S}^{d-1}$ smjer točaka (točka na jediničnoj sferi). $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$

opskrbljen topologijom homeomorfnoj prirodnoj topologiji (naslijeđenoj od $\mathbf{R}^d$) na *d-dimenzionalnom sferičnom sloju* postaje kompaktan topološki prostor, te time ujedno i kompaktifikacija prostora $\mathbf{R}^d_*$. Na primjer, u dvije dimenzije je $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ topološki izomorfan kružnom vijencu (vidi Sliku 1). Ideja ove kompaktifikacije je sačuvati izgubljene podatke iz primjera I.7 i I.8 upravo na novouvedenim sferama $\Sigma_0$ i $\Sigma_\infty$.

Provedimo sada precizniju konstrukciju prostora $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Za čvrst $r_0 > 0$ definirajmo $r_1 = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+1}}$, te označimo s

$$A[\mathsf{0}, r_1, 1] := \Big\{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{R}^d : r_1 \leqslant |\boldsymbol{\zeta}| \leqslant 1\Big\}$$

zatvoreni $d$-dimenzionalni sferični sloj opskrbljen topologijom naslijeđenom od $\mathbf{R}^d$. Dodatno uvodimo $A(\mathsf{0}, r_1, 1) := \mathsf{Int}\, A[\mathsf{0}, r_1, 1]$, te s $A_0[\mathsf{0}, r_1, 1] := \mathrm{S}^{d-1}(\mathsf{0}; r_1)$ i $A_\infty[\mathsf{0}, r_1, 1] := \mathrm{S}^{d-1}$ označavamo pripadne rubne sfere.




**Slike 2 i 3.** Preslikavanje $\mathcal{J}$ (plavom bojom je označen skup $A(\mathsf{0}, r_1, 1)$).

Da bismo prostor $A[\mathsf{0}, r_1, 1]$ promatrali kao kompaktifikaciju prostora $\mathbf{R}^d_*$, trebamo konstruirati *homeomorfizam* $\mathcal{J}$ s $\mathbf{R}^d_*$ na $A(\mathsf{0}, r_1, 1)$. To ćemo napraviti sljedećom konstrukcijom (vidi slike 2 i 3): točku $\boldsymbol{\xi}$ iz $\mathbf{R}^d_*$ najprije translatiramo od ishodišta u radijalnom smjeru za iznos $r_0$, zatim tako dobivenu točku $\boldsymbol{\xi}'$ preslikamo na jediničnu polusferu (označena zelenom bojom na slikama) u jednoj dimenziji više (varijanta inverzne stereografske projekcije), te na kraju projiciramo natrag na $\mathbf{R}^d$. Prateći geometrijsku konstrukciju dobivamo da je preslikavanje $\mathcal{J} : \mathbf{R}^d_* \longrightarrow A(\mathsf{0}, r_1, 1)$ dano s

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 + \left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|+r_0}\right)^2}} = \frac{|\boldsymbol{\xi}| + r_0}{|\boldsymbol{\xi}| K(\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{\xi}\,,$$

pri čemu je $K(\boldsymbol{\xi}) := \sqrt{1 + (|\boldsymbol{\xi}| + r_0)^2}$, te da $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ i $\boldsymbol{\xi}$ leže na istom polupravcu kroz ishodište, a što se lako i analitički pokaže:

$$\frac{\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})|} = \frac{\frac{|\boldsymbol{\xi}|+r_0}{|\boldsymbol{\xi}|K(\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{\xi}}{\frac{|\boldsymbol{\xi}|+r_0}{|\boldsymbol{\xi}|K(\boldsymbol{\xi})}|\boldsymbol{\xi}|} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\,.$$

Kako je $K$ radijalna funkcija, često ćemo radi jednostavnosti pisati $K(|\boldsymbol{\xi}|) = K(\boldsymbol{\xi})$. Nadalje, $\mathcal{J}$ je homeomorfizam, a inverzno preslikavanje $\mathcal{J}^{-1} : A(\mathsf{0}, r_1, 1) \longrightarrow \mathbf{R}^d_*$ je dano s

$$\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{|\boldsymbol{\zeta}| - r_0\sqrt{1 - |\boldsymbol{\zeta}|^2}}{|\boldsymbol{\zeta}|\sqrt{1 - |\boldsymbol{\zeta}|^2}}\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(1 - |\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{1}{2}} - r_0\boldsymbol{\zeta}|\boldsymbol{\zeta}|^{-1}\,,$$

za koje također vrijedi $\frac{\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})}{|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|} = \frac{\boldsymbol{\zeta}}{|\boldsymbol{\zeta}|}$. Štoviše, $\mathcal{J}$ je difeomorfizam, ali to će nam tek trebati u trećem poglavlju. Time smo dobili da je $(A[0, r_1, 1], \mathcal{J})$ kompaktifikacija prostora $\mathbf{R}^d_*$.

Kao što smo već ranije istaknuli, neka su

$$\Sigma_0 := \{0^{\mathsf{e}} : \mathsf{e} \in \mathrm{S}^{d-1}\} \qquad \text{i} \qquad \Sigma_\infty := \{\infty^{\mathsf{e}} : \mathsf{e} \in \mathrm{S}^{d-1}\},$$

te definirajmo $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d) := \mathbf{R}^d_* \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_\infty$ (vidi Sliku 1). Proširimo funkciju $\mathcal{J}$ (a time i $\mathcal{J}^{-1}$) na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ s $\mathcal{J}(0^{\mathsf{e}}) := r_1\mathsf{e}$ i $\mathcal{J}(\infty^{\mathsf{e}}) = \mathsf{e}$, odnosno $\mathcal{J}^{\to}(\Sigma_0) = A_0[0, r_1, 1]$ i $\mathcal{J}^{\to}(\Sigma_\infty) = A_\infty[0, r_1, 1]$. Sada imamo

$$\lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to 0}\Big|\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{J}(0^{\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}})\Big| = \lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to 0}\Big|\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) - r_1\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big| = \lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to 0}\Big|\frac{|\boldsymbol{\xi}| + r_0}{K(\boldsymbol{\xi})} - r_1\Big| = 0\,, \tag{1}$$

i

$$\begin{aligned}\lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to \infty}\Big|\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{J}(\infty^{\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}})\Big| &= \lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to \infty}\Big|\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big| = \lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to \infty}\Big|\frac{|\boldsymbol{\xi}| + r_0}{K(\boldsymbol{\xi})} - 1\Big| \\ &= \lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to \infty}\left|\frac{1 + \frac{r_0}{|\boldsymbol{\xi}|}}{\sqrt{\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^2} + (1 + \frac{r_0}{|\boldsymbol{\xi}|})^2}} - 1\right| = 0\,,\end{aligned} \tag{2}$$

te analogno za inverz

$$\lim_{|\boldsymbol{\zeta}|\to r_1}|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})| = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{|\boldsymbol{\zeta}|\to 1}|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})| = +\infty\,. \tag{3}$$

Definirajmo na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ preslikavanje $d_*(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) := d(\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_1), \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_2)) = |\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_2)|$, pri čemu je $d$ standardna euklidska metrika na $\mathbf{R}^d$ (odnosno u ovom slučaju njena restrikcija na $A[0, r_1, 1]$). Kako je $d$ metrika i $\mathcal{J}$ bijekcija, lako se pokaže da je $d_*$ metrika na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$, čime je $(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d), d_*)$ metrički prostor izomorfan prostoru $A[0, r_1, 1]$, a $\mathcal{J}$ je *izometrički izomorfizam*. Nadalje, kako je $\mathcal{J} : \mathbf{R}^d_* \longrightarrow A(0, r_1, 1)$ homeomorfizam, slijedi da su $d_*$ i $d$ topološki ekvivalentne na $\mathbf{R}^d_*$, odnosno topologija na $\mathbf{R}^d_*$ naslijeđena od $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ se podudara sa standarnom (euklidskom) topologijom. Za točke iz $\mathbf{R}^d_*$ je onda jasno da možemo promatrati i (standarne) kugle u euklidskoj metrici, a sad ćemo malo preciznije razmotriti okoline točaka na $\Sigma_0$ i $\Sigma_\infty$. Neka su

$$\begin{aligned}O(0^{\mathsf{e}}, \varepsilon) :=& \{r\mathsf{s} : \mathsf{s} \in \mathrm{S}^{d-1}\,,\ |\mathsf{s} - \mathsf{e}| < \varepsilon\,,\ 0 < r < \varepsilon\} \cup \{0^{\mathsf{s}} : |\mathsf{s} - \mathsf{e}| < \varepsilon\}\,,\\ O(\infty^{\mathsf{e}}, \varepsilon) :=& \{r\mathsf{s} : \mathsf{s} \in \mathrm{S}^{d-1}\,,\ |\mathsf{s} - \mathsf{e}| < \varepsilon\,,\ r > 1/\varepsilon\} \cup \{\infty^{\mathsf{s}} : |\mathsf{s} - \mathsf{e}| < \varepsilon\}\,.\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da za svaku točku $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma_0 \cup \Sigma_\infty$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon_0 > 0$ takav da $O(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon_0) \subseteq \mathrm{K}_{d_*}(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$ i $\mathrm{K}_{d_*}(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon_0) \subseteq O(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$, pri čemu je $\mathrm{K}_{d_*}(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$ kugla u metrici $d_*$ sa središtem u $\boldsymbol{\xi}$ i radijusa $\varepsilon$.

Prva inkluzija je izravna posljedica (1) i (2). Drugu inkluziju ćemo pokazati za $\boldsymbol{\xi} = 0^{\mathsf{e}} \in \Sigma_0$, dok za $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma_\infty$ dokaz ide analogno. Pokažimo da za svaki $\mathsf{s} \in \mathrm{S}^{d-1}$ i $r > 0$ imamo $d_*(0^{\mathsf{e}}, r\mathsf{s}) \geqslant d_*(0^{\mathsf{e}}, r\mathsf{e})$ i $d_*(0^{\mathsf{e}}, r\mathsf{s}) \geqslant d_*(0^{\mathsf{e}}, 0^{\mathsf{s}})$. Koristeći svojstvo euklidske metrike imamo

$$\begin{aligned}d_*(0^{\mathsf{e}}, r\mathsf{s})^2 =& \Big|r_1(\mathsf{e} - \mathsf{s}) - \Big(\frac{r + r_0}{K(r)} - r_1\Big)\mathsf{s}\Big|^2\\ =& d_*(0^{\mathsf{e}}, 0^{\mathsf{s}})^2 + d_*(0^{\mathsf{e}}, r\mathsf{e})^2 + 2r_1\Big(\frac{r + r_0}{K(r)} - r_1\Big)(1 - \mathsf{e}\cdot\mathsf{s})\,.\end{aligned}$$

Kako je posljednji član u gornjoj jednakosti nenegativan, dobivamo tražene ocjene.

Neka je $0^{\mathsf{s}} \in \mathrm{K}_{d_*}(0^{\mathsf{e}}, \varepsilon_0)$. Tada iz $|\mathsf{s}-\mathsf{e}| = \frac{1}{r_1} d_*(0^{\mathsf{s}}, 0^{\mathsf{e}}) < \frac{\varepsilon_0}{r_1}$ slijedi da možemo odabrati dovoljno malen $\varepsilon_0$ tako da $0^{\mathsf{s}} \in O(0^{\mathsf{e}}, \varepsilon)$. Koristeći prethodne nejednakosti, za $r\mathsf{s} \in \mathrm{K}_{d_*}(0^{\mathsf{e}}, \varepsilon_0)$ također imamo $|\mathsf{s}-\mathsf{e}| < \frac{\varepsilon_0}{r_1}$. Nadalje, iz $d_*(0^{\mathsf{e}}, r\mathsf{e}) \leqslant d_*(0^{\mathsf{e}}, r\mathsf{s}) < \varepsilon_0$, slijedi $|\mathcal{J}(r\mathsf{e})| < r_1 + \varepsilon_0$ pa po (3) za dovoljno mali $\varepsilon_0$ možemo proizvoljno smanjiti $r$. Da bismo (za dovoljno mali $\varepsilon_0$) konačno zaključili $\mathrm{K}_{d_*}(0^{\mathsf{e}}, \varepsilon_0) \subseteq O(0^{\mathsf{e}}, \varepsilon)$ potrebno je još samo pokazati da $\mathrm{K}_{d_*}(0^{\mathsf{e}}, \varepsilon_0) \cap \Sigma_\infty = \emptyset$. Za to je dovoljno uzeti $\varepsilon_0 < 1 - r_1$. Naime,

$$d_*(0^{\mathsf{e}}, \infty^{\mathsf{s}})^2 = r_1^2 |\mathsf{e}-\mathsf{s}|^2 + (1-r_1)^2 + 2r_1(1-r_1)(1-\mathsf{e}\cdot\mathsf{s}) \geqslant (1-r_1)^2 .$$

Time možemo za $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma_0 \cup \Sigma_\infty$ raditi sa skupovima $O(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$ umjesto kugala $\mathrm{K}_{d_*}(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$.

Kako će nam $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ biti prostor probnih funkcija u Fourierovom prostoru, u ostatku ovog odjeljka ćemo preciznije proučiti njegova svojstva. Prije svega će nas zanimati kada ćemo funkciju na $\mathbf{R}^d_*$ moći proširiti do neprekinute funkcije na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$.

**Lema 1.** *Za* $\psi : \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathbf{C}$ *sljedeće je ekvivalentno:*

*a)* $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$

*b)* $(\exists\, \tilde\psi \in \mathrm{C}(A[0, r_1, 1]))\ \psi = \tilde\psi \circ \mathcal{J}$

*c)* $\psi|_{\mathbf{R}^d_*} \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$, *te*

$$\lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to 0} |\psi(\boldsymbol{\xi}) - \psi(0^{\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}})| = 0 \qquad i \qquad \lim_{|\boldsymbol{\xi}|\to \infty} |\psi(\boldsymbol{\xi}) - \psi(\infty^{\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}})| = 0 .$$

Dem. Pokažimo da (a) povlači (b). Trebamo pokazati da je $\tilde\psi := \psi \circ \mathcal{J}^{-1}$ neprekinuta na $A[0, r_1, 1]$. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji odabran. Kako je $\psi$ jednoliko neprekinuta (neprekinuta funkcija na kompaktu), postoji $\delta > 0$ takav da za svake $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ iz $d_*(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) < \delta$ slijedi $|\psi(\boldsymbol{\xi}_1) - \psi(\boldsymbol{\xi}_2)| < \varepsilon$. Sada za proizvoljne $\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2 \in A[0, r_1, 1]$ takve da $|\boldsymbol{\zeta}_1 - \boldsymbol{\zeta}_2| < \delta$ slijedi $d_*(\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}_1), \mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}_2)) < \delta$, pa imamo

$$|\tilde\psi(\boldsymbol{\zeta}_1) - \tilde\psi(\boldsymbol{\zeta}_2)| = |\psi(\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}_1)) - \psi(\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}_2))| < \varepsilon ,$$

čime dobivamo da je $\tilde\psi$ jednoliko neprekinuta. Obrat ove tvrdnje slijedi analogno.

Dokažimo sad da su (a) i (c) ekvivalentni. Neka vrijedi (a). Već smo ranije komentirali da je tad $\psi|_{\mathbf{R}^d_*} \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$, dok drugi dio tvrdnje slijedi iz (1) i (2), te jednolike neprekinutosti funkcije $\psi$.

Obratno, neka vrijedi (c). Pokažimo najprije da su preslikavanja $\mathsf{e} \mapsto \psi(0^{\mathsf{e}})$ i $\mathsf{e} \mapsto \psi(\infty^{\mathsf{e}})$ neprekinuta na $\mathrm{S}^{d-1}$. Za $\varepsilon > 0$ izaberimo $r > 0$ tako da za $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant r$ imamo $|\psi(\boldsymbol{\xi}) - \psi(0^{\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}})| < \frac{\varepsilon}{3}$. Za čvrst $\mathsf{e} \in \mathrm{S}^{d-1}$, neka je $\delta > 0$ takav da za svaki $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*$ iz $d_*(r\mathsf{e}, \boldsymbol{\xi}) \leqslant \delta$ slijedi $|\psi(r\mathsf{e}) - \psi(\boldsymbol{\xi})| < \frac{\varepsilon}{3}$. Neka je sad $\mathsf{s} \in \mathrm{S}^{d-1}$ takav da $|\mathsf{e}-\mathsf{s}| < \frac{rK(r)}{r+r_0}\delta$. Iz toga slijedi $d_*(r\mathsf{e}, r\mathsf{s}) = |\mathcal{J}(r\mathsf{e}) - \mathcal{J}(r\mathsf{s})| < \delta$, pa konačno imamo

$$|\psi(0^{\mathsf{e}_1}) - \psi(0^{\mathsf{e}_2})| \leqslant |\psi(0^{\mathsf{e}_1}) - \psi(r\mathsf{e}_1)| + |\psi(r\mathsf{e}_1) - \psi(r\mathsf{e}_2)| + |\psi(r\mathsf{e}_2) - \psi(0^{\mathsf{e}_2})| < \varepsilon .$$

Tvrdnja analogno vrijedi i za $\mathsf{e} \mapsto \psi(\infty^{\mathsf{e}})$.

Pokažimo da je $\psi$ neprekinuta u $0^{\mathsf{e}}$ za proizvoljni $\mathsf{e} \in \mathrm{S}^{d-1}$, dok će analogno vrijediti i za $\infty^{\mathsf{e}}$. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji odabran. Po ranijem razmatranju, dovoljno je pokazati da postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $\boldsymbol{\xi} = r\mathsf{s} \in O(0^{\mathsf{e}}, \delta)$ slijedi $|\psi(0^{\mathsf{e}}) - \psi(r\mathsf{s})| < \varepsilon$, što jednostavno dobivamo primjenom pretpostavke i neprekinutosti funkcije $\mathsf{e} \mapsto \psi(0^{\mathsf{e}})$ na ocjeni

$$|\psi(0^{\mathsf{e}}) - \psi(r\mathsf{s})| \leqslant |\psi(0^{\mathsf{e}}) - \psi(0^{\mathsf{s}})| + |\psi(0^{\mathsf{s}}) - \psi(r\mathsf{s})| .$$

**Q.E.D.**

Pomoću prethodne leme možemo izvesti kriterij uz koji ćemo neprekinutu funkciju na $\mathbf{R}^d_*$ moći proširiti do neprekinute funkcije na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Naime, neka je $\psi \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$ takva da postoje funkcije $\psi_0, \psi_\infty$ na $\mathrm{S}^{d-1}$ za koje vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\psi(\boldsymbol{\xi}) - \psi_0\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \to 0\,, \quad |\boldsymbol{\xi}| \to 0\,,\\
&\psi(\boldsymbol{\xi}) - \psi_\infty\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \to 0\,, \quad |\boldsymbol{\xi}| \to \infty\,.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Tada je proširenje funkcije $\psi$ (koristimo istu oznaku) dano s $\psi(0^{\mathsf{e}}) = \psi_0(\mathsf{e})$ i $\psi(\infty^{\mathsf{e}}) = \psi_\infty(\mathsf{e})$ po prethodnoj lemi iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Štoviše, funkcije $\psi_0, \psi_\infty$ su nužno neprekinute na $\mathrm{S}^{d-1}$.

Nadalje, po prethodnoj lemi vrijedi i obrat prethodnog razmatranja pa ćemo u daljnjem tekstu za proizvoljnu funkciju $\psi$ iz prostora $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ s indeksima 0 ($\psi_0$) i $\infty$ ($\psi_\infty$) označavati funkcije s gornjim svojstvom. Opskrbljen $\mathrm{L}^\infty$ normom, $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ postaje separabilan Banachov prostor, pa i Banachova algebra uz standarno (točkovno) množenje funkcija.

Za $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, $\psi - \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}$ je konstanta (s vrijednosti nula) na $\Sigma_0$, pa po neprekinutosti može biti definirana u ishodištu, odnosno $(\psi - \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi})\big|_{\mathbf{R}^d_*}$ dodefiniramo u ishodištu s vrijednosti nula čime dobivamo neprekinutu funkciju na cijelom $\mathbf{R}^d$. Dakle, možemo reći da je $\psi - \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}$ sadržano u $\mathrm{C}_{ub}(\mathbf{R}^d)$ (prostor omeđenih jednoliko neprekinutih funkcija na $\mathbf{R}^d$). Naime, i $\psi$ i $\psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}$ su omeđene, dok izvan dovoljno velikog kompakta razlika može biti aproksimirana s $(\psi_\infty - \psi_0) \circ \boldsymbol{\pi}$. Štoviše, ako je $\psi_0$ konstanta tada izravno imamo $\psi \in \mathrm{C}_{ub}(\mathbf{R}^d)$.

Prostor $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ je neprekinuto uložen u prostor $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Naime, funkcija $\psi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ je neprekinuta u ishodištu i teži nuli u beskonačnosti, pa za konstantne funkcije $\psi_0 \equiv \psi(0)$ i $\psi_\infty \equiv 0$, $\psi$ zadovoljava gornje uvjete. Još je jednostavnije pokazati $\boldsymbol{\pi}^*(\mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})) := \{\psi \circ \boldsymbol{\pi} \;:\; \psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})\} \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, uz $\psi_0 := \psi$ i $\psi_\infty := \psi$. Ovu diskusiju zaokružujemo u sljedećoj lemi.

**Lema 2.**
*i)* $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d) \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, *i*
*ii)* $\{\psi \circ \boldsymbol{\pi} \;:\; \psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})\} \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. ∎

Kako je $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \hookrightarrow \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, to slijedi da prostor $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ obuhvaća prostore probnih funkcija (u Fourierovom prostoru) i za H-mjere i za poluklasične mjere

Nadalje, prostor $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ naravno nije u potpunosti iscrpljen funkcijama iz prethodne leme, što se može i vidjeti u sljedećem primjeru gdje promatramo funkcije koje će biti od posebnog značaja kod izvođenja lokalizacijskog svojstva jednoskalnih H-mjera.

**Primjer 1.** Neka su $l, m \in \mathbf{N}_0$, $l \leqslant m$, i definirajmo $\psi^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m}$ za $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$, $l \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$. Slučajevi $|\boldsymbol{\alpha}| = l$ i $|\boldsymbol{\alpha}| = m$ su posebno zanimljivi jer nisu nužno obuhvaćeni prethodnom lemom. Pokažimo da $\psi^{\boldsymbol{\alpha}}$ možemo proširiti do funkcije iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

Očito je $\psi^{\boldsymbol{\alpha}}$ neprekinuta na $\mathbf{R}^d_*$. Za $l = m$, $\psi^{\boldsymbol{\alpha}}$ je homogena reda nula, pa po Lemi 2 slijedi tvrdnja u ovom slučaju. S druge strane, za $l \leqslant m - 1$ trebamo napraviti analizu u ovisnosti o $\boldsymbol{\alpha}$. Za $|\boldsymbol{\alpha}| = l$ imamo $\psi_0^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l}$, dok u slučaju $|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant l + 1$, $\psi^{\boldsymbol{\alpha}}$ teži nuli u ishodištu, što povlači $\psi_0^{\boldsymbol{\alpha}} \equiv 0$. Na $\Sigma_\infty$ imamo obratnu situaciju: za $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m - 1$, $\psi^{\boldsymbol{\alpha}}$ teži nuli u beskonačnosti, što daje $\psi_\infty^{\boldsymbol{\alpha}} \equiv 0$, dok $\psi_\infty^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^m}$ za $|\boldsymbol{\alpha}| = m$. ∎

## 2. Pripremne tvrdnje

Dokaz egzistencije jednoskalnih H-mjera zasniva se, kao i kod H-mjera, na inačici Prve komutacijske leme, no prije samih rezultata, podsjetimo se definicija dvaju često korištenih operatora. Za $\psi \in \mathrm{C}_{ub}(\mathbf{R}^d)$, kao i za $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, definirajmo *Fourierov množitelj*:

$$\mathcal{A}_\psi : \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,, \quad \mathcal{A}_\psi \mathsf{u} := (\psi \hat{\mathsf{u}})^\vee\,.$$

Definicija je opravdana jer je $\psi$ u oba slučaja iz $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$. Nadalje, za $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ s

$$B_\varphi : \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,, \quad B_\varphi \mathsf{u} := \varphi \mathsf{u}\,,$$

označavamo *operator množenja* s $\varphi$. Lako se može pokazati da su dani operatori omeđeni na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, s normom jednakom $\mathrm{L}^\infty$ normi od $\psi$ za $\mathcal{A}_\psi$, odnosno $\varphi$ za $B_\varphi$.

U [53, Lemma 32.4] je pokazano da niz razlika operatora pridruženih istom simbolu, ali u različitim kvantizacijama, jednoliko konvergira k nuloperatoru:

**Lema 3.** *Neka su zadane $\psi \in \mathrm{C}_{ub}(\mathbf{R}^d)$ i $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, te $\omega_n \to 0^+$. Označimo s $\psi_n(\boldsymbol{\xi}) := \psi(\omega_n \boldsymbol{\xi})$ za $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$. Tada komutator $C_n := [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_n}] = B_\varphi \mathcal{A}_{\psi_n} - \mathcal{A}_{\psi_n} B_\varphi$ konvergira nuli u operatorskoj normi na $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$.* ∎

U četvrtom poglavlju će nam trebati prethodna lema u nešto drugačijem obliku, pa je u Lemi IV.2 pokazano njeno poopćenje.

**Napomena 3.** Koristeći prethodnu lemu možemo dobiti rezultat postojanja poluklasičnih mjera dan Teoremom I.6, ne samo za (beskonačno) glatke funkcije, već za (samo) neprekinute funkcije u fizikalnom i Fouirerovom prostoru [cf. 54]. ∎

U usporedbi s klasičnom Prvom komutacijskom lemom (Lema I.1), gdje je dobiveno da je komutator samo kompaktan operator, ovdje imamo jednoliku konvergenciju k nuloperatoru, tj. u operatorskoj normi. Ovakav rezultat omogućuje oslabljenje pretpostavke da niz $(\mathsf{u}_n)$ slabo konvergira nuli (potrebne u dokazu egzistencije H-mjera), dopuštajući proizvoljan limes ako za prostor probnih funkcija u Fourierovom prostoru uzmemo (podskup) $\mathrm{C}_{ub}(\mathbf{R}^d)$. Nažalost, funkcije iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ nisu neprekinute u ishodištu, pa time niti sadržane u $\mathrm{C}_{ub}(\mathbf{R}^d)$, stoga ne možemo očekivati da ćemo kod postojanja jednoskalnih H-mjera moći izostaviti pretpostavku da je slabi limes promatranog niza nula.

Inačicu prethodne leme, prikladnu za funkcije iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, koju ćemo koristiti u dokazu postojanja jednoskalnih H-mjera, dajemo sljedećom lemom:

**Lema 4.** *Neka su zadane $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ i $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, te $\omega_n \to 0^+$. Označimo s $\psi_n(\boldsymbol{\xi}) := \psi(\omega_n \boldsymbol{\xi})$ za $\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Tada komutator možemo zapisati kao zbroj*

$$C_n := [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_n}] = \tilde{C}_n + K\,,$$

*pri čemu je $K$ kompaktan operator na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, dok $\tilde{C}_n \longrightarrow 0$ u operatorskoj normi na $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$.*

Dem. Budući da je $\psi \mapsto \mathcal{A}_\psi$ linearano po $\psi$, imamo

$$\mathcal{A}_{\psi_n} = \mathcal{A}_{\psi_n - \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}} + \mathcal{A}_{\psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}}\,,$$

iz čega slijedi da je $C_n = [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_n - \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}}] + [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}}] =: \tilde{C}_n + K$. Kako je $\psi - \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi} \in \mathrm{C}_{ub}(\mathbf{R}^d)$, to primjenom Leme 3 dobivamo da $\tilde{C}_n \longrightarrow 0$, dok je $K = [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}}]$ kompaktan po klasičnoj Tartarovoj Prvoj komutacijskoj lemi [52, Lemma 1.7].

**Q.E.D.**

U [53, Chapter 32] i [54] može se pronaći dokaz postojanja jednoskalnih H-mjera korištenjem pripadnih H-mjera u jednoj dimenziji više u slučaju slabo konvergentnih nizova u $L^2$ (za više detalja pogledati [19]). U istim referencama može se pronaći i ideja alternativnog dokaza temeljenog na Tartarovom izvornom dokazu [52], čiji su glavni elementi komutacijska lema, te prikladna inačica Schwartzovog teorema o jezgri. Ovdje ćemo dati detaljni raspis tog alternativnog dokaza sa svim potrebnim pomoćnim rezultatima, te ujedno i poopćiti postojeći rezultat postojanja na lokalne prostore.

S prethodnom lemom smo dobili komutacijsku lemu potrebnu za dokaz postojanja jednoskalnih H-mjera pa je još samo preostalo komentirati odgovarajući teorem o jezgri. Kako su Radonove mjere funkcionali na neprekinutim funkcijama, prostor $K_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ ne trebamo dodatno opskrbiti diferencijalnom strukturom da bismo ih mogli definirati. Međutim, klasični Schwartzov teorem o jezgri je iskazan za distribucije za čije definiranje nam, naravno, treba diferencijalna struktura, što u ovom trenutku želimo izbjeći (kasnije, kod uvođenja jednoskalnih H-distribucija, to naravno neće više biti moguće). Iz tog razloga ćemo prilagoditi Tartarov rezultat dan u [52, Lemma 1.10], temeljen na teoriji (integralnih) Hilbert-Schmidtovih operatora. Rezultat s općenitijm pretpostavkama od onih koje ćemo trebati ovdje može se pronaći u [48, Lemma 3.1].

Najprije ćemo pokazati rezultat za jedinične kugle u euklidskom prostoru, a potom ćemo, koristeći particiju jedinice, rezultat poopćiti na proizvoljne topološke mnogostrukosti.

Prije samog dokaza istaknimo da se operator oblika $(Kf)(\mathbf{x}) = \int k(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ naziva *integralni operator* s *jezgrom* $k$.

**Lema 5.** *Neka su $X$ i $Y$ otvorene jedinične kugle u euklidskom prostoru (dimenzije $d$ i $d'$), te neka je $B$ nenegativna neprekinuta bilinearna forma na $C_c(X)\times C_c(Y)$. Tada postoji jedinstvena Radonova mjera $\mu\in\mathcal{M}(X\times Y)$ takva da*

$$(\forall\, f\in C_c(X))(\forall\, g\in C_c(Y))\quad B(f,g)=\langle\mu, f\boxtimes g\rangle\ .$$

*Nadalje, gornje i dalje vrijedi ako $C_c$ zamijenimo s $C_0$, te $\mathcal{M}$ s $\mathcal{M}_b$ (prostorom omeđenih Radonovih mjera, tj. dualom Banachovog prostora $C_0$).*

Dem. **I.** *Friedrichsovi izglađivači i ugniježđene kugle*

Prema Tartarovoj ideji, definirajmo standarne Friedrichsove izglađivače s

$$(M_n f)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^d} m_n(\mathbf{x},\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'\ ,$$

pri čemu je jezgra dana s $m_n(\mathbf{x},\mathbf{x}') := \rho_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$, gdje je $\rho_n(\mathbf{x}) := n^d\rho(n\mathbf{x})$, te

$$\rho(\mathbf{x}) := C\chi_{K(0,1)}(\mathbf{x})e^{-\frac{1}{1-|\mathbf{x}|^2}}\ ,$$

s konstantom $C$ izabranom tako da $\int\rho=\int\rho_n=1$ ($C$ ovisi o dimenziji $d$).

Jezgre $m_n$ su nenegativne, neprekinute, nošene u $\{(\mathbf{x},\mathbf{x}')\in X\times X : |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\leqslant 1/n\}$, te izglađujuće u smislu da $M_n$ preslikava Lebesgueove funkcije u glatke [23, Theorem 8.14] (podsjetimo se da identificiramo funkcije definirane na podskupu $\mathbf{R}^d$ s njihovim proširenjima nulom na cijeli $\mathbf{R}^d$).

Za otvorenu jediničnu kuglu $X = K(0,1)$ u $\mathbf{R}^d$ postoji rastući niz kompakata $K_m$ sadržanih u njoj koji je prekrivaju (unija je cijeli $X$), te $K_m\subseteq \operatorname{Int} K_{m+1}$. Na primjer, uzmimo zatvorene kugle $K_m := \mathrm{K}[0, 1 - 1/m]$. Podsjetimo se da je $\mathrm{C}_c(X)$ strogi induktivni limes Banachovih prostora $\mathrm{C}_{K_m}(X) := \Big\{\varphi \in \mathrm{C}_c(X) : \operatorname{supp}\varphi \subseteq K_m\Big\}$ [45, Chapter 12].

Analogno možemo ponoviti gornju konstrukciju i na $Y$, te dobivene operatore označimo s $N_n$, jezgre s $n_n$, a pripadni niz kompakata s $L_m$ (također koristimo $\rho'_n, C'$ umjesto $\rho_n, C$).

Neprekinutost bilinearne forme $B$, kako je $\mathrm{C}_c$ strogi induktivni limes, može biti izražen preko neprekinutosti pripadnih restrikcija, tj. s

$$(5)\qquad \begin{aligned}&(\forall\, m \in \mathbf{N})(\exists\, C_m > 0)(\forall\, f \in \mathrm{C}_{K_m}(X))(\forall\, g \in \mathrm{C}_{L_m}(Y))\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad |B(f,g)| \leqslant C_m \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(K_m)} \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(L_m)}\,.\end{aligned}$$

**II.** *Konstrukcija aproksimirajućih Hilbert-Schmidtovih jezgri*

Neka je $m \geqslant 2$ proizvoljan, ali čvrst. Definirajmo bilinearan funkcional $B_n^m : \mathrm{L}^2(K_m) \times \mathrm{L}^2(L_m) \longrightarrow \mathbf{C}$ s $B_n^m(f,g) := B(M_n f, N_n g)$. Primijetimo da je za $\operatorname{supp} f \subseteq K_m$ nosač funkcije $M_n f$ sadržan u kugli $\mathrm{K}[0, 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}]$ pa se za $n > m(m+1)$ nalazi u skupu $\mathrm{C}_{K_{m+1}}(X)$, te analogno za $N_n g$. Nadalje, vrijedi sljedeća ocjena (s $\omega_d$ označavamo volumen $d$-dimenzionalne jedinične kugle):

$$\begin{aligned}|B_n^m(f,g)| &= |B(M_n f, N_n g)|\\ &\leqslant C_{m+1} \|M_n f\|_{\mathrm{L}^\infty(K_{m+1})} \|N_n g\|_{\mathrm{L}^\infty(L_{m+1})}\\ &\leqslant C_{m+1} \|\rho_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \|f\|_{\mathrm{L}^2(K_m)} \|\rho'_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d'})} \|g\|_{\mathrm{L}^2(L_m)}\\ &\leqslant C_{m+1} C C' e^{-2} \sqrt{\omega_d \omega_{d'}}\, n^{\frac{d+d'}{2}} \|f\|_{\mathrm{L}^2(K_m)} \|g\|_{\mathrm{L}^2(L_m)}\,,\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj nejednakosti iskoristili Youngovu nejednakost [23, Proposition 8.9], te ocjenu

$$\int_{\mathbf{R}^d} \rho_n^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant C^2 e^{-2} n^{2d} \int_{\mathrm{K}[0, \frac{1}{n}]} d\mathbf{x} = C^2 e^{-2} \omega_d n^d\,.$$

Time smo dobili da je za svaki (dovoljno veliki) $n$ bilinearna forma $B_n^m$ neprekinuta na $\mathrm{L}^2(K_m) \times \mathrm{L}^2(L_m)$. Dakle, standarnom konstrukcijom [34, Section V.2.1] je možemo reprezentirati neprekinutim linearnim operatorom $T_n^m \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(K_m); \mathrm{L}^2(L_m))$ u smislu da

$$\langle \overline{T_n^m f}, g \rangle = B_n^m(f,g) = B(M_n f, N_n g)\,.$$

Naravno, $T_n^m$ nije nužno jednoliko omeđen s obzirom na $n$.

Ako restringiramo operatore $M_n$ na $\mathrm{L}^2(K_m)$, na način da također restringiramo dobivenu sliku funkcije na $K_m$, dobiveni operatori $M_n^m$ su i dalje integralni operatori s jezgrama $m_n^m$ jednakim restrikcijama $m_n$ na $K_m \times K_m$, pa iz $m_n^m \in \mathrm{L}^2(K_m \times K_m)$ slijedi da je $M_n^m$ Hilbert-Schmidtov operator [12, Proposition 12.1.1] (reference za standarne rezultate teorije Hilbert-Schmidtovih operatora mogu biti [12, Chapter 12] i [34, Section V.2.4]). Kako su $T_n^m$ omeđeni operatori, a Hilbert-Schmidtovi operatori čine ideal u prostoru omeđenih operatora [12, Proposition 12.1.2], kompozicije $T_n^m M_n^m$ su Hilbert-Schmidtovi operatori, ali s $\mathrm{L}^2(K_m)$ u $\mathrm{L}^2(L_m)$. Po [12, Theorem 12.6.2] je operator $T_n^m M_n^m$ i dalje integralni operator, pa pripadne jezgre označimo s $k_n^m \in \mathrm{L}^2(K_m \times L_m)$. Upravo će nam slabi limes jezgara $k_n^m$ (do na neke tehničke detalje kojima se bavimo u nastavku dokaza) odgovarati mjeri iz iskaza teorema.

**III.** *Nenegativnost i omeđenost aproksimirajućih Hilbert-Schmidtovih jezgara*

Kako su $M_n$ i $N_n$ nenegativni operatori, za nenegativne funkcije $f$ i $g$ imamo

$$\langle\overline{T_n^m f}, g\rangle = B(M_n f, N_n g) \geqslant 0 \ ,$$

pa su i $T_n^m$ nenegativni, a time i $T_n^m M_n^m$, što dodatno za jezgre daje $k_n^m \geqslant 0$.

