

# Preslikavanja pravčastih ploha u Minkowskijevom prostoru

---

**Primorac Gajčić, Ljiljana**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:647354>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-21**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

Ljiljana Primorac Gajčić

**Preslikavanja pravčastih ploha u  
Minkowskijevom prostoru**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2016.



University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ljiljana Primorac Gajčić

**Mappings of ruled surfaces in  
Minkowski space**

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2016



Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

Ljiljana Primorac Gajčić

**Preslikavanja pravčastih ploha u  
Minkowskijevom prostoru**

DOKTORSKI RAD

Mentor:  
prof.dr.sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, 2016.



University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ljiljana Primorac Gajčić

**Mappings of ruled surfaces in  
Minkowski space**

DOCTORAL THESIS

Supervisor:  
prof.dr.sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, 2016

*Mojoj majci*

"When you're trying to solve a problem, you initially spend a lot of time in the foothills. Your progress is very slow.

Then you reach a point where you can carry the problem with you, and your progress becomes very rapid. You quickly get to the top of the mountain. At this point you've solved the problem, and it's tempting to climb down and begin something new.

But you should stay on the top of the mountain. See how far you can go in different directions. Often there are discoveries you can make very rapidly because you've already done a lot of climbing."

Donald Knuth

# Zahvala

Prvenstveno i najviše, zahvaljujem se mojoj mentorici, prof.dr.sc.Željki Milin-Šipuš, koja osim što je izuzetna znanstvenica, je također i prekrasna osoba i sjajna mentorica koja uvijek zna potaknuti na rad. Hvala Vam na nesebičnoj pomoći, razgovorima, razumijevanju i vjeri u mene.

Zahvaljujem se prof.dr.sc.Zdenki Kolar-Begović na riječima ohrabrenja i pokazanom interesu za napredak mog znanstvenog rada, te na ugodnoj i poticajnoj suradnji.

Hvala mojim kolegama s Odjela za matematiku s kojima sam dijelila brige, a posebno hvala kolegici Ivani Crnjac na nesebičnoj pomoći pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi. Na poseban način su izradi ovog rada pridonijeli i članovi moje obitelji. Hvala mom suprugu Dejanu što je uvijek imao razumijevanja i bio mi potpora, hvala mojoj djeci, Eleni i Filipu koji su mi svojim osmijesima uljepšali svaki dan, hvala mojoj sestri Ivani s kojom sam uvijek mogla razgovarati o svemu, osim o matematici. Hvala mom tati Slobodanu koji me potaknuo da upišem doktorski studij.

Naposljetku see zahvaljujem mojoj majci Ilonki, koja mi cijeli život pruža bezuvjetnu potporu. Hvala ti jer si čuvala moju djecu kako bih ja mogla raditi. Bez tebe ne bih uspjela završiti ovu radnju.



# Sažetak

**Ključne riječi:** Minkowskijev prostor; pravčaste plohe; lokalne izometrije; Mindingove izometrije; konformna preslikavanja; ekviarealna preslikavanja;  $(k + 1)$ –pravčaste plohe

U ovoj disertaciji se proučavaju preslikavanja pravčastih ploha u Minkowskijevom prostoru, specijalnom ambijentalnom prostoru u kojemu, s obzirom na definiranu pseudo-metriku, razlikujemo tri vrste vektora, krivulja, odnosno ploha. Pravčaste plohe su plohe koje dozvoljavaju parametrizaciju oblika  $f(u, v) = c(u) + ve(u)$ , gdje su  $u, v$  realni brojevi. Krivulja  $c$  se naziva bazna krivulja, a pravci određeni vektorom smjera  $e(u)$  nazivaju se izvodnice.

U uvodnom dijelu disertacije dan je pregled osnovnih pojmova i teorema za Minkowskijev prostor, odnosno lokalna teorija ploha u Minkowskijevom prostoru, te njihova klasifikacija s obzirom na kauzalni karakter bazne krivulje, odnosno izvodnica pravčaste plohe.

U Poglavlju 2 proučavane su izometrije pravčastih ploha, te su posebno analizirani uvjeti kada navedeno preslikavanje čuva izvodnice pravčastih ploha, tzv. Mindingove izometrije. Ovakvo preslikavanje je proučavano za 3 relevantne klase pravčastih ploha koje se javljaju u Minkowskijevom prostoru. Posebna pažnja je posvećena plohama koje nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru, te je uveden pojam *nul pravčaste plohe konstantnog nagiba* i dana njihova karakterizacija.