S druge strane, za konstante 1 na kompaktima $K_m$ i $L_m$ imamo:

$$\begin{aligned}0 \leqslant \langle T_n^m M_n^m \chi_{K_m}, \chi_{L_m}\rangle &= B(M_n M_n^m \chi_{K_m}, N_n \chi_{L_m}) \\ &= |B(M_n M_n^m \chi_{K_m}, N_n \chi_{L_m})| \\ &\leqslant C_{m+1} \|M_n M_n^m \chi_{K_m}\|_{\mathrm{L}^\infty(X)} \|N_n \chi_{L_m}\|_{\mathrm{L}^\infty(Y)} \leqslant C_{m+1} \ .\end{aligned}$$

Obrazložimo posljednju nejednakost, odnosno $\|M_n M_n^m \chi_{K_m}\|_{\mathrm{L}^\infty(X)} = \|N_n \chi_{L_m}\|_{\mathrm{L}^\infty(Y)} = 1$. Kako $f \equiv 1$ na $K_m$ povlači (uz $n > m(m+1)$) $M_n f \equiv 1$ na $K_{m-1}$, primjetimo da je $M_n^m \chi_{K_m}$ identički jednaka 1 na $K_{m-1}$, dok je nošena u $K_m$. Nadalje, $M_n M_n^m \chi_{K_m}$ je identički 1 na $K_{m-2}$ (na ovom mjestu zapravo trebamo $m \geqslant 4$), i nošena u $K_{m+1}$. Analogno, za $N_n \chi_{L_m}$ imamo da je jednaka 1 na $L_{m-1}$, a nošena u $L_{m+1}$. Dakle, obje $\mathrm{L}^\infty$ norme u gornjoj ocjeni su jednake 1. Ovaj zaključak smo također mogli dobiti iz $\|M_n f\|_{\mathrm{L}^\infty(X)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(X)}$ što je jednostavna posljedica Youngove nejednakosti.

Iz gornje ocjene zapravo dobivamo da su jezgre $k_n^m$ jednoliko omeđene po $n$ u $\mathrm{L}^1$ normi: $\|k_n^m\|_{\mathrm{L}^1(K_m \times L_m)} \leqslant C_{m+1}$. Naravno, nenegativnost jezgara $k_n^m$ je ovdje bila ključna jer inače ne bismo imali $\|k_n^m\|_{\mathrm{L}^1(K_m \times L_m)} = \langle T_n^m M_n^m \chi_{K_m}, \chi_{L_m}\rangle$, pa time ni dobivenu omeđenost.

**IV.** *Prelazak na limes*

Po neprekinutosti bilinearne forme $B$, za dovoljno veliki $m$ dobivamo

$$B(f, g) = \lim_n B(M_n M_n^m f, N_n g) = \lim_n \langle\overline{T_n^m M_n^m f}, g\rangle = \lim_n \langle k_n^m, f \boxtimes g\rangle \ . \tag{6}$$

Naime, neka su $f \in \mathrm{C}_c(X)$ i $g \in \mathrm{C}_c(Y)$. Naravno, za dovoljno veliki $m$ imamo $\operatorname{supp} f \subseteq K_{m-1}$ i $\operatorname{supp} g \subseteq L_{m-1}$, pa posebno i $f \in \mathrm{C}_{K_{m-1}}(X)$, $g \in \mathrm{C}_{L_{m-1}}(Y)$. Po standarnim svojstvima izglađivača, posljednje izravno povlači da $N_n g \longrightarrow g$ u prostoru $\mathrm{C}_{L_m}(Y)$ ($\operatorname{supp} g \subseteq L_{m-1}$ nam je trebalo da znamo da je konvergencija u prostoru $\mathrm{C}_{L_m}(Y)$, odnosno da nosač aproksimirajućeg niza $(N_n g)$ ostaje u $L_m$). Još je preostalo ispitati konvergenciju niza funkcija $(M_n M_n^m f)_n$. Uočimo najprije da $\operatorname{supp} M_n^m f \subseteq K_m$ pa imamo $M_n^m f = M_n f \longrightarrow f$ u $\mathrm{C}_{K_m}(X)$, odnosno $h_n := M_n^m f - f \longrightarrow 0$ u istom prostoru. Kako $M_n f \longrightarrow f$ u $\mathrm{C}_{K_m}(X)$, dovoljno je pokazati da $M_n M_n^m f - M_n = M_n h_n$ konvergira jednoliko nuli na $K_m$, što slijedi iz ocjene

$$|(M_n h_n)(\mathbf{x})| \leqslant \int_{K_m} \rho_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |h_n(\mathbf{y})| d\mathbf{y} < \varepsilon \int_{K_m} \rho_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \leqslant \varepsilon \ ,$$

za $n \geqslant n_0$ uz $\sup_{\mathbf{x} \in X} |h_n(\mathbf{x})| < \varepsilon$, čime zaključujemo dokaz izraza (6).

Kako je niz $(k_n^m)_{n \in \mathbf{N}}$ omeđen u $\mathrm{L}^1(K_{m-1} \times L_{m-1})$ s $C_{m+1}$ (zapravo, ovdje radimo s restrikcijama od $k_n^m$ na $K_{m-1} \times L_{m-1}$, bez posebnog naglašavanja u notaciji; ovo restringiranje je nužno da bismo mogli koristiti (6)), to je slabo $*$ pretkompaktan u prostoru omeđenih Radonovih mjera (na $K_{m-1} \times L_{m-1}$). Kako svako gomilišta zadovoljava (6), podudaraju se na tenzorskim produktima, pa po gustoći i na $\mathrm{C}(K_{m-1} \times L_{m-1})$. Time imamo jedinstvenost gomilišta, odnosno da cijeli niz $k_n^m$ konvergira (po $n$) k nenegativnoj Radonovoj mjeri; označimo je s $\mu^m$.

Naravno, opet po (6), imamo da se $\mu^{m+1}$ i $\mu^m$ podudaraju na $\mathrm{C}(K_{m-1} \times L_{m-1})$. Dakle, s formulom

$$\langle \mu, \Phi \rangle := \langle \mu^m, \Phi \rangle \ ,$$

pri čemu je $\Phi \in \mathrm{C}_c(X \times Y)$, te $m$ takav da $\operatorname{supp}\Phi \subseteq K_{m-1} \times L_{m-1}$, dobro je definirano preslikavanje $\mu$ na $\mathrm{C}_c(X \times Y)$. Štoviše, nije teško pokazati da je $\mu$ nenegativna Radonova mjera na $X \times Y$, te da daje reprezentaciju bilinearne forme $B$ iz iskaza.

Nadalje, ako je $B$ nenegativna neprekinuta bilinearna forma na $\mathrm{C}_0(X) \times \mathrm{C}_0(Y)$, niz jezgara $(k_n^m)$ jednoliko je omeđen u prostoru $\mathrm{L}^1(K_m \times L_m)$ i po $n$ i po $m$ (jer je u ovom slučaju jedna konstanta $C_0$ dobra za svaki $m$ u (5)), pa je i $(\mu^m)$ također jednoliko omeđen po $m$, što daje da je $\mu$ omeđena Radonova mjera.

**Q.E.D.**

Tvrdnju prethodne leme jednostavno možemo poopćiti na slučaj kad su $X$ i/ili $Y$ jedinične polukugle. Provedimo postupak za $B$ kao u iskazu prethodne leme u slučaju kad je $X = \mathrm{K}(\mathsf{0}, 1) \subseteq \mathbf{R}^d$ jedinična kugla, a $Y = \mathrm{K}^+(\mathsf{0}, 1) := \mathrm{K}(\mathsf{0}, 1) \cap \{y^{d'} \geqslant 0\} \subseteq \mathbf{R}^{d'}$ jedinična polukugla.

Definirajmo bilinearnu formu $\tilde{B} : \mathrm{C}_c(X) \times \mathrm{C}_c(\tilde{Y}) \longrightarrow \mathbf{C}$, gdje je $\tilde{Y} = \mathrm{K}(\mathsf{0}, 1) \subseteq \mathbf{R}^{d'}$, s $\tilde{B}(f, g) := B(f, g_{|_Y})$. Za $g \in \mathrm{C}_c(\tilde{Y})$ je očito $g_{|_Y} \in \mathrm{C}_c(Y)$ pa je prethodna definicija valjana.

Za proizvoljne kompakte $K \subseteq X$ i $\tilde{L} \subseteq \tilde{Y}$, te funkcije $f \in \mathrm{C}_K(X)$ i $g \in \mathrm{C}_{\tilde{L}}(\tilde{Y})$ imamo

$$\begin{aligned} |\tilde{B}(f, g)| = |B(f, g_{|_Y})| &\leqslant C_{K \times (\tilde{L} \cap Y)} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(K)} \|g_{|_Y}\|_{\mathrm{L}^\infty(\tilde{L} \cap Y)} \\ &\leqslant C_{K \times (\tilde{L} \cap Y)} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(K)} \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\tilde{L})} \ , \end{aligned}$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti koristili neprekinutost bilinearne forme $B$, dok je druga nejednakost posljedica jednostavne činjenice da je supremum funkcije na manjem skupu manji od supremuma te iste funkcije na većem skupu. Time smo dobili da je $\tilde{B}$ neprekinuta na $\mathrm{C}_c(X) \times \mathrm{C}_c(\tilde{Y})$. Kako iz $g \geqslant 0$ slijedi $g_{|_Y} \geqslant 0$, nenegativnost bilinearne forme $\tilde{B}$ direktno slijedi iz nenegativnosti forme $B$.

Iz prethodne leme sada slijedi da postoji jedinstvena Radonova mjera $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(X \times \tilde{Y})$ takva da

$$(\forall\, f \in \mathrm{C}_c(X))(\forall\, g \in \mathrm{C}_c(\tilde{Y})) \qquad \tilde{B}(f, g) = \langle \tilde{\mu}, f \boxtimes g \rangle \ .$$

Mjeru $\tilde{\mu}$ trebamo restringirati na $X \times Y$ i onda pokazati da uistinu predstavlja reprezentaciju bilinearne forme $B$. Kako je $\tilde{\mu}$ nenegativna, možemo iskoristiti Rieszov teorem o reprezentaciji [11, Teorem IV.20] i u daljnjem računu promatrati $\tilde{\mu}$ kao mjeru na Borelovoj $\sigma$-algebri, međutim, ovdje ćemo i dalje raditi s $\tilde{\mu}$ kao neprekinutim funkcionalom.

Za $\Phi \in \mathrm{C}_c(X \times Y)$ neka je $\tilde{\Phi}$ njezino proširenje po refleksivnosti na $X \times \tilde{Y}$, tj.

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & , \quad \mathbf{y} \in \mathrm{K}^+(\mathsf{0}, 1) \\ \Phi(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) & , \quad \text{inače} \end{cases} \ ,$$

pri čemu je $\tilde{\mathbf{y}} = (y^1, y^2, \ldots, y^{d'-1}, -y^{d'})$ refleksija točke $\mathbf{y}$ s obzirom na $\{y^{d'} = 0\}$. Sada za $\Phi \in \mathrm{C}_c(X \times Y)$ definiramo

$$\langle \mu, \Phi \rangle := \langle \tilde{\mu}, \tilde{\Phi} \rangle \ ,$$

što je očito linearno preslikavanje. Štoviše, iz

$$|\langle \mu, \Phi\rangle| \leqslant |\langle \tilde{\mu}, \tilde{\Phi}\rangle| \leqslant C_{\operatorname{supp}\tilde{\Phi}} \|\tilde{\Phi}\|_{\mathrm{L}^\infty(X\times\tilde{Y})} = C_{\operatorname{supp}\tilde{\Phi}} \|\Phi\|_{\mathrm{L}^\infty(X\times Y)} ,$$

slijedi da je $\mu \in \mathcal{M}(X \times Y)$, pri čemu uočimo da $\operatorname{supp}\tilde{\Phi}$ (pa onda i $C_{\operatorname{supp}\tilde{\Phi}}$) ovisi samo o skupu $\operatorname{supp}\Phi$ u smislu da je $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \operatorname{supp}\tilde{\Phi}$ ako i samo ako $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \operatorname{supp}\Phi$ ili $(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{y}}) \in \operatorname{supp}\Phi$. Za proizvoljne kompakte $K \subseteq X$ i $L \subseteq Y$, te funkcije $f \in \mathrm{C}_K(X)$ i $g \in \mathrm{C}_L(Y)$ konačno imamo

$$B(f,g) = \tilde{B}(f,\tilde{g}) = \langle \tilde{\mu}, f \boxtimes \tilde{g}\rangle = \langle \mu, f \boxtimes g\rangle ,$$

pri čemu je $\tilde{g} \in \mathrm{C}_{\tilde{L}}(\tilde{Y})$ proširenje funkcije $g$ po refleksivnosti za koje očito vrijedi $\tilde{g}_{|_Y} = g$.

Ukoliko su i $X$ i $Y$ polukugle, koristeći samo refleksiju po $\mathbf{x}$ lako se svedemo na prethodni slučaj.

Koristeći standaran račun na mnogostrukostima (u sljedećem računu ćemo se držati [35, Chapter XXII] gdje se mogu pronaći osnovni rezultati o topološkim i diferencijabilnim mnogostrukostima s ili bez ruba), pomoću odgovarajućih karata možemo problem s mnogostrukosti svesti na jedinične kugle ili, ukoliko je mnogostrukost s rubom, polukugle, pa time izvesti teorem o jezgri dan prethodnom lemom za općenite topološke mnogostrukosti $X$ i $Y$, što ćemo i pokazati sljedećom lemom. Istaknimo još jednom da će nam kod konstrukcije jednoskalnih H-mjera u idućeg odjeljku biti potreban rezultat za bilinearne forme na $\mathrm{C}_c(\Omega)\times\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Dok otvoreni podskup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ možemo shvatiti kao topološku mnogostrukost bez ruba, $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ predstavlja topološku mnogostrukost s rubom pa je to razlog zašto ne možemo izbjeći polukugle.

**Lema 6.** *Neka su $X$ i $Y$ dvije Hausdorffove topološke mnogostrukosti koje zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti (s ili bez ruba), i neka je $B$ nenegativna neprekinuta bilinearna forma na $\mathrm{C}_c(X)\times\mathrm{C}_c(Y)$. Tada postoji jedinstvena Radonova mjera $\mu \in \mathcal{M}(X\times Y)$ takva da*

$$(\forall\, f \in \mathrm{C}_c(X))(\forall\, g \in \mathrm{C}_c(Y)) \quad B(f,g) = \langle \mu, f \boxtimes g\rangle \ .$$

Dem. Po [35, Theorem 4.1, p. 537] (te komentaru za mnogostrukosti s rubom na 543. stranici u istoj referenci) znamo da postoji *prebrojiva* familija *karata* $(\varphi_i, U_i)$ za $X$ takva da je $\bigcup_i U_i = X$, te da je $(U_i)$ *lokalno konačna* familija, tj. svaka točka u $X$ ima okolinu koja siječe samo konačno mnogo skupova $U_i$. Dodatno, možemo uzeti da je $\varphi_i^{\to}(U_i)$ jedinična kugla ili polukugla u odgovarajućem euklidskom prosotru. Analogno, neka je $(\psi_j, V_j)$ prebrojiva familija karata za $Y$ s gornjim svojstvom. Istaknimo da su $\varphi_i : U_i \to \varphi_i^{\to}(U_i)$ i $\psi_i : V_i \to \psi_i^{\to}(V_i)$ *homeomorfizmi*.

Nadalje, iz [35, Corollary 4.2, p. 538] znamo da postoje *particije jedinice* $(\vartheta_i)$ za $X$ i $(\theta_j)$ za $Y$ *podređene* pokrivaču $(U_i)$, odnosno $(V_j)$, tj. za svaki $i$ imamo $\vartheta_i \in \mathrm{C}_c(X)$, $\operatorname{supp}\vartheta_i \subseteq U_i$, $0 \leqslant \vartheta_i \leqslant 1$, te $\sum_i \vartheta_i = 1$, i analogno za $(\theta_j)$. Istaknimo da je zapravo prethodna suma konačna zbog lokalne konačnosti familije $(U_i)$.

Radi lakše čitljivosti, sve objekte u euklidskom prostoru označit ćemo s kapicom (npr. $\hat{f}, \hat{U}$), za razliku od objekata na mnogostrukosti koji će biti bez kapice.

Za svaki $i,j$ definirajmo $\hat{B}_{ij} : \mathrm{C}_c(\hat{U}_i) \times \mathrm{C}_c(\hat{V}_j) \longrightarrow \mathbf{C}$ s

$$\hat{B}_{ij}(\hat{f},\hat{g}) := B(\hat{f}\circ\varphi_i, \hat{g}\circ\psi_j) ,$$

gdje su $\hat{U}_i := \phi_i^{\rightarrow}(U_i)$ i $\hat{V}_j := \psi_j^{\rightarrow}(V_j)$ (kao što smo ranije istaknuli) jedinične kugle ili polukugle u odgovarajućem euklidskom prostoru (ovisno o dimenziji mnogostrukosti $X$ i $Y$).

Kako je $B$ bilinearna i nenegativna, trivijalno slijedi da je također i $\hat{B}_{ij}$ bilinearna i nenegativna. Pokažimo da je $\hat{B}_{ij}$ neprekinuta.

Neka su $\hat{K} \subseteq \hat{U}_i$ i $\hat{L} \subseteq \hat{V}_j$ proizvoljni kompakti. Za $\hat{f} \in \mathrm{C}_{\hat{K}}(\hat{U}_i)$ i $\hat{g} \in \mathrm{C}_{\hat{L}}(\hat{V}_j)$ vrijedi $\operatorname{supp}(\hat{f} \circ \varphi_i) = \varphi_i^{\leftarrow}(\operatorname{supp} \hat{f}) \subseteq \varphi_i^{\leftarrow}(\hat{K})$, te analogno $\operatorname{supp}(\hat{g} \circ \psi_j) \subseteq \psi_j^{\leftarrow}(\hat{L})$. Kako su $\varphi_i$ i $\psi_j$ homeomorfizmi, skupovi $\varphi_i^{\leftarrow}(\hat{K})$ i $\psi_j^{\leftarrow}(\hat{L})$ su kompaktni, pa je $\hat{f} \circ \varphi_i \in \mathrm{C}_{\varphi_i^{\leftarrow}(\hat{K})}(U_i)$, odnosno $\hat{g} \circ \psi_j \in \mathrm{C}_{\psi_j^{\leftarrow}(\hat{L})}(V_j)$. Iz neprekinutosti bilinearne forme $B$ znamo da postoji $C > 0$ (ovisi o kompaktima $\phi_i^{\leftarrow}(\hat{K})$ i $\psi_j^{\leftarrow}(\hat{L})$, tj. o $i, j, \hat{K}, \hat{L}$) takva da

$$
\begin{aligned}
|\hat{B}_{ij}(\hat{f}, \hat{g})| = |B(\hat{f} \circ \varphi_i, \hat{g} \circ \psi_j)| &\leqslant C \|\hat{f} \circ \varphi_i\|_{\mathrm{L}^\infty(U_i)} \|\hat{g} \circ \psi_j\|_{\mathrm{L}^\infty(V_j)} \\
&\leqslant C \|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^\infty(\hat{U}_i)} \|\hat{g}\|_{\mathrm{L}^\infty(\hat{V}_j)} ,
\end{aligned}
$$

iz čega slijedi da je $\hat{B}_{ij}$ neprekinuta.

Po Lemi 5 i komentaru nakon njenog dokaza, slijedi da postoji jedinstvena Radonova mjera $\hat{\mu}_{ij} \in \mathcal{M}(\hat{U}_i \times \hat{V}_j)$ takva da

$$
(\forall \hat{f} \in \mathrm{C}_c(\hat{U}_i))(\forall \hat{g} \in \mathrm{C}_c(\hat{V}_j)) \qquad \hat{B}_{ij}(\hat{f}, \hat{g}) = \langle \hat{\mu}_{ij}, \hat{f} \boxtimes \hat{g} \rangle .
$$

Sada ćemo najprije po kartama povući $\hat{\mu}_{ij}$ na $U_i \times V_j$, a zatim pomoću particije jedinice proširiti dobiveni objekt na cijeli $X \times Y$. Preciznije, za $\Phi \in \mathrm{C}_c(X \times Y)$ definiramo

$$
\begin{aligned}
\langle \mu, \Phi \rangle :&= \sum_{i,j} \left\langle \hat{\mu}_{ij}, (\varphi_i^{-1} \boxtimes \psi_j^{-1})^* (\vartheta_i \theta_j \Phi) \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left\langle \hat{\mu}_{ij}, (\vartheta_i \theta_j \Phi) \circ (\varphi_i^{-1} \boxtimes \psi_j^{-1}) \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left\langle \hat{\mu}_{ij}, (\vartheta_i \theta_j \Phi)(\varphi_i^{-1}(\cdot), \psi_j^{-1}(\cdot)) \right\rangle ,
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\varphi^* f = f \circ \varphi$ povlak funkcije $f$ duž $\varphi$. Kako je $\Phi$ s kompaktnim nosačem, presjek $\operatorname{supp} \Phi \cap (U_i \times V_j)$ je neprazan samo za konačno mnogo indeksa $i, j$ pa je u gornjoj definiciji suma konačna, čime opravdavamo valjanost definicije. Nadalje, očito je $\mu$ linearan funkcional, a pokažimo da je i neprekinut na $\mathrm{C}_c(X \times Y)$.

Neka su $K$ i $L$ proizvoljni kompakti u $X$, odnosno $Y$. Označimo s $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ sve skupove iz familije $(U_i)$ koji s $K$ imaju neprezan presjek, te analogno $V_{j_1}, \ldots, V_{j_l}$ za $L$. Iz definicije funkcionala $\mu$ slijedi

$$
\begin{aligned}
|\langle \mu, \Phi \rangle| &\leqslant \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} \left| \left\langle \hat{\mu}_{i_p j_q}, (\varphi_{i_p}^{-1} \boxtimes \psi_{j_q}^{-1})^* (\vartheta_{i_p} \theta_{j_q} \Phi) \right\rangle \right| \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} C_{i_p j_q} \|\vartheta_{i_p} \theta_{j_q} \Phi\|_{\mathrm{L}^\infty(U_{i_p} \times V_{j_q})} \leqslant C_{K \times L} \|\Phi\|_{\mathrm{L}^\infty(K \times L)} ,
\end{aligned} \tag{7}
$$

pri čemu smo u drugoj nejednakosti koristili neprekinutost Radonovih mjera $\hat{\mu}_{ij}$, dok je $C_{K \times L} := \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} C_{i_p j_q}$. Iz prethodne ocjene slijedi da je $\mu$ neprekinuti funkcional na

$\mathrm{C}_c(X \times Y)$. U ovom trenutku nije jasno da definicija mjere $\mu$ ne ovisi o izboru particija jedinice. Međutim, ako pokažemo da je $\mu$ uistinu reprezentacija bilinearne forme $B$, tada će biti jedinstvena (jedinstveno je određena na gustom skupu tenzorskih produkata), pa time i neovisna o izboru particija jedinice.

Za $f \in \mathrm{C}_c(X)$ i $g \in \mathrm{C}_c(Y)$ imamo

$$\begin{aligned} B(f,g) =& B\Big(\sum_i \vartheta_i f, \sum_j \theta_j g\Big) = \sum_{i,j} B(\vartheta_i f, \theta_j g) \\ =& \sum_{i,j} \hat{B}_{ij}\Big((\vartheta_i f)\circ\varphi_i^{-1}, (\theta_j g)\circ\psi_j\Big) \\ =& \sum_{i,j} \Big\langle \hat{\mu}_{ij}, (\vartheta_i f)\circ\varphi_i^{-1} \boxtimes (\theta_j g)\circ\psi_j \Big\rangle = \langle \mu, f \boxtimes g\rangle\,, \end{aligned}$$

pri čemu smo opet koristili da su sume konačne zbog kompaktnih nosača funkcija $f$ i $g$.

**Q.E.D.**

Ukoliko je $B$ neprekinuta na $\mathrm{C}_0(X)\times\mathrm{C}_0(Y)$, tada konstante $C = C_{i_p j_q}$ u (7) ne ovise o $p$ i $q$ pa bismo dobili $|\langle\mu,\Phi\rangle| \leqslant klC\|\Phi\|_{\mathrm{L}^\infty(X\times Y)}$. Međutim, iz ove ocjene ne možemo zaključiti da je $\mu$ omeđena Radonova mjera kako $k$ i $l$ ovise o izboru kompakta. Ipak, u slučaju kad je particija jedinice konačna i za $X$ i za $Y$, vrijedila bi tvrdnja. To je slučaj na primjer za $X = \mathbf{R}^d$ i $Y = \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ kako je $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ kompakt. Nadalje, kako se tvrdnja Leme 5 može poopćiti na slučaj kad su $X$ i $Y$ proizvoljni otvoreni skupovi (samo trebamo zatvorene kugle zamijeniti s rastućom familijom kompakata koji iscrpljuju te otvorene skupove), prethodni zaključak također vrijedi i za $\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ gdje je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren.

## 3. Rezultat postojanja

Slično kao u dokazu Leme 5 (za otvorene jedinične kugle $X$ i $Y$), označimo s $(K_m)$ niz kompakata u $\Omega$ koji ga iscrpljuju; preciznije, $K_m \subseteq \operatorname{\mathsf{Int}} K_{m+1}$ i $\bigcup_m K_m = \Omega$, te se podsjetimo da je $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ strogi induktivni limes prostora $\mathrm{C}_{K_m}(\Omega)$. Nadalje, istaknimo da je svaki $\mathrm{C}_{K_m}(\Omega)$ (uz odgovarajuću restrikciju na $K_m$) zatvoren potprostor separabilnog Banachovog prostora $\mathrm{C}(K_m)$, time i sam separabilan.

**Teorem 1. (postojanje jednoskalnih H-mjera)** *Ako $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ i $\omega_n \to 0^+$, onda postoji podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ i $r\times r$ hermitska nenegativna matrična Radonova mjera $\boldsymbol{\mu}^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ na produktu $\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ takvi da za svaki izbor probnih funkcija $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, vrijedi*

$$\begin{aligned} \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\Big)\psi(\omega_{n'}\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} &= \Big\langle \boldsymbol{\mu}^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, (\varphi_1\bar{\varphi}_2)\boxtimes\psi \Big\rangle \\ &= \int_{\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)} \varphi_1(\mathbf{x})\bar{\varphi}_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})\,d\bar{\boldsymbol{\mu}}^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,. \end{aligned}$$

*Mjeru $\boldsymbol{\mu}^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ nazivamo* jednoskalnom H-mjerom (s karakterističnom duljinom $(\omega_{n'})$) *pridruženom (pod)nizu $(\mathsf{u}_{n'})$.*

Dem. Radi jednostavnosti zapisa, u dokazu nećemo eksplicitno isticati karakterističnu duljinu jednoskalne H-mjere.

Za proizvoljne probne funkcije $\varphi_1$ i $\varphi_2$ nošene u $K_m$, te $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, po Plancherelovoj formuli sljedeći niz integrala je omeđen (u $\mathbf{C}$):

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad &\Big|\int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})\Big)\psi(\omega_n \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}\Big| \\
&\qquad\leqslant \Big(\limsup_n \|\mathsf{u}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(K_m;\mathbf{C}^r)}\Big)\|\varphi_1\|_{\mathrm{L}^\infty(K_m)}\|\varphi_2\|_{\mathrm{L}^\infty(K_m)}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\,,
\end{aligned}
$$

pa možemo prijeći na konvergentan podniz čiji limes, naravno, zadovoljava istu ocjenu.

Prijelaz na limes treba biti takav da dobiveni podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ bude dobar za svaki izbor probnih funkcija. Prostor $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ je separabilan Banachov prostor, pa je dovoljno razmotriti prebrojiv gust podskup funkcija $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, te primijeniti Cantorov dijagonalni postupak. Međutim, istu ideju ne možemo primijeniti na $\mathrm{C}_c(\Omega)$ jer nije metrizabilan, iako jest separabilan. Iz tog razloga trebamo najprije raditi sa separabilnim Banachovim prostorima uz $\mathrm{L}^\infty$ normu, a potom iskoristiti činjenicu da je početni prostor strogi induktivni limes tih prostora.

Dakle, za svaki $m \in \mathbf{N}$ odaberimo prebrojive guste podskupove prostora $\mathrm{C}_{K_m}(\Omega)$ i $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, te prijeđimo na konvergentan podniz integrala u (8), čiji limes označimo s $\mathbf{L}(\varphi_1, \varphi_2, \psi) \in \mathrm{M}_{r\times r}$, a koji je dobar za svaki izbor probnih funkcija iz izabranih prebrojivih skupova, a zatim se po neprekinutosti lako dobiva da će biti dobar i za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_{K_m}(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Detalji ovog postupka sa sličnim postavkama mogu se pronaći u [6, Theorem 6] i [36, Teorem III.1].

Nakon dobivanja dobrog podniza za $m$, prelazimo na novi podniz dobar za $m + 1$. Još jednom primjenom Cantorovog dijagonalnog postupka konačno dobivamo podniz, označen s $n'$, koji je dobar i za svaki izbor probnih funkcija $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

Nadalje, $\mathbf{L}(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ ovisi samo o umnošku $\varphi_1\bar\varphi_2$ (a ne o $\varphi_1$ i $\varphi_2$ neovisno). Zaista, po Lemi 4 imamo: $(\mathcal{A}_{\psi_n} B_{\bar\varphi_2} - B_{\bar\varphi_2}\mathcal{A}_{\psi_n})B_{\varphi_1}\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, što uz Plancherelovu formulu daje

$$
\begin{aligned}
\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\Big)\psi(\omega_{n'}\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} &= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} B_{\bar\varphi_2}\mathcal{A}_{\psi_{n'}} B_{\varphi_1}\mathsf{u}_{n'} \otimes (\zeta_{\mathrm{supp}\,\varphi_2}\mathsf{u}_{n'})\, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{A}_{\psi_{n'}} B_{\bar\varphi_2} B_{\varphi_1}\mathsf{u}_{n'} \otimes (\zeta_{\mathrm{supp}\,\varphi_2}\mathsf{u}_{n'})\, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{A}_{\psi_{n'}} B_{\varphi_1\bar\varphi_2}(\zeta_{\mathrm{supp}\,\varphi_1\cap\mathrm{supp}\,\varphi_2}\mathsf{u}_{n'}) \otimes (\zeta_{\mathrm{supp}\,\varphi_2}\mathsf{u}_{n'})\, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} B_{\varphi_1\bar\varphi_2}\mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\zeta_{\mathrm{supp}\,\varphi_1\cap\mathrm{supp}\,\varphi_2}\mathsf{u}_{n'}) \otimes (\zeta_{\mathrm{supp}\,\varphi_2}\mathsf{u}_{n'})\, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \Big((\widehat{\zeta_{\mathrm{supp}\,\varphi_1\cap\mathrm{supp}\,\varphi_2}\mathsf{u}_{n'}})(\boldsymbol{\xi}) \otimes (\widehat{\bar\varphi_1\varphi_2\mathsf{u}_{n'}})(\boldsymbol{\xi})\Big)\psi(\omega_{n'}\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}\,,
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\zeta_K \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ identički jednaka 1 na $K$, pa očito i izbor funkcije $\zeta_{\mathrm{supp}\,\varphi_1\cap\mathrm{supp}\,\varphi_2}$ ovisi samo o produktu $\bar\varphi_1\varphi_2$. Za $\varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ definirajmo $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi) :=$

$\mathbf{L}(\zeta_{\operatorname{supp}\varphi},\bar\varphi,\psi)$. Iz gornjeg računa slijedi da $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ ne ovisi o izboru funkcije $\zeta_{\operatorname{supp}\varphi}$, te za $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ imamo

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi_1\bar\varphi_2,\psi)=\mathbf{L}(\zeta_{\operatorname{supp}\varphi_1\cap\operatorname{supp}\varphi_2},\bar\varphi_1\varphi_2,\psi)=\mathbf{L}(\varphi_1,\varphi_2,\psi)\,.$$

Elementi $r\times r$ matrice $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ su neprekinute bilinearne forme na $\mathrm{C}_c(\Omega)\times\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Cilj je iskoristiti Lemu 6 upravo na tim elementima, no prije toga trebamo dobiti odgovarajuću nenegativnost.

Uočimo najprije da za realne funkcije $\varphi$ i $\psi$ imamo da je $\mathcal{L}(\varphi,\psi)$ hermitska matrica. Neka je $\varphi_2\in\mathrm{C}_c(\Omega)$ realna i jednaka 1 na nosaču $\varphi$, pa imamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)&=\mathbf{L}(\varphi_2,\varphi,\psi)\\&=\lim_{n'}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\widehat{\varphi_2\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol\xi)\otimes\widehat{\varphi\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol\xi)\Big)\psi(\omega_{n'}\boldsymbol\xi)\,d\boldsymbol\xi\\&=\lim_{n'}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\widehat{\varphi\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol\xi)\otimes\widehat{\varphi_2\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol\xi)\Big)^*\psi(\omega_{n'}\boldsymbol\xi)\,d\boldsymbol\xi\\&=\Big(\lim_{n'}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\widehat{\varphi\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol\xi)\otimes\widehat{\varphi_2\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol\xi)\Big)\psi(\omega_{n'}\boldsymbol\xi)\,d\boldsymbol\xi\Big)^*\\&=\mathbf{L}(\varphi,\varphi_2,\psi)^*=\mathbf{L}(\varphi_2,\varphi,\psi)^*=\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)^*\,.\end{aligned}$$

Po netom pokazanom hermitskom svojstvu, za $\boldsymbol\lambda_1,\boldsymbol\lambda_2\in\mathbf{C}^r$, te realne $\varphi\in\mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi\in\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ imamo

$$\begin{aligned}2\mathsf{Re}\,(\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda_1\cdot\boldsymbol\lambda_2)&=\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)(\boldsymbol\lambda_1+\boldsymbol\lambda_2)\cdot(\boldsymbol\lambda_1+\boldsymbol\lambda_2)\\&\qquad-\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda_1\cdot\boldsymbol\lambda_1-\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda_2\cdot\boldsymbol\lambda_2\,,\\2\mathsf{Im}\,(\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda_1\cdot\boldsymbol\lambda_2)&=\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)(\boldsymbol\lambda_1+i\boldsymbol\lambda_2)\cdot(\boldsymbol\lambda_1+i\boldsymbol\lambda_2)\\&\qquad-\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda_1\cdot\boldsymbol\lambda_1-\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda_2\cdot\boldsymbol\lambda_2\,.\end{aligned}\tag{9}$$

Nadalje, za $\varphi,\psi\geqslant0$ i $\boldsymbol\lambda\in\mathbf{C}^r$ imamo

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda\cdot\boldsymbol\lambda=\boldsymbol{\mathcal{L}}(\sqrt\varphi\sqrt\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda\cdot\boldsymbol\lambda=\lim_{n'}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{\sqrt\varphi\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol\xi)\cdot\boldsymbol\lambda|^2\psi(\omega_{n'}\boldsymbol\xi)\,d\boldsymbol\xi\geqslant0\,.$$

Time smo dobili da je za svaki $\boldsymbol\lambda\in\mathbf{C}^r$ formulom $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot,\cdot)\boldsymbol\lambda\cdot\boldsymbol\lambda$ dana nenegativna neprekinuta bilinearna forma na $\mathrm{C}_c(\Omega)\times\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Dakle, po Lemi 6 za svaki $\boldsymbol\lambda\in\mathbf{C}^r$ postoji $\nu_{\boldsymbol\lambda}\in\mathcal{M}(\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ takva da

$$(\forall\,\varphi\in\mathrm{C}_c(\Omega))(\forall\,\psi\in\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)))\quad\boldsymbol{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)\boldsymbol\lambda\cdot\boldsymbol\lambda=\langle\nu_{\boldsymbol\lambda},\varphi\boxtimes\psi\rangle\,.$$

Konačno, definirajmo matričnu Radonovu mjeru $\boldsymbol\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=[\mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}]$ s

$$\begin{aligned}\mathsf{Re}\,\mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}&:=\frac12(\nu_{\mathsf{e}_j+\mathsf{e}_i}-\nu_{\mathsf{e}_j}-\nu_{\mathsf{e}_i})\,,\\\mathsf{Im}\,\mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}&:=\frac12(\nu_{\mathsf{e}_j+i\mathsf{e}_i}-\nu_{\mathsf{e}_j}-\nu_{\mathsf{e}_i})\,,\end{aligned}$$

gdje vektori $\mathsf{e}_i$, $i\in1..r$, čine kanonsku bazu za $\mathbf{C}^r$. Po (9) imamo da se $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ i $\boldsymbol\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ podudaraju na realnim funkcijama, a po linearnosti isto dobivamo i za proizvoljne $\varphi\in\mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi\in\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Dodatno, $\boldsymbol\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ nasljeđuje svojstvo hermitičnosti i nenegativnosti od $\boldsymbol{\mathcal{L}}$.

**Q.E.D.**

Kao i prije s H-mjerama, kad ne postoji mogućnost nesporazuma, pretpostavljat ćemo da smo već prešli na odgovarajući podniz koji definira jednoskalnu H-mjeru, te ćemo također često rasteretiti notaciju s $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} = \boldsymbol{\mu}^{(\omega_n)}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$. U slučaju kad ne trebamo prelaziti na podniz u prethodnom teoremu, tj. kad *cijeli* niz definira istu jednoskalnu H-mjeru karakteristične duljine $(\omega_n)$, kažemo da je niz $(\omega_n)$-*čist* (u smislu jednoskalnih H-mjera). Radi jednostavnosti, ovdje koristimo isti pojam kao i kod poluklasičnih mjera, ali u situacijama kad iz konteksta neće biti jasno na koji se pojam misli, dat ćemo dodatno pojašnjenje. Istaknimo samo da će iz Korolara 7 biti jasno da svojstvo da je niz $(\omega_n)$-čist *u smislu jednoskalnih H-mjera* povlači da je niz čist (u smislu klasičnih H-mjera) i $(\omega_n)$-čist *u smislu poluklasičnih mjera*.

## 4. Prva svojstva

Neposredna posljedica definicije jednoskalnih H-mjera je sljedeće jednostavno lokalizacijsko svojstvo.

**Korolar 1.** *Neka je $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ jednoskalna H-mjera proizvoljne karakteristične duljine određena nizom $(\mathsf{u}_n)$. Ukoliko sve komponente $u^i_n = \mathsf{u}_n \cdot \mathsf{e}_i$ imaju redom nosače u zatvorenim skupovima $K_i \subseteq \Omega$, tada je nosač komponente $\mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}\mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_i$ sadržan u $(K_i \cap K_j) \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$.*

Dem. Za $\varphi_1 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ takvu da je $\operatorname{supp}\varphi_1 \subseteq \Omega \setminus (K_i \cap K_j)$ uzmimo $\varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ koja je jednaka 1 na nosaču $\varphi_1$, a 0 na $K_i \cap K_j$. Kako su funkcije $\varphi_1 u^i_n$ i $\varphi_2 u^j_n$ jednake nuli, imamo

$$\begin{aligned}\langle \mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1 \boxtimes \psi\rangle =& \langle \mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi\rangle \\ =& \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{\varphi_1 u^i_n}(\boldsymbol{\xi})\overline{\widehat{\varphi_2 u^j_n}}(\boldsymbol{\xi})\psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} = 0\,,\end{aligned}$$

gdje je $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ proizvoljna probna funkcija, dok je $(\omega_n)$ karakteristična duljina mjere. Dakle, s gornjim računom je pokazana tvrdnja.

**Q.E.D.**

Preciznija relacija između nosača dijagonalnih i vandijagonalnih elemenata je posljedica Cauchy-Schwartz-Bunjakovskijeve nejednakosti kao što se može vidjeti u idućem korolaru.

**Korolar 2.** *Neka je $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ jednoskalna H-mjera proizvoljne karakteristične duljine određena nizom $(\mathsf{u}_n)$. Nosač mjere $\mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ sadržan je u presjeku nosača pripadnih dijagonalnih elemenata $\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ i $\mu^{jj}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$, tj.*

$$\operatorname{supp}\mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} \subseteq \operatorname{supp}\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} \cap \operatorname{supp}\mu^{jj}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}\,.$$

Dem. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ proizvoljne probne funkcije. Po definiciji jednoskalne H-mjere uz primijenu Cauchy-Schwartz-Bunjakovskijeve nejednakosti, imamo:

$$
\begin{aligned}
|\langle \mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar\varphi_2 \boxtimes \psi\rangle| &\leqslant \limsup_n \int\limits_{\mathbf{R}^d} \Big(|\widehat{\varphi_1 u^i_n}(\boldsymbol\xi)|\sqrt{|\psi|}(\omega_n\boldsymbol\xi)\Big)\Big(|\widehat{\varphi_2 u^j_n}(\boldsymbol\xi)|\sqrt{|\psi|}(\omega_n\boldsymbol\xi)\Big)\,d\boldsymbol\xi \\
&\leqslant \Big(\lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi_1 u^i_n}(\boldsymbol\xi)|^2|\psi|(\omega_n\boldsymbol\xi)\,d\boldsymbol\xi\Big)^{\frac12}\Big(\lim_n \int\limits_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi_1 u^j_n}(\boldsymbol\xi)|^2|\psi|(\omega_n\boldsymbol\xi)\,d\boldsymbol\xi\Big)^{\frac12} \\
&= \sqrt{\langle \mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, |\varphi_1|^2 \boxtimes |\psi|\rangle}\sqrt{\langle \mu^{jj}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, |\varphi_2|^2 \boxtimes |\psi|\rangle}\,,
\end{aligned}
$$

pa $\langle \mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, |\varphi_1|^2 \boxtimes |\psi|\rangle = 0$ ili $\langle \mu^{jj}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, |\varphi_2|^2 \boxtimes |\psi|\rangle = 0$ povlači $\langle \mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar\varphi_2 \boxtimes \psi\rangle = 0$, čime smo dobili

$$
c(\operatorname{supp}\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}) \cup c(\operatorname{supp}\mu^{jj}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}) \subseteq c(\operatorname{supp}\mu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}})\,.
$$

Djelujući komplementom na gornju relaciju dobivamo tvrdnju.

**Q.E.D.**

Jednoskalne H-mjere su općenito pridružene kompleksnim vektorskim funkcijama. Međutim, ako je promatrani niz $(\mathsf{u}_n)$ realan, pridružena jednoskalna H-mjera ima dodatno svojstvo.

**Korolar 3.** *Neka je $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-čist niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, te $\boldsymbol\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ pripadna jednoskalna H-mjera. Tada je niz $(\bar{\mathsf{u}}_n)$ $(\omega_n)$-čist s pripadnom jednoskalnom H-mjerom $\boldsymbol\nu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ koja zadovoljava: $\boldsymbol\nu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x},\boldsymbol\xi) = \boldsymbol\mu^\top_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x},-\boldsymbol\xi)$.*

*Posebno, jednoskalna H-mjera $\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ pridružena realnom skalarnom nizu je antipodalno simetrična, tj. $\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x},\boldsymbol\xi) = \mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x},-\boldsymbol\xi)$.*

Dem. Izračunajmo po definiciji djelovanje jednoskalne H-mjere pridružene nizu $(\bar{\mathsf{u}}_n)$ na tenzorskom produktu proizvoljnih probnih funkcija $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1\bar{\mathsf{u}}_n}(\boldsymbol\xi)\otimes\widehat{\varphi_2\bar{\mathsf{u}}_n}(\boldsymbol\xi)\Big)\psi(\omega_n\boldsymbol\xi)\,d\boldsymbol\xi &= \overline{\int\limits_{\mathbf{R}^d} \Big((\bar\varphi_1\mathsf{u}_n)^\vee(\boldsymbol\xi)\otimes(\bar\varphi_2\mathsf{u}_n)^\vee(\boldsymbol\xi)\Big)\bar\psi(\omega_n\boldsymbol\xi)\,d\boldsymbol\xi} \\
&= \overline{\int\limits_{\mathbf{R}^d} \Big((\bar\varphi_1\mathsf{u}_n)^\vee(-\boldsymbol\eta)\otimes(\bar\varphi_2\mathsf{u}_n)^\vee(-\boldsymbol\eta)\Big)\bar\psi(-\omega_n\boldsymbol\eta)\,d\boldsymbol\eta} \\
&= \overline{\int\limits_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\bar\varphi_1\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\eta)\otimes\widehat{\bar\varphi_2\mathsf{u}_n}(\boldsymbol\eta)\Big)\tilde{\bar\psi}(\omega_n\boldsymbol\eta)\,d\boldsymbol\eta}\,,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti iskoristili zamjenu varijabli ($\boldsymbol\eta = -\boldsymbol\xi$), dok $\tilde\psi$ označava promjenu predznaka u argumentu $\boldsymbol\xi$ ($\tilde\psi(\boldsymbol\xi) = \psi(-\boldsymbol\xi)$). Dakle, limes izraza na lijevoj strani jednakosti postoji i vrijedi

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol\nu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar\varphi_2\boxtimes\psi\rangle &= \overline{\langle \boldsymbol\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \bar\varphi_1\varphi_2\boxtimes\tilde{\bar\psi}\rangle} \\
&= \overline{\langle \tilde{\boldsymbol\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \bar\varphi_1\varphi_2\boxtimes\bar\psi\rangle} = \langle \tilde{\boldsymbol\mu}^\top_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar\varphi_2\boxtimes\psi\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Posljednja jednakost je posljedica hermitičnosti jednoskalne H-mjere.

**Q.E.D.**

Ukoliko je $(\mathsf{u}_n)$ slabo konvergentan niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, tada je $\mathsf{u}_n\otimes\mathsf{u}_n$ omeđen u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathrm{M}_{\mathrm{r}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, te stoga na podnizu konvergira slabo k hermitskoj nenegativnoj matričnoj Radonovoj mjeri $\boldsymbol{\nu}$ (defektnoj mjeri). Veza defektne i jednoskalne H-mjere dana je sljedećim korolarom.

**Korolar 4.** *Ako za $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ vrijedi da $\mathsf{u}_n\otimes\mathsf{u}_n \xrightharpoonup{*} \boldsymbol{\nu}$, pri čemu je limes uzet u prostoru Radonovih mjera, tada je za svaki $\varphi\in\mathrm{C}_c(\Omega)$*

$$\langle\boldsymbol{\nu},\varphi\rangle = \langle\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}},\varphi\boxtimes 1\rangle\,,$$

*pri čemu je $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ jednoskalna H-mjera proizvoljne karakteristične duljine pridružena (pod)nizu $(\mathsf{u}_n)$.*

Dem. Kako je $\psi\equiv 1$ iz prostora $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, uvrštavanjem u definiciju jednoskalnih H-mjera i korištenjem Plancherelove formule izravno slijedi tvrdnja.

**Q.E.D.**

Budući da trivijalna defektna mjera povlači jaku konvergenciju promatranog niza u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, iz prethodnog korolara vidimo da isto vrijedi i za jednoskalne H-mjere. Preciznije, trivijalnost jednoskalne H-mjere proizvoljne karakteristične duljine povlači jaku konvergenciju u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ promatranog niza. S druge strane, jako konvergentnom nizu u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ pridružena jednoskalna H-mjera (proizvoljne karakteristične duljine) je trivijalna. Zaista, ukoliko $\mathsf{u}_n\longrightarrow\mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, tada po definiciji imamo da je defektna mjera trivijalna, a po prethodnom korolaru i da

$$(\forall\,\varphi\in\mathrm{C}_c(\Omega))\quad\langle\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}},\varphi\boxtimes 1\rangle = \mathbf{0}\,.$$

Kako su $\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ nenegativne, $i\in 1..r$, možemo ih po Rieszovom teoremu reprezentacije shvatiti kao mjere definirane na Borelovoj $\sigma$-algebri iz čega bi izravno slijedilo $\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=0$ (koristili bismo varijantu osnovne leme varijacijskog računa). Međutim, radi jednostavnosti, pokušat ćemo se držati pristupa u kojem $\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ promatramo kao Radonove mjere (funkcionale) gdje god to neće biti prekomplicirano. Uzmimo dakle proizvoljne nenegativne probne funkcije $\varphi\in\mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi\in\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, te po nenegativnosti i linearnosti pripadnih funkcionala za svaki $i\in 1..r$ imamo

$$0\leqslant\langle\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}},\varphi\boxtimes\psi\rangle\leqslant\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}\langle\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}},\varphi\boxtimes 1\rangle = 0\,,$$

iz čega slijedi $\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=0$. Sada konačno po Korolaru 2 zaključujemo da je pripadna jednoskalna H-mjera trivijalna. Oblikujmo ovu tvrdnju u obliku korolara.

**Korolar 5.** *Za $\mathsf{u}_n\rightharpoonup\mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ vrijedi*

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=\mathbf{0}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\mathsf{u}_{n'}\longrightarrow\mathsf{0}\,,$$

*pri čemu je $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ jednoskalna H-mjera proizvoljne karakteristične duljine pridružena podnizu $(\mathsf{u}_{n'})$.*

∎

Naravno, ukoliko cijeli niz jako konvergira, tada je $(\omega_n)$-čist za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$, te su jednoskalne H-mjere pridružene proizvoljnim karakterističnim duljinama trivijalne.

Prisjetimo se da smo za analogan zaključak prethodnog korolara kod poluklasičnih mjera trebali dodatnu pretpostavku da je pripadni niz $(\omega_n)$-titrajući. Kako poluklasične mjere pridružene takvim nizovima ne gube informaciju u beskonačnosti (u dualnom prostoru), jednostavna karakterizacija tog svojstva u terminima jednoskalnih H-mjera slijedi. Međutim, istaknimo prije same tvrdnje da smo se ovdje radi jednostavnosti ipak odlučili komponente mjere $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ promatrati kao mjere definirane na Borelovoj $\sigma$-algebri, pa zato i radimo samo s dijegonalnim elementima (jer nemamo Rieszov teorem reprezentacije za neomeđene kompleksne funkcionale).

**Korolar 6.** *Ako je* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ $(\omega_n)$*-čist (u terminima jednoskalnih H-mjera), tada je*

*a)* $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}^{(\omega_n)}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\Omega\times\Sigma_0)=0$ *ako i samo ako je* $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$*-koncentrirajući.*

*b)* $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}^{(\omega_n)}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\Omega\times\Sigma_\infty)=0$ *ako i samo ako je* $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$*-titrajući.*

Dem. Dokaz (a) dijela je u potpunosti analogan dokazu Korolara I.3 pa ćemo dokazati samo (b) dio.

Po Rieszovom teoremu o reprezentaciji [11, Teorem IV.20] postoji Radonova mjera $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}$ (koristimo istu oznaku) na Borelovoj $\sigma$-algebri takva da za sve $\phi\in\mathrm{C}_c(\Omega\times\mathbf{R}^d)$ vrijedi

$$\langle \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc},\phi\rangle=\int\limits_{\mathbf{R}^d}\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,d\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{sc}\,,$$

iz čega lako izvodimo da je $\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\Omega\times\Sigma_\infty)=0$ ekvivalentno s

$$(\forall\,\varphi\in\mathrm{C}_c(\Omega))\qquad\int\limits_{\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)}|\varphi(\mathbf{x})|^2\chi_{\Sigma_\infty}(\boldsymbol{\xi})\,d\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=0\,,$$

pri čemu $\chi_{\Sigma_\infty}$ označava karakterističnu funkciju sfere u beskonačnosti prostora $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$.

Označimo sa $\zeta\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ glatku režuću funkciju takvu da je $0\leqslant\zeta\leqslant 1$, te da je identički jednaka 1 na $\mathrm{K}[\mathsf{0},1]$, dok $\operatorname{supp}\zeta\subseteq\mathrm{K}(\mathsf{0},2)$. Nadalje, definirajmo $\zeta_m:=\zeta(\frac{\cdot}{m})$. Kako po Lemi 1 slijedi da su za svaki $m$ funkcije $\zeta_m$ jednake 1 na $\Sigma_0$ i 0 na $\Sigma_\infty$, niz funkcija $(1-\zeta_m)$ po točkama konvergira k $\chi_{\Sigma_\infty}$.

Koristeći Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji i nenegativnost dijagonalnih elemenata matrice $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$, iz definicije jednoskalnih H-mjera za proizvoljni $i\in 1..d$ slijedi

$$\begin{aligned}0=\int\limits_{\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)}|\varphi(\mathbf{x})|^2\chi_{\Sigma_\infty}(\boldsymbol{\xi})\,d\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})&=\lim_m\int\limits_{\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)}|\varphi(\mathbf{x})|^2(1-\zeta_m(\boldsymbol{\xi}))\,d\mu^{ii}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\\&=\lim_m\lim_n\int\limits_{\mathbf{R}^d}|\widehat{\varphi u^i_n}(\boldsymbol{\xi})|^2(1-\zeta_m(\omega_n\boldsymbol{\xi}))\,d\boldsymbol{\xi}\\&\geqslant\limsup_m\limsup_n\int\limits_{|\omega_n\boldsymbol{\xi}|\geqslant 2m}|\widehat{\varphi u^i_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}\geqslant 0\,,\end{aligned}$$

pri čemu smo u posljednjem koraku koristili činjenicu da je $\operatorname{supp}\zeta_m\subseteq\mathrm{K}(\mathsf{0},2m)$. Dakle,

$$(\forall\,i\in 1..d)\qquad\lim_m\limsup_n\int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{2m}{\omega_n}}|\widehat{\varphi u^i_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi}=0\,,$$

odnosno svaka komponenta $(u^i_n)$ je $(\omega_n)$-titrajući niz, iz čega slijedi da je i cijeli $(\mathsf{u}_n)$ $(\omega_n)$-titrajući.

Obratnu implikaciju dobivamo iz ocjene

$$(\forall\, i \in 1..d) \qquad \int\limits_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi u^i_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 (1-\zeta_m(\omega_n\boldsymbol{\xi}))\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant \frac{m}{\omega_n}} |\widehat{\varphi u^i_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}\,,$$

i ekvivalencije dane na početku dokaza.

**Q.E.D.**

Prethodni korolar opravdava tvrdnju da s $(\omega_n)$-titrajućim uvjetom kontroliramo gubljenje informacije u beskonačnosti, dok miješanje informacije u ishodištu kontroliramo $(\omega_n)$-koncentrirajućim uvjetom.

Daljnja svojstva i prednosti jednoskalnih H-mjera ilustrirat ćemo na titrajućim (primjeri I.1 i I.7) i koncentrirajućim (primjeri I.2 i I.8) nizovima.

**Primjer 2.** **(titranje)** Neka je $v \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ periodička funkcija s jediničnim periodom u svakoj varijabli i srednjom vrijednosti jednakoj nula, odnosno, u Fourierovom razvoju funkcije $v$ danom s

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{\mathsf{k}\in\mathbf{Z}^d} v_{\mathsf{k}} e^{2\pi i \mathsf{k}\cdot\mathbf{x}}\,,$$

imamo $v_{\mathsf{0}} = 0$. Prethodni red konvergira točkovno i u prostoru $\mathrm{L}^2([0,1]^d)$, a Fourierovi koeficijenti $(v_{\mathsf{k}})$ se nalaze u prostoru $l^2$. Štoviše, imamo $p_N := \sum_{|\mathsf{k}|\leqslant N} v_{\mathsf{k}} e^{2\pi i\mathsf{k}\cdot\cdot} \longrightarrow v$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$.

Za $\varepsilon_n \to 0^+$ definiramo $u_n(\mathbf{x}) := v(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon_n})$ koji slabo konvergira nuli u prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, pa ima smisla promatrati pripadne jednoskalne H-mjere. Lako se pokaže da $p_N(\frac{\cdot}{\varepsilon_n}) \longrightarrow u_n$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ jednoliko po $n$, pa ćemo u definiciji jednoskalne H-mjere moći izraz $|\widehat{\varphi u_n}|^2$ zamijeniti s $|\widehat{\varphi p_N(\frac{\cdot}{\varepsilon_n})}|^2$.

Neka su $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ i $\omega_n \to 0^+$. Za proizvoljni $N > 0$, iz $\widehat{\varphi p_N}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\mathsf{k}|\leqslant N} v_{\mathsf{k}} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi} - \mathsf{k})$ slijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} |(\varphi \widehat{p_N(\cdot/\varepsilon_n)})(\boldsymbol{\xi})|^2 \psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} &= \sum_{|\mathsf{k}|,|\mathsf{s}|\leqslant N} \int_{\mathbf{R}^d} v_{\mathsf{k}}\bar{v}_{\mathsf{s}} \hat{\varphi}\Big(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n}\Big)\overline{\hat{\varphi}\Big(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathsf{s}}{\varepsilon_n}\Big)}\psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \\ &= \sum_{|\mathsf{k}|,|\mathsf{s}|\leqslant N} v_{\mathsf{k}}\bar{v}_{\mathsf{s}} \int_{\mathbf{R}^d} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\eta})\overline{\hat{\varphi}\Big(\boldsymbol{\xi} + \frac{\mathsf{k}-\mathsf{s}}{\varepsilon_n}\Big)}\psi\Big(\omega_n\boldsymbol{\eta} + \frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\mathsf{k}\Big)\, d\boldsymbol{\xi}\,,\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili zamjenu varijable $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n}$. Kako je po Riemann-Lebesgueovoj lemi $\hat{\varphi} \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da integrali $I^n_{\mathsf{k},\mathsf{s}} := \int_{\mathbf{R}^d} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\eta})\overline{\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi} + \frac{\mathsf{k}-\mathsf{s}}{\varepsilon_n})}\psi(\omega_n\boldsymbol{\eta} + \frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\mathsf{k}) d\boldsymbol{\xi}$ za $\mathsf{k} \neq \mathsf{s}$ konvergiraju nuli po $n$, dok za $\mathsf{k} = \mathsf{s}$ limes ovisi o izrazu $\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$. Za $c := \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} \in \langle 0, \infty\rangle$ imamo

$$I^n_{\mathsf{k},\mathsf{k}} \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{\varphi}(\boldsymbol{\eta})|^2 \psi\Big(\frac{\mathsf{k}}{c}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} = \|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \psi\Big(\frac{\mathsf{k}}{c}\Big)\,.$$

Ukoliko je $c = 0$ ili $c = \infty$ koristimo (4) pa iz $\frac{\omega_n\boldsymbol{\eta} + \frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\mathsf{k}}{|\omega_n\boldsymbol{\eta} + \frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\mathsf{k}|} = \frac{\varepsilon_n\boldsymbol{\eta}+\mathsf{k}}{|\varepsilon_n\boldsymbol{\eta}+\mathsf{k}|}$ slijedi

$$I^n_{\mathsf{k},\mathsf{k}} \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{\varphi}(\boldsymbol{\eta})|^2 \psi_{\frac{1}{c}}\Big(\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} = \|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \psi_{\frac{1}{c}}\Big(\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}\Big)\,,$$

gdje smo radi jednostavnosti zapisa koristili $\frac{1}{0}=\infty$ i $\frac{1}{\infty}=0$.

Dovršimo račun za slučaj $c\in\langle 0,\infty\rangle$, dok je u preostalim slučajevima postupak analogan.

Neka je $\delta>0$ po volji odabrana, te $M>0$ takav da $\operatorname{supp}\varphi\subseteq[-M/2,M/2]^d$. Budući da je niz $\psi(\frac{\mathsf{k}}{c})\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}$ omeđen, red $\sum_{\mathsf{k}\in\mathbf{Z}^d}|v_{\mathsf{k}}|^2\psi(\frac{\mathsf{k}}{c})\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}$ je konvergentan, pa postoji $N\in\mathbf{N}$ takav da

$$\Big|\sum_{|\mathsf{k}|>N}|v_{\mathsf{k}}|^2\psi\Big(\frac{\mathsf{k}}{c}\Big)\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\Big|<\frac{\delta}{2},$$

te da za svaki $n\in\mathbf{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}&\Big\|\varphi\Big(u_n-p_N\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon_n}\Big)\Big)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\\&\qquad<\min\left\{\frac{\delta}{16M^d\|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\|v\|_{\mathrm{L}^2([0,1]^d)}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}},\sqrt{\frac{\delta}{8\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}}}\right\}.\end{aligned}$$

Nadalje, neka je $n_0\in\mathbf{N}$ takav da za sve $n\geqslant n_0$ i $|\mathsf{k}|,|\mathsf{s}|\leqslant N$, $\mathsf{s}\neq\mathsf{k}$, vrijedi

$$\Big|I^n_{\mathsf{k},\mathsf{k}}-\psi\Big(\frac{\mathsf{k}}{c}\Big)\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\Big|<\frac{\delta}{8\|v\|^2_{\mathrm{L}^2([0,1]^d)}}\qquad\text{i}\qquad|I^n_{\mathsf{k},\mathsf{s}}|<\frac{\delta}{8\binom{N+d}{d}\|v\|^2_{\mathrm{L}^2([0,1]^d)}}.$$

Sada za $n\geqslant n_0$ imamo

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}-\sum_{\mathsf{k}\in\mathbf{Z}^d}|v_{\mathsf{k}}|^2\psi\Big(\frac{\mathsf{k}}{c}\Big)\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\Big|\\
&\quad\leqslant\Big|\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2\psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}-\sum_{|\mathsf{k}|\leqslant N}|v_{\mathsf{k}}|^2\psi\Big(\frac{\mathsf{k}}{c}\Big)\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\Big|+\frac{\delta}{2}\\
&\quad\leqslant\Big\|\varphi\Big(u_n-p_N\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon_n}\Big)\Big)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}2M^d\|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\|v\|_{\mathrm{L}^2([0,1]^d)}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\\
&\qquad+\Big\|\varphi\Big(u_n-p_N\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon_n}\Big)\Big)\Big\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\\
&\qquad+\Big|I^n_{\mathsf{k},\mathsf{k}}-\psi\Big(\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}\Big)\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\Big|\|v\|^2_{\mathrm{L}^2([0,1]^d)}+\sum_{|\mathsf{k}|,|\mathsf{s}|\leqslant N,\mathsf{k}\neq\mathsf{s}}|v_{\mathsf{k}}\bar{v}_{\mathsf{s}}||I^n_{\mathsf{k},\mathsf{s}}|+\frac{\delta}{2}\\
&\quad<\delta,\end{aligned}$$

pa konačno možemo zaključiti da je $(u_n)$ $(\omega_n)$-čist (u smislu jednoskalnih H-mjera) za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ za koju limes $\lim_n\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ postoji u $[0,\infty]$, a pripadne (jedinstvene) jednoskalne H-mjere su dane s

$$\mu^{(\omega_n)}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=\sum_{\mathsf{k}\in\mathbf{Z}^d\setminus\{0\}}|v_{\mathsf{k}}|^2\boxtimes\begin{cases}\delta_{\infty^{\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}}}, & \lim_n\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}=0\\ \delta_{\frac{\mathsf{k}}{c}}, & \lim_n\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}=c\in\langle 0,\infty\rangle\\ \delta_{0^{\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}}}, & \lim_n\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}=\infty\end{cases}.$$

∎

**Primjer 3.** **(koncentracija)** Za danu funkciju $v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, niz pozitivnih brojeva $\varepsilon_n \to 0^+$ i $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$ promatramo niz

$$u_n(\mathbf{x}) := \varepsilon_n^{-\frac{d}{2}} v\Big(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\varepsilon_n}\Big)\,.$$

U Primjeru I.5 smo pokazali da za svaku probnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ imamo $\varphi u_n - \varphi(\mathbf{x}_0)u_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, pa se lako pokaže da za svaki $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ i svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ vrijedi

$$\lim_n \Big( \int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi})|^2 \psi(\omega_n \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} - |\varphi(\mathbf{x}_0)|^2 \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{u}_n(\boldsymbol{\xi})|^2 \psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \Big) = 0\,,$$

čime je dovoljno proučavati samo limes drugog integrala. Iz $\hat{u}_n(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_n^{d/2} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}_0} \hat{v}(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})$ slijedi

$$\begin{aligned} \lim_n |\varphi(\mathbf{x}_0)|^2 \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{u}_n(\boldsymbol{\xi})|^2 \psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} &= |\varphi(\mathbf{x}_0)|^2 \lim_n \varepsilon_n^d \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})|^2 \psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \\ &= |\varphi(\mathbf{x}_0)|^2 \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \psi\Big(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\boldsymbol{\eta}\Big)\,, \end{aligned} \tag{10}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili zamjenu varijabli $\boldsymbol{\eta} = \varepsilon_n\boldsymbol{\xi}$. Daljnu analizu razdvajamo u ovisnosti o ponašanju člana $\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ za veliki $n$.

Ukoliko $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0$ po (4) imamo da $\psi(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\boldsymbol{\eta})$ po točkama konvergira k $\psi_\infty(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|})$ pa je izraz (10) po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji jednak

$$|\varphi(\mathbf{x}_0)|^2 \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \psi_\infty\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\Big)\,,$$

čime dobivamo da je jednoskalna H-mjera jednaka $\delta_{\mathbf{x}_0} \boxtimes \nu_\infty$, pri čemu je $\nu_\infty$ mjera nošena u $\Sigma_\infty$ i dana s

$$\langle \nu_\infty, \psi\rangle := \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \psi_\infty\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\Big)\, d\boldsymbol{\eta}\,.$$

Analogno, u slučaju $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty$ dobivamo da je pripadna jednoskalna H-mjera dana s $\delta_{\mathbf{x}_0} \boxtimes \nu_0$, pri čemu je $\nu_0$ mjera nošena u $\Sigma_0$ i definirana s

$$\langle \nu_0, \psi\rangle := \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \psi_0\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\Big)\, d\boldsymbol{\eta}\,.$$

U slučaju $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle$ po neprekinutosti imamo da $\psi(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\boldsymbol{\eta})$ po točkama konvergira k $\psi(\frac{\boldsymbol{\eta}}{c})$ pa je po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji izraz (10) jednak

$$|\varphi(\mathbf{x}_0)|^2 \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2 \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}}{c}\Big)\,,$$

odnosno jednoskalna H-mjera je dana s $\delta_{\mathbf{x}_0} \boxtimes \nu_c$ pri čemu je (kao i u Primjeru I.8) $\nu_c = c^d|\hat{v}(c\cdot)|^2\lambda$ Lebesgueova mjera s težinom $c^d|\hat{v}(c\cdot)|^2$ u Fourierovom prostoru.

Time smo dobili da je $(u_n)$ $(\omega_n)$-čist (u smislu jednoskalnih H-mjera) za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ za koju limes $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ postoji u $[0,\infty]$. ∎

U prethodnim primjerima smo mogli vidjeti da jednoskalna H-mjera, kao i poluklasična mjera, ovisi o karakterističnoj duljini pripadnog niza, ali pritom nema gubljenja informacije kao kod poluklasičnih mjera (npr. kod titrajućeg niza jednoskalna H-mjera sadrži informaciju o smjerovima titranja za svaki izbor karakteristične duljine $(\omega_n)$), pa za svaku karakterističnu duljinu iz jednoskalne H-mjere možemo rekonstruirati pripadnu H-mjeru. Isto se može zaključiti promatranjem Primjera I.6, a kojeg smo dodatno analizirali u četvrtom odjeljku prvog poglavlja. Naime, niz $u_n + v_n = e^{2\pi i \frac{\mathsf{k}}{\varepsilon_n}\cdot\mathbf{x}} + e^{2\pi i \frac{\mathsf{s}}{\varepsilon_n^2}\cdot\mathbf{x}}$ je $(\omega_n)$-čist (u smislu jednoskalnih H-mjera) za svaku karakterističnu duljinu $(\omega_n)$ za koju limes $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ postoji u $[0,\infty]$, a pripadne (jedinstvene) jednoskalne H-mjere su dane s

$$\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{(\omega_n)} = \lambda \boxtimes \begin{cases} (\delta_{\infty\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}} + \delta_{\infty\frac{\mathsf{s}}{|\mathsf{s}|}}) & , \qquad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0 \\ (\delta_{\frac{\mathsf{k}}{c}} + \delta_{\infty\frac{\mathsf{s}}{|\mathsf{s}|}}) & , \qquad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ (\delta_{0\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}} + \delta_{\infty\frac{\mathsf{s}}{|\mathsf{s}|}}) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty \;\&\; \lim_n \frac{\varepsilon_n^2}{\omega_n} = 0 \\ (\delta_{0\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}} + \delta_{\frac{\mathsf{s}}{c}}) & , \qquad \lim_n \frac{\varepsilon_n^2}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ (\delta_{0\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}} + \delta_{0\frac{\mathsf{s}}{|\mathsf{s}|}}) & , \qquad \lim_n \frac{\varepsilon_n^2}{\omega_n} = \infty \end{cases} ,$$

odnosno za svaki izbor karakteristične duljine možemo iz jednoskalne H-mjere rekonstruirati pripadnu H-mjeru (vidi odjeljak I.4). Nadalje, sažimanjem $\Sigma_0$ u ishodište, te restringiranjem na $\mathbf{R}^d$ uočavamo da također možemo dobiti pripadne poluklasične mjere.

Preciznije, po Lemi 2 i definiciji poluklasičnih, odnosno jednoskalnih H-mjera, imamo da se poluklasična mjera $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ i jednoskalna H-mjera $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ pridružene istom (pod)nizu i s istom karakterističnom duljinom podudaraju na $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ uz nužan uvjet da je limes promatranog (pod)niza trivijalan. Naravno, po neprekinutosti, slijedi da se onda podudaraju i na $\mathrm{C}_c(\Omega) \times \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$.

Analogno, koristeći Lemu 2 i definicije H-mjera i jednoskalnih H-mjera imamo:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes (\psi \circ \boldsymbol{\pi}) \rangle &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})\Big) \psi\Big(\boldsymbol{\pi}(\omega_n \boldsymbol{\xi})\Big)\, d\boldsymbol{\xi} \\ &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})\Big) \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\mu}_H, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi \rangle , \end{aligned}$$

pri čemu su $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ proizvoljne probne funkcije, dok su H-mjera $\boldsymbol{\mu}_H$ i jednoskalna H-mjera $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ pridružene istom (pod)nizu. Možemo reći da upravo ova veza između H-mjera i jednoskalnih H-mjera opravdava naziv *jednoskalna H-mjera* u smislu da je taj objekt H-mjera s jednom karakterističnom duljinom.

Sažmimo prethodno razmatranje u obliku korolara:

**Korolar 7.** *Neka $\omega_n \longrightarrow 0^+$ i neka su $\boldsymbol{\mu}_H$, $\boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_n)}$ i $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{(\omega_n)}$ H-mjera, poluklasična mjera, odnosno jednoskalna H-mjera pridružene istom (pod)nizu, slabo konvergentnom k nuli. Tada za svaki izbor probnih funkcija $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$ vrijedi*

*i)* $(\forall\, \psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1}))\;\; \langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{(\omega_n)}, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes (\psi \circ \boldsymbol{\pi}) \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}_H, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi \rangle$

*ii)* $(\forall\, \psi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d))\;\; \langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{(\omega_n)}, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}_{sc}^{(\omega_n)}, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi \rangle.$ ∎

**Napomena 4.** Premda nizu $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u} \neq \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ ne možemo pridružiti jednoskalnu H-mjeru, limes (pod)niza integrala u Teoremu 1 možemo eksplicitno izračunati. Naime, stavljajući $\mathsf{u}_n = (\mathsf{u}_n - \mathsf{u}) + \mathsf{u}$, po Teoremu 1 i činjenici da integral umnoška slabo i jako konvergentnog niza konvergira u $\mathbf{C}$, dobivamo

$$\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\Big)\psi(\omega_{n'}\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}$$

$$= \langle \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi\rangle + \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi})\Big)(\psi_0 \circ \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}\,,$$

gdje je $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ jednoskalna H-mjera pridružena (pod)nizu $(\mathsf{u}_{n'} - \mathsf{u})$, dok je $\psi_0 \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ definiran u (4). Nadalje, ako uzmemo $\psi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ (dakle $\psi_0 \equiv \psi(\mathsf{0})$) i primijenimo Plancherelovu formulu, po prethodnom korolaru iz gornjeg izraza slijedi (3). Dakle, u slučaju kad je limes promatranog niza poznat, poluklasičnu mjeru možemo u potpunosti odrediti iz pripadne jednoskalne H-mjere. ∎

## 5. Lokalizacijsko svojstvo

Sljedeći korak je ispitivanje svojstva jednoskalnih H-mjera određenih rješenjima linearnih diferencijalnih jednadžbi s varijabilnim koeficijentima. Preciznije, proučavat ćemo niz sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi reda $m \in \mathbf{N}$ s karakterističnom duljinom

$$\sum_{l \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l} \partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n) = \mathsf{f}_n\,, \tag{11}$$

na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, pri čemu je $(\varepsilon_n)$ omeđen niz pozitivnih brojeva, te $l \in 0..m$. Cilj nam je dobiti neki podatak o (nekom) gomilištu pripadnih rješenja (npr. kad će slaba kompaktnost u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ povlačiti jaku), za što ćemo koristiti jednoskalne H-mjere.

Najprije ćemo postaviti pretpostavke na konvergenciju niza desnih strana $(\mathsf{f}_n)$, te pokazati nekoliko rezultata koji će nam trebati u nastavku. Zatim ćemo u slučaju kad su karakteristična duljina mjere i sustava jednadžbi jednake prezentirati poboljšanje Tartarovog rezultata iz [53, Lemma 32.7], a potom poopćenja s varijabilnim karakterističnim duljinama. Na kraju ćemo pokazati da se iz dobivenih rezultata mogu izvesti lokalizacijska svojstva H-mjera i poluklasičnih mjera, te naposljetku izvesti inačicu kompaknosti kompenzacijom s karakterističnom duljinom.

Niz $(\varepsilon_n)$ prirodno se javlja u pretpostavci konvergencije desne strane. Preciznije, za niz $(\mathsf{f}_n)$ u $\mathrm{H}^{-m}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$ zanimljiva će nam biti konvergencija u sljedećem smislu

$$\frac{\widehat{\mathsf{f}_n}}{1 + k_n} \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)\,, \tag{12}$$

gdje je $k_n(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{s=l}^m \varepsilon_n^{s-l} |\boldsymbol{\xi}|^s$. Zapravo, lokalizirana inačica pokazat će se prikladnijom: ukoliko imamo niz $(\mathsf{f}_n)$ u $\mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^q)$, promatrat ćemo lokaliziranu inačicu prethodnog uvjeta

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)) \qquad \frac{\widehat{\varphi \mathsf{f}_n}}{1 + k_n} \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)\,, \tag{13}$$

pri čemu implicitno pretpostavljamo proširenje funkcija nulom na cijeli $\mathbf{R}^d$ da bi Fourierova pretvorba bila dobro definirana.

Karakterizaciju prethodne konvergencije dajemo sljedećom lemom.

**Lema 7.** *Neka je $(\varepsilon_n)$ niz pozitivnih brojeva. Tada je (12) ekvivalentno s*

$$\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+h_n} \longrightarrow 0 \quad u \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,,$$

*gdje je* $h_n(\boldsymbol{\xi}) := |\boldsymbol{\xi}|^l + \varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m$.

*Štoviše, ukoliko dodatno pretpostavimo da postoje* $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty > 0$ *takvi da* $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \varepsilon_\infty$*, (12) je ekvivalentno s konvergencijom u prostoru* $\mathrm{H}^{-m}(\Omega;\mathbf{C}^q)$.

Dem. Dokažimo najprije prvi dio tvrdnje. Dovoljno je pokazati da je $\frac{1+h_n}{1+k_n}$ omeđeno odozgo i odozdo pozitivnom konstantom na $\mathbf{R}^d$. Očito je za $l \neq m$ odozgo omeđeno s 1, dok je za $l = m$ odozgo omeđeno s 2. Iz

$$\max\{1, \varepsilon_n|\boldsymbol{\xi}|, \dots, (\varepsilon_n|\boldsymbol{\xi}|)^{m-l}\} = \max\{1, (\varepsilon_n|\boldsymbol{\xi}|)^{m-l}\}$$

slijedi da je $1 + k_n(\boldsymbol{\xi}) = 1 + |\boldsymbol{\xi}|^l \sum_{s=l}^m (\varepsilon_n|\boldsymbol{\xi}|)^{s-l} \leqslant 1 + (m-l+1)h_n(\boldsymbol{\xi})$, pa imamo

$$\frac{1+h_n(\boldsymbol{\xi})}{1+k_n(\boldsymbol{\xi})} \geqslant \frac{1+h_n(\boldsymbol{\xi})}{1+(m-l+1)h_n(\boldsymbol{\xi})} \geqslant \frac{1}{m-l+1}\,,$$

čime je prvi dio leme pokazan.