U Poglavljima 3, odnosno 4 proučavana su konformna, odnosno ekviarealna preslikavanja za sve klase pravčastih ploha, ponovno uz dodatni uvjet da navedena preslikavanja čuvaju izvodnice.

U Poglavlju 5 proučavane su invarijante Mindingove izometrije pravčastih ploha u  $n$ –dimenzionalnom Minkowskijevom prostoru,  $\mathbb{R}_1^n$ .

# Summary

**Keywords:** Minkowski space; ruled surfaces; local isometry; Minding isometry; conformal mapping; areapreserving mapping;  $(k + 1)$ -ruled surfaces

In this dissertation we study mappings of ruled surfaces in Minkowski space, special ambient space in which, with respect to defined pseudo-metrics, we distinguish three types of vectors, curves and surfaces. Ruled surfaces are surfaces that admit a parameterization of the form  $f(u, v) = c(u) + ve(u)$ , where  $u, v$  are real numbers. The curve  $c$  is called the base curve and the straight lines determined by direction vectors  $e(u)$  are called the rulings of a ruled surface.

In Preliminaries of the thesis we give an overview of basic concepts and theorems of Minkowski space, local theory of surfaces in Minkowski space, as well as their classification with respect to the causal character of the base curve, respectively rulings of ruled surface.

In Chapter 2 we studied isometries of ruled surfaces, with particular interest in analyzing the conditions when given mapping preserves rulings of ruled surfaces, so-called Minding isometry. This mapping is studied for three relevant classes of ruled surfaces that appear in the Minkowski space. Special attention was given to surfaces that have no Euclidean counterparts, and we introduced the concept of *null-ruled surface of constant slope* and gave theorems for their characterizations.

In Chapters 3, respectively 4 we studied conformal, respectively area-preserving mappings for every class of ruled surfaces, also with additional condition that those mappings preserve rulings of ruled surface.

In Chapter 5 we studied the invariants of Minding isometries of ruled surfaces in  $n$ -dimensional Minkowski space,  $\mathbb{R}_1^n$ .

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>1</b>
Doprinosi doktorskog rada . . . . .	3
Pregled doktorskog rada po poglavljima . . . . .	4
Notacija . . . . .	5
<b>1 Osnovni pojmovi i teoremi</b>	<b>6</b>
1.1 Minkowskijev prostor $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	6
1.2 Lokalna teorija ploha u $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	9
1.3 Pravčaste plohe u $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	17
1.3.1 Pravčaste plohe klase $M_1^1$ . . . . .	18
1.3.2 Pravčaste plohe klase $M_1^0$ . . . . .	21
1.3.3 Pravčaste plohe klase $M_0$ . . . . .	23
<b>2 Izometrije pravčastih ploha u <math>\mathbb{R}_1^3</math></b>	<b>25</b>
2.1 Lokalne izometrije ploha u $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	25
2.1.1 Lokalne izometrije ploha klase $M_1^1$ . . . . .	27
2.1.2 Lokalne izometrije pravčastih ploha klase $M_1^0$ . . . . .	45
2.2 Lokalne izometrije pravčastih ploha klase $M_0$ . . . . .	47
2.2.1 Nul-pravčaste plohe konstantnog nagiba . . . . .	48
2.2.2 Lokalne izometrije $B$ -namotajnih ploha . . . . .	55
2.3 Izometrije pravčastih ploha koje ne čuvaju izvodnice . . . . .	60
2.4 Izometrije koje čuvaju familiju asimptotskih krivulja na plohi . . . . .	64
<b>3 Konformna preslikavanja pravčastih ploha u <math>\mathbb{R}_1^3</math></b>	<b>67</b>
3.1 Konformna preslikavanja ploha u $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	67
3.1.1 Konformna preslikavanja ploha klase $M_1^1$ . . . . .	68
3.1.2 Konformna preslikavanja $M_1^0$ . . . . .	70
3.1.3 Konformna preslikavanja $B$ -namotajnih ploha . . . . .	71
<b>4 Ekviarealna preslikavanja pravčastih ploha u <math>\mathbb{R}_1^3</math></b>	<b>73</b>
4.1 Ekviarealna preslikavanja ploha u $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	73
4.1.1 Ekviarealna preslikavanja ploha klase $M_1^1$ . . . . .	74