Koristeći netom pokazanu tvrdnju, ocjene

$$\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l + \varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m} \leqslant \frac{1}{\min\{1,\varepsilon_0^{m-l}\}}\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l+|\boldsymbol{\xi}|^m} \leqslant \max\{1,\varepsilon_0^{l-m}\}\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^m}\,,$$

i

$$\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l + \varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m} \geqslant \frac{1}{\max\{1,\varepsilon_\infty^{m-l}\}}\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l+|\boldsymbol{\xi}|^m} \geqslant \frac{\min\{1,\varepsilon_\infty^{l-m}\}}{2}\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^m}\,,$$

te teorem o sendviču, zaključujemo da je (12) ekvivalentno s

$$\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol{\xi}|^m} \longrightarrow 0 \quad \mathrm{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,,$$

što je upravo jaka konvergencija u prostoru $\mathrm{H}^{-m}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$.

**Q.E.D.**

Konvergenciju iz iskaza prethodne leme za $l = 0$ možemo ekvivalentno zapisati s $\|\mathsf{f}_n\|_{\mathrm{H}^{-m}_{\varepsilon_n}} \longrightarrow 0$, pri čemu je $\|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{H}^s_h} := \int_{\mathbf{R}^d}(1+|h\boldsymbol{\xi}|^2)^s|\hat{\mathsf{f}}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}$ *poluklasična norma* funkcije $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$ [56, Section 7.1].

Iz dokaza prethodne leme zaključujemo da za omeđen niz pozitivnih brojeva $(\varepsilon_n)$ uvjet (12) povlači jaku konvergenciju u prostoru $\mathrm{H}^{-m}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. S druge strane, očito jaka konvergencija u prostoru $\mathrm{H}^{-l}(\Omega;\mathbf{C}^q)$ povlači (12), čime dobivamo da je potonja konvergencija između konvergencija u $\mathrm{H}^{-l}$ i $\mathrm{H}^{-m}$ u slučaju kad je $(\varepsilon_n)$ omeđeni niz pozitivnih brojeva.

U sljedećem teoremu ćemo pokazati uz koji dodatni uvjet (12) povlači konvergenciju u $\mathrm{H}^{-l}$.

**Teorem 2.** *Neka je* $(\varepsilon_n)$ *niz u* $\mathbf{R}^+$ *i* $(\mathsf{f}_n)$ *niz vektorskih funkcija u* $\mathrm{H}^{-l}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. *Sljedeće je ekvivalentno:*

*a)* $(\mathsf{f}_n)$ *zadovoljava (12) (uz* $m \geq l$*) i*

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n}\int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\varepsilon_n}}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l}\Big|^2 d\boldsymbol\xi = 0\,. \tag{14}$$

*b)* $\mathsf{f}_n \longrightarrow 0$ *u* $\mathrm{H}^{-l}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$.

Dem. Ranije smo komentirali da jaka konvergencija k nuli u $\mathrm{H}^{-l}$ povlači (12), dok (14) slijedi iz ocjene

$$\int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\varepsilon_n}}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l}\Big|^2 d\boldsymbol\xi \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}^d}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l}\Big|^2 d\boldsymbol\xi\,.$$

Dokažimo sada da (a) povlači (b). Razdvojimo $\|\mathsf{f}_n\|^2_{\mathrm{H}^{-l}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)}$ na dva integrala:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^d}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l}\Big|^2 d\boldsymbol\xi = \int\limits_{|\boldsymbol\xi|\geqslant\frac{R}{\varepsilon_n}}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l}\Big|^2 d\boldsymbol\xi + \int\limits_{|\boldsymbol\xi|<\frac{R}{\varepsilon_n}}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l}\Big|^2 d\boldsymbol\xi\,.$$

Iz (14) slijedi da je prvi član na desnoj strani proizvoljno malen za $R$ dovoljno velik (jednoliko s obzirom na dovoljno veliki $n$). Za drugi član imamo

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\boldsymbol\xi|<\frac{R}{\varepsilon_n}}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l}\Big|^2 d\boldsymbol\xi &\leqslant \int\limits_{|\boldsymbol\xi|<\frac{R}{\varepsilon_n}}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l+\varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol\xi|^m}\Big|^2\Big(1+\frac{|\varepsilon_n\boldsymbol\xi|^m}{\varepsilon_n^l+|\varepsilon_n\boldsymbol\xi|^l}\Big)^2 d\boldsymbol\xi\\ &\leqslant (1+R^{m-l})^2\int\limits_{\mathbf{R}^d}\Big|\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+|\boldsymbol\xi|^l+\varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol\xi|^m}\Big|^2 d\boldsymbol\xi\,,\end{aligned}$$

što po pretpostavci teži nuli za svaki $R$ pri $n\to\infty$.

**Q.E.D.**

**Napomena 5.** Relacija (14) za $l = 0$ nalikuje pretpostavci Riesz-Kolmogorovljevog teorema kompaktnosti [13, Section 4.5], s tim da je naš uvjet slabiji kako se pojavljuje mali parametar $(\varepsilon_n)$. Lokalizirana inačica uvjeta (14) ($\mathsf{f}_n$ zamijenimo s $\varphi\mathsf{f}_n$ za proizvoljnu probnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$) je zapravo slabija inačica $(\varepsilon_n)$-titrajućeg svojstva (vidi odjeljak I.2) prilagođena $\mathrm{H}^{-l}$ prostoru. ∎

Iz prethodnog teorema također možemo zaključiti da općenito slaba konvergencija k nuli u $\mathrm{H}^{-l}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^q)$ ne povlači uvjet (13). Naime, titrajni niz konvergira slabo k nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, a za dobar izbor frekvencije titranja također možemo dobiti da je i $(\varepsilon_n)$-titrajući (vidi Primjer I.4), pa time i da zadovoljava lokalizirani uvjet (14) za $l = 0$. Ako bi zadovoljavao i (13), onda bi po prethodnom teoremu nužno i jako konvergirao nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ što znamo da općenito nije slučaj.

U računima će se često javljati pretkompaktni nizovi u $\mathrm{H}^{-k}$, gdje je $k$ proizvoljan cijeli broj između $l$ i $m$, za koje vrijedi sljedeće.

**Lema 8.** *Neka je* $(\varepsilon_n)$ *niz u* $\mathbf{R}^+$ *omeđen odozgo i* $(\mathsf{f}_n)$ *niz vektorskih funkcija koji za neki* $k \in l..m$ *jako konvergira k* $\mathsf{f}$ *u prostoru* $\mathrm{H}^{-k}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. *Tada niz* $(\varepsilon_n^{k-l}(\mathsf{f}_n - \mathsf{f}))$ *zadovoljava uvjet (12).*

*Nadalje, ako dodatno pretpostavimo da* $(\varepsilon_n)$ *konvergira nuli, tada*

$$\frac{\varepsilon_n^{k-l}\widehat{\mathsf{f}_n}}{1+k_n} \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \begin{cases} \frac{\hat{\mathsf{f}}}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l}, & k=l \\ 0, & k \geqslant l+1 \end{cases} . \tag{15}$$

Dem. Neka je $\varepsilon_\infty > 0$ gornja međa niza $(\varepsilon_n)$. Iz sljedeće ocjene

$$\frac{\varepsilon_n^{k-l}|(\widehat{\mathsf{f}}_n - \widehat{\mathsf{f}})(\boldsymbol{\xi})|}{1+k_n(\boldsymbol{\xi})} \leqslant \frac{\varepsilon_n^{k-l}|(\widehat{\mathsf{f}}_n - \widehat{\mathsf{f}})(\boldsymbol{\xi})|}{1+\varepsilon_n^{k-l}|\boldsymbol{\xi}|^k} \leqslant \frac{|(\widehat{\mathsf{f}}_n - \widehat{\mathsf{f}})(\boldsymbol{\xi})|}{\frac{1}{\varepsilon_\infty^{k-l}}+|\boldsymbol{\xi}|^k} \leqslant C\frac{|(\widehat{\mathsf{f}}_n - \widehat{\mathsf{f}})(\boldsymbol{\xi})|}{1+|\boldsymbol{\xi}|^k},$$

pri čemu je $C = \max\{1, \varepsilon_\infty^{k-l}\}$, izravno slijedi prvi dio tvrdnje.

Drugi dio tvrdnje pokazujemo tako da raspišemo lijevi izraz u (15) dodavanjem i oduzimanjem $\mathsf{f}$ od $\mathsf{f}_n$. Član koji sadrži razliku $\mathsf{f}_n - \mathsf{f}$ konvergira jako k nuli po prvom dijelu tvrdnje, dok ćemo za preostali član iskoristiti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji. Naime, $\frac{\varepsilon_n^{k-l}}{1+k_n(\boldsymbol{\xi})}$ teži nuli po točkama za $k \geqslant l+1$, odnosno k $\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l}$ u slučaju $k = l$. Dominirajuću funkciju dobivamo ponavljajući gornju ocjenu:

$$\frac{\varepsilon_n^{k-l}|\hat{\mathsf{f}}(\boldsymbol{\xi})|}{1+k_n(\boldsymbol{\xi})} \leqslant \frac{\varepsilon_n^{k-l}|\hat{\mathsf{f}}(\boldsymbol{\xi})|}{1+\varepsilon_n^{k-l}|\boldsymbol{\xi}|^k} \leqslant \frac{|\hat{\mathsf{f}}(\boldsymbol{\xi})|}{\frac{1}{\varepsilon_\infty^{k-l}}+|\boldsymbol{\xi}|^k} \leqslant C\frac{|\hat{\mathsf{f}}(\boldsymbol{\xi})|}{1+|\boldsymbol{\xi}|^k} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q).$$

Time je zaključen dokaz druge tvrdnje.

**Q.E.D.**

Ako $(\mathsf{f}_n)$ zadovoljava (13), primjena prethodnih rezultata na $\varphi\mathsf{f}_n$, za proizvoljnu $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, povlači da su svi dobiveni zaključci uz uvjet (12) također istiniti i za njegovu lokaliziranu inačicu (13), s jedinom razlikom u zamjeni prostora $\mathrm{H}^{-k}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$ s lokalnim inačicama $\mathrm{H}^{-k}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^q)$.

### Slučaj $\omega_n = \varepsilon_n$

U posebnom slučaju $l = 1$, Luc Tartar [53, Lemma 32.7] je dokazao lokalizacijsko svojstvo jednoskalnih H-mjera s karakterističnom duljinom jednakoj karakterističnoj duljini promatranog sustava (11). Međutim, iz dobivenog rezultata se ne mogu dobiti nikakve informacije o pripadnoj jednoskalnoj H-mjeri na skupu $\Sigma_0$ (u primjerima 2 i 3 se vidi da se može dogoditi da je upravo nosač cijele mjere sadržan u $\Sigma_0$). U sljedećim teoremima poopćujemo postojeći rezultat na općenitije sustave, te također rješavamo spomenuti nedostatak dobivajući informaciju o nosaču mjere na cijelom skupu gdje je definirana.

Najprije ćemo prikazati rezultate za jednoskalne H-mjere s karakterističnom duljinom $(\omega_n)$ jednakoj karakterističnoj duljini promatranog sustava (kao u Tartarovom pristupu), te ćemo ih kasnije poopćiti u slučaju proizvoljne karakteristične duljine.

**Teorem 3.** *Neka* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *zadovoljava (11), pri čemu* $\varepsilon_n \to 0^+$, $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}(\Omega;\mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, *dok je* $(\mathsf{f}_n)$ *niz funkcija iz* $\mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^q)$ *koji zadovoljava (13).*

*Tada pripadna jednoskalna H-mjera* $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ *karakteristične duljine* $(\varepsilon_n)$ *zadovoljava:*

(16) $$\mathbf{p}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{\top} = \mathbf{0}\,,$$

*pri čemu je*

(17) $$\mathbf{p}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\,.$$

Dem. Dokaz ćemo podijeliti u tri koraka.

**I.** U prvom koraku lokalizirajmo (11) množenjem s proizvoljnom probnom funkcijom $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, te koristeći Leibnizovo pravilo dano u Lemi 9 dobivamo

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\ \sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\Big((\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi)\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n\Big) = \varphi\mathsf{f}_n\,.$$

Cilj nam je pokazati da članovi uz $\boldsymbol{\beta} \neq \mathsf{0}$ na lijevoj strani prethodne jednakosti zadovoljavaju uvjet konvergencije desne strane (12), tj. da ih možemo prebaciti na desnu stranu.

Za dane $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ niz $\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\Big((\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi)\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n\Big)$ je nošen u čvrstom kompaktu $(\operatorname{supp}\varphi)$, dakle, po Rellichovom teoremu kompaktnosti, za $\boldsymbol{\beta} \neq \mathsf{0}$ je jako pretkompaktan u $\mathrm{H}^{-|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega;\mathbf{C}^q)$, pa time (zbog slabe konvergencije niza $(\mathsf{u}_n)$ k $\mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$) i jako konvergira k $\mathsf{0}$ u navedenom prostoru. Nadalje, po Lemi 8 izraz $\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\Big((\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi)\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n\Big)$ zadovoljava (12).

Zbog proizvoljnosti $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ dobivamo tvrdnju, pa gornju jednakost možemo jednostavnije zapisati kao

(18) $$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\mathsf{u}_n) = \tilde{\mathsf{f}}_n\,,$$

pri čemu $(\tilde{\mathsf{f}}_n)$ zadovoljava (12).

**II.** Prethodnu jednakost dovest ćemo u oblik u kojem ćemo imati konvergenciju u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$, tj. primijenit ćemo Fourierovu pretvorbu i pomnožiti cijelu jednakost s $\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l+\varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m}$:

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\mathsf{u}_n}}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l+\varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m} = \frac{\widehat{\tilde{\mathsf{f}}_n}}{1+|\boldsymbol{\xi}|^l+\varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m}\,.$$

Po pretpostavci, nakon primjene Leme 7, desna strana jednakosti teži jako k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$ pa isto vrijedi i za lijevu stranu. Štoviše, pomoću Leme 10 (vidi niže) dobivamo i da

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l+\varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m}\widehat{\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\mathsf{u}_n} \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,.$$

Zaista, za $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant r$ imamo $|\boldsymbol{\xi}|^l + \varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m \geqslant r^l$, dok iz ocjene

$$\left|\frac{\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l + \varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m}\right| \leqslant \frac{|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}}{1 + |\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^{m-l}} \leqslant 1\,,$$

slijedi potrebna ekviintegrabilnost, čime je primjena Leme 10 opravdana.

**III.** Radi dobivanja jednoskalnih H-mjera, zapišimo posljednju sumu u obliku

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^l + |\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^m}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\varphi \mathsf{u}_n} \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,,$$

pri čemu se funkcija $\boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l+|\boldsymbol{\xi}|^m}$ nalazi u prostoru $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ (vidi Primjer 1).

Nakon množenja gornje sume s $\psi(\varepsilon_n\cdot)$, za $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, te tenzorskog množenja s $\widehat{\varphi_1\mathsf{u}_n}$, za $\varphi_1 \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, po definiciji jednoskalnih H-mjera slijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \psi(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})\Bigg(\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^l + |\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^m}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\varphi\mathsf{u}_n}\Bigg) \otimes \Big(\widehat{\varphi_1\mathsf{u}_n}\Big)\,d\boldsymbol{\xi} \\ &= \left\langle \overline{\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi\bar{\varphi}_1 \boxtimes \psi \right\rangle .\end{aligned}$$

Budući da je $\varphi_1$ po volji odabrana funkcija, odaberemo je tako da bude jednaka 1 na nosaču funkcije $\varphi$, te uz korištenje hermitičnosti matrične Radonove mjere $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$, dobivamo tvrdnju.

**Q.E.D.**

**Lema 9.** *Za svaki multiindeks $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$, te za svaku funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ i distribuciju $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vrijedi:*

$$\varphi\partial_{\boldsymbol{\alpha}}S = \sum_{\mathsf{0}\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}(-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\Big((\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi)S\Big)\,.$$

Dem. Dokazat ćemo da prethodna jednakost vrijedi tako da desnu stranu raspišemo koristeći (standarnu) *Leibnizovu formulu*:

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\varphi S) = \sum_{\mathsf{0}\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}S\,,$$

pa dobivamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant\boldsymbol\beta\leqslant\boldsymbol\alpha}\;\sum_{0\leqslant\boldsymbol\gamma\leqslant\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\beta}(-1)^{|\boldsymbol\beta|}\binom{\boldsymbol\alpha}{\boldsymbol\beta}\binom{\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\beta}{\boldsymbol\gamma}(\partial_{\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\gamma}\varphi)(\partial_{\boldsymbol\gamma}S) &= \\
&= \sum_{0\leqslant\boldsymbol\beta\leqslant\boldsymbol\alpha}\;\sum_{0\leqslant\boldsymbol\gamma\leqslant\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\beta}(-1)^{|\boldsymbol\beta|}\binom{\boldsymbol\alpha}{\boldsymbol\gamma}\binom{\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\gamma}{\boldsymbol\beta}(\partial_{\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\gamma}\varphi)(\partial_{\boldsymbol\gamma}S) \\
&= \sum_{0\leqslant\boldsymbol\gamma\leqslant\boldsymbol\alpha}\binom{\boldsymbol\alpha}{\boldsymbol\gamma}(\partial_{\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\gamma}\varphi)(\partial_{\boldsymbol\gamma}S)\sum_{0\leqslant\boldsymbol\beta\leqslant\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\gamma}(-1)^{|\boldsymbol\beta|}\binom{\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\gamma}{\boldsymbol\beta} \\
&= \sum_{0\leqslant\boldsymbol\gamma\leqslant\boldsymbol\alpha}\binom{\boldsymbol\alpha}{\boldsymbol\gamma}(\partial_{\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\gamma}\varphi)(\partial_{\boldsymbol\gamma}S)\prod_{i=1}^{d}\;\sum_{0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i-\gamma_i}(-1)^{\beta_i}\binom{\alpha_i-\gamma_i}{\beta_i} \\
&= \sum_{0\leqslant\boldsymbol\gamma\leqslant\boldsymbol\alpha}\binom{\boldsymbol\alpha}{\boldsymbol\gamma}(\partial_{\boldsymbol\alpha-\boldsymbol\gamma}\varphi)(\partial_{\boldsymbol\gamma}S)\prod_{i=1}^{d}\delta_{\alpha_i\gamma_i} \\
&= \varphi(\partial_{\boldsymbol\alpha}S)\,,
\end{aligned}
$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili

$$
\binom{\alpha_i}{\beta_i}\binom{\alpha_i-\beta_i}{\gamma_i}=\binom{\alpha_i}{\gamma_i}\binom{\alpha_i-\gamma_i}{\beta_i}\,,
$$

dok

$$
\delta_{\alpha_i\gamma_i}:=\begin{cases}(1-1)^{\alpha_i-\gamma_i}=0 & ,\quad \gamma_i<\alpha_i\\ 1 & ,\quad \gamma_i=\alpha_i\end{cases}\,,
$$

predstavlja *Kroneckerov simbol.*

**Q.E.D.**

Sljedeća lema je poopćenje tvrdnje dane u [7, Lemma 3], dok je nešto općenitija tvrdnja dana u [4, Lemma 9].

**Lema 10.** *Neka je $(\mathsf{f}_n)$ niz izmjerivih vektorskih funkcija na $\mathbf{R}^d$ i $(h_n)$ niz pozitivnih skalarnih funkcija koje su jednoliko omeđene odozdo izvan svake okoline ishodišta, tj.*

$$
(\forall\, r>0)(\exists\, \tilde C>0)(\forall\, n\in\mathbf{N})(\forall\, \boldsymbol\xi\in\mathbf{R}^d\setminus \mathrm{K}(0,r))\qquad h_n(\boldsymbol\xi)\geqslant \tilde C\,.
$$

*Nadalje, neka je $(\mathsf{u}_n)$ niz omeđenih funkcija u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)\cap\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, te*

$$
\frac{\mathsf{f}_n}{1+h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\longrightarrow 0\quad u\quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,.
$$

*Ukoliko je $(h_n^{-2}|\mathsf{f}_n|^2)$ ekviintegrabilan, tj.*

$$
(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\delta>0)(\forall\, n\in\mathbf{N})(\forall\, A\in\mathcal{B})\quad \lambda(A)<\delta\quad\Longrightarrow\quad \int_A\Big(\frac{|\mathsf{f}_n|}{h_n}\Big)^2 d\boldsymbol\xi<\varepsilon\,,
$$

*pri čemu je $\mathcal{B}$ Borelova $\sigma$-algebra i $\lambda$ Lebesgueova mjera na $\mathbf{R}^d$, tada vrijedi i*

$$
\frac{\mathsf{f}_n}{h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\longrightarrow 0\quad u\quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,.
$$

Dem. Budući da je Fourierova pretvorba neprekinuto preslikavanje s $\mathrm{L}^1$ u $\mathrm{L}^\infty$, možemo sa $S \in \mathbf{R}$ označiti supremum niza $(\|\hat{\mathsf{u}}_n\|_{\mathrm{L}^\infty})$. Iz ekviintegrabilnosti niza $(h_n^{-2}|\mathsf{f}_n|^2)$ slijedi da za dani $\varepsilon > 0$ možemo uzeti kuglu $K = \mathrm{K}(\mathsf{0}, r)$ takvu da je $\|h_n^{-1}\mathsf{f}_n\|_{\mathrm{L}^2(K;\mathbf{C}^r)} < \frac{\varepsilon}{2S}$.

Time dobivamo da je

$$\left\|\frac{\mathsf{f}_n}{h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\right\|_{\mathrm{L}^2(K)} \leqslant \left\|\frac{|\mathsf{f}_n|}{h_n}|\hat{\mathsf{u}}_n|\right\|_{\mathrm{L}^2(K)} \leqslant \left\|\frac{\mathsf{f}_n}{h_n}\right\|_{\mathrm{L}^2(K;\mathbf{C}^r)}\|\hat{\mathsf{u}}_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

pa je u izrazu

$$\left\|\frac{\mathsf{f}_n}{h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} = \left\|\frac{\mathsf{f}_n}{h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d\setminus K)} + \left\|\frac{\mathsf{f}_n}{h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\right\|_{\mathrm{L}^2(K)}$$

ostalo još ocijeniti prvi član na desnoj strani jednakosti.

Iz pretpostavke leme slijedi da postoji konstanta $\tilde{C} > 0$ takva da $h_n(\boldsymbol{\xi}) \geqslant \tilde{C}$ za $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d \setminus K$, pa na $\mathbf{R}^d \setminus K$ za $C = 1/\tilde{C} + 1$ imamo

$$\frac{1}{h_n} \leqslant \frac{C}{1+h_n}\,,$$

odnosno

$$\frac{|\mathsf{f}_n\cdot\hat{\mathsf{u}}_n|}{h_n} \leqslant C\frac{|\mathsf{f}_n\cdot\hat{\mathsf{u}}_n|}{1+h_n}\,,$$

iz čega slijedi

$$\left\|\frac{\mathsf{f}_n}{h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d\setminus K)} \leqslant C\left\|\frac{\mathsf{f}_n}{1+h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d\setminus K)} \leqslant C\left\|\frac{\mathsf{f}_n}{1+h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,.$$

Budući da posljednji član prethodne nejednakosti po pretpostavci teži k 0, to postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi $\|\frac{\mathsf{f}_n}{1+h_n}\cdot\hat{\mathsf{u}}_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2C}$.

**Q.E.D.**

Lokalizacijsko svojstvo iz prethodnog teorema je dobiveno uz pretostavku da niz desnih strana pripadnog niza jednadžbi zadovoljava (13). Međutim, iako se može reći da je ta pretpostavka prilagođena proučavanom problemu (nizu jednadžbi), prirodno se zapitati je li to i nužan uvjet za dobivanje lokalizacijskog svojstva. Drugim riječima, pitanje je postoji li slabija pretpostavka uz koju možemo dobiti isti rezultat.

U sljedećem teoremu odgovorit ćemo na postavljeno pitanje, slično kao što je bio slučaj s lokalizacijskim svojstvom (klasičnih) H-mjera [53, Lemma 28.18], tako da ćemo pokazati da je uvjet (13) također i nužan uvjet za dobivanje lokalizacijskog svojstva.

**Teorem 4.** *Neka $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ određuje jednoskalnu H-mjeru $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ karakteristične duljine $(\varepsilon_n)$, te $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}(\Omega;\mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$ za $l \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$.*

*Ako zaključak prethodnog teorema vrijedi, tada je (13) nužno zadovoljeno uz $\mathsf{f}_n$ definiran s (11).*

Dem. Po prvom koraku dokaza prethodnog teorema i Lemi 7 ekvivalentno je pokazati da za proizvoljnu probnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ vrijedi

$$\frac{\mathcal{F}\Big(\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\varphi\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n)\Big)}{1+h_n} \longrightarrow \mathsf{0}$$

u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$. Štoviše, primjenom Fourierove pretvorbe i korištenjem jednostavne nejednakosti $1 + |\boldsymbol{\xi}|^l + \varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m \geqslant |\boldsymbol{\xi}|^l + \varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol{\xi}|^m$, dovoljno je pokazati da

$$\mathsf{w}_n := \sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^l + |\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^m} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \widehat{\varphi \mathsf{u}_n} \longrightarrow 0$$

u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$. Međutim, iz definicije jednoskalnih H-mjera imamo

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \mathsf{w}_n \otimes \mathsf{w}_n \, d\boldsymbol{\xi} = \left\langle \overline{\mathbf{p}_1 \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^\top \mathbf{p}_1^*}, |\varphi|^2 \boxtimes 1 \right\rangle = \mathbf{0}\,,$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti koristili pretpostavku (16), uz $\mathbf{p}_1$ dan sa (17), čime je dokaz završen.

**Q.E.D.**

Iz dokaza prethodnog teorema zapravo možemo iščitati da je za $(\mathsf{f}_n)$ dan s (11) uvjet (13) ekvivalentan uvjetu

$$(\forall \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)) \qquad \frac{\widehat{\varphi \mathsf{f}_n}}{h_n} \longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)\,.$$

Vratimo se lokalizacijskom svojstvu i za početak uočimo da se tvrdnja Teorema 3 može jednostavno poopćiti i na slučaj kad koeficijenti u proučavanom nizu jednadžbi ovise o $n$.

**Korolar 8.** *Uz iste pretpostavke na $(\mathsf{f}_n)$ i $(\varepsilon_n)$ kao u Teoremu 3, neka $\mathsf{u}_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ zadovoljava*

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l} \partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n) = \mathsf{f}_n\,, \tag{19}$$

*gdje su $\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}(\Omega; \mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, takvi da za svaki $\boldsymbol{\alpha}$ niz $(\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}})$ konvergira k $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}$ u prostoru $\mathrm{C}(\Omega; \mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$ (odnosno, $\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}}$ konvergira jednoliko po kompaktima k $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}$). Tada vrijedi tvrdnja Teorema 3 s istim simbolom (17).*

Dem. Potrebno je pokazati da

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l} \partial_{\boldsymbol{\alpha}}\Big((\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}})\mathsf{u}_n\Big)$$

zadovoljava uvjet konvergencije desne strane (13). Budući da $(\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}})\mathsf{u}_n$ konvergira jako k $0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^q)$, $\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\Big((\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}})\mathsf{u}_n\Big)$ konvergira jako k $0$ u $\mathrm{H}^{-|\boldsymbol{\alpha}|}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^q)$, pa po Lemi 8 slijedi tvrdnja.

**Q.E.D.**

**Napomena 6.** Potencije skale $(\varepsilon_n)$ u (19) strogo prate red derivacija (do na konstantu $l$). Međutim, s malom izmjenom u pretpostavci konvergencije desne strane, prethodni rezultat može biti proširen na niz jednadžbi u kojima nije nužno da su potencije skale i red derivacije u takvom odnosu.

Naime, pretpostavimo da smo krenuli od jednakosti

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l+\delta_\alpha}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n) = \mathsf{f}_n\,,$$

pri čemu je $\delta_\alpha \in \mathbf{R}$. Množenjem gornje jednakosti s $\varepsilon_n^{-\delta}$, uz $\delta := \min \delta_\alpha$, dobivamo

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\left((\varepsilon_n^{\delta_\alpha-\delta}\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}})\mathsf{u}_n\right) = \varepsilon_n^{-\delta}\mathsf{f}_n\,.$$

Za niz $(\mathsf{f}_n)$ pretpostavimo da $(\varepsilon_n^{-\delta}\mathsf{f}_n)$ zadovoljava (13), što je, s obzirom na pretpostavku iz prethodnog korolara, jača pretpostavka za $\delta > 0$, odnosno slabija za $\delta < 0$. Kako prethodna relacija zadovoljava sve pretpostavke prethodnog korolara, njegovom primjenom dobivamo pripadno lokalizacijsko svojstvo. Međutim, dobiveni simbol $\mathbf{p}_1$ ne sadrži članove za koje je $\delta_\alpha > \delta$.

Ovim postupkom ipak dobivamo neku informaciju, ali također još jednom možemo uočiti kako je odnos potencija skale i reda derivacije u (19) optimalan. ∎

### Slučaj $c := \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} \in [0,\infty]$

**Teorem 5.** *Neka* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *zadovoljava (19), pri čemu* $\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} \longrightarrow \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}$ *u prostoru* $\mathrm{C}(\Omega;\mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, *a* $(\mathsf{f}_n)$ *neka je niz u* $\mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^q)$ *koji zadovoljava (13).*

*Ako su* $(\varepsilon_n)$ *i* $(\omega_n)$ *nizovi pozitivnih brojeva takvi da* $c = \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ *postoji (u* $[0,\infty]$*), tada pripadna jednoskalna H-mjera* $\boldsymbol{\mu}^{(\omega_n)}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ *zadovoljava:*

$$\mathbf{p}_c\left(\boldsymbol{\mu}^{(\omega_n)}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}\right)^\top = \mathbf{0}\,, \tag{20}$$

*gdje u ovisnosti o vrijednosti $c$ imamo*

*a)* $c = 0$*:*

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} (2\pi i)^l \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\,, \tag{21}$$

*b)* $c \in \langle 0,\infty\rangle$*:*

$$\mathbf{p}_c(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i c)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\,, \tag{22}$$

*c)* $c = \infty$*:*

$$\mathbf{p}_\infty(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} (2\pi i)^m \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\,. \tag{23}$$

Dem. Najprije ćemo istovremeno dokazati tvrdnju u slučajevima (a) i (b), a potom ćemo zasebnim dokazom pokazati tvrdnju u preostalom slučaju.

Preoblikovanjem (19) dobivamo

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol\alpha|\leqslant m} \omega_n^{|\boldsymbol\alpha|-l}\partial_{\boldsymbol\alpha}(\mathbf{B}_n^{\boldsymbol\alpha}\mathsf{u}_n) = \mathsf{f}_n\,,$$

gdje je $\mathbf{B}_n^{\boldsymbol\alpha} := \left(\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\right)^{|\boldsymbol\alpha|-l}\mathbf{A}_n^{\boldsymbol\alpha}$. Kako za dovoljno veliki $n$ postoji konstanta $\kappa > 0$ takva da $\omega_n > \kappa\varepsilon_n$, ocjenjivanjem nazivnika u (13) lako slijedi da desna strana zadovoljava i (13) kad $(\varepsilon_n)$ zamijenimo s $(\omega_n)$:

$$(\forall\,\varphi\in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)) \qquad \frac{\widehat{\varphi\mathsf{f}_n}}{1+|\boldsymbol\xi|^l+\omega_n^{m-l}|\boldsymbol\xi|^m} \longrightarrow 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,.$$

Primjenom Korolara 8 i činjenice da $(\mathbf{B}_n^{\boldsymbol\alpha})$ konverigra k $c^{|\boldsymbol\alpha|-l}\mathbf{A}^{\boldsymbol\alpha}$ (u slučaju $c=0$ i $|\boldsymbol\alpha|=l$ konvergira k $\mathbf{A}^{\boldsymbol\alpha}$), dobivamo tvrdnju.

**c)** Kao u prethodnom slučaju imamo

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol\alpha|\leqslant m} \omega_n^{|\boldsymbol\alpha|-l}\partial_{\boldsymbol\alpha}\Big(\Big(\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\Big)^{|\boldsymbol\alpha|-l}\mathbf{A}_n^{\boldsymbol\alpha}\mathsf{u}_n\Big) = \mathsf{f}_n\,,$$

međutim, sad je $\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}$ neomeđeno što rješavamo množeći prethodnu jednakost s $\left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)^{m-l}$, te dobivamo

$$\sum_{l\leqslant|\boldsymbol\alpha|\leqslant m} \omega_n^{|\boldsymbol\alpha|-l}\partial_{\boldsymbol\alpha}(\mathbf{B}_n^{\boldsymbol\alpha}\mathsf{u}_n) = \mathsf{g}_n\,,$$

gdje su $\mathbf{B}_n^{\boldsymbol\alpha} := \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)^{m-|\boldsymbol\alpha|}\mathbf{A}_n^{\boldsymbol\alpha}$, a $\mathsf{g}_n := \left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)^{m-l}\mathsf{f}_n$. Još je preostalo vidjeti kako se ponaša desna strana $\mathsf{g}_n$ za veliki $n$.

Za $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\varphi\mathsf{g}_n}}{1+|\boldsymbol\xi|^l+\omega_n^{m-l}|\boldsymbol\xi|^m} &= \frac{\left(\frac{\omega_n}{\varepsilon_n}\right)^{m-l}\widehat{\varphi\mathsf{f}_n}}{1+|\boldsymbol\xi|^l+\omega_n^{m-l}|\boldsymbol\xi|^m} \\
&= \frac{\widehat{\varphi\mathsf{f}_n}}{\left(\frac{\varepsilon_n}{\omega_n}\right)^{m-l}(1+|\boldsymbol\xi|^l)+\varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol\xi|^m} \\
&\leqslant \frac{\widehat{\varphi\mathsf{f}_n}}{1+|\boldsymbol\xi|^l+\varepsilon_n^{m-l}|\boldsymbol\xi|^m} \longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,,
\end{aligned}$$

pri čemu nejednakost vrijedi za dovoljno veliki $n$. Koristeći Korolar 8 i činjenicu da $(\mathbf{B}_n^{\boldsymbol\alpha})$ konvergira nuli za $|\boldsymbol\alpha|\leqslant m-1$, dobivamo tvrdnju.

**Q.E.D.**

**Napomena 7.** Uočimo da za $c=0$ i $c=\infty$ (uz $l<m$) prethodni teorem ne daje nikakvu informaciju o strukturi jednoskalne H-mjere na $\Sigma_\infty$, odnosno na $\Sigma_0$. Ovo je posljedica činjenice da (21) iščezava na $\Sigma_\infty$, odnosno (23) na $\Sigma_0$.

Dodatno, time u spomenuta dva slučaja pripadne simbole možemo zamijeniti homogenima reda nula. Preciznije, ekvivalentno smo prethodni rezultat mogli iskazati tako da $\mathbf{p}_0$ zamijenimo s

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} (2\pi i)^l \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\,,$$

odnosno $\mathbf{p}_\infty$ s

$$\mathbf{p}_\infty(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} (2\pi i)^m \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^m} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\,,$$

ali pri tom (20) vrijedi samo na $\Omega\times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)\setminus\Sigma_\infty$ u (a) dijelu, odnosno na $\Omega\times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)\setminus \Sigma_0$ u (b) dijelu.

∎

Rezultat (c) dijela prethodnog teorema se u posebnom slučaju kad je niz $(\varepsilon_n)$ omeđen odozdo i odozgo pozitivnom konstantom može poboljšati, što je posljedica Leme 7.

**Teorem 6.** *Uz pretpostavke prethodnog teorema za $c=\infty$, pretpostavimo dodatno da postoje pozitivne konstante $\varepsilon_0$ i $\varepsilon_\infty$ takve da je $0<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon_n\leqslant\varepsilon_\infty$. Tada pripadna jednoskalna H-mjera $\boldsymbol{\mu}^{(\omega_n)}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ zadovoljava:*

$$\mathbf{p}_{pr}\Big(\boldsymbol{\mu}^{(\omega_n)}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}\Big)^\top = \mathbf{0}\,,$$

*gdje je*

$$\mathbf{p}_{pr}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} (2\pi i)^m \Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\,. \tag{I.2}$$

Dem. Pretpostavimo najprije da koeficijenti ne ovise o $n$. Kao u prvom koraku dokaza Teorema 3, dobivamo (18). Međutim, u ovom slučaju možemo nastaviti s postupkom i pokazati da i članovi nižeg reda teže nuli u smislu konvergencije desne strane. Naime, Lema 7 nam dodatno daje da $(\tilde{\mathsf{f}}_n)$ teži k $\mathsf{0}$ u $\mathrm{H}^{-m}(\Omega;\mathbf{C}^q)$, a članovi $\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\varphi\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n)$ su pretkompaktni u $\mathrm{H}^{-m}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ za $|\boldsymbol{\alpha}|<m$. Time dobivamo

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} \varepsilon_n^{m-l}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\mathsf{u}_n) \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^{-m}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,,$$

odakle slijedi

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} (2\pi i)^m \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\mathsf{u}_n}}{1+|\boldsymbol{\xi}|^m} \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,,$$

jer je $\varepsilon_n>\varepsilon_0$. Primijetimo da smo u slučaju $l=m$ izravno imali gornju relaciju. Nadalje, primjenom Leme 10 dobivamo

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} (2\pi i)^m \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^m} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\widehat{\varphi\mathsf{u}_n} \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,.$$

Nakon tenzorskog množenja gornjeg izraza s funkcijom $\psi(\omega_n\cdot)\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_n}$, pri čemu je $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, $\varphi_1 \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, te integriranja, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \psi(\omega_n \boldsymbol{\xi}) \Bigg( \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} (2\pi i)^m \frac{(\omega_n\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\omega_n\boldsymbol{\xi}|^m} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \widehat{\varphi \mathsf{u}_n} \Bigg) \otimes \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_n}\Big)\, d\boldsymbol{\xi}\,,\\ &= \Bigg\langle \overline{\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} (2\pi i)^m \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^m} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}} \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi\bar{\varphi}_1 \boxtimes \psi \Bigg\rangle\,.\end{aligned}$$

Budući da je $\varphi_1$ proizvoljna, odaberemo je tako da bude jednaka 1 na nosaču $\varphi$, iz čega slijedi tvrdnja.

Ako koeficijenti ovise o $n$, koristeći gore dokazanu tvrdnju za slučaj kad koeficijenti ne ovise o $n$, istim argumentima kao u Korolaru 8 dobivamo tvrdnju teorema.

**Q.E.D.**

Uočimo da nam u dokazu prethodnog teorema nije bilo potrebno da niz $(\varepsilon_n)$ ima jedinstveno gomilište.

Nadalje, prethodni teorem je uistinu poboljšanje prijašnjeg rezultata danog (c) dijelom Teorema 5, jer simbol (I.2) ne iščezava na sferi oko nule $\Sigma_0$ u kompaktificiranom prostoru $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$, za razliku od simbola (23). Na taj način dobivamo informaciju o pripadnoj jednoskalnoj H-mjeri na cijeloj domeni, pa posebno i na skupu $\Sigma_0$.

**Napomena 8.** Ako $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u} \neq \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, ne možemo pridružiti jednoskalnu H-mjeru nizu $(\mathsf{u}_n)$, ali, kao u [53, Theorem 28.7], možemo izvesti lokalizacijsko svojstvo za pripadni nul-konvergentni niz $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$. Naime, neka $\mathsf{u}_n$ zadovoljava (19), pri čemu $\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}}$ konvergira k $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}$ u $\mathrm{C}(\Omega; \mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, $\varepsilon_n \to 0^+$, dok za vektorski niz funkcija $\mathsf{f}_n \in \mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^q)$ vrijedi da je za svaku probnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ izraz $\frac{\widehat{\varphi \mathsf{f}_n}}{1+k_n}$ pretkompaktan u jakoj topologiji prostora $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$.

Kao u prvom koraku dokaza Teorema 3, možemo lokalizirati niz jednadžbi množenjem s $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ i dobiti

$$\sum_{l \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l} \partial_{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \mathsf{u}_n) = \mathsf{f}_{1,n}\,,$$

gdje je

$$\mathsf{f}_{1,n} := \varphi \mathsf{f}_n - \sum_{l \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \sum_{0 \neq \boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l} \partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \Big( (\partial_{\boldsymbol{\beta}} \varphi) \mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n \Big)\,.$$

Kako $\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \Big( (\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi) \mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n \Big) \longrightarrow \partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \Big( (\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi) \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u} \Big)$ u $\mathrm{H}^{-|\boldsymbol{\alpha}|}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$, po Lemi 8 i pretpostavci na $(\mathsf{f}_n)$, slijedi da je $\frac{\widehat{\mathsf{f}_{1,n}}}{1+k_n}$ pretkompaktan u jakoj topologiji prostora $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$.

Nadalje, nakon oduzimanja cijelog niza lokaliziranih jednakosti s

$$\sum_{l \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-l} \partial_{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \mathsf{u})\,,$$

po linearnosti diferencijalnih operatora s lijeve strane jednakosti, $\mathsf{u}_n$ je zamijenjen s $\mathsf{u}_n - \mathsf{u}$, pa cijela lijeva strana konvergira nuli u smislu distribucija. S druge strane, na desnoj strani smo dobili niz $(\mathsf{f}_{2,n})$ koji i dalje zadovoljava da je $\frac{\widehat{\mathsf{f}_{2,n}}}{1+k_n}$ pretkompaktno, dok iz prethodnog svojstva lijeve strane dobivamo da $\mathsf{f}_{2,n} \rightharpoonup \mathsf{0}$ u smislu distribucija. Sada po Lemi 11 (vidi niže) slijedi da $(\mathsf{f}_{2,n})$ zadovoljava (12). Dakle, sve su pretpostavke Teorema 5 ispunjene pa jednoskalna H-mjera pridružena nizu $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$ zadovoljva (20). ∎

**Lema 11.** *Neka $\varepsilon_n \to 0^+$ i neka je $(\mathsf{f}_n)$ niz vektorskih funkcija iz $\mathrm{H}^{-m}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$ takav da je $\frac{\widehat{\mathsf{f}}_n}{1+k_n}$ pretkompaktno u jakoj topologiji prostora $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. Tada postoji podniz $(\mathsf{f}_{n'})$ i $\mathsf{f} \in \mathrm{H}^{-l}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$ takvi da*

$$\frac{\widehat{\mathsf{f}}_{n'} - \widehat{\mathsf{f}}}{1+k_{n'}} \longrightarrow 0$$

*u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. Štoviše, ako $\mathsf{f}_n \longrightarrow 0$ u smislu distribucija, tada je $\mathsf{f} \equiv 0$ i cijeli niz $(\mathsf{f}_n)$ zadovoljava (12).*

Dem. Po pretpostavkama, postoji podniz $(\mathsf{f}_{n'})$ i $\mathsf{F} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$ takvi da $\frac{\widehat{\mathsf{f}}_{n'}}{1+k_{n'}} \longrightarrow \mathsf{F}$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. Korištenjem Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\frac{\widehat{\mathsf{f}}_{n'} - \widehat{\mathsf{f}}}{1+k_{n'}} \longrightarrow 0$$

u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$, uz $\mathsf{f} := \bar{\mathcal{F}}\Big((1+|\boldsymbol{\xi}|^l)\mathsf{F}\Big) \in \mathrm{H}^{-l}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. Po komentaru danom nakon Leme 7, prethodno povlači da $\mathsf{f}_{n'} \longrightarrow \mathsf{f}$ u $\mathrm{H}^{-m}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$.

Ako dodatno imamo da $\mathsf{f}_n \longrightarrow 0$ u smislu distribucija, tada zbog jedinstvenosti limesa, $\mathsf{f} \equiv 0$ pa $(\mathsf{f}_{n'})$ zadovoljava (12). Kako ovo vrijedi za svaki podniz, dobivamo tvrdnju.

**Q.E.D.**

## 6. Primjena na H-mjere i poluklasične mjere

Kao što smo već ranije više puta istaknuli, iz jednoskalne H-mjere možemo rekonstruirati i pripadnu H-mjeru i pripadnu poluklasičnu mjeru. U sljedeća dva korolara ćemo pokazati da su također i pripadna lokalizacijska svojstva ovih dvaju objekata posljedica netom izvedenog lokalizacijskog svojstva jednoskalnih H-mjera.

**Korolar 9.** *Uz pretpostavke Teorema 6 vrijedi zaključak Teorema I.2, tj. vrijedi*

$$\mathbf{p}_{pr}\boldsymbol{\mu}_H^\top = \mathbf{0}\,,$$

*gdje je $\boldsymbol{\mu}_H$ H-mjera pridružena nizu $(\mathsf{u}_n)$, dok je simbol $\mathbf{p}_{pr}$ dan u (I.2).*

Dem. Kako je simbol (I.2) homogen reda nula po varijabli $\boldsymbol{\xi}$, po Teoremu 6 i Korolaru 7 tvrdnja trivijalno slijedi.

**Q.E.D.**

Tvrdnja prethodnog korolara je općenitija od tvrdnje dane Teoremom I.2 jer omogućuje da koeficijenti proučavanog niza diferencijalnih jednadžbi ovise o $n$. Međutim, takvo poopćenje se moglo dobiti i direktno korištenjem H-mjera i pristupa danog u Korolaru 8.

**Korolar 10.** **(lokalizacijsko svojstvo poluklasičnih mjera)** *Uz pretpostavke Teorema 5 vrijedi*

$$\mathbf{p}\boldsymbol{\mu}_{sc}^\top = \mathbf{0}\,,$$

*gdje je $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ poluklasična mjera karakteristične duljine $(\omega_n)$ pridružene nizu $(\mathsf{u}_n)$, dok*

$$\mathbf{p}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \begin{cases} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l}(2\pi i)^l\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0 \\ \sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}(2\pi i c)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0,\infty\rangle \\ \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}(2\pi i)^m\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty \end{cases}.$$

Dem. Razmotrimo slučaj $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0, \infty\rangle$. Za $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ imamo da preslikavanje $\boldsymbol{\xi} \mapsto (|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m)\psi(\boldsymbol{\xi})$ pripada prostoru $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, pa nakon primjene lokalizacijskog svojstva jednoskalnih H-mjera (preciznije, tvrdnje dane u Teoremu 5(b)) uz probne funkcije $\varphi \boxtimes (|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m)\psi$, $\varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega)$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \left\langle \sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i c)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{\top}, \varphi \boxtimes (|\boldsymbol{\xi}|^l + |\boldsymbol{\xi}|^m)\psi \right\rangle \\
&= \sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \left\langle \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{\top}, \overline{(2\pi i c)^{|\boldsymbol{\alpha}|}} \varphi \boxtimes \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \psi \right\rangle \\
&= \sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \left\langle \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\mu}_{sc}^{\top}, \overline{(2\pi i c)^{|\boldsymbol{\alpha}|}} \varphi \boxtimes \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \psi \right\rangle = \left\langle \sum_{l\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i c)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\mu}_{sc}^{\top}, \varphi \boxtimes \psi \right\rangle ,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u trećoj jednakosti koristili činjenicu da je $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, kao i Korolar 7.

Slučajevi $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0$ i $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty$ slijede analogno.

**Q.E.D.**

Primjenom ovog rezultata na niz jednadžbi

$$
\partial_t u_n - \varepsilon_n \partial_{xx} u_n + b u_n = 0
$$

iz Primjera I.9 dobivamo da je nosač poluklasične mjere pridružene nizu rješenja $(u_n)$ određen s

$$
\mu_{sc}^{(\omega_n)} \subseteq (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}) \times \begin{cases} \{(-b\xi, \xi) : \xi \in \mathbf{R}\} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = 0 \\ \{(0,0)\} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c \in \langle 0, \infty\rangle \\ \{(\tau, 0) : \tau \in \mathbf{R}\} & , \quad \lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = \infty \end{cases} ,
$$

što se lako provjeri da i jest slučaj.

Teorija poluklasičnih mjera je razvijena korištenjem pseudodiferencijalnog računa (vidi odjeljak I.5), što zahtijeva korištenje glatkih funkcija. Ta je činjenica zapravo predstavljala najveću prepreku u oslabljivanju zahtjeva na glatkoću koeficijenata proučavanog sustava. Slijedeći Tartarov pristup, teorija jednoskalnih H-mjera je izgrađena bez potrebe za glatkim funkcijama, što nam je i omogućilo da bez tehničkih poteškoća poopćimo postojeće rezultate poluklasičnih mjera i na (samo) neprekinute funkcije. Nadalje, pretpostavka desne strane (13) je slabiji zahtjev od konvergencije u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$ (što je standardna pretpostavka kod postojećih rezultata o lokalizacijskom svojstvu poluklasičnih mjera), pa je time dano još jedno poboljšanje.

Dodatno, prethodni korolar daje cjelovitu analizu ovisnosti karakteristične duljine mjere i proučavanog sustava. Smatramo da bi ovakav rezultat mogao biti koristan i u slučajevima kad karakteristična duljina promatranog problema ne može biti jednostavno određena, ili u slučajevima kad proučavamo dva (ili više) sustava s različitim karakterističnim duljinama.

Istaknimo još jednom da tvrdnja u Teoremu I.7 vrijedi za proizvoljne omeđene nizove u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$, što naravno nije slučaj u prethodnom korolaru (jer isto nemamo niti u Teoremu 5). Međutim, koristeći Napomenu 8, možemo ipak dobiti informaciju o poluklasičnoj mjeri pridruženoj nizu $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$, pri čemu $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u}$. Nadalje, tako dobiveni rezultat uistinu nije slabiji od rezultata danog Teoremom I.7 jer $(\mathsf{u} \otimes \mathsf{u})\lambda \boxtimes \delta_0$ trivijalno poništava sve članove simbola $\mathbf{p}_{sc}$ iz Teorema I.7. Zaista, netrivijalno je jedino $\mathbf{A}^0(\mathsf{u}\otimes\mathsf{u})\lambda\boxtimes\delta_0=\mathbf{0}$, što je posljedica činjenice da $\mathbf{A}^0\mathsf{u}=0$, a što dobivamo iz pretpostavki Teorema I.7.

## 7. Kompaktnost kompenzacijom s karakterističnom duljinom

Jedno od najbitnijih svojstava jednoskalnih H-mjera, kao i ostalih mikrolokalnih defektnih funkcionala, je ispitivanje uvjeta uz koje imamo jaku konvergenciju promatranog omeđenog niza u $\mathrm{L}^2$ prostoru. Kako pomoću lokalizacijskog svojstva dobivamo informaciju o nosaču pripadne jednoskalne mjere, u nekim posebnim okolnostima možemo dobiti da je mjera $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ (ili neka njena komponenta) pridružena nizu $\mathsf{u}_n$ trivijalna, što povlači jaku $\mathrm{L}^2$ konvergenciju niza $(u_n^i)$ (u slučaju da je dijagonalna komponenta 0), odnosno slabu $*$ konvergenciju niza $(u_n^i\bar{u}_n^j)$ (u slučaju da je vandijagonalna komponenta 0). U sljedećem primjeru donosimo jedan takav rezultat dobiven lokalizacijskim svojstvom iz petog odjeljka.

**Primjer 4.** Neka je $\Omega\subseteq\mathbf{R}^2$ otvoren i neka $\mathsf{u}_n:=(u_n^1,u_n^2)\rightharpoonup\mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^2)$ zadovoljava

$$\begin{cases} u_n^1+\varepsilon_n\partial_{x_1}(a_1u_n^1)=f_n^1 \\ u_n^2+\varepsilon_n\partial_{x_2}(a_2u_n^2)=f_n^2 \end{cases},$$

pri čemu $\varepsilon_n\to0^+$, $\mathsf{f}_n:=(f_n^1,\ f_n^2)\in\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^2)$ zadovoljava (13) (uz $l=0,m=1$), dok $a_1,a_2\in\mathrm{C}(\Omega;\mathbf{R})$, $a_1,a_2\neq0$ (na cijelom $\Omega$).

Primjenom lokalizacijskog svojstva jednoskalne H-mjere $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ s karakterističnom duljinom $(\varepsilon_n)$ (tj. $c=1$) pridruženom nizu $(\mathsf{u}_n)$ dobivamo relaciju

$$\left(\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\frac{2\pi i\xi_1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}\begin{bmatrix}a_1(\mathbf{x})&0\\0&0\end{bmatrix}+\frac{2\pi i\xi_2}{1+|\boldsymbol{\xi}|}\begin{bmatrix}0&0\\0&a_2(\mathbf{x})\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\mu}^{\top}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=\mathbf{0}\,,$$

čija je komponenta na mjestu $(1,1)$ jednaka

$$\left(\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}+i\frac{2\pi\xi_1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}a_1(\mathbf{x})\right)\mu^{11}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=0\,.$$

Kako je mjera $\mu^{11}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ nenegativna, razdvajanjem prethodne jednakosti na realni i imaginarni dio dobivamo

$$\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}\mu^{11}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=0\,,\qquad\frac{\xi_1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}\mu^{11}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=0\,,\tag{24}$$

pri čemu smo koristili pretpostavku $a_1\neq0$. Po Primjeru 1 funkcija $\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}$ je jednaka 0 samo na $\Sigma_\infty$, pa iz prve jednadžbe imamo $\operatorname{supp}\boldsymbol{\mu}^{11}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}\subseteq\Omega\times\Sigma_\infty$. S druge strane, funkcija $\frac{\xi_1}{1+|\boldsymbol{\xi}|}$ je jednaka 0 na $\Sigma_0\cup\{\xi_1=0\}$, iz čega dobivamo $\operatorname{supp}\mu^{11}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}\subseteq\Omega\times(\Sigma_0\cup\{\xi_1=0\})$, pa konačno imamo

$$\operatorname{supp}\mu^{11}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}\subseteq\Omega\times\{\infty^{(0,-1)},\infty^{(0,1)}\}\,.\tag{25}$$

Analogno, analizirajući komponentu na mjestu $(2,2)$ dobivamo

$$\operatorname{supp}\mu^{22}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}\subseteq\Omega\times\{\infty^{(-1,0)},\infty^{(1,0)}\}\,.$$

Po Korolaru 2 je nosač vandijagonalnih elemenata sadržan u presjeku nosača dijagonalnih elemenata, a onda iz gornjih inkluzija slijedi da je nosač vandijagonalnih elemenata prazan skup, odnosno $\mu^{12}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=\mu^{21}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}=0$. Iz definicije jednoskalnih H-mjera sada slijedi $u_n^1\bar{u}_n^2\overset{*}{\rightharpoonup}0$. ∎

**Napomena 9.** Ukoliko u prethodnom primjeru dodatno imamo da je $(u_n^1)$ $(\varepsilon_n)$-titrajući, tada Korolar 6(b) povlači $\mu^{11}_{K_{0,\infty}}(\Omega \times \Sigma_\infty) = 0$, pa iz (25) slijedi da je $\mu^{11}_{K_{0,\infty}}$ jednaka 0 na cijeloj domeni, a onda posebno i $u_n^1 \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C})$. Konvergencija $u_n^1 \bar{u}_n^2 \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ je sada, kao produkt jako i slabo konvergentnog niza, trivijalna posljedica. Takvu situaciju na primjer možemo dobiti ukoliko za $f_n^1$ uzmemo titrajući niz, čime niz rješenja $u_n^1$ titra na istoj frekvenciji kao $f_n^1$, pa prikladnim izborom frekvencije (vidi Primjer I.4) možemo dobiti da je niz rješenja $(\varepsilon_n)$-titrajući.

Nadalje, uz $(\varepsilon_n)$-titrajući niz rješenja možemo izostaviti pretpostavku $a_1 \neq 0$ u prethodnom primjeru. Naime, kako već iz prve jednadžbe u (24) imamo $\operatorname{supp} \mu^{11}_{K_{0,\infty}} \subseteq \Omega \times \Sigma_\infty$, po Korolaru 6(b) i dalje imamo $\mu^{11}_{K_{0,\infty}} = 0$. Štoviše, u posebnom slučaju kad je $a_1$ trivijalna, ovim dobivamo alternativni dokaz Teorema 2 u slučaju $l = 0$. ∎

Prethodni račun je zapravo primjer teorije *kompaknosti kompenzacijom*, kojom se proučavaju uvjeti uz koje produkt slabo konvergentnih nizova konvergira (u nekom prikladnom smislu) upravo produktu pripadnih (slabih) limesa. Metodu su uveli François Murat i Luc Tartar (vidi [14] i pripadne reference), najprije za konstantne koeficijente pripadnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a kasnije je koristeći H-mjere u [52] teorija poopćena na varijabilne, ali ipak nužno neprekinute, koeficijente (cf. [53, Cor. 28.11] i [26, Theorem 2]; neka novija poopćenja mogu se pronaći u [44, 47]). Naravno, dosadašnji rezultati nisu prilagođeni jednadžbama s karakterističnom duljinom, što je sad moguće koristeći dobiveno lokalizacijsko svojstvo jednoskalnih H-mjera.

**Teorem 7. (inačica kompaknosti kompenzacijom)** *Neka* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *zadovoljava (19), pri čemu* $\mathbf{A}_n^{\boldsymbol{\alpha}} \longrightarrow \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}$ *u* $\mathrm{C}(\Omega; \mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, $\varepsilon_n \to 0^+$, *dok* $\mathsf{f}_n \in \mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^q)$ *za svaku probnu funkciju* $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ *zadovoljava da je*

$$\frac{\widehat{\varphi \mathsf{f}_n}}{1 + k_n}$$

*pretkompaktno u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$. *Nadalje, neka je* $Q(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{Q}(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}$, *gdje je* $\mathbf{Q} \in \mathrm{C}(\Omega; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}$, *te* $Q(\cdot; \mathsf{u}_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ *u* $\mathcal{M}(\Omega)$.

*Tada imamo*

*a)* $(\exists\, c \in [0, \infty])(\forall\, (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))(\forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{c;\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}})\ Q(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) \geqslant 0 \implies \nu \geqslant Q(\cdot, \mathsf{u})$,

*b)* $(\exists\, c \in [0, \infty])(\forall\, (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))(\forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{c;\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}})\ Q(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) = 0 \implies \nu = Q(\cdot, \mathsf{u})$,

*pri čemu je*

$$\Lambda_{c;\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{C}^r : \mathbf{p}_c(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\lambda} = \mathsf{0} \right\},$$

*dok je* $\mathbf{p}_c$ *dan Teoremom 5.*

Dem. Neka je $\boldsymbol{\mu}_{K_{0,\infty}}$ jednoskalna H-mjera pridružena nizu $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$, s karakterističnom duljinom $(\omega_n)$ takvom da $\lim_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} = c$.

Limes $\nu$ možemo izraziti kao zbroj $Q(\cdot; \mathsf{u})$ i linearne kombinacije komponenata matrične defektne mjere $\boldsymbol{\nu}_D$ pridružene nizu $(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})$. Preciznije, za proizvoljnu probnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned} \langle \nu, \varphi \rangle &= \langle Q(\cdot; \mathsf{u}), \varphi \rangle + \left\langle \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\nu}_D^\top, \varphi \right\rangle \\ &= \langle Q(\cdot; \mathsf{u}), \varphi \rangle + \left\langle \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\mu}_{K_{0,\infty}}^\top, \varphi \boxtimes 1 \right\rangle , \end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili vezu jednoskalne H-mjere i defektne mjere danu Korolarom 4.

Pokazat ćemo da je $\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{\top}$ nenegativna mjera (odnosno trivijalna mjera u (b) dijelu) iz čega će izravno slijediti tvrdnja.

Označimo s $\rho := \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} = \sum_{i=1}^{r}\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{ii}$. Iz nenegativnosti jednoskalne H-mjere mjere slijedi da je $\rho$ nenegativna (skalarna) Radonova mjera. Nadalje, po Korolaru 2 za svaki $i,j\in 1..r$ imamo $\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{ij}\ll\rho$, pa po Lebesgue-Radon-Nikodýmovom teoremu [23, Theorem 3.8] postoji izmjeriva (lokalno integrabilna) funkcija $M^{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ takva da $\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{ij} = M^{ij}\rho$. Kako je $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ hermitska i nenegativna, $\mathbf{M} := [M^{ij}]$ je također hermitska i nenegativna. Sada je dovoljno pokazati da je za $\rho$-s.s. $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{M}^{\top}\geqslant 0$ (odnosno jednako 0 u (b) dijelu).

Kako tvrdnja Teorema 5 po Napomeni 8 ostaje valjana i za $\mathsf{u}\neq\mathsf{0}$, dobivamo $\mathbf{p}_c\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^{\top} = \mathbf{0}$, odnosno $\mathbf{p}_c\mathbf{M}^{\top} = \mathbf{0}$ ($\rho$-s.s.), odakle slijedi da su za $\rho$-s.s. $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ stupci matrice $\mathbf{M}^{\top}$ sadržani u karakterističnom prostoru $\Lambda_{c;\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}$. Neka je $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\in\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ proizvoljna, ali fiksna. Kako je $\mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ hermitska matrica, postoji ortonormirana baza $\{\boldsymbol{\zeta}_1,\dots,\boldsymbol{\zeta}_r\}$ prostora $\mathbf{C}^r$ sačinjena od svojstvenih vektora matrice $\mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$. Nadalje, nenegativnost matrice $\mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ povlači da su sve svojstvene vrijednosti nenegativne, pa su jednake $\|\mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\zeta}_i\|$. Definirajmo

$$\boldsymbol{\lambda}_i := \sqrt{\|\mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\zeta}_i\|}\,\boldsymbol{\zeta}_i\,,\quad i\in 1..r\,.$$

Kako su vektori $\boldsymbol{\lambda}_i$, $i\in 1..r$ linerna kombinacija stupaca matrice $\mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, nalaze se u prosotru $\Lambda_{c;\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}$. Nadalje, nije teško pokazati da je $\mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{\lambda}_i\otimes\boldsymbol{\lambda}_i$, pa po pretpostavci slijedi $\mathbf{Q}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_i Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda}_i)\geqslant 0$ (odnosno jednako 0 u (b) dijelu). Sada iz proizvoljnosti $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ slijedi tvrdnja.

**Q.E.D.**

Iskaz prethodnog teorema mogli smo zapisati u nešto sažetijem, ali ekvivalentnom obliku [4, Theorem 12].

Iako je tvrdnja prethodnog teorema valjana za svaki $c\in[0,\infty]$, zanimljiv slučaj je samo $c\in\langle 0,\infty\rangle$, kako je za $c=0$ i $c=\infty$, uz $l<m$, tvrdnja trivijalna. Naime, u slučaju $c=0$ imamo $\mathbf{p}_0(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ za $\boldsymbol{\xi}\in\Sigma_\infty$, iz čega slijedi $\Lambda_{0;\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{C}^r$ za svaki $\mathbf{x}$. Isti zaključak dobivamo i za $c=\infty$ kako je $\mathbf{p}_\infty$ nula za $\boldsymbol{\xi}\in\Sigma_0$. Time imamo da je u ovim slučajevima $\mathbf{Q}\geqslant\mathbf{0}$ (odnosno $\mathbf{Q}=\mathbf{0}$ u (b) dijelu) pa iz

$$\mathbf{Q}\mathsf{u}\cdot\mathsf{u} - \mathbf{Q}\mathsf{u}\cdot\mathsf{u}_n - \mathbf{Q}\mathsf{u}_n\cdot\mathsf{u} + \mathbf{Q}\mathsf{u}_n\cdot\mathsf{u}_n = \mathbf{Q}(\mathsf{u}_n-\mathsf{u})\cdot(\mathsf{u}_n-\mathsf{u})\geqslant 0\,,$$

prijelazom na limes trivijalno slijedi tvrdnja teorema.

Razdvajanjem matrice na hermitski i antihermitski dio, možemo poopćiti (b) dio prethodnog teorema na proizvoljne matrice $\mathbf{Q}\in\mathrm{C}(\Omega;\mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$ (cf. [26, Theorem 2(ii)]).

Primjenom prethodnog teorema možemo izravno dobiti zaključak Primjera 4. Naime, jednostavnom provjerom dobivamo

$$\bigcup_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}\Lambda_{1;\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} = \{(\lambda_1,0):\lambda_1\in\mathbf{C}\}\cup\{(0,\lambda_2):\lambda_2\in\mathbf{C}\}\,,$$

a na tom skupu je kvadratna forma $Q(\lambda) := \lambda_1\bar{\lambda_2}$ trivijalna. Međutim, istaknimo da $Q$ nije hermitska forma, ali tvrdnja prethodnog teorema i dalje vrijedi po gornjoj napomeni.

# III. Jednoskalne H-distribucije

U ovom poglavlju proučavamo novi objekt, *jednoskalne H-distribucije*, koje predstavljaju poopćenje jednoskalnih H-mjera na $\mathrm{L}^p$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, prostore, a time i poopćenja H-distribucija.

Kako je Fourierova pretvorba neprekinuta na $\mathrm{L}^p$ samo za $p \in [1,2]$, a pri definiciji jednoskalnih H-distribucija uz niz iz $\mathrm{L}^p$ moramo koristiti i niz iz duala $\mathrm{L}^{p'}$ $(1/p+1/p'=1)$, pa, kako je za $p \neq 2$ ili $p>2$ ili $p'>2$, ne možemo izbjeći Fourierove množitelje, a time i rad s derivacijama koji poprilično otežava konstrukciju.

U prvom odjeljku donosimo osnovne rezultate H-distribucija, a onda se od drugog odjeljka okrećemo jednoskalnih H-distribucijama. U drugom odjeljku izvodimo potrebne rezultate na prostoru probnih funkcija pri čemu se većina računa svede na deriviranje upotrebom poopćenog lančanog pravila, dok u sljedećem odjeljku dajmo potrebno poopćenje komutacijske leme i komentiramo teorem o jezgri, a onda u idućem poglavlju sve te rezultate primjenjujemo pri konstrukciji jednoskalnih H-distribucija. U posljednjem odjeljku izvodimo lokalizacijsko svojstvo jednoskalnih H-distribucija.

## 1. H-distribucije

Kao što smo više puta istaknuli, rad s $\mathrm{L}^p$ funkcijama zahtijeva korištenje Fourierovih množitelja čime za prostor probnih funkcija u Fourierovom prostoru moramo uzeti glatke funkcije. Zbog toga je i očekivano da ćemo pripadnim poopćenjem H-mjera na $\mathrm{L}^p$, $p \neq 2$, prostore dobiti općenitu distribuciju koja nije nužno reda nula.

Konstrukciju H-distribucija su napravili Nenad Antonić i Darko Mitrović prije nekoliko godina u [10]. U ovom odjeljku donosimo rezultat postojanja H-distribucija, te lokalizacijsko svojstvo koje zadovoljavaju.

Prije nego što prikažemo lokalizacijsko svojstvo H-distribucija, prisjetimo se *Sobovljevih prostora* za $\mathrm{L}^p$ prostore koristeći Fourierove množitelje. Za $s \in \mathbf{R}$ definiramo

$$\mathrm{H}^{s,p}(\mathbf{R}^d) := \left\{ u \in \mathcal{S}' : \mathcal{A}_{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}} u \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d) \right\},$$

uz normu $\|u\|_{\mathrm{H}^{s,p}(\mathbf{R}^d)} := \|\mathcal{A}_{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}} u\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)}$. U [31, Section 6.2.1] se ovi prostori nazivaju *nehomogeni Sobovljevi prostori*, te je pokazano da se za $s \in \mathbf{Z}$ ovako definirani prostori podudaraju s (klasičnim) Sobovljevim prostorima $\mathrm{W}^{s,p}(\mathbf{R}^d)$.

Lokalni Sobovljevi prostori kao poopćenja prethodnih prostora dani su s

$$\mathrm{H}^{s,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{D}' : (\forall\, \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega))\ \varphi u \in \mathrm{H}^{s,p}(\mathbf{R}^d) \right\}.$$

Prostor $\mathrm{H}^{s,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ opskrbljujemo najslabijom topologijom u kojoj su sva preslikavanja $u \mapsto \varphi u$ neprekinuta (vidi [3]).

U [10, Theorem 2.1] je dan rezultat postojanja H-distribucija u ovom obliku.

**Teorem 1. (postojanje H-distribucija)** *Ako $u_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ i $v_n \xrightarrow{*} v$ u $\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^d)$ za neki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i $q \geqslant \{p', 2\}$ $(1/p+1/p'=1)$ onda postoje podnizovi $(u_{n'})$, $(v_{n'})$ i kompleksna distribucija $\nu_H \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1})$ takvi da za svaki izbor probnih funkcija $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ i $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{S}^{d-1})$, za $\kappa = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$, vrijedi*

$$\begin{aligned}\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{A}_\psi(\varphi_1 u_{n'}) \overline{\varphi_2 v_{n'}}\, d\mathbf{x} &= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi_1 u_{n'} \overline{\mathcal{A}_{\bar\psi}(\varphi_2 v_{n'})}\, d\mathbf{x} \\ &= \langle \nu_H, \varphi_1 \bar\varphi_2 \boxtimes \psi \rangle ,\end{aligned}$$

*pri čemu je $\mathcal{A}_\psi$ Fourierov množitelj sa simbolom $\psi \circ \boldsymbol{\pi}$. Distribuciju $\nu_H$ nazivamo* H-distribucijom *pridruženom (pod)nizovima $(u_{n'})$ i $(v_{n'})$.* ∎

U [5] su detaljnije proučavana svojstva H-distribucija pa je, među ostalim, poopćen prethodni teorem na $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ i $\mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ prostore, a što će ovdje biti jednostavna posljedica Teorema 5 i Leme 5. Nadalje, od interesa je preciznije odrediti u kojem prostoru se nalaze H-distribucije, odnosno pokušati dati što preciznije ocjene na red distribucije jer, kao što se može vidjeti u idućem teoremu, red distribucije određuje potrebnu glatkoću koeficijenata promatrane jednadžbe. Za sad je u [5] dobiveno da je $\nu_H$ distribucija konačnog reda.

Sličan objekt je kasnije dobiven u [49] nešto kompliciranijom konstrukcijom, pri čemu je niz $(v_n)$ zamijenjen funkcionalom ovisnim o $(u_n)$.

Slično kao i kod H-mjera, H-distribucije zadovoljavaju sljedeće lokalizacijsko svojstvo [10, Theorem 4.1].

**Teorem 2.** **(lokalizacijsko svojstvo H-distribucija)** *Neka $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ zadovoljava*

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_i(a_i u_n) = f_n \,,$$

*pri čemu su $a_i \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$, dok $f_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{H}^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ za neki $q \in \langle 1, d\rangle$. Nadalje, neka je $(v_n)$ proizvoljan omeđen niz u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$.*

*Tada H-distribucija $\nu_H$ pridružena (pod)nizovima $(u_n)$ i $(v_n)$ zadovoljava*

$$\sum_{i=1}^{d} a_i(\mathbf{x})\xi_i \nu_H = 0 \,,$$

*u smislu distribucija.* ∎

Koristeći prethodni rezultat može se dobiti inačica kompaknosti kompenzacijom za $\mathrm{L}^p$ prostore [10].

**Napomena 10.** Ukoliko su za svaki $n$ nosači funkcija $u_n$ i $v_n$ sadržani u nekom fiksnom kompaktu $K$ te $q > p'$, može se, koristeći [38, Theorem 2.1], kao u [44, Theorem 9] pokazati da je H-distribucija element Bôchnerovog prostora $\mathrm{L}^{\bar{p}'}(\Omega; \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{S}^{d-1}))$, pri čemu je $\bar{p} \in \langle 1, \frac{pq}{p+q}\rangle$. Ovaj pristup je uspješno korišten u [37, 44]. ∎

## 2. Prostori probnih funkcija

Kako će nam, kao kod H-distribucija [10], za potrebe konstrukcije jednoskalnih H-distribucija trebati glatke probne funkcije, moramo kompaktifikaciju $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$, uvedenu u odjeljku II.1, opskrbiti diferencijalnom strukturom. To ćemo načiniti tako da ćemo povući diferencijalnu strukturu sa zatvorenog $d$-dimenzionalnog sferičnog sloja $A[0, r_1, 1]$.

Preciznije, za $\kappa \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$ definiramo

$$\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)) := \Big\{\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)) : \psi^* := (\mathcal{J}^{-1})^*\psi = \psi \circ \mathcal{J}^{-1} \in \mathrm{C}^\kappa(A[0, r_1, 1])\Big\} \,,$$

pri čemu su $\mathcal{J}$, $A[0, r_1, 1]$ i $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ definirani u odjeljku II.1, dok je $\mathrm{C}^\kappa(A[0, r_1, 1])$ prostor funkcija na $A[0, r_1, 1]$ za koje postoji $\mathrm{C}^\kappa$ proširenje na nekoj okolini $A[0, r_1, 1]$. Preciznije, $\psi^* \in \mathrm{C}^\kappa(A[0, r_1, 1])$ ako i samo ako postoji otvorena okolina $U$ skupa $A[0, r_1, 1]$, $A[0, r_1, 1] \subseteq U \subseteq \mathbf{R}^d$, i funkcija $\tilde{\psi}^* \in \mathrm{C}^\kappa(U)$ takve da $\tilde{\psi}^*_{|A[0,r_1,1]} \equiv \psi^*$. Koristeći particiju jedinice može se pokazati da se ova definicija podudara s *lokalnom* definicijom danom u [35, Section XXII.5]: $\psi^* \in \mathrm{C}^\kappa(A[\mathsf{0}, r_1, 1])$ ako i samo ako za svaki $\boldsymbol{\zeta} \in A[\mathsf{0}, r_1, 1]$ postoji otvorena okolina $U_{\boldsymbol{\zeta}}$ u $\mathbf{R}^d$ takva da $\psi^*_{|U_{\boldsymbol{\zeta}} \cap A[\mathsf{0}, r_1, 1]}$ dopušta glatko proširenje. Radi jednostavnosti, za povlak funkcije $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ duž $\mathcal{J}^{-1}$ kraće ćemo pisati $\psi^* := \psi \circ \mathcal{J}^{-1}$.

Po teoremu srednje vrijednosti slijedi da je u definiciji prostora $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ dovoljno tražiti da su samo sve derivacije reda $\kappa + 1$ omeđene na $A[\mathsf{0}, r_1, 1]$. Naravno, za $\kappa = 0$ po Lemi II.1 imamo da se prostor $\mathrm{C}^0(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ podudara s $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

Kako su po Lemi II.1 i relaciji (II.4) funkcije $\psi_0, \psi_\infty$ za $\mathsf{e} \in \mathrm{S}^{d-1}$ dane s $\psi_0(\mathsf{e}) = \psi^*(r_1\mathsf{e})$, $\psi_\infty(\mathsf{e}) = \psi^*(\mathsf{e})$, iz $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ onda očito slijedi $\psi_0, \psi_\infty \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{S}^{d-1})$.

Budući da je $\mathcal{J} : \mathbf{R}^d_* \longrightarrow A(\mathsf{0}, r_1, 1)$ difeomorfizam (vidi leme 1 i 3 niže), imamo da su restrikcije na $\mathbf{R}^d_*$ funkcija iz $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ klase $\mathrm{C}^\kappa$.

Za $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ definiramo $\|\psi\|_{\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))} := \|\psi^*\|_{\mathrm{C}^\kappa(A[\mathsf{0}, r_1, 1])}$. Kako je $\mathrm{C}^\kappa(A[\mathsf{0}, r_1, 1])$ Banachova algebra, uz ovu definiciju također imamo da je i $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ Banachova algebra. Nadalje, kako je $A[\mathsf{0}, r_1, 1]$ kompaktan, prostor $\mathrm{C}^\kappa(A[\mathsf{0}, r_1, 1])$ je separabilan, a onda je i $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ separabilan. Naime, ako je $\{\psi_1^*, \psi_2^*, \ldots\}$ prebrojiv gust podskup $\mathrm{C}^\kappa(A[\mathsf{0}, r_1, 1])$, tada je $\{\psi_1^* \circ \mathcal{J}, \psi_2^* \circ \mathcal{J}, \ldots\}$ prebrojiv gust podskup $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

U samoj definiciji jednoskalnih H-mjera trebat ćemo da su probne funkcije u dualnom prostoru *Fourierovi množitelji* pa dajemo preciznu definiciju iz [30, Section 2.5]. Za $\psi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ kažemo da je $\mathrm{L}^p$, $p \in [1, \infty\rangle$, *Fourierov množitelj* ako je operator $\mathcal{A}_\psi \mathsf{u} := (\psi\hat{\mathsf{u}})^\vee$ neprekinut na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$. Banachovu algebru $\mathrm{L}^p$ Fourierovih množitelja označavamo s $\mathcal{M}^p = \mathcal{M}^p(\mathbf{R}^d)$ (u [30] je korištena oznaka $\mathcal{M}_p$ koja bi mogla biti zbunjujuća s obzirom da prostor omeđenih Radonovih mjera označavamo s $\mathcal{M}_b$).

Dakle, želimo pokazati da postoji $\kappa$ takav da za po volji odabran $p \in \langle 1, \infty\rangle$ imamo $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)) \subseteq \mathcal{M}^p$ (u smislu odgovarajućih restrikcija na $\mathbf{R}^d_*$). Dok je za $p = 2$ ovo bilo trivijalno ispunjeno kako je $\mathcal{M}^2 = \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ [30, Theorem 2.5.10], kod $\mathrm{L}^p$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, teorije potrebno je koristiti neke od netrivijalnih rezultata iz teorije Fourierovih množitelja. Ovdje ćemo koristiti *Hörmander-Mihlinov teorem* [30, Section 5.2] koji kaže da je $\psi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ iz $\mathcal{M}^p$, $p \in \langle 0, \infty\rangle$, ako sve parcijalne derivacije funkcije $\psi$ do reda $\kappa = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ postoje, te ako postoji konstanta $C > 0$ takva da

$$(\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*)(\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d,\ |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant \kappa) \qquad |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \psi(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \frac{C}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}} .$$

Gornji uvjet zove se *Mihlinov* uvjet, dok je *Hörmanderov* uvjet dan preko odgovarajućeg integrala i nešto je općenitiji. Nadalje, imamo i preciznu ocjenu na normu operatora $\mathcal{A}_\psi : \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ danu s

$$\|\mathcal{A}_\psi\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d))} \leqslant C_d \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\} C ,$$

pri čemu je $C$ konstanta iz Mihlinovog uvjeta, dok je $C_d$ konstanta koja ovisi samo o dimenziji prostora.

Istaknimo da su problemi karakterizacije prostora Fourierovih množitelja vrlo zahtjevni pa je dosad samo za $p \in \{1, 2\}$ dana potpuna karakterizacija, dok je u ostalim slučajevima riječ isključivo o dovoljnim uvjetima (kao što je i gornji Mihlinov uvjet).

Među ostalim, i optimalnost reda derivacije $\kappa$ je upitna. Ipak, našu konstrukciju jednoskalnih H-distribucija ne bi ništa pojednostavilo kad bismo čak i imali na primjer $\kappa = 1$. Naime, glavna tehnička poteškoća je uopće uvođenje diferencijalne strukture.

Naš cilj u ovom odjeljku je pokazati da za $\kappa = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ funkcije iz $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ zadovoljavaju Mihlinov uvjet, te da konstanta $C$ linearno ovisi o normi funkcije (kao što je to trivijalno bio slučaj u $\mathrm{L}^2$) kako bismo mogli dobiti da je jednoskalna H-distribucija neprekinut funkcional na odgovarajućem prostoru.

Zapravo je potrebno ocijeniti derivacije kompozicije $\psi^* \circ \mathcal{J}$, za što ćemo koristiti poopćenje lančanog pravila, poznatije kao *Faá di Brunova formula* [32]:

*Za dovoljno glatke funkcije* $\mathsf{g} : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *i* $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ *vrijedi*

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(f \circ \mathsf{g})(\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\alpha}|! \sum_{1 \leqslant |\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|\,,\ \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^r} C(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})\,, \tag{1}$$

*pri čemu je*

$$C(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{(\partial^{\boldsymbol{\beta}} f)(\mathsf{g}(\boldsymbol{\xi}))}{\boldsymbol{\beta}!} \sum_{\sum_{i=1}^r \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}\,,\ \boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbf{N}_0^d} \prod_{j=1}^r \sum_{\sum_{i=1}^{\beta_j} \boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{\alpha}_j\,,\ \boldsymbol{\gamma}_i \in \mathbf{N}_0^d \setminus \{\mathsf{0}\}} \prod_{s=1}^{\beta_j} \frac{\partial^{\boldsymbol{\gamma}_s} g_j(\boldsymbol{\xi})}{\boldsymbol{\gamma}_s!}\,.$$

Kako je za $|\boldsymbol{\beta}| \leqslant \kappa$ funkcija $\partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi^*$ omeđena, po prethodnoj formuli dovoljno je pokazati da funkcija $\mathcal{J}$ zadovoljava ocjenu Mihlinovog uvjeta, što ćemo i učiniti u sljedeće dvije leme. Sličan pristup može se vidjeti u [37].

Prisjetimo se prije samih tvrdnji da je funkcija $\mathcal{J} : \mathbf{R}^d_* \longrightarrow A(\mathsf{0}, r_1, 1)$ definirana s

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{|\boldsymbol{\xi}| + r_0}{|\boldsymbol{\xi}| K(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{\xi}\,,$$

pri čemu je $K(\boldsymbol{\xi}) := \sqrt{1 + (|\boldsymbol{\xi}| + r_0)^2}$.

**Lema 1.** *Za svake* $j \in 1..d$ *i* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ *vrijedi*

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j)(\boldsymbol{\xi}) = P_{\boldsymbol{\alpha}}\Big(\boldsymbol{\xi}, \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\alpha}|}\,, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*\,,$$

*pri čemu je* $P_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}, \eta)$ *polinom stupnja ne većeg od* $|\boldsymbol{\alpha}| + 1$ *po* $\boldsymbol{\xi}$ *i* $2|\boldsymbol{\alpha}| + 1$ *po* $\eta$*, s tim da se u izrazu* $\lambda^{|\boldsymbol{\alpha}|} P_{\boldsymbol{\alpha}}\Big(\lambda, \dots, \lambda, \frac{1}{\lambda}\Big)$ *ne javljaju članovi s negativnom potencijom. Preciznije, polinom* $P_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}, \eta)$ *ima samo članove oblika* $C\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\beta}}\eta^k$ *uz* $|\boldsymbol{\beta}| + |\boldsymbol{\alpha}| \geqslant k$.

Dem. Neka je $j \in 1..d$ proizvoljan i fiksan. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po redu derivacije $|\boldsymbol{\alpha}|$.

Za $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$ imamo

$$\mathcal{J}_j(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\xi_j(|\boldsymbol{\xi}| + r_0)}{|\boldsymbol{\xi}|\sqrt{1 + (|\boldsymbol{\xi}| + r_0)^2}} = \xi_j \Big(1 + r_0 \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) K(\boldsymbol{\xi})^{-1}\,,$$

pa je $P_{\mathsf{0}}(\boldsymbol{\xi}, \eta) = \xi_j(1 + r_0\eta)$.

Pogledajmo što se događa s derivacijom prvog reda. Pretpostavimo najprije da je $\boldsymbol{\alpha} = \mathsf{e}_i$ uz $i \neq j$.

$$\partial^i(\mathcal{J}_j)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{-\xi_i\xi_j\Big((|\boldsymbol{\xi}|+r_0)^3+r_0\Big)}{|\boldsymbol{\xi}|^3\Big(1+(|\boldsymbol{\xi}|+r_0)^2\Big)^{\frac{3}{2}}} = -\xi_i\xi_j\Bigg(\Big(1+r_0\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)^3+r_0\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^3}\Bigg)K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2}\,,$$

čime dobivamo da je $P_{\mathsf{e}_i}(\boldsymbol{\xi},\eta) = -\xi_i\xi_j\Big((1+r_0\eta)^3+r_0\eta^3\Big)$. U slučaju kad je $\boldsymbol{\alpha} = \mathsf{e}_j$ imamo

$$\partial^j(\mathcal{J}_j)(\boldsymbol{\xi}) = \Bigg(\Big(|\boldsymbol{\xi}|^2-\xi^2\Big)\Bigg(\Big(1+r_0\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)^3+r_0\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^3}\Bigg)+1\Bigg)K(\boldsymbol{\xi})^{-3}\,,$$

odakle slijedi $P_{\mathsf{e}_j}(\boldsymbol{\xi},\eta) = \Big((|\boldsymbol{\xi}|^2-\xi^2)\Big((1+r_0\eta)^3+r_0\eta^3\Big)+1\Big)$.

Jednostavnom provjerom slijedi da $P_{\mathsf{0}}$ i $P_{\mathsf{e}_i}$, $i \in 1..d$, zadovoljavaju uvjete dane u iskazu leme čime je baza indukcije završena.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$. Neka je $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$, $|\boldsymbol{\alpha}| = n+1$, po volji odabran, te neka su $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$ i $i \in 1..d$ takvi da vrijedi $|\boldsymbol{\beta}| = n$ i $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \mathsf{e}_i$. Kako po Schwartzovom pravilu vrijedi $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}_j = \partial^i(\partial^{\boldsymbol{\beta}}\mathcal{J}_j)$, koristeći pretpostavku indukcije računamo

$$\begin{aligned}
\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j)(\boldsymbol{\xi}) &= \partial^i\Big(P_{\boldsymbol{\beta}}\Big(\boldsymbol{\xi},\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\beta}|}\Big)\\
&= \Bigg((\partial^i P_{\boldsymbol{\beta}})\Big(\boldsymbol{\xi},\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)+(\partial^{d+1}P_{\boldsymbol{\beta}})\Big(\boldsymbol{\xi},\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\Big(-\frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|^3}\Big)\Bigg)K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\beta}|}\\
&\qquad + P_{\boldsymbol{\beta}}\Big(\boldsymbol{\xi},\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)(-1-2|\boldsymbol{\beta}|)K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\beta}|-1}\frac{|\boldsymbol{\xi}|+r_0}{K(\boldsymbol{\xi})}\frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|}\\
&= K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2(|\boldsymbol{\beta}|+1)}\Bigg(K(\boldsymbol{\xi})^2(\partial^i P_{\boldsymbol{\beta}})\Big(\boldsymbol{\xi},\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)-(\partial^{d+1}P_{\boldsymbol{\beta}})\Big(\boldsymbol{\xi},\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|^3}K(\boldsymbol{\xi})^2\\
&\qquad -(1+2|\boldsymbol{\beta}|)\xi_i\Big(1+r_0\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)P_{\boldsymbol{\beta}}\Big(\boldsymbol{\xi},\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\Bigg)\\
&= K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\alpha}|}P_{\boldsymbol{\alpha}}\Big(\boldsymbol{\xi},\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\,,
\end{aligned}$$

gdje je $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ određen s

$$\begin{aligned}
P_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi},\eta) := \Big(\eta^2+(1+r_0\eta)^2\Big)\Big(|\boldsymbol{\xi}|^2(\partial^i P_{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\xi},\eta)-\xi_i\eta(\partial^{d+1}P_{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\xi},\eta)\Big)\\
-(1+2|\boldsymbol{\beta}|)\xi_i(1+r_0\eta)P_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi},\eta)\,.
\end{aligned}$$

Ispitajmo kojeg je stupnja, pri čemu koristimo da derivacija smanjuje stupanj polinoma (u pripadnoj varijabli) za 1. Prvi pribrojnik je umnožak polinoma stupnja 0 po $\boldsymbol{\xi}$ i 2 po $\eta$, i polinoma stupnja $|\boldsymbol{\beta}|+1$ po $\boldsymbol{\xi}$ i $2|\boldsymbol{\beta}|+1$ po $\eta$, pa je ukupno prvi pribrojnik stupnja $|\boldsymbol{\beta}|+1 = |\boldsymbol{\alpha}|$ po $\boldsymbol{\xi}$ i $2|\boldsymbol{\beta}|+3 = 2|\boldsymbol{\alpha}|+1$ po $\eta$. Analogno dobivamo da je drugi pribrojnik stupnja $|\boldsymbol{\alpha}|+1$ po $\boldsymbol{\xi}$ i $2|\boldsymbol{\alpha}| < 2|\boldsymbol{\alpha}|+1$ po $\eta$, iz čega slijedi da je $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ uistinu odgovarajućeg stupnja.

Još je preostalo provjeriti odnos potencija u varijablama $\boldsymbol{\xi}$ i $\eta$. Po pretpostavci indukcije znamo da su članovi polinoma $P_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi},\eta)$ oblika $C\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\gamma}}\eta^k$, pri čemu je $k-|\boldsymbol{\gamma}| \leqslant |\boldsymbol{\beta}|$.

Članovi prvog pribrojnika su tada oblika $C\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\gamma}'}\eta^{k+s}$, gdje je $|\boldsymbol{\gamma}'| = |\boldsymbol{\gamma}| + 1$ i $0 \leqslant s \leqslant 2$, pa iz

$$(k+s) - |\boldsymbol{\gamma}'| = k - |\boldsymbol{\gamma}| + (s-1) \leqslant |\boldsymbol{\beta}| + 1 = |\boldsymbol{\alpha}|\,,$$

slijedi da zadvoljavaju traženi odnos potencija. Za drugi pribrojnik imamo da su članovi oblika $C\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\gamma}'}\eta^{k+s}$ uz $|\boldsymbol{\gamma}'| = |\boldsymbol{\gamma}| + 1$ i $0 \leqslant s \leqslant 1$ pa analogno slijedi da i oni zadovoljavaju tražni odnos potencija, čime je dokaz završen.

**Q.E.D.**

**Lema 2.** *Za svake $j \in 1..d$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ vrijedi*

$$|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j)(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \frac{C_{\boldsymbol{\alpha},d}}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\,, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*\,.$$

Dem. Po prethodnoj lemi možemo $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j)(\boldsymbol{\xi})$ zamijeniti s $P_{\boldsymbol{\alpha}}\Big(\boldsymbol{\xi}, \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\alpha}|}$, pa koristeći svojstva polinoma $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ imamo

$$\begin{aligned}
\left|P_{\boldsymbol{\alpha}}\Big(\boldsymbol{\xi}, \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\alpha}|}\right| &\leqslant |\boldsymbol{\xi}|^{-|\boldsymbol{\alpha}|}\bigg(|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}|P_{\boldsymbol{\alpha}}|\Big(|\boldsymbol{\xi}|, \dots, |\boldsymbol{\xi}|, \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\bigg)K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\alpha}|} \\
&\leqslant \tilde{C}_{\boldsymbol{\alpha},d}|\boldsymbol{\xi}|^{-|\boldsymbol{\alpha}|}(1 + |\boldsymbol{\xi}|^{2|\boldsymbol{\alpha}|+1})K(\boldsymbol{\xi})^{-1-2|\boldsymbol{\alpha}|} \\
&\leqslant \frac{C_{\boldsymbol{\alpha},d}}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\,,
\end{aligned}$$

pri čemu je $|P_{\boldsymbol{\alpha}}|$ polinom s koeficijentima jednakim apsolutnim vrijednostima odgovarajućih koeficijenata polinoma $P_{\boldsymbol{\alpha}}$, dok smo u prvoj nejednakosti (drugom retku gornjeg izraza) koristili da $\lambda^{|\boldsymbol{\alpha}|}P_{\boldsymbol{\alpha}}\Big(\lambda, \dots, \lambda, \frac{1}{\lambda}\Big)$, pa onda i $\lambda^{|\boldsymbol{\alpha}|}|P_{\boldsymbol{\alpha}}|\Big(\lambda, \dots, \lambda, \frac{1}{\lambda}\Big)$, nema negativnih potencija, te da je stupnja manjeg ili jednakog $|\boldsymbol{\alpha}| + (|\boldsymbol{\alpha}| + 1) - 0 = 2|\boldsymbol{\alpha}| + 1$, čime ga možemo ocijeniti s $\tilde{C}_{\boldsymbol{\alpha},d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^{2|\boldsymbol{\alpha}|+1})$ za neku konstantu $\tilde{C}_{\boldsymbol{\alpha},d} > 0$. Nadalje, u posljednjoj nejednakosti smo iskoristili ocjenu

$$K(\boldsymbol{\xi})^{2|\boldsymbol{\alpha}|+1} \geqslant \Big(\sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}\Big)^{2|\boldsymbol{\alpha}|+1} \geqslant 2^{-|\boldsymbol{\alpha}|-\frac{1}{2}}(1+|\boldsymbol{\xi}|)^{2|\boldsymbol{\alpha}|+1} \geqslant 2^{-|\boldsymbol{\alpha}|-\frac{1}{2}}(1+|\boldsymbol{\xi}|^{2|\boldsymbol{\alpha}|+1})\,.$$

**Q.E.D.**

Kao što smo najavili, iz prethodnih rezultata i Faá di Brunove formule sada jednostavno slijedi da funkcije iz $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ zadovoljavaju Mihlinov uvjet.

**Teorem 3.** *Neka je $\kappa \in \mathbf{N}_0$. Za sve $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ takve da $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant \kappa$ vrijedi*

$$|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\boldsymbol{\xi})| \leqslant C_{\kappa,d}\frac{\|\psi\|_{\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))}}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\,, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*\,.$$

Dem. Tvrdnja trivijalno vrijedi za $\kappa = 0$. U slučaju $\kappa > 0$ funkciju $\psi$ zapišemo kao $\psi = \psi^* \circ \mathcal{J}$, gdje je $\psi^* = \psi \circ \mathcal{J}^{-1} \in \mathrm{C}^\kappa(A[0, r_1, 1])$, i iskoristimo formulu (1). Međutim, kako formula ima puno članova, provedimo ocjenjivanje postupno.

Koristeći prethodnu lemu imamo

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\sum_{i=1}^{\beta_j}\gamma_i=\boldsymbol{\alpha}_j\,,\ \gamma_i\in\mathbf{N}_0^d\setminus\{0\}} \prod_{s=1}^{\beta_j}\frac{\partial^{\gamma_s}\mathcal{J}_j(\boldsymbol{\xi})}{\gamma_s!}\right| &\leqslant \sum_{\sum_{i=1}^{\beta_j}\gamma_i=\boldsymbol{\alpha}_j\,,\ \gamma_i\in\mathbf{N}_0^d\setminus\{0\}} \prod_{s=1}^{\beta_j}\frac{C_{\gamma_s,d}}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\gamma_s|}\gamma_s!} \\
&\leqslant \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}_j|}}C(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})\,,
\end{aligned}$$

gdje je

$$C(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) := \sum_{\sum_{i=1}^{\beta_j}\boldsymbol{\gamma}_i=\boldsymbol{\alpha}_j\,,\,\boldsymbol{\gamma}_i\in\mathbf{N}_0^d\setminus\{\mathbf{0}\}} \prod_{s=1}^{\beta_j}\frac{C_{\boldsymbol{\gamma}_s,d}}{\boldsymbol{\gamma}_s!}\,.$$

Nadalje,

$$\sum_{\sum_{i=1}^d\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbf{N}_0^d}\prod_{j=1}^d\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}_j|}}C(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\sum_{\sum_{i=1}^d\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbf{N}_0^d}\prod_{j=1}^d C(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})\,,$$

pa konačno imamo

$$\begin{aligned}|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\boldsymbol{\xi})| &\leqslant \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}}|\boldsymbol{\alpha}|!\sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{|(\partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi^*)(\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}))|}{\boldsymbol{\beta}!}\sum_{\sum_{i=1}^d\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbf{N}_0^d}\prod_{j=1}^d C(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})\\ &\leqslant C_{\kappa,d}\frac{\|\psi^*\|_{\mathrm{C}^\kappa(A[0,r_1,1])}}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\,,\end{aligned}$$

pri čemu je

$$C_{\kappa,d} := \max_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant\kappa}\left\{|\boldsymbol{\alpha}|!\sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{1}{\boldsymbol{\beta}!}\sum_{\sum_{i=1}^d\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbf{N}_0^d}\prod_{j=1}^d C(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})\right\}\,.$$

Budući da je po definiciji $\|\psi\|_{\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))} = \|\psi^*\|_{\mathrm{C}^\kappa(A[0,r_1,1])}$, dobili smo traženu ocjenu.

**Q.E.D.**

Po prethodnoj lemi i Hörmander-Mihlinovom teoremu konačno dobivamo da za $\kappa \geqslant \lfloor\frac{d}{2}\rfloor + 1$ i $p\in\langle 1,\infty\rangle$ vrijedi $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))\subseteq\mathcal{M}^p$, odnosno za svaki $\psi\in\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ imamo

$$\|\mathcal{A}_\psi\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d))} \leqslant C_d\|\psi\|_{\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))}\,.$$

Za $\kappa = 0$ smo s (II.4) okarakterizirali kada možemo neprekinute funkcije na $\mathbf{R}^d_*$ proširiti do neprekinutih funkcija na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Međutim, ovdje nemamo neku tako jednostavnu karakterizaciju, već da bismo pokazali da funkciju $\psi\in\mathrm{C}^\kappa(\mathbf{R}^d_*)$ možemo proširiti do $\mathrm{C}^\kappa$ funkcije na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ trebamo pokazati da je za svaki $|\boldsymbol{\alpha}| = \kappa$ funkcija $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\psi\circ\mathcal{J}^{-1})$ neprekinuta. Za to opet možemo koristiti Faá di Brunovu formulu, pri čemu je potrebno znati neka svojstva derivacija preslikavanja $\mathcal{J}^{-1} : A(0,r_1,1)\longrightarrow\mathbf{R}^d_*$ danog s

$$\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\zeta}(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{1}{2}} - r_0\boldsymbol{\zeta}|\boldsymbol{\zeta}|^{-1}\,.$$

Iz tog razloga ćemo pokazati tvrdnje za $\mathcal{J}^{-1}$ analogne tvrdnjama lemâ 1 i 2 za $\mathcal{J}$.

**Lema 3.** *Za svake $j\in 1..d$ i $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}_0^d$ vrijedi*

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j^{-1})(\boldsymbol{\zeta}) = P_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\zeta})(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{1}{2}-|\boldsymbol{\alpha}|} + r_0Q_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\zeta})|\boldsymbol{\zeta}|^{-1-2|\boldsymbol{\alpha}|}\;,\quad \boldsymbol{\zeta}\in A(0,r_1,1)\,,$$

*pri čemu su $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ i $Q_{\boldsymbol{\alpha}}$ polinomi stupnja ne većeg od $|\boldsymbol{\alpha}|+1$.*

Dem. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po redu derivacije $|\boldsymbol{\alpha}|$. Neka je $j \in 1..d$ proizvoljan i fiksan.

Za $\boldsymbol{\alpha} = \mathsf{0}$ iz same definicije slijedi da je $\mathcal{J}_j^{-1}$ traženog oblika uz $P_{\mathsf{0}}(\boldsymbol{\zeta}) = \zeta_j$ i $Q_{\mathsf{0}}(\boldsymbol{\zeta}) = -\zeta_j$.

Neka je sad $\boldsymbol{\alpha} = \mathsf{e}_i$, $i \in 1..d$. Ukoliko je $i \neq j$ tada imamo

$$\partial^i(\mathcal{J}_j^{-1})(\boldsymbol{\zeta}) = \zeta_i\zeta_j(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{3}{2}} + r_0\zeta_i\zeta_j|\boldsymbol{\zeta}|^{-3}\,,$$

čime dobivamo $P_{\mathsf{e}_i}(\boldsymbol{\zeta}) = Q_{\mathsf{e}_i}(\boldsymbol{\zeta}) = \zeta_i\zeta_j$, dok je u slučaju $i = j$

$$\partial^j(\mathcal{J}_j^{-1})(\boldsymbol{\zeta}) = (\zeta_j^2 - |\boldsymbol{\zeta}|^2 + 1)(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{3}{2}} + r_0(\zeta_j^2 - |\boldsymbol{\zeta}|^2)|\boldsymbol{\zeta}|^{-3}\,,$$

što daje $P_{\mathsf{e}_i}(\boldsymbol{\zeta}) = \zeta_j^2 - |\boldsymbol{\zeta}|^2 + 1$ i $Q_{\mathsf{e}_i}(\boldsymbol{\zeta}) = \zeta_j^2 - |\boldsymbol{\zeta}|^2$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$. Neka je $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$, $|\boldsymbol{\alpha}| = n+1$, po volji odabran, te neka su $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$ i $i \in 1..d$ takvi da vrijedi $|\boldsymbol{\beta}| = n$ i $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \mathsf{e}_i$. Odredimo $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j^{-1})$:

$$\begin{aligned}\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j^{-1})(\boldsymbol{\zeta}) =&\partial^i\Big(P_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\zeta})(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{1}{2}-|\boldsymbol{\beta}|} + r_0Q_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\zeta})|\boldsymbol{\zeta}|^{-1-2|\boldsymbol{\beta}|}\Big)\\ =&(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{1}{2}-(|\boldsymbol{\beta}|+1)}\Big((1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)(\partial^iP_{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\zeta}) + (1+2|\boldsymbol{\beta}|)\zeta_iP_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\zeta})\Big)\\ &+ r_0|\boldsymbol{\zeta}|^{-1-2(|\boldsymbol{\beta}|+1)}\Big(|\boldsymbol{\zeta}|^2(\partial^iQ_{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\zeta}) - (1+2|\boldsymbol{\beta}|)\zeta_iQ_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\zeta})\Big)\,.\end{aligned}$$

Kako su

$$P_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\zeta}) := (1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)(\partial^iP_{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\zeta}) + (1+2|\boldsymbol{\beta}|)\zeta_iP_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\zeta})$$

i

$$Q_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\zeta}) := |\boldsymbol{\zeta}|^2(\partial^iQ_{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\zeta}) - (1+2|\boldsymbol{\beta}|)\zeta_iQ_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\zeta})$$

polinomi stupnja ne većeg od $|\boldsymbol{\alpha}|+1$, dobili smo traženu tvrdnju.

**Q.E.D.**

Iz (II.3) smo vidjeli da $\mathcal{J}^{-1}$ možemo po neprekinutosti proširiti na $A_0[\mathsf{0}, r_1, 1] = \mathrm{S}^{d-1}(\mathsf{0}, r_1)$ s vrijednosti 0, a po prethodnoj lemi vidimo da to vrijedi i za sve derivacije (ali uz općenito neku drugu vrijednost). Time iz (1) dobivamo da za $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathbf{R}^d)$ i $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant \kappa$, funkciju $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\psi\circ\mathcal{J}^{-1})$, za koju znamo da je iz $\mathrm{C}(A(\mathsf{0}, r_1, 1))$, možemo po neprekinutosti proširiti na $A_0[\mathsf{0}, r_1, 1]$. Međutim, iz Teorema 3 je jasno da takvu funkciju ne možemo općenito po neprekinutosti proširit na $A_\infty[\mathsf{0}, r_1, 1]$ kako nužno trebamo imati da derivacije funkcije $\psi$ u beskonačnosti polinomijalno iščezavaju.

**Lema 4.** *Za svake $j \in 1..d$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ vrijedi*

$$|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j^{-1})(\boldsymbol{\zeta})| \leqslant \frac{\tilde{C}_{\boldsymbol{\alpha},d}}{(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{\frac{1}{2}+|\boldsymbol{\alpha}|}}\,, \quad \boldsymbol{\zeta} \in A(\mathsf{0}, r_1, 1)\,.$$

*Nadalje, postoji konstanta $r$ takva da $r_1 < r < 1$, te za svaki $r < |\boldsymbol{\zeta}| < 1$ vrijedi*

$$|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{J}_j^{-1})(\boldsymbol{\zeta})| \leqslant C_{\boldsymbol{\alpha},d}|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|^{1+2|\boldsymbol{\alpha}|}\,.$$

Dem. Prvi dio tvrdnje trivijalno slijedi iz prethodne leme i činjenice da je $r_1 < |\boldsymbol{\zeta}| < 1$.

Za drugi dio tvrdnje je dovoljno uočiti da za $C > 1$ postoji konstanta $r \in \langle r_1, 1\rangle$ takva da za $r < |\boldsymbol{\zeta}| < 1$ vrijedi

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{\zeta}|^2}} \leqslant C\Big(\frac{|\boldsymbol{\zeta}|}{\sqrt{1-|\boldsymbol{\zeta}|^2}} - r_0\Big)\,,$$

a što je posljedica činjenice da je funkcija $x \mapsto \frac{Cx-1}{\sqrt{1-x^2}}$ rastuća za $\frac{1}{C} < x < 1$ i teži k $+\infty$ kad $x \to 1^-$.

**Q.E.D.**

Neka je $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$. Pokažimo da je $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\psi \circ \mathcal{J}^{-1})$ neprekinuta na $A[0, r_1, 1]$. Po komentaru prije prethodne leme, potrebno je samo pokazati da je možemo proširiti po neprekinutosti na $A_\infty[0, r_1, 1]$. Štoviše, pokazat ćemo da promatrana funkcija na $A_\infty[0, r_1, 1]$ poprima vrijednost 0.

Koristeći (1) i drugu nejednakost iz prethodne leme dobivamo da na okolini ruba $A_\infty[0, r_1, 1]$ vrijedi ocjena

$$|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\psi \circ \mathcal{J}^{-1})(\boldsymbol{\zeta})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|! \sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|} C_{\boldsymbol{\beta}} |\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|^{|\boldsymbol{\beta}|+2|\boldsymbol{\alpha}|} |(\partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi)(\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}))|\,.$$

Kako je $\psi$ iz Schwartzovog prostora, znamo da za svaki $s \in \mathbf{R}^+$ izraz $|\boldsymbol{\xi}|^s|\partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi(\boldsymbol{\xi})|$ u beskonačnosti teži nuli. Time smo dobili da $|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\psi \circ \mathcal{J}^{-1})(\boldsymbol{\zeta})|$ teži nuli kad $|\boldsymbol{\zeta}| \to 1^-$, odnosno, $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\psi \circ \mathcal{J}^{-1})\big|_{A_\infty[0,r_1,1]} \equiv 0$, pa je konačno $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, $\kappa \in \mathbf{N}_0$.

Uzmimo sad $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{S}^{d-1})$. Tada imamo da je $\psi \circ \boldsymbol{\pi} \in \mathrm{C}^\kappa(\mathbf{R}^d_*)$, pri čemu je $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}$ projekcija na jediničnu sferu. Pokažimo da je $\psi \circ \boldsymbol{\pi} \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Kako je

$$\Big((\psi \circ \boldsymbol{\pi}) \circ \mathcal{J}^{-1}\Big)(\boldsymbol{\zeta}) = \psi\Big(\frac{\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})}{|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|}\Big) = \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{|\boldsymbol{\zeta}|}\Big)\,,$$

uočavamo da je $\Big((\psi \circ \boldsymbol{\pi}) \circ \mathcal{J}^{-1}\Big) = \psi \circ \boldsymbol{\pi}\big|_{A[0,r_1,1]}$ pa je onda očito $\psi \circ \boldsymbol{\pi} \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

Time smo dobili poopćenje Leme II.2.

**Lema 5.**
*i)* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \hookrightarrow \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, *i*
*ii)* $\{\psi \circ \boldsymbol{\pi} \ :\ \psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{S}^{d-1})\} \hookrightarrow \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. ∎

U petom odjeljku će nam trebati da je za odgovarajući izbor $m \in \mathbf{N}$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ funkcija $\psi^{m,\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}}}$ element prostora $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, pri čemu je $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$, $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$. Za razliku od Primjera II.1, ovdje smo uzeli glatku funkciju u skladu s definicijom prostora $\mathrm{H}^{-m,p}(\mathbf{R}^d)$.

Dokažimo najprije sljedeću tehničku lemu.

**Lema 6.** *Za svaki $s \in \mathbf{R} \setminus 2\mathbf{N}_0$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ i $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ vrijedi*

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\Big((1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}\Big) = P_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}-|\boldsymbol{\alpha}|}\,,$$

*pri čemu je $P_{\boldsymbol{\alpha}}$ polinom stupnja ne većeg od $|\boldsymbol{\alpha}|$.*

*Ukoliko je $s$ paran, tada gornje vrijedi za $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant \frac{s}{2}$.*

Dem. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po redu derivacije $|\boldsymbol{\alpha}|$. Za $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$ je tvrdnja trivijalno ispunjena, dok za $\boldsymbol{\alpha} = \mathsf{e}_i$, $i \in 1..d$, imamo

$$\partial^i\Big((1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}\Big) = s\xi_i(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}-1}\,.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$. Neka je $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$, $|\boldsymbol{\alpha}| = n+1$, po volji odabran, te neka su $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$ i $i \in 1..d$ takvi da vrijedi $|\boldsymbol{\beta}| = n$ i $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \mathsf{e}_i$, pa imamo

$$\begin{aligned}\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\Big((1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}\Big) =&\partial^i\Big(P_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi})(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}-|\boldsymbol{\beta}|}\Big)\\ =&\Big((1+|\boldsymbol{\xi}|^2)(\partial^i P_{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\xi}) + (s-2|\boldsymbol{\beta}|)\xi_i P_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi})\Big)(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}-|\boldsymbol{\alpha}|}\,.\end{aligned}$$

Ukoliko je $s$ paran prirodan broj, tada za neki $\boldsymbol{\beta}$ imamo $\frac{s}{2} - |\boldsymbol{\beta}| = 0$ pa u tom slučaju u gornjem izrazu druga jedankost nije valjana. Međutim, u tom slučaju je $(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}$ polinom stupnja $s$ pa onda i lako odredimo derivacije.

**Q.E.D.**

Sada po Leibnizovoj formuli lako dobivamo da je za $m \in \mathbf{N}$ i $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$

$$\partial^{\boldsymbol{\beta}}\bigg(\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}}}\bigg) = \tilde{P}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi})(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}-|\boldsymbol{\beta}|}\,,$$

pri čemu je $\tilde{P}_{\boldsymbol{\beta}}$ polinom stupnja ne većeg od $|\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$, iz čega slijedi ocjena

$$\bigg|\partial^{\boldsymbol{\beta}}\bigg(\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}}}\bigg)\bigg| \leqslant C(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}(|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}|)}\,,$$

za neku konstantu $C > 0$.

Koristeći prethodne rezultate, sada možemo dati dovoljan uvjete na $m$ i $\boldsymbol{\alpha}$ tako da funkcija $\psi^{\boldsymbol{\alpha}}$ bude element prostora $\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

**Lema 7.** *Za $m \in \mathbf{N}$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ takve da $m \geqslant 2\kappa + |\boldsymbol{\alpha}| + 2$ je $\psi^{m,\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.*

Dem. Kako je $\psi^{m,\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$, dovoljno je pokazati da pripadne parcijalne derivacije funkcije $\psi^{m,\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathcal{J}^{-1}$ možemo po neprekinutosti proširiti na $A_\infty[0, r_1, 1]$, a za što je dovoljno pokazati da su sve parcijalne derivacije reda $\kappa + 1$ omeđene na okolini $A_\infty[\mathsf{0}, r_1, 1]$.

Neka je $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$, $|\boldsymbol{\beta}| = \kappa + 1$. Koristeći (1), drugi dio tvrdnje Leme 4, te prethodnu ocjenu, na okolini $A_\infty[\mathsf{0}, r_1, 1]$ imamo

$$\begin{aligned}\Big|\partial^{\boldsymbol{\beta}}\Big(\psi^{m,\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathcal{J}^{-1}\Big)(\boldsymbol{\zeta})\Big| \leqslant&|\boldsymbol{\beta}|! \sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\gamma}|\leqslant|\boldsymbol{\beta}|} C_{\boldsymbol{\gamma}}|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|^{|\boldsymbol{\gamma}|+2|\boldsymbol{\beta}|}|(\partial^{\boldsymbol{\gamma}}\psi^{m,\boldsymbol{\alpha}})(\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}))|\\ \leqslant&|\boldsymbol{\beta}|! \sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\gamma}|\leqslant|\boldsymbol{\beta}|} \tilde{C}_{\boldsymbol{\gamma}}|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|^{|\boldsymbol{\gamma}|+2|\boldsymbol{\beta}|}(1+|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|^2)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}(|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\gamma}|)}\\ \leqslant&(\kappa+1)! \sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\gamma}|\leqslant|\boldsymbol{\beta}|} \tilde{C}_{\boldsymbol{\gamma}}(1+|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|^2)^{-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{\alpha}|+\kappa+1}\\ \leqslant&C_\kappa(1+|\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta})|^2)^{-\frac{1}{2}(m-|\boldsymbol{\alpha}|-2\kappa-2)} \leqslant C_\kappa\,,\end{aligned}$$

iz čega slijedi omeđenost parcijalnih derivacija.

**Q.E.D.**

Rezultat prethodne leme će vjerojatno ostati valjan i za $m \geqslant 2\kappa+|\boldsymbol{\alpha}|$, ali onda treba pokazati da su derivacije najvišeg reda (reda $\kappa$) neprekinute na $A_\infty[0, r_1, 1]$. Međutim, pravo poboljšanje rezultata bi bilo tek ako bismo imali da je dovoljno $m \geqslant |\boldsymbol{\alpha}|$, što nažalost općenito ipak ne vrijedi. Naime, za $m = 1$, $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$ i $\kappa = 1$ imamo

$$
\begin{aligned}
\partial^i\Big(\psi^{1,0} \circ \mathcal{J}^{-1}\Big)(\boldsymbol{\zeta}) &= \sum_{j=1}^{d} (\partial^j\psi^{1,0})(\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\zeta}))\partial^i\mathcal{J}_j^{-1}(\boldsymbol{\zeta}) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{-\zeta_i\zeta_j^2(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-2}}{\Big(1+(|\boldsymbol{\zeta}|(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{1}{2}}-r_0)^2\Big)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d} r_0\zeta_i\zeta_j^2|\boldsymbol{\zeta}|^{-1}\frac{(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{3}{2}} - |\boldsymbol{\zeta}|^{-2}(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{1}{2}} + r_0|\boldsymbol{\zeta}|^{-3}}{\Big(1+(|\boldsymbol{\zeta}|(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{1}{2}}-r_0)^2\Big)^{\frac{3}{2}}} \,.
\end{aligned}
$$

Zanima nas limes $|\boldsymbol{\zeta}| \to 1$. Množeći brojnik i nazivnik u drugoj sumi s $(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{\frac{3}{2}}$, dobivamo da je druga suma omeđena na okolini $A_\infty[0, r_1, 1]$. Međutim, prva suma je neomeđena kako je u brojniku član najvišeg reda $(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-2}$, dok je u nazivniku $(1-|\boldsymbol{\zeta}|^2)^{-\frac{3}{2}}$. Time dobivamo da $\partial^i(\psi^{1,0}\circ\mathcal{J}^{-1})$ ne možemo proširiti na $A_\infty[0, r_1, 1]$, pa onda i $\psi^{1,0} \notin \mathrm{C}^1(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

## 3. Pripremne tvrdnje

Kao i kod jednoskalnih H-mjera, prije samog dokaza egzistencije jednoskalnih H-distribucija trebamo izvesti odgovarajuću inačicu komutacijske leme, kao i prikladni oblik teorema o jezgri.

Odgovarajućim interpolacijama pripadnih operatora, jednostavno se tvrdnja Leme II.4 poopćuje na $\mathrm{L}^p$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, prostore.

**Lema 8.** *Neka su zadane $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, $\kappa \geqslant \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$, i $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, te $\omega_n \to 0^+$. Označimo s $\psi_n(\boldsymbol{\xi}) := \psi(\omega_n\boldsymbol{\xi})$ za $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$. Tada komutator možemo zapisati kao zbroj*

$$
C_n := [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_n}] = \tilde{C}_n + K \,,
$$

*gdje je $K$ kompaktan operator na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, dok $\tilde{C}_n \longrightarrow 0$ u operatorskoj normi na $\mathcal{L}(\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d))$, pri čemu je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ proizvoljan.*

Dem. Kao i u dokazu Leme II.4, komutator $C_n$ možemo zapisati u obliku $C_n = \tilde{C}_n + K$, pri čemu su $\tilde{C}_n := [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_n - \psi_0\circ\boldsymbol{\pi}}]$ i $K := [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_0\circ\boldsymbol{\pi}}]$. Po Tartarovoj Prvoj komutacijskoj lemi [52, Lemma 1.7] znamo da je $K$ kompaktan na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, a iz Leme II.3 slijedi $\tilde{C}_n \longrightarrow 0$ u operatorskoj normi na $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$.

Kako je $\psi_0 \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{S}^{d-1})$, imamo da je $\psi_0\circ\boldsymbol{\pi} \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)) \subseteq \mathcal{M}^p$ (npr. ta činjenica je komentirana u [10, Remark 1.5]), pa je za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ operator $K$ omeđen na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, dok je po Lemi 9 (vidi niže) niz operatora $\tilde{C}_n$ jednoliko omeđen na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$.

Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ po volji odabran. Tada postoje $r \in \langle 1, \infty\rangle$ i $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da $1/p = \theta/2 + (1-\theta)/r$. Kako je $K$ kompaktan na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ i omeđen na $\mathrm{L}^r(\mathbf{R}^d)$, po [9, Lema 4] slijedi da je $K$ kompaktan na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$.

Slično, koristeći Riesz-Thorinov interpolacijski teorem (pogledati npr. [30, Theorem 1.3.4]) imamo

$$\|\tilde{C}_n\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d))} \leqslant \|\tilde{C}_n\|^{\theta}_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))} \|\tilde{C}_n\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^r(\mathbf{R}^d))} ,$$

iz čega slijedi $\tilde{C}_n \longrightarrow 0$ u operatorskoj normi na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$.

Konačno, kako je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ bio proizvoljan, dobivamo da tvrdnja vrijedi za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

**Q.E.D.**

**Lema 9.** *Neka $\psi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ zadovoljava Mihlinov uvjet:*

$$(\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*)(\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}^d_0,\ |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant \kappa) \qquad |\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \frac{C}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}} .$$

*Tada za svaki $a > 0$ funkcija $\psi_a := \psi(a\cdot)$ također zadovoljava Mihlinov uvjet uz istu konstantu $C$.*

Dem. Za $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant \kappa$ i $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*$ imamo

$$|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_a(\boldsymbol{\xi})| = a^{|\boldsymbol{\alpha}|}|(\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi)(a\boldsymbol{\xi})| \leqslant a^{|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{C}{|a\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}} = \frac{C}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}} ,$$

iz čega slijedi tvrdnja.

**Q.E.D.**

Distribucije se standarno definiraju na otvorenim podskupovima $\mathbf{R}^d$, te također i na glatkim mnogostrukostima bez ruba ([17, Section XXIII.9], [51, Chapter 1]). Međutim, $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ je kompaktan skup pa je zatvoren, a i (gledan kao mnogostrukost) je mnogostrukost s rubom, tako da moramo detaljnije proučiti kako bismo definirali distribucije na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Ipak, kako je otvoren podskup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ mnogostrukost bez ruba, produkt $\Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ je i dalje mnogostrukost s rubom, a ne mnogostrukost s uglovima [43] što bi dodatno zakompliciralo situaciju. Uočimo još da je dovoljno konstruirati distribuciju $\nu$ na $\Omega \times A[0, r_1, 1]$, jer iz toga jednostavno možemo dobiti distribuciju $\tilde{\nu}$ na $\Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ s

$$\langle \tilde{\nu}, \Phi\rangle = \langle \nu, \Phi(\cdot, \mathcal{J}^{-1}(\cdot))\rangle .$$

Uglavnom, u [43] su istaknute tri mogućnosti kako se mogu definirati distribucije na mnogostrukostima s rubom (zapravo se u spomenutoj referenci radi s općenitijim mnogostrukostima s uglovima). Prezentirajmo ukratko sva tri pristupa na kompaktnom skupu $A[0, r_1, 1]$.

Prvi pristup je da se definiraju distribucije na interioru, $(\mathrm{C}^\infty_c(A(0, r_1, 1)))'$, čime se dobiva veliki prostor objekata o kojima nemamo nikakvu informaciju na rubu skupa $A[0, r_1, 1]$. Znatno manji prostor se dobije ako se promatraju *proširive* distribucije $(\mathrm{C}^\infty_0(A(0, r_1, 1)))'$, odnosno *nošene* distribucije $(\mathrm{C}^\infty(A[0, r_1, 1]))'$. Kako želimo da nam prostor probnih funkcija bude $\mathrm{C}^\infty(A[0, r_1, 1])$ (odnosno povlak tog prostora duž $\mathcal{J}$), radit ćemo s nošenim distribucijama. Štoviše, iz $\mathrm{C}^\infty_c(A[0, r_1, 1]) = \mathrm{C}^\infty(A[0, r_1, 1])$, slijedi da bismo standarnim pristupom upravo dobili nošene distribucije na mnogostrukosti s rubom.

U [43, Thereom 3.9.1] je dan Schwartzov teorem o jezgri za proširive i nošene distribucije na kompaktnim mnogostrukostima. Međutim, kako je naša situacija znatno jednostavnija, prikazat ćemo ideju konstrukcije slične ranije napravljenoj u odjeljku II.2.

Time ćemo i izbjeći rad s 1-gustoćama [43, 51] koje se prirodno pojavljuju kod općenitih mnogostrukosti da bi se dobro definirao integral, odnosno da $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ funkcije možemo uložiti u distribucije, što ovdje ne trebamo kako je $A(\mathsf{0}, r_1, 1)$ otvoren u $\mathbf{R}^d$.

Donosimo iskaz (standarnog) Schwartzovog teorema o jezgri za otvorene podskupove $\mathbf{R}^d$ [50, 51].

**Lema 10.** *Neka su $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ i $\Omega' \subseteq \mathbf{R}^{d'}$ otvoreni, te neka je $B$ neprekinuta bilinearna forma na $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega) \times \mathrm{C}^\infty_c(\Omega')$. Tada postoji jedinstvena distribucija $\nu \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega')$ takva da*

$$(\forall f \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega))(\forall g \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega')) \quad B(f, g) = \langle \nu, f \boxtimes g \rangle \ .$$

∎

Ukoliko je $B$ neprekinuta na $\mathrm{C}^k_c(\Omega) \times \mathrm{C}^l_c(\Omega')$ za neke $k, l \in \mathbf{N}_0$, tada se može pokazati da je distribucija $\nu$ konačnog reda $q \leqslant k + l + d + d' + 1$ (vidi dokaz [51, Theorem 1.3.4]).

Slično kao u odjeljku II.2, želimo najprije poopćiti prethodni rezultat na slučaj kad je $\Omega' \subseteq \mathbf{R}^d_+$, pri čemu je $\mathbf{R}^d_+ := \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x^d) \in \mathbf{R}^d : x^d \geqslant 0\}$ zatvoren poluprostor $\mathbf{R}^d$. Glatke funkcije na $\mathbf{R}^d$ restrikcijom na $\mathbf{R}^d_+$ ostaju glatke. Vrijedi i obrat, međutim, ne možemo kao kod neprekinutih funkcija samo proširiti po refleksivnosti jer možemo izgubiti glatkoću. Zato ćemo koristiti *Seeleyjev* rezultat proširenja, koji je zapravo poseban (linearan) slučaj *Whitneyjevog* proširenja, a kojeg donosimo iz [43, Theorem 1.4.1].

**Lema 11.** *Za otvoreni podskup $\tilde\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ neka je $\Omega := \tilde\Omega \cap \mathbf{R}^d_+$. Tada postoji neprekinuto linearno preslikavanje $E : \mathrm{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\tilde\Omega)$ takvo da je za svaki $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, $E(\psi)_{|\Omega} = \psi$.*

∎

Naravno, ako $\psi$ ima kompaktan nosač (u $\Omega$), tada možemo postići da $E(\psi)$ također ima kompaktan nosač (u $\tilde\Omega$). Naime, samo dobivenu funkciju iz prethodne leme pomnožimo s odgovarajućom režućom funkcijom.

Sada za $\Omega' \subseteq \mathbf{R}^d_+$ možemo provesti istu konstrukciju kao u odjeljku II.2 za polukugle, s tim da samo proširenje po refleksivnosti zamijenimo gornjim proširenjem. Dakle, uzimajući (konačnu) particiju jedinice na $A[\mathsf{0}, r_1, 1]$, te koristeći Lemu 10, analogno kao u dokazu Leme II.6 dobivamo teorem o jezgri za $\Omega \times A[\mathsf{0}, r_1, 1]$, a time i odgovarajuću distribuciju na $\Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ kao što je ranije napomenuto.

**Teorem 4.** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren, te neka je $B$ neprekinuta bilinearna forma na $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega) \times \mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Tada postoji jedinstvena distribucija $\nu \in \mathcal{D}'(\Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ takva da*

$$(\forall f \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega))(\forall g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))) \quad B(f, g) = \langle \nu, f \boxtimes g \rangle \ .$$

∎

Alternativno smo mogli koristeći [43, Proposition 1.14.2] uložiti $A[\mathsf{0}, r_1, 1]$ u torus, te onda iskoristiti poznati rezultat Schwartzovog teorema o jezgri za glatke mnogostrukosti bez ruba [17, Section XXIII.9].

## 4. Rezultat postojanja

Sada smo spremni za konstrukciju jednoskalnih H-distribucija.

**Teorem 5. (postojanje jednoskalnih H-distribucija)** *Ako* $u_n \rightharpoonup 0$ *u* $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *i* $(v_n)$ *omeđen u* $\mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *za neki* $p \in \langle 1, \infty \rangle$ *i* $q \geqslant p'$ $(1/p + 1/p' = 1)$, *te* $\omega_n \to 0^+$, *onda postoje podnizovi* $(u_{n'})$, $(v_{n'})$ *i kompleksna (nošena) distribucija konačnog reda* $\nu^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} \in \mathcal{D}'(\Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ *takvi da za svaki izbor probnih funkcija* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ *i* $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, *za* $\kappa = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$, *vrijedi*

$$\begin{aligned}\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\varphi_1 u_{n'}) \overline{\varphi_2 v_{n'}}\, d\mathbf{x} &= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi_1 u_{n'} \overline{\mathcal{A}_{\bar\psi_{n'}}(\varphi_2 v_{n'})}\, d\mathbf{x} \\ &= \left\langle \nu^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1 \bar\varphi_2 \boxtimes \psi \right\rangle ,\end{aligned}$$

*pri čemu je* $\psi_n := \psi(\omega_n \cdot)$. *Distribuciju* $\nu^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ *nazivamo* jednoskalnom H-distribucijom (s karakterističnom duljinom $(\omega_{n'})$) *pridruženom (pod)nizovima* $(u_{n'})$ *i* $(v_{n'})$. ∎

Dualni produkt u iskazu teorema je dobro definiran kako ćemo pokazati da je $(\varphi, \psi) \mapsto \left\langle \nu^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi \boxtimes \psi \right\rangle$ neprekinuti bilinearni funkcional u topologiji prostora $\mathrm{C}_c(\Omega) \times \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ pa ga možemo po neprekinutosti proširiti na taj cijeli prostor. U iskazu smo dodatno rekli da imamo vezu između limesa niza integrala i tog proširenja.

Standarno uzimamo da je dualni produkt antilinearan po prvom argumentu, a linearan po drugom argument, pa niz integrala iz iskaza možemo kraće zapisati kao

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\varphi_1 u_{n'}) \overline{\varphi_2 v_{n'}}\, d\mathbf{x} = \left\langle \varphi_2 v_{n'}, \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\varphi_1 u_{n'}) \right\rangle .$$

Koraci dokaza ovog teorema bit će analogni onima u dokazu teorema postojanja jednoskalnih H-mjera (Teorem II.1), pa ćemo neke argumente izostaviti. Međutim, prisjetimo se da za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren postoji niz kompakata $(K_m)$ koji ga iscrpljuju, odnosno $K_m \subseteq \mathsf{Int}\, K_{m+1}$ i $\bigcup_m K_m = \Omega$.

Dem. Prva jednakost je posljedica činjenice da je $\mathcal{A}_{\bar\psi_{n'}}$ adjungirani operator operatora $\mathcal{A}_{\psi_{n'}}$.

Neka su $\varphi_1$ i $\varphi_2$ proizvoljne probne funkcije nošene u $K_m$, te $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Po lemama 3 i 9 je niz $(\mathcal{A}_{\psi_n}(\varphi_1 u_n))$ omeđen u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, pa po Hölderovoj nejednakosti slijedi da je cijeli niz integrala iz iskaza teorema omeđen (u $\mathbf{C}$) s

$$\left| \left\langle \varphi_2 v_n, \mathcal{A}_{\psi_n}(\varphi_1 u_n) \right\rangle \right| \leqslant C_{m,d} \|\varphi_1\|_{\mathrm{L}^\infty(K_m)} \|\varphi_2\|_{\mathrm{L}^\infty(K_m)} \|\psi\|_{\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))} ,$$

pri čemu je $C_{m,d} = C_d(\sup_n \|u_n\|_{\mathrm{L}^p(K_m)})(\sup_n \|v_n\|_{\mathrm{L}^{p'}(K_m)})$, dok je $C_d$ konstanta iz Leme 3. Time možemo prijeći na konvergentan podniz čiji limes, označen s $L(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, zadovoljava istu ocjenu.

Sada u potpunosti analogno kao u dokazu Teorema II.1 Cantorovim dijagonalnim postupkom možemo prijeći na podniz, označen s $n'$, koji je dobar za svaki izbor probnih funkcija $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Time smo dobili neprekinutu trilinearnu formu $L$ na $\mathrm{C}_c(\Omega) \times \mathrm{C}_c(\Omega) \times \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ koja za proizvoljni izbor probnih funkcija zadovoljava

$$\lim_{n'} \left\langle \varphi_2 v_{n'}, \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\varphi_1 u_{n'}) \right\rangle = L(\varphi_1, \varphi_2, \psi) .$$

Nadalje, $L(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ ovisi samo o umnošku $\varphi_1\bar\varphi_2$ (a ne o $\varphi_1$ i $\varphi_2$ neovisno). Naime,

$$\begin{aligned}
\lim_{n'} \left\langle \varphi_2 v_{n'}, \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\varphi_1 u_{n'})\right\rangle &= \lim_{n'} \left\langle \varphi_2 v_{n'}, \varphi_1 \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\zeta_{\operatorname{supp}\varphi_1} u_n)\right\rangle \\
&= \lim_{n'} \left\langle \bar\varphi_1 \varphi_2 v_{n'}, \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\zeta_{\operatorname{supp}\varphi_1} u_n)\right\rangle \\
&= \lim_{n'} \left\langle \zeta_{\operatorname{supp}\varphi_1\cap\operatorname{supp}\varphi_2} v_{n'}, \varphi_1\bar\varphi_2 \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\zeta_{\operatorname{supp}\varphi_1} u_n)\right\rangle \\
&= \lim_{n'} \left\langle \zeta_{\operatorname{supp}\varphi_1\cap\operatorname{supp}\varphi_2} v_{n'}, \mathcal{A}_{\psi_{n'}}(\varphi_1\bar\varphi_2 u_n)\right\rangle \;,
\end{aligned}$$

pri čemu je $\zeta_K \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ identički jednaka 1 na $K$, dok smo u prvoj i posljednjoj jednakosti koristili Lemu 8 i pretpostavku da $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Za $\varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ definirajmo $\mathcal{L}(\varphi,\psi) := L(\varphi, \zeta_{\operatorname{supp}\varphi}, \psi)$. Definicija je valjana kako po gornjem računu $\mathcal{L}$ ne ovisi o izboru funkcije $\zeta_{\operatorname{supp}\varphi}$, pa je $\mathcal{L}$ neprekinuta bilinearna forma na $\mathrm{C}_c(\Omega)\times\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ koja dodatno za $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ zadovoljava

$$\mathcal{L}(\varphi_1\bar\varphi_2, \psi) = L(\varphi_1\bar\varphi_2, \zeta_{\operatorname{supp}(\varphi_1\bar\varphi_2)}, \psi) = L(\varphi_1, \varphi_2, \psi)\,.$$

Kako je topologija prostora $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)\times\mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ jača od topologije prostora $\mathrm{C}_c(\Omega)\times\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, restrikcija bilinearne forme $\mathcal{L}$ na $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)\times\mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ je i dalje neprekinuta s obzirom na topologiju prostora $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)\times\mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Sada po teoremu o jezgri danog Teoremom 4 slijedi da postoji distribucija $\nu^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ koja se na tenzorskim produktima podudara s bilinearnom formom $\mathcal{L}$. Kako je $\mathcal{L}$ neprekinuta na $\mathrm{C}_c(\Omega)\times\mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, po komentaru nakon Leme 10 slijedi da je $\nu^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ distribucija reda manjeg ili jednakog $\kappa + 2d + 1$.

**Q.E.D.**

Po Lemi 5 izravno slijedi da su jednoskalne H-distribucije proširenja H-distribucija. Nadalje, ukoliko se restringiramo na $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, tada dobivamo objekt koji je direktno proširenje poluklasičnih mjera čime ga ima smisla nazvati *poluklasična distribucija*.

Iz definicije izravno slijedi da za jednoskalne H-distribucije $\nu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ i $\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ pridružene (pod)nizovima $(u_n)$ i $(v_n)$, odnosno $(v_n)$ i $(u_n)$, vrijedi $\nu_{\mathrm{K}_{0,\infty}} = \bar\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$. Za vektorske nizove $(\mathsf{u}_n)$ i $(\mathsf{v}_n)$ definiramo pripadnu matričnu jednoskalnu H-distribuciju $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ kojoj je $(i,j)$ komponenta, $\nu^{ij}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$, jednoskalna H-distribucija pridružena nizovima $(u^i_n)$ i $(v^j_n)$.

Kao i kod H-distribucija (vidi Napomenu 10) ukoliko su za svaki $n$ nosači funkcija $u_n$ i $v_n$ sadržani u nekom fiksnom kompaktu $K$, te $q > p'$, može se koristeći [38, Theorem 2.1] kao u [44, Theorem 9] pokazati da je jednoskalna H-distribucija element Bôchnerovog prostora $\mathrm{L}^{\bar p'}(\Omega; \mathrm{C}^\kappa(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)))$, pri čemu je $\bar p \in \langle 1, \frac{pq}{p+q}\rangle$.

Ostala svojstva H-distribucija dana u [5] se analogno proširuju na jednoskalne H-distribucije, koja nećemo sad posebno navoditi već ćemo izvesti odgovarajuće lokalizacijsko načelo.

## 5. Lokalizacijsko svojstvo

Kako u $\mathrm{L}^p$ prostoru, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, Fourierovu pretvorbu treba zamijeniti s Fourierovim množiteljima, uvjet desne strane (II.12) također treba prilagoditi. Ovdje ćemo radi jednostavnosti obuhvatiti samo poopćenje slučaja $l = 0$ odjeljka II.5.

Neka je $m \in \mathbf{N}$ i $(\varepsilon_n)$ niz pozitivnih brojeva omeđen odozgo s 1 (1 smo uzeli samo radi jednostavnijeg računa). Za niz $(\mathsf{f}_n)$ u $\mathrm{H}^{-m,p}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$ promatramo konvergenciju u sljedećem smislu

$$\mathcal{A}_{(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}}}\mathsf{f}_n \longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,. \tag{2}$$

Lako se pokaže da se ova defincija za $p=2$ i $l=0$ podudara s uvjetom (II.12). Kao i u $\mathrm{L}^2$ slučaju, lokalizirana inačica ovog uvjeta pokazat će se prikladnijom: za niz $(\mathsf{f}_n)$ u $\mathrm{H}^{-m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^q)$ promatramo

$$(\forall\,\varphi\in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)) \qquad \mathcal{A}_{(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}}}(\varphi\mathsf{f}_n) \longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,. \tag{3}$$

Iz Leme 6 jednostavno slijedi da za svaki (realni) $s\leqslant 0$ funkcija $(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}$ zadovoljava Mihlinov uvjet, a onda po Lemi 9 slijedi da je niz operatora $\mathcal{A}_{(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}}}$ jednoliko omeđen na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$, čime imamo da jaka konvergencija k nuli u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$ povlači uvjet (2). Dodatno, imamo da je uvjet (2) slabiji za veće brojeve $m$. Preciznije, ako je $m_1>m_2$ tada uvjet (2) uz $m_2$ povlači uvjet (2) uz $m_1$.

Pokažimo da uvjet (2) povlači jaku konvergenciju k nuli u $\mathrm{H}^{-m,p}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. Zapravo je dovoljno pokazati da je Fourierov množitelj sa simbolom

$$\Bigl(\frac{1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}\Bigr)^{\frac{m}{2}}$$

jednoliko omeđen na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$. Za $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}^d_0$ po Leibnizovoj formuli i Lemi 6 imamo

$$\begin{aligned}
\left|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\Bigl(\Bigl(\frac{1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}\Bigr)^{\frac{m}{2}}\Bigr)\right| &\leqslant \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leqslant\boldsymbol{\alpha}}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\beta}|}|P_{\boldsymbol{\beta}}(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})|(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}-|\boldsymbol{\beta}|}\\
&\qquad |\tilde{P}_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi})|(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}-|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|}\\
&\leqslant \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leqslant\boldsymbol{\alpha}}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\beta}|}(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}-\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}-\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{2}+\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}}\\
&\leqslant \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leqslant\boldsymbol{\alpha}}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}-\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}-\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{2}+\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}} \leqslant \frac{2^\kappa}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\,,
\end{aligned}$$

pri čemu su $P_{\boldsymbol{\beta}}$ i $\tilde{P}_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}$ odgovarajući polinomi stupnja $|\boldsymbol{\beta}|$ i $|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}|$ iz Leme 6, dok smo u trećoj nejednakosti koristili da je $\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\beta}|}(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}-\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}}\leqslant\varepsilon_n^m(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}-\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}}$ za $|\boldsymbol{\beta}|\geqslant\frac{m}{2}$. Istaknimo da je ocjena u prvoj nejednakosti valjana i za paran $m$, iako nije nužno optimalna. Sada po Hörmander-Mihlinovom teoremu slijedi tvrdnja.

S druge strane, iz

$$\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}|}(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}-\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{2}+\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}}\leqslant\varepsilon_n^{-m}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}-\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{2}+\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{2}}\,,$$

slijedi

$$\left|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\Bigl(\Bigl(\frac{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}{1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2}\Bigr)^{\frac{m}{2}}\Bigr)\right|\leqslant\frac{\varepsilon_n^{-m}2^\kappa}{|\boldsymbol{\xi}|^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\,,$$

pa obrat vrijedi ukoliko je dodatno niz $(\varepsilon_n)$ omeđen odozdo pozitivnom konstantom, kada dobivamo da je uvjet (2) ekvivalentan jakoj konvergenciji k nuli u $\mathrm{H}^{-m,p}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)$.

Pri izvođenju lokalizacijskog svojstva jednoskalnih H-mjera, tvrdnja Leme II.8 pokazala se ključnom. Koristeći gornji račun, jednostavno dobivamo njen analogon s obzirom na uvjet (2).

**Lema 12.** *Neka je $(\varepsilon_n)$ niz u $\mathbf{R}^+$ omeđen odozgo i $(\mathsf{f}_n)$ niz vektorskih funkcija koji za neki $k \in 0..m$ jako konvergira nuli u prostoru $\mathrm{H}^{-k,p}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$. Tada niz $(\varepsilon_n^k \mathsf{f}_n)$ zadovoljava (2).*

Dem. Iz prethodnih računa i komentara znamo da su Fourierovi množitelji sa simbolima $\varepsilon_n^k \Big(\frac{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}{1+|\varepsilon_n \boldsymbol{\xi}|^2}\Big)^{\frac{k}{2}}$ i $(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m-k}{2}}$ jednoliko omeđeni na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^q)$, pa iz

$$\frac{\varepsilon_n^k}{(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}}} = \varepsilon_n^k \Big(\frac{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}{1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2}\Big)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m-k}{2}}} \frac{1}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{k}{2}}} \,,$$

koristeći $\mathcal{A}_{\psi_1\psi_2} = \mathcal{A}_{\psi_1}\mathcal{A}_{\psi_2}$, dobivamo tvrdnju.

**Q.E.D.**

Sada smo spremni dokazati lokalizacijsko svojstvo jednoskalnih H-distribucija, odnosno poopćenje Teorema II.3 na $\mathrm{L}^p$ slučaj.

**Teorem 6.** *Neka $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, zadovoljava*

$$\sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|} \partial_{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n) = \mathsf{f}_n \,, \tag{4}$$

*pri čemu $\varepsilon_n \to 0^+$, $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_{\mathrm{q}\times\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, dok je $(\mathsf{f}_n)$ niz funkcija iz $\mathrm{H}^{-m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^q)$ koji zadovoljava (3). Nadalje, neka je $(\mathsf{v}_n)$ omeđen niz u $\mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$.*

*Tada jednoskalna H-distribucija $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ pridružena (pod)nizovima $(\mathsf{v}_n)$ i $(\mathsf{u}_n)$ karakteristične duljine $(\varepsilon_n)$ zadovoljava:*

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\nu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}^\top = \mathbf{0} \,,$$

*pri čemu je*

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} (2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}+q+1}} \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \,,$$

*dok je $q$ red jednoskalne H-distribucije.*

Dem. Dokaz je analogan dokazu Teorema II.3, ali ćemo radi potpunosti prezentirati cjeloviti dokaz.

Lokalizirajmo (4) množenjem s proizvoljnom probnom funkcijom $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$, te koristeći Leibnizovo pravilo dano u Lemi II.9 dobivamo

$$\sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} (-1)^{|\boldsymbol{\beta}|} \binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|} \partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \Big( (\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi) \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n \Big) = \varphi \mathsf{f}_n \,.$$

Cilj nam je pokazati da članovi uz $\boldsymbol{\beta} \neq \mathsf{0}$ na lijevoj strani prethodne jednakosti zadovoljavaju uvjet konvergencije desne strane (2), tj. da ih možemo prebaciti na desnu stranu.

Za dane $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ niz $\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \Big( (\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi) \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n \Big)$ je nošen u čvrstom kompaktu $(\operatorname{supp}\varphi)$, dakle, po Rellichovom teoremu kompaktnosti, za $\boldsymbol{\beta} \neq \mathsf{0}$ je jako pretkompaktan u $\mathrm{H}^{-|\boldsymbol{\alpha}|,p}(\Omega; \mathbf{C}^q)$, pa time (zbog slabe konvergencije niza $(\mathsf{u}_n)$ k $\mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$) i jako konvergira k $\mathsf{0}$ u navedenom prostoru. Nadalje, po Lemi 12 izraz $\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|} \partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \Big( (\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi) \mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathsf{u}_n \Big)$ zadovoljava (2).

Zbog proizvoljnosti $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ dobivamo tvrdnju, pa gornju jednakost možemo jednostavnije zapisati kao

$$\sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\mathsf{u}_n) = \tilde{\mathsf{f}}_n\,,$$

pri čemu $(\tilde{\mathsf{f}}_n)$ zadovoljava (2).

Djelovanjem na prethodnu jednakost operatorom $\mathcal{A}_{(1+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\frac{m}{2}-q-1}}$ ($q \geqslant \kappa = \lfloor\frac{d}{2}\rfloor+1$ je red pripadne jednoskalne distribucije) dobivamo

$$\sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \mathcal{A}_{(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\psi_n^{m+2q+2,\boldsymbol{\alpha}}}(\varphi\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n) \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,,$$

pri čemu smo koristili da (2) uz $m$ povlači (2) uz $m+2q+2$, dok je $\psi_n^{m+2q+2,\boldsymbol{\alpha}} := \psi^{m+2q+2,\boldsymbol{\alpha}}(\varepsilon_n\cdot)$ za $|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m$ element prostora $\mathrm{C}^q(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ (vidi Lemu 7).

Nakon djelovanja na gornju sumu operatorom $\mathcal{A}_{\psi(\varepsilon_n\cdot)}$, za $\psi\in\mathrm{C}^q(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, tenzorskog množenja s $\varphi_1\mathsf{v}_n$, za $\varphi_1\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, te kompleksnog konjugiranja, po definiciji jednoskalnih H-distribucija za $(j,k)$ komponentu imamo

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\sum_{s=1}^d \overline{\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{A}_{(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\psi_n\psi_n^{m+2q+2,\boldsymbol{\alpha}}}(\varphi A^{\boldsymbol{\alpha}}_{js}u^s_n)\overline{\varphi_1 v^k_n}\,d\mathbf{x}}\\
&= \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\sum_{s=1}^d \overline{\left\langle \bar{\nu}^{ks}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi\bar{\varphi}_1 A^{\boldsymbol{\alpha}}_{js}\boxtimes(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\psi\psi^{m+2q+2,\boldsymbol{\alpha}}\right\rangle}\\
&= \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\sum_{s=1}^d \left\langle (2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\psi^{m+2q+2,\boldsymbol{\alpha}}A^{\boldsymbol{\alpha}}_{js}\nu^{ks}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \bar{\varphi}\varphi_1\boxtimes\bar{\psi}\right\rangle\\
&= \left\langle \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}+q+1}}[\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\nu}^\top_{\mathrm{K}_{0,\infty}}]_{jk}, \bar{\varphi}\varphi_1\boxtimes\bar{\psi}\right\rangle .
\end{aligned}$$

Kako su funkcije $\varphi,\varphi_1$ i $\psi$ proizvoljne probne funkcije, a tenzorski produkti su gusti u prostoru $\mathrm{C}^q_c(\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, dobivamo tvrdnju.

**Q.E.D.**

Prethodni teorem može se poopćiti na slučaj općenite karakteristične duljine $(\omega_n)$ pripadne jednoskalne H-distribucije kao u Teoremu II.5. Međutim, kako smo zbog rezultata Leme 7 morali umjetno povećati red jednadžbe (s $m$ na $m+2q+2$), to bismo u slučaju $c=\infty$ dobili trivijalan rezultat. Naime, koeficijenti uz derivacije reda $m+2q+2$ su jednaki nula. To za posljedicu ima da iz prethodnog rezultata ne možemo dobiti lokalizacijsko svojstvo H-distribucija.

# IV. Višeskalne inačice

H-mjere su prilagođene problemima u kojima su sve varijable ravnopravne, tj. u promatranim diferencijalnim relacijama međusobni omjer svih parcijalnih derivacija je jednak. Međutim, pokazano je (vidi [6]) da u slučajevima kad to nije ispunjeno (npr. paraboličke jednadžbe), dobivamo nezadovoljavajuće rezultate. Za paraboličke jednadžbe, tj. jednadžbe s omjerom 1:2 između reda derivacija po vremenu i po prostornim varijablama, nove inačice, *paraboličke H-mjere*, su uvedene [6] i uspješno primijenjene u homogenizaciji malih amplituda [6], u dobivanju eksplicitnih formula i ocjena u homogenizaciji [7], te u izvođenju diferencijalnih relacija za mikrolokalnu gustoću energija, kao posljedice *prijenosnog svojstva* [8]. Daljnja poopćenja dana su s *ultra-paraboličkim H-mjerama* [47] koja dopuštaju više od jedne varijable reda 1, što je prikladno za proučavanje ultra-paraboličkih jednadžbi.

Iako se većina ključnih jednaždbi matematičke fizike može obuhvatiti jednom od spomenutih inačica (s omjerima 1:1 ili 1:2), nedavno veće zanimanje znanstvene zajednice za diferencijalne jednadžbe s razlomljenim derivacijama motivara uvođenje inačica s proizvoljnim omjerima. U [33] nova inačica je uvedena i primijenjena za dobivanje postojanja slabog rješenja zakona sačuvanja s razlomljenim derivacijama. Ovaj pristup je kasnije korišten u usrednjavanju brzinama [37] i kompaknosti kompenzacijom za diferencijalne relacije s razlomljenim derivacijima [44].

Glavna ideja je da se projekcija po pravcima kod klasičnih H-mjera, odnosno po parabolama kod paraboličkih H-mjera, zamijeni s općenitijim krivuljama

$$\varphi_{\boldsymbol\eta}(s) = \mathsf{diag}\,\{s^{\frac{1}{\alpha_1}}, \dots, s^{\frac{1}{\alpha_d}}\}\boldsymbol\eta\,, \quad s > 0\,, \quad \boldsymbol\eta \in P\,,$$

pri čemu $\boldsymbol\alpha \in \langle 0, 1]^d$ predstavlja promatrani omjer među varijablama, dok je $P$ odgovarajuća ploha kojom su krivulje parametrizirane. Ovaj pristup je sistematiziran u [20].

## 1. Razlomljene H-mjere

Za $\boldsymbol\alpha \in \langle 0, 1]^d$, definirajmo plohu $Q$ s

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha_1} + \frac{\xi_2^2}{\alpha_2} + \dots + \frac{\xi_d^2}{\alpha_d} = \frac{1}{\alpha_{\min}}\,,$$

pri čemu je $\alpha_{\min} := \min_i \alpha_i \in \langle 0, 1]$.

Očito je $Q = \mathrm{S}^{d-1}$ za $\alpha_1 = \ldots = \alpha_d$ (klasičan slučaj), dok se u paraboličkom slučaju $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_d$ podudara s elipsoidom promatranim u [8, Section 2].

U [20] je pokazano da je $Q$ glatka ploha, te je s

$$\boldsymbol\pi_Q(\boldsymbol\xi) := \left(\frac{\xi_1}{s(\boldsymbol\xi)^{\frac{1}{\alpha_1}}}, \dots, \frac{\xi_d}{s(\boldsymbol\xi)^{\frac{1}{\alpha_d}}}\right)$$

dana projekcija prostora $\mathbf{R}^d_*$ na $Q$ po krivuljama kroz ishodište okomitim na $Q$, pri čemu $s \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d_*)$ zadovoljava (vidi [20])

a) $s \geqslant 0$

b) $(\forall\,\boldsymbol\xi \in \mathbf{R}^d_*)(\forall\,\lambda \in \mathbf{R}^+)\ s(\lambda^{\frac{1}{\alpha_1}}\xi_1, \dots, \lambda^{\frac{1}{\alpha_d}}\xi_d) = \lambda s(\boldsymbol\xi)$

c) $s \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d)$ uz $s(\mathsf{0}) = 0$

d) $|\eta_k| \geqslant |\xi_k|, k \in 1..d \quad\Longrightarrow\quad s(\boldsymbol\eta) \geqslant s(\boldsymbol\xi)$

e) $d_s(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) := s(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})$ je metrika

f) $(\forall\,\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^d_*)$ $\frac{\sqrt{\alpha_{\min}}}{d}(|\xi_1|^{\alpha_1}+\ldots+|\xi_d|^{\alpha_d}) \leqslant s(\boldsymbol{\xi}) \leqslant |\xi_1|^{\alpha_1}+\ldots+|\xi_d|^{\alpha_d}$

Na primjer za $\alpha_1=\ldots=\alpha_d=1$ je $s(\boldsymbol{\xi})=|\boldsymbol{\xi}|$.

Metrika $d_s$ i euklidska metrika nisu *jednoliko ekvivalentne*, ali su *topološki ekvivalentne*, odnosno topologija dana metrikom $d_s$ se podudara sa standardnom euklidskom topologijom. Zaista, pokažimo da za svaki $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^d$ i $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ takav da $\mathrm{K}(\boldsymbol{\xi},\delta)\subseteq\mathrm{K}_{d_s}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$ i $\mathrm{K}_{d_s}(\boldsymbol{\xi},\delta)\subseteq\mathrm{K}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$.

Neka je $\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{K}(\boldsymbol{\xi},\delta)$ za $\delta<1$. Po gornjim svojstvima (d) i (f) imamo

$$d_s(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = s(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}) \leqslant s(\delta,\ldots,\delta) \leqslant d\delta^{\alpha_{\min}}\,,$$

pa možemo izabrati dovoljno mali $\delta$ takav da $d_s(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})<\varepsilon$.

S druge strane, iz $\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{K}_{d_s}(\boldsymbol{\xi},\delta)$ i $\delta<1$ po (f) slijedi $|\xi_k-\eta_k| \leqslant (\frac{d}{\sqrt{\alpha_{\min}}})^{\frac{1}{\alpha_{\min}}}\delta$, $k\in 1..d$, pa imamo

$$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}| \leqslant \sum_{k=1}^{d}|\xi_k-\eta_k|^{1-\alpha_k}|\xi_k-\eta_k|^{\alpha_k} \leqslant \Big(\frac{d}{\sqrt{\alpha_{\min}}}\Big)^{\frac{1}{\alpha_{\min}}}\sum_{k=1}^{d}|\xi_k-\eta_k|^{\alpha_k} \leqslant \Big(\frac{d}{\sqrt{\alpha_{\min}}}\Big)^{1+\frac{1}{\alpha_{\min}}}\delta\,,$$

pa opet možemo izabrati dovoljno mali $\delta$ takav da $\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{K}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)$.

Postojanje *razlomljenih H-mjera*, inačica H-mjera uz projekcije $\boldsymbol{\pi}_Q$, dano je u [20, Theorem 4]:

**Teorem 1. (postojanje razlomljenih H-mjera)** *Ako* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, *onda postoji podniz* $(\mathsf{u}_{n'})$ *i* $r\times r$ *hermitska nenegativna matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}_Q$ *na produktu* $\Omega\times Q$ *takvi da za svaki izbor probnih funkcija* $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{C}_c(\Omega)$ *i* $\psi\in\mathrm{C}(Q)$, *vrijedi*

$$\lim_{n'}\int\limits_{\mathbf{R}^d}\Big(\widehat{\varphi_1\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\otimes\widehat{\varphi_2\mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\Big)(\psi\circ\boldsymbol{\pi}_Q)(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} = \big\langle\boldsymbol{\mu}_Q,(\varphi_1\bar\varphi_2)\boxtimes\psi\big\rangle$$

$$= \int\limits_{\Omega\times Q}\varphi_1(\mathbf{x})\bar\varphi_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})\,d\bar{\boldsymbol{\mu}}_H(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,.$$

*Mjeru* $\boldsymbol{\mu}_Q$ *nazivamo* razlomljenom H-mjerom *pridruženom (pod)nizu* $(\mathsf{u}_{n'})$. ∎

Prethodna definicija se podudara s klasičnim H-mjerama za $\alpha_1=\cdots=\alpha_d$ (Teorem 1), odnosno s paraboličkim H-mjerama [8, Theorem 3] za paraboličko skaliranje $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\ldots=\alpha_d$.

U [20] je pokazano lokalizacijsko svojstvo ovih inačica, dok je izvođenje prijenosnog svojstva u pripremi.

Ovdje ćemo komentirati postojanja *razlomljenih H-distribucija*, kao i *jednoskalnih razlomljenih H-mjera*, te *jednoskalnih razlomljenih H-distribucija*.

## 2. Razlomljene H-distribucije

Neka je $\Omega\subseteq\mathbf{R}^d$ otvoren, te $\boldsymbol{\alpha}\in\langle 0,1]^d$.

Najbitniji koraci u konstrukciji mikrolokalnih defektnih funkcionala su dobar odabir prostora probnih funkcija, postojanje odgovarajuće komutacijske leme, te primjena prikladnog teorema o jezgri.

Za prostor probnih funkcija u fizikalnom prostoru standarno uzimamo $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, dok u Fourierovom prostoru separabilan Banachov prostor $\mathrm{C}^\kappa(Q)$, pri čemu je $Q$ ploha iz prethodnog odjeljka, dok ćemo $\kappa \in \mathbf{N}_0$ kasnije odrediti.

Najprije trebamo pokazati da je za odgovarajući izbor $\kappa \in \mathbf{N}_0$ Fourierov množitelj $\mathcal{A}_{\psi^Q}$ neprekinut na $\mathrm{L}^p$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, pri čemu za $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(Q)$ definiramo $\psi^Q := \psi \circ \boldsymbol{\pi}_Q$. Kako za svaki $\lambda \in \mathbf{R}^+$ i $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*$ vrijedi

$$\psi^Q\Big(\lambda^{\frac{1}{\alpha_1}}\xi_1, \dots, \lambda^{\frac{1}{\alpha_d}}\xi_d\Big) = \psi^Q(\boldsymbol{\xi})\,,$$

djelovanjem s $\partial^{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$, dobivamo

$$\lambda^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{\beta_d}{\alpha_d}}(\partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi^Q)\Big(\lambda^{\frac{1}{\alpha_1}}\xi_1, \dots, \lambda^{\frac{1}{\alpha_d}}\xi_d\Big) = \partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi^Q(\boldsymbol{\xi})\,.$$

Uvrštavajući $\lambda = s(\boldsymbol{\xi})^{-1}$ slijedi $(\lambda^{\frac{1}{\alpha_1}}\xi_1, \dots, \lambda^{\frac{1}{\alpha_d}}\xi_d) = \boldsymbol{\pi}_Q(\boldsymbol{\xi}) \in Q$, pa imamo

$$\begin{aligned}|\partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi^Q(\boldsymbol{\xi})| &\leqslant \|\partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi^Q\|_{\mathrm{L}^\infty(Q)} s(\boldsymbol{\xi})^{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \dots s(\boldsymbol{\xi})^{-\frac{\beta_d}{\alpha_d}}\\ &\leqslant C\|\partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi^Q\|_{\mathrm{L}^\infty(Q)}|\xi_1|^{-\beta_1}\dots|\xi_d|^{-\beta_d}\,,\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj nejednakosti iskoristili svojstvo (f) preslikavanja $s$ iz prvog odjeljka. Iz posljednje nejednakosti slijedi da za $\kappa \geqslant d$ funkcija $\psi^Q$ zadovoljava pretpostavke Marcinkiewiczevog teorema [30, Corollary 5.2.5] pa je i $\mathrm{L}^p$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, Fourierov množitelj, odnosno operator $\mathcal{A}_{\psi^Q}$ je neprekinut na $\mathrm{L}^p$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

Neka su $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(Q)$ i $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$. Trebamo pokazati da je komutator $C := [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi^Q}]$ kompaktan na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$. Kako je taj rezultat u $\mathrm{L}^2$ slučaju poznat (npr. pogledati [20, Lemma 3]), a po prethodnom razmatranju je za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ operator $C$ neprekinut na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, tražena tvrdnja direktno slijedi po [9, Lemma 4].

Kako je $Q$ glatka mnogostrukost bez ruba, možemo iskoristiti poznati teorem o jezgri za glatke mnogostrukosti [17, Section XXIII.9] koji nam daje da za neprekinutu bilinearnu formu $B$ na $\mathrm{C}_c(\Omega) \times \mathrm{C}^\kappa(Q)$ postoji jedinstvena distribucija (konačnog reda) $\nu \in \mathcal{D}'(\Omega \times Q)$ takva da za svake $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}^\infty(Q)$ imamo $B(\varphi, \psi) = \langle \nu, \varphi \boxtimes \psi\rangle$.

Time možemo ponoviti konstrukciju Teorema 5 i dobiti postojanje razlomljenih H-distribucija.

**Teorem 2.** **(postojanje razlomljenih H-distribucija)** *Ako* $u_n \rightharpoonup 0$ *u* $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *i* $(v_n)$ *omeđen u* $\mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *za neki* $p \in \langle 1, \infty\rangle$ *i* $q \geqslant p'$ $(1/p+1/p' = 1)$, *onda postoje podnizovi* $(u_{n'})$, $(v_{n'})$ *i kompleksna distribucija* $\nu_H \in \mathcal{D}'(\Omega \times Q)$ *takvi da za svaki izbor probnih funkcija* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ *i* $\psi \in \mathrm{C}^\kappa(Q)$, *za* $\kappa = d$, *vrijedi*

$$\begin{aligned}\lim_{n'}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{A}_{\psi^Q}(\varphi_1 u_{n'})\overline{\varphi_2 v_{n'}}\,d\mathbf{x} &= \lim_{n'}\int_{\mathbf{R}^d} \varphi_1 u_{n'}\overline{\mathcal{A}_{\bar\psi^Q}(\varphi_2 v_{n'})}\,d\mathbf{x}\\ &= \langle \nu_H, \varphi_1\bar\varphi_2 \boxtimes \psi\rangle\ .\end{aligned}$$

*Kompleksnu distribuciju* $\nu_H$ *nazivamo* razlomljenom H-distribucijom *pridruženom (pod)-nizovima* $(u_{n'})$ *i* $(v_{n'})$.

∎

## 3. Jednoskalne razlomljene H-mjere

Jednoskalne H-mjere su poopćenje H-mjera s karakterističnom duljinom, pa analogno želimo konstruirati objekt koji bi bio poopćenje razlomljenih H-mjera danih u prvom odjeljku.

Ukratko ćemo najprije opisati novu kompaktifikaciju prostora $\mathbf{R}^d_*$. Neka su $\alpha_k \in \langle 0, 1]$, $k \in 1..d$. Za čvrst $r_0 > 0$ definirajmo $r_1 := \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+1}}$, te označimo s

$$A^{\boldsymbol{\alpha}}[\mathsf{0}, r_1, 1] := \Big\{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{R}^d : r_1 \leqslant s(\boldsymbol{\zeta}) \leqslant 1\Big\}$$

zatvoreni $d$-dimenzionalni elipsoidni sloj opskrbljen topologijom naslijeđenom od $\mathbf{R}^d$, a koja se po razmatranju iz prvog odjeljka podudara s topologijom induciranom metrikom $d_s$. Dodatno uvodimo $A^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{0}, r_1, 1) := \operatorname{\mathsf{Int}} A^{\boldsymbol{\alpha}}[\mathsf{0}, r_1, 1]$, te s $A^{\boldsymbol{\alpha}}_0[\mathsf{0}, r_1, 1] := \{s(\boldsymbol{\zeta}) = r_1\}$ i $A^{\boldsymbol{\alpha}}_\infty[\mathsf{0}, r_1, 1] := \{s(\boldsymbol{\zeta}) = 1\}$ označavamo pripadne rubne elipsoide.

Sada definiramo preslikavanje $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}} : \mathbf{R}^d_* \longrightarrow A^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{0}, r_1, 1)$ s

$$\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}_k(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\xi_k}{\left(s(\boldsymbol{\xi})^2 + \left(\frac{s(\boldsymbol{\xi})}{s(\boldsymbol{\xi})+r_0}\right)^2\right)^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \;, \quad k \in 1..d\,.$$

Kako je $s$ nenegativna i glatka, to je $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}$ glatka.

Po svojstvu (b) preslikavanja $s$ iz prvog odjeljka uočavamo da $\boldsymbol{\xi}$ i $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})$ leže na istim krivuljama kroz ishodište, odnosno da vrijedi

$$\frac{\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}_k(\boldsymbol{\xi})}{s(\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}))^{\frac{1}{\alpha_k}}} = \frac{\xi_k}{s(\boldsymbol{\xi})^{\frac{1}{\alpha_k}}} \;, \quad k \in 1..d\,.$$

Nadalje, $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}$ je homeomorfizam, a inverzno preslikavanje $\mathcal{J}^{-1} : A^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{0}, r_1, 1) \longrightarrow \mathbf{R}^d_*$ je dano s

$$(\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}})^{-1}_k(\boldsymbol{\zeta}) = \left(\frac{s(\boldsymbol{\zeta}) - r_0\sqrt{1 - s(\boldsymbol{\zeta})^2}}{s(\boldsymbol{\zeta})\sqrt{1 - s(\boldsymbol{\zeta})^2}}\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} \zeta_k \;, \quad k \in 1..d\,,$$

za koje također vrijedi

$$\frac{(\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}})^{-1}_k(\boldsymbol{\xi})}{s((\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}})^{-1}_k(\boldsymbol{\xi}))^{\frac{1}{\alpha_k}}} = \frac{\xi_k}{s(\boldsymbol{\xi})^{\frac{1}{\alpha_k}}} \;, \quad k \in 1..d\,.$$

Time smo dobili da je $(A^{\boldsymbol{\alpha}}[\mathsf{0}, r_1, 1], \mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}})$ kompaktifikacija prostora $\mathbf{R}^d_*$. Definirajmo

$$\Sigma^{\boldsymbol{\alpha}}_0 := \{\mathsf{0}^{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\eta} \in Q\} \qquad \text{i} \qquad \Sigma^{\boldsymbol{\alpha}}_\infty := \{\infty^{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\eta} \in Q\}\,,$$

te $\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d) := \mathbf{R}^d_* \cup \Sigma^{\boldsymbol{\alpha}}_0 \cup \Sigma^{\boldsymbol{\alpha}}_\infty$, a zatim proširimo funkciju $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}$ na $\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ s $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}_k(\mathsf{0}^{\boldsymbol{\eta}}) := r_1^{\frac{1}{\alpha_k}} \eta_k$ i $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}_k(\infty^{\boldsymbol{\eta}}) := \eta_k$, $k \in 1..d$. Može se pokazati da vrijedi

$$\lim_{s(\boldsymbol{\xi}) \to 0} d_s\Big(\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}), \mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{0}^{\boldsymbol{\pi}_Q(\boldsymbol{\xi})})\Big) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{s(\boldsymbol{\xi}) \to \infty} d_s\Big(\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}), \mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}(\infty^{\boldsymbol{\pi}_Q(\boldsymbol{\xi})})\Big) = 0\,.$$

Konačno, na $\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ definiramo metriku s $d_*(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2) := d(\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}_1),\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}_2))$, pri čemu je $d$ standardna euklidska metrika na $\mathbf{R}^d$ (odnosno u ovom slučaju njena restrikcija na $A^{\boldsymbol{\alpha}}[0,r_1,1]$), koja je topološki ekvivalentna s euklidskom metrikom na $\mathbf{R}^d_*$. Sada se lako može pokazati analogon Leme II.1. Štoviše, za $\psi\in\mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$ takvu da postoje funkcije $\psi_0,\psi_\infty$ na $Q$ za koje vrijedi

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{\xi}) - (\psi_0\circ\boldsymbol{\pi}_Q)(\boldsymbol{\xi}) \to 0\,, \quad s(\boldsymbol{\xi})\to 0\,,\\ \psi(\boldsymbol{\xi}) - (\psi_\infty\circ\boldsymbol{\pi}_Q)(\boldsymbol{\xi}) \to 0\,, \quad s(\boldsymbol{\xi})\to \infty\,,\end{aligned}$$

vrijedi da je možemo proširiti do neprekinute funkcije na $\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ pri čemu je $\psi(0^{\boldsymbol{\eta}}) = \psi_0(\boldsymbol{\eta})$ i $\psi(\infty^{\boldsymbol{\eta}}) = \psi_\infty(\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta}\in Q$.

Iz prethodne karakterizacije jednostavno slijedi sljedeća lema.

**Lema 1.**
*i)* $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)\hookrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, *i*
*ii)* $\{\psi\circ\boldsymbol{\pi}_Q \;:\; \psi\in\mathrm{C}(Q)\}\hookrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.
∎

Komutacijsku lemu potrebnu u drugom poglavlju pokazali smo koristeći Lemu II.3, pa najprije taj rezultat moramo prilagoditi općenitom skaliranju.

**Lema 2.** *Neka je $\varphi\in\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ i $(\psi_n)$ jednoliko omeđen niz u $\mathrm{C}_b(\mathbf{R}^d)$ koji zadovoljava*

$$(\forall\,\varepsilon>0)(\forall\,\delta>0)(\exists\, n_0\in\mathbf{N})(\forall\,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^d, |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|<\delta)(\forall\, n\geqslant n_0)\qquad |\psi_n(\boldsymbol{\xi})-\psi_n(\boldsymbol{\eta})|<\varepsilon\,.$$

*Tada komutator $C_n := [B_\varphi,\mathcal{A}_{\psi_n}] = B_\varphi\mathcal{A}_{\psi_n} - \mathcal{A}_{\psi_n}B_\varphi$ konvergira nuli u operatorskoj normi na $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$.*

Dem. Postoji niz $(\varphi_m)$ u $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ koji jednoliko konvergira prema $\varphi$, te $\hat\varphi_m$ imaju kompaktne nosače. Naime, prostor $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ je gust u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ pa postoji niz $(f_k)$ iz $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)\subseteq\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ koji jednoliko konvergira prema $\varphi$. Fourierova pretvorba neprekinuto preslikava $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ u samog sebe pa je $\hat f_k$ opet u $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, a onda posebno i u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Kako je $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ gusto u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ (uz standarnu topologiju), postoji niz $(g_{k,m})$ u $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ koji aprokosimira $(\hat f_k)$ u topologiji prostora $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Nadalje, inverzna Fourierova pretvorba je neprekinuta s $\mathrm{L}^1$ u $\mathrm{L}^\infty$ pa $(g_{k,m})^\vee$ konvergira k $f_k$ u topologiji prostora $\mathrm{L}^\infty$, što je upravo jednolika konvergencija. Sada Cantorovim dijagonalnim postupkom dobivamo iz niza $(g_{k,m})^\vee$ traženi niz $(\varphi_m)$.

Odaberimo podniz niza $(\varphi_m)$ (radi jednostavnosti niz i dalje indeksiramo s $m$) takav da je $\|\varphi-\varphi_m\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\leqslant\frac{1}{m}$ i $\operatorname{supp}\hat\varphi_m\subseteq \mathrm{K}[0,\rho_m]$, pri čemu je $(\rho_m)$ niz pozitivnih brojeva (ne nužno omeđen).

Definirajmo $C_{m,n} := [B_{\varphi_m},\mathcal{A}_{\psi_n}]$, te za razliku komutatora $C_n$ i $C_{m,n}$ imamo:

$$\|C_n - C_{m,n}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))}\leqslant 2\|\psi_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\|\varphi-\varphi_m\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\leqslant\frac{2\sup_n\|\psi_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}}{m}\,,$$

pa je dovoljno pokazati da za svaki $m$ komutator $C_{m,n}$ konvergira nuli u operatorskoj normi.

Za $v\in\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ i $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^d$ korištenjem svojstava Fourierove pretvorbe dobivamo (vidi [19])

$$\widehat{C_{m,n}v}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d}\Big(\psi_n(\boldsymbol{\eta})-\psi_n(\boldsymbol{\xi})\Big)\hat\varphi_m(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\hat v(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}\,.$$

Zbog kompaktnog nosača funkcije $\hat{\varphi}_m$ imamo $|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}| < \rho_m$, pa po pretpostavci za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi $|\psi_n(\boldsymbol{\eta}) - \psi_n(\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon$, čime dobivamo sljedeću ocjenu

$$|\widehat{C_{m,n}}v(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{\varphi}_m(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})||\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|\, d\boldsymbol{\eta}\,.$$

Nadalje, primjenom Youngove nejednakosti za konvoluciju funkcija i Plancherelove formule imamo

$$\|C_{m,n}v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \leqslant \varepsilon \|\hat{\varphi}_m\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)} \|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,,$$

odnosno

$$\|C_{m,n}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))} \leqslant \varepsilon \sup_m \|\hat{\varphi}_m\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\,,$$

iz čega slijedi tvrdnja.

**Q.E.D.**

**Korolar 1.** *Neka su zadane* $\psi \in \mathrm{C}_{ub}(\mathbf{R}^d)$ *i* $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, *te* $\omega_n \to 0^+$ *i* $\boldsymbol{\alpha} \in \langle 0, 1]^d$. *Označimo s* $\psi_n(\boldsymbol{\xi}) := \psi(\omega_n^{\frac{1}{\alpha_1}}, \dots, \omega_n^{\frac{1}{\alpha_d}})$ *za* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$. *Tada komutator* $C_n := [B_\varphi, \mathcal{A}_{\psi_n}]$ *konvergira nuli u operatorskoj normi na* $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$.

Dem. Kako je $\psi$ omeđena i jednoliko neprekinuta, trivijalno slijedi da niz $(\psi_n)$ ispunjava pretpostavke prethodne leme, čime dobivamo tvrdnju.

**Q.E.D.**

Kako je $\psi - \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}_Q$ omeđena i jednoliko neprekinuta na $\mathbf{R}^d$, koristeći prethodni korolar možemo analogno kao u dokazu Leme II.4 pokazati da vrijedi pripadna inačica komutacijske leme za funkcije iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

Tvrdnja Leme II.6 vrijedi i za $\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ tako da imamo sve potrebne rezultate da ponovimo korake dokaza Teorema II.1.

**Teorem 3.** **(postojanje jednoskalnih razlomljenih H-mjera)** *Ako* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *i* $\omega_n \to 0^+$, *onda postoji podniz* $(\mathsf{u}_{n'})$ *i* $r \times r$ *hermitska nenegativna matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}}$ *na produktu* $\Omega \times \mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ *takvi da za svaki izbor probnih funkcija* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\Omega)$ *i* $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, *vrijedi*

$$\begin{aligned}\lim_{n'} \int\limits_{\mathbf{R}^d} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi})\Big) \psi(\omega_{n'}^{\frac{1}{\alpha_1}} \xi_1, \dots, \omega_{n'}^{\frac{1}{\alpha_d}} \xi_d)\, d\boldsymbol{\xi} &= \Big\langle \boldsymbol{\mu}^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}}, (\varphi_1 \bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi \Big\rangle \\ &= \int\limits_{\Omega \times \mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)} \varphi_1(\mathbf{x}) \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \psi(\boldsymbol{\xi})\, d\bar{\boldsymbol{\mu}}^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\,.\end{aligned}$$

*Mjeru* $\boldsymbol{\mu}^{(\omega_{n'})}_{\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}}$ *nazivamo* jednoskalnom razlomljenom H-mjerom (s karakterističnom duljinom $(\omega_{n'})$) *pridruženom (pod)nizu* $(\mathsf{u}_{n'})$.

∎

Istaknimo da se prethodna inačica razlikuje od *višeskalnih H-mjera* [54] gdje umjesto $\psi(\omega_{n'}^{\frac{1}{\alpha_1}} \xi_1, \dots, \omega_{n'}^{\frac{1}{\alpha_d}} \xi_d)$ imamo $\psi(\omega_{n'}^{(1)} \boldsymbol{\xi}, \dots, \omega_{n'}^{(k)} \boldsymbol{\xi})$, pri čemu su $(\omega_n^{(1)}), \dots, (\omega_n^{(k)})$ (nezavisne) karakteristične duljine. Dakle, u toj inačici su sve komponente varijable $\boldsymbol{\xi}$ ravnopravne, što kod nas nije slučaj.

Za ovu inačicu mogu se pokazati analogna svojstva kao za jednoskalne H-mjere, uključujući i lokalizacijsko svojstvo koje bi u ovom slučaju dopuštalo različito skaliranje karakteristične duljine uz derivacije u različitim varijablama.

Kod konstrukcije jednoskalnih H-distribucija smo koristili eksplicitnu formulu preslikavanja $\mathcal{J}$ i $\mathcal{J}^{-1}$, što u ovom slučaju nemamo (osim u posebnim slučajevima [8, 20]). Iz tog razloga je za konstrukciju *jednoskalnih razlomljenih H-distribucija* potrebno ili prilagoditi račun u kojem ćemo moći raditi s trenutnim $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}$ i $(\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}})^{-1}$ ili prilagoditi definicije preslikavanja $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}}$ i $(\mathcal{J}^{\boldsymbol{\alpha}})^{-1}$ tako da dobijemo eksplicitne formule (npr. možemo $s$ zamijeniti s $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\alpha}}$ [20]).

Uglavnom, ukoliko dobijemo analogon tvrdnje Teorema II.3 za $\mathrm{C}^{\kappa}(\mathrm{K}^{\boldsymbol{\alpha}}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$, očekujemo da bi se uz određeni trud trebali dobiti i ostali potrebni rezultati.

# Literatura


[1] Zied Ammari, Francis Nier: *Mean field propagation of Wigner measures and BBGKY hierarchies for general bosonic states*, *J. Math. Pures. Appl.* **95** (2011) 585–626.

[2] Nenad Antonić: *H-measures applied to symmetric systems*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **126A** (1996) 1133–1155.

[3] Nenad Antonić, Krešimir Burazin: *On certain properties of spaces of locally Sobolev functions,* in *Proceedings of the Conference on applied mathematics and scientific computing*, Zlatko Drmač et al. (eds.), Springer, 2005, pp. 109–120.

[4] Nenad Antonić, Marko Erceg, Martin Lazar: *Localisation principle for one-scale H-measures*, `arXiv:1504.03956` (2015) 32 pp.

[5] Nenad Antonić, Marko Erceg, Marin Mišur: *On H-distributions*, u pripremi.

[6] Nenad Antonić, Martin Lazar: *H-measures and variants applied to parabolic equations*, *J. Math. Anal. Appl.* **343** (2008) 207–225.

[7] Nenad Antonić, Martin Lazar: *Parabolic variant of H-measures in homogenisation of a model problem based on Navier-Stokes equation*, *Nonlinear Anal. B: Real World Appl.* **11** (2010) 4500–4512.

[8] Nenad Antonić, Martin Lazar: *Parabolic H-measures*, *J. Functional Analysis* **265** (2013) 1190–1239.

[9] Nenad Antonić, Marin Mišur, Darko Mitrović: *On the First commutation lemma*, na recenziji, 17 pp.

[10] Nenad Antonić, Darko Mitrović: *H-distributions: an extension of H-measures to an* $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$ *setting*, *Abs. Appl. Analysis* **2011** Article ID 901084 (2011) 12 pp.

[11] Nenad Antonić, Marko Vrdoljak: *Mjera i integral*, PMF–Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[12] Jean-Pierre Aubin: *Applied functional analysis*, Wiley, 2000.

[13] Haïm Brezis: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[14] Marc Briane, Juan Casado-Díaz, François Murat: *The div-curl lemma "trente ans après an extension and an application to the G-convergence of unbounded monotone operators*, *J. Math. Pures Appl.* **91** (2009) 476–494.

[15] Nicolas Burq: *Mesures semi-classiques et mesures de défaut, Séminare Bourbaki* (1996-97).

[16] Rémi Carles, Clotilde Fermanian-Kammerer, Norbert J. Mauser, Hans Peter Stimming: *On the time evolution of Wigner measures for Schrödinger equations, Comm. Pure Appl. Analysis* **8** (2009) 559–585.

[17] Jean Dieudonné: *Éléments d'analyse*, Tome VII, Éditions Jacques Gaby, 1978.

[18] MARKO ERCEG: *Bôchnerov integral*, seminarski rad, Zagreb, 2010.

[19] MARKO ERCEG: *Diplomski rad*, Zagreb, 2011.

[20] MARKO ERCEG, IVAN IVEC: *On generalisation of H-measures*, *Filomat*, prihvaćen za objavljivanje, 18 pp.

[21] CLOTILDE FERMANIAN-KAMMERER, PATRICK GÉRARD, CAROLINE LASSER: *Wigner measure propagation and conical singularity for general initial data*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **209** (2013) 209–236.

[22] CLOTILDE FERMANIAN-KAMMERER: *Semi-classical Measures and Heat Equations,* Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, 1995.

[23] GERALD B. FOLLAND: *Real analysis*, Wiley, 1999.

[24] SØREN FOURNAIS, MATHIEU LEWIN, JAN PHILIP SOLOVEJ: *The semi-classical limit of large fermionic systems*, `arXiv:1510.01124` (2015) 43 pp.

[25] GILLES A. FRANCFORT: *An introduction to H-measures and their applications*, in *Progress in nonlinear differential equations and their applications* **68**, Birkhäuser, 2006.

[26] PATRICK GÉRARD: *Microlocal defect measures, Comm. Partial Diff. Eq.* **16** (1991) 1761–1794.

[27] PATRICK GÉRARD: *Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, Sem. EDP 1990–91 (exp. n° XVI)*, Ecole Polytechnique, Palaiseau (1991).

[28] PATRICK GÉRARD: *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, J. Functional Analysis* **141** (1996) 60–98.

[29] PATRICK GÉRARD, PETER A. MARKOWICH, NORBERT J. MAUSER, FRÉDÉRIC POUPAUD: *Homogenization limits and Wigner transforms, Comm. Pure Appl. Math.* **L** (1997) 323–379.

[30] LOUKAS GRAFAKOS: *Classical Fourier Analysis*, second edition, Springer, 2008.

[31] LOUKAS GRAFAKOS: *Modern Fourier Analysis*, second edition, Springer, 2009.

[32] HENRYK GZYL: *Multidimensional extension of Faa di Bruno's formula*, *J. Math. Anal. Appl.* **116** (1986) 450–455.

[33] DARKO MITROVIĆ, IVAN IVEC: *A generalization of H-measures and application on purely fractional scalar conservation laws*, *Comm. Pure Appl. Analysis* **10** (2011) (6) 1617–1627.

[34] TOSIO KATO: *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1995.

[35] SERGE LANG: *Real and functional analysis*, third edition, Springer, 1993.

[36] MARTIN LAZAR: *Poopćenja H-mjera i primjene,* doktorska dizertacija, Sveučilište u Zagrebu, 2007.

[37] MARTIN LAZAR, DARKO MITROVIĆ: *Velocity averaging — a general framework*, *Dyn. Partial Differ. Equ.* **9** (2012) 239–260.

[38] MARTIN LAZAR, DARKO MITROVIĆ: *On an extension of a bilinear functional on* $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d) \times E$ *to a Bochner space with an application on velocity averaging*, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **351** (2013) 261–264.

[39] MARTIN LAZAR, ENRIQUE ZUAZUA: *Averaged control and observation of parameter-depending wave equations*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **352** (2014) 497–502.

[40] QUENTIN LIARD, BORIS PAWILOWSKI: *Mean field limit for bosons with compact kernels interactions by Wigner measures transportation*, *J. Math. Physics* **55** Article ID 092304 (2014) 23 pp.

[41] PIERRE-LOUIS LIONS, THIERRY PAUL: *Sur les mesures de Wigner, Revista Mat. Iberoamericana* **9** (1993) 553–618.

[42] André Martinez: *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, Springer, 2002.

[43] Richard Burt Melrose: *Differential analysis on manifolds with corners*, nedovršeno (radna verzija dostupna na http://www-math.mit.edu/ rbm/book.html)

[44] Marin Mišur, Darko Mitrović: *On a generalisation of compensated compactness in the $L^p - L^q$ setting*, *J. Functional Analysis* **268** (2015) 1904–1927.

[45] Lawrence Narici, Edward Beckenstein: *Topological vector spaces*, CRC Press, 2010.

[46] Evgenij Jurjevič Panov: *Existence and strong pre-compactness properties for entropy solutions of a first-order quasilinear equation with discontinuous flux*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **195** (2010) 643–673.

[47] Evgenij Jurjevič Panov: *Ultra-parabolic H-measures and compensated compactness*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **28** (2011) 47–62.

[48] Evgenij Jurjevič Panov: *On variants of H-measures and compensated compactness*, *Journal of Mathematical Sciences* **205** (2015) 267–296.

[49] Filip Rindler: *Directional oscillations, concentrations, and compensated compactness via microlocal compactness forms*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **215** (2015) 1–63.

[50] Laurent Schwartz: *Théorie des distibutions,* Hermann, 1966.

[51] Santiago Ramon Simanca: *Pseudo-differential operators*, Longman, 1990.

[52] Luc Tartar: *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **115A** (1990) 193–230.

[53] Luc Tartar: *The general theory of homogenization: A personalized introduction,* Springer, 2009.

[54] Luc Tartar: *Multi-scale H-measures*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, S* **8** (2015) 77–90.

[55] Ping Zhang: *Wigner measure and semiclassical limits of nonlinear Schrödinger equations*, AMS, 2008.

[56] Maciej Zworski: *Semiclassical analysis*, AMS, 2012.

# Sažetak


Mikrolokalni defektni funkcionali (H-mjere, H-distribucije, poluklasične mjere itd.) su objekti koji karakteriziraju, na neki način, odsustvo jake pretkompaknosti slabo konvergentnih nizova u $\mathrm{L}^p$ prostoru. Nedavno je Luc Tartar uveo jednoskalne H-mjere kao poopćenja H-mjera s karakterističnom duljinom, koje u načelu obuhvaćaju pojam poluklasičnih mjera.

Radi boljeg razumijevanja primjene jednoskalnih H-mjera, počinjemo s preciznom analizom odnosa H-mjera i poluklasičnih mjera. Uveden je novi uvjet, $(\omega_n)$-*koncentracijsko* svojstvo, te je pokazano da se H-mjera može rekonstruirati iz poluklasične mjere ukoliko je pripadni niz $(\omega_n)$-titrajući i koncentrirajući, ali i da općenito takav $(\omega_n)$ ne mora postojati. Većina primjena poluklasičnih mjera je vezana uz određenu inačicu homogenizacijskog limesa parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, što ilustriramo na linearnoj paraboličkoj jednadžbi drugog reda uz detaljnu analizu ovisnosti o različitim režimima pripadnih karakterističnih duljina.

Nadalje, prezentiramo opsežnu analizu jednoskalnih H-mjera, dajući neke alternativne dokaze i poboljšanja razultata, uz usporedbu ovih objekata s poznatim mikrolokalnim defektnim funkcionalima. Dorađujemo i poopćujemo Tartarovo lokalizacijsko načelo jednoskalnih H-mjera, koje za posljedicu ima i lokalizacijska načela H-mjera i poluklasičnih mjera. Štoviše, izvodimo inačicu kompaknosti kompenzacijom prikladnu za jednadžbe s karakterističnom duljinom. Dobivene rezultate potom poopćujemo na $\mathrm{L}^p$ prostore u vidu *jednoskalnih H-distribucija*, koja su ujedno i poopćenja H-distribucija, uz izvođenje odgovarajućeg lokalizacijskog svojstva.

Konačno, prezentiramo moguće inačice s i bez karakteristične duljine pogodne za različita skaliranja među varijablama.



**Ključne riječi:** H-mjere, Wignerove mjere, H-distribucije, poluklasični limes, kompaknost kompenzacijom

# Summary

Microlocal defect functionals (H-measures, H-distributions, semiclassical measures etc.) are objects which determine, in some sense, the lack of strong compactness for weakly convergent $\mathrm{L}^p$ sequences. Recently, Luc Tartar introduced one-scale H-measures, a generalisation of H-measures with a characteristic length, comprehending the notion of semiclassical measures.

In order to better understand the use of one-scale H-measures, we start by studying more deeply the relation between H-measures and semiclassical measures. The new condition, $(\omega_n)$-*concentrating* property is introduced and we show that H-measures can be reconstructed from the semiclassical measures if the corresponding sequence is both $(\omega_n)$-oscillatory and concentrating, but also that such $(\omega_n)$ does not necessarily exist. Most applications of semiclassical measures are related to a suitable variant of homogenisation limit of partial differential equations, which we illustrate on a second order linear parabolic equation with a detailed analysis of different regimes of corresponding characteristic lengths.

Furthermore, we present a comprehensive analysis of one-scale H-measures, carrying out some alternative proofs, and strengthening some results, comparing these objects to known microlocal defect functionals. Furthermore, we improve and generalise Tartar's localisation principle for these objects from which we are able to derive the known localisation principles for both H-measures and semiclassical measures. Moreover, we develop a variant of compactness by compensation suitable for equations with a characteristic length. Obtained results then we generalise to the $\mathrm{L}^p$ setting via *one-scale H-distributions*, which are also generalisations of H-distributions, and derive a corresponding localisation principle.

Finally, we address some variants with and without characteristic length suitable for problems with different scaling among variables.

**Key words:** H-measures, Wigner measures, H-distributions, semiclassical limit, compactness by compensation

# Životopis

Rođen sam 6. kolovoza 1987. godine u Splitu, gdje sam završio osnovnu školu i prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Već od četvrtog razreda osnovne škole redovito sudjelujem na matematičkim natjecanjima na kojima sam bio više puta nagrađivan. Učestvovao sam na nekoliko matematičkih ljetnih škola te priprema za Matematičku Olimpijadu.

U jesen 2006. godine upisao sam studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij sam završio 2009. godine s prosjekom ocjena 4,92, te diplomski studij *Primijenjene matematike* 2011. godine kod mentora prof. Nenada Antonića, s diplomskim radom *Poluklasični limes Schrödingerovih jednadžbi*, *summa cum laude* i prosjekom ocjena 4,96. Tijekom studija sam više puta sudjelovao na međunarodnim studentskim matematičkim natjecanjima. Dobitnik sam Nagrade Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu za uspjeh na diplomskom studiju, te Nagrade Matematičkog odsjeka za rezultate u izvannastavnim aktivnostima.

U listopadu 2011. godine sam upisao poslijediplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu tijekom kojeg sam položio kolegije: *Analiza*, *Parcijalne diferencijalne jednadžbe*, *Hiperbolički i Friedrichsovi sustavi*, *Konveksna i neglatka analiza*, te *Osnove teorije analitičkih funkcija više kompleksnih varijabli*.

Tijekom akademske godine 2011./2012. honorarno držim vježbe iz nekoliko kolegija na Fakultetu Elektrotehnike i računarstva te Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, a od lipnja 2012. godine sam zaposlen kao znanstveni novak na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu što mi je i trenutno radno mjesto.

Sudjelovao sam kao suradnik na više znanstveno-istraživačkih projekata: *Oscillatory solutions of partial differential equations* (MZOS, 2012.-2014., voditelj: prof. Nenad Antonić), *Transport in highly heterogeneous media* (bilateralni projekt između Hrvatske i Crne Gore, 2013.-2014., voditelj: prof. Martin Lazar), *Weak convergence methods and applications* (HRZZ, 2014.-2018., voditelj: prof. Nenad Antonić), *Multiscale methods and calculus of variations* (bilateralni projekt između Hrvatske i Crne Gore, 2015.-2016., voditelj: prof. Nenad Antonić), *Microlocal analysis, partial differential equations and application to heterogeneous materials* (bilateralni projekt između Hrvatske i Srbije, 2016.-2017., voditelj: prof. Nenad Antonić).

Učestvovao sam na dvadesetak međunarodnih znanstvenih skupova i matematičkih škola, na kojima sam više puta održao izlaganja. Aktivno sudjelujem u radu *Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu*. Gostovao sam u 5 tjedana na BCAM-u (Bilbao), a do mjesec dana na SISSA-i (Trst), te sveučilištima u Novom Sadu, Podgorici, Osijeku i Dubrovniku.

Znanstvena djelatnost mi je usmjerena ka mikrolokalnoj i poluklasičnoj analizi, te njezinoj primjeni u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Autor sam tri znanstvena rada objavljena ili prihvaćena za objavljivanje u međunarodnim časopisima, te još jednog u recenzentskom postupku.