---

4.1.2	Ekviarealna preslikavanja ploha klase $M_1^0$ . . . . .	76
4.1.3	Ekviarealna preslikavanja $B$ -namotajnih ploha . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Izometrije pravčastih ploha u <math>\mathbb{R}_1^n</math></b>	<b>78</b>
5.1	$n$ -dimenzionalni Minkowskijev prostor $\mathbb{R}_1^n$ . . . . .	78
5.2	Pravčaste plohe u $\mathbb{R}_1^n$ . . . . .	79
5.3	Lokalne izometrije pravčastih ploha u $\mathbb{R}_1^n$ . . . . .	84
	<b>Zaključak</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliografija</b>	<b>88</b>
	<b>Popis slika</b>	<b>91</b>
	<b>Životopis</b>	<b>93</b>

# Uvod

Pravčasta ploha u 3–dimenzionalnom realnom prostoru je ploha generirana jednoparametarskom familijom pravaca te se može opisati kao ploha koja nastaje tako da se svakom točkom zadane krivulje zadaje pravac, te stoga dopušta parametrizaciju oblika

$$f(u, v) = c(u) + ve(u), \quad u \in I \subset \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R},$$

pri čemu je  $e(u)$  neiščezavajuće vektorsko polje duž krivulje  $c(u)$ .

Krivulja  $c$  naziva se bazna krivulja ili direktrisa pravčaste plohe, a pravci određeni vektorom smjera  $e(u)$  izvodnice ili generatriše.

Pravčaste plohe također imaju i svoju praktičnu primjenu. Budući da služe kao sredstvo rješavanja problema dizajna u prostornom mehanizmu i kinematici, kao i u dizajnu potpomognutom računalom (eng. CAD), pokazale su se kao jedna od značajnijih tema u diferencijalnoj geometriji.

U trodimenzionalnoj euklidskoj diferencijalnoj geometriji ove su plohe, do na euklidsko gibanje, jednoznačno određene sa Sannijnim trobridom koji određuje sustav euklidskih invarijanata plohe – njezinu zakrivljenost, torziju i strikciju, [5],[14],[24], [36],[45].

Motivirani rezultatima u euklidskom prostoru, sve diferencijalno-geometrijske aspekte klase parametriziranih pravčastih ploha zanimljivo je proučiti i u nekom drugom specijalnom ambijentalnom prostoru. U ovoj radnji, bit će to Minkowskijev prostor, koji svoju značajnu ulogu ima i u Einsteinovoj teoriji relativnosti, a u novije vrijeme njegova diferencijalno-geometrijska svojstva postaju predmet mnogobrojnih istraživanja. Minkowskijev trodimenzionalni prostor je vektorski prostor snabdjeven, umjesto skalarnim, pseudo-skalarnim produktom indeksa 1, zbog čega u njemu, po tzv. kauzalnom karakteru, razlikujemo tri vrste vektora (prostorni, vremenski, svjetlosni), te analogno tri vrste krivulja i ploha. Detaljan pregled pseudo-Riemannove geometrije dan je u [44], dok je klasična teorija krivulja i ploha u Minkowskijevom prostoru razvijena u [37],[38],[39],[52].

Prema [25] u Minkowskijevom trodimenzionalnom prostoru, sve pravčaste plohe se uz odgovarajuću reparametrizaciju bazne krivulje mogu svesti na dvije klase pravčastih ploha: plohe čija bazna krivulja, odnosno izvodnice nisu svjetlosnog karaktera i linearno su nezavisne, takozvane plohe klase  $M_1$ , ([26], [27]) te plohe čije su bazna krivulja, odnosno

izvodnice svjetlosnog karaktera i linearno su nezavisne, plohe klase  $M_0$ , ([1]). Nadalje, prema [10] među plohama klase  $M_1$  razlikujemo dvije podklase: plohe čije izvodnice  $e$ , odnosno derivacije  $e'$  nisu svjetlosnog karaktera, takozvane plohe klase  $M_1^1$ , odnosno plohe čije su izvodnice prostornog ili vremenskog a derivacije  $e'$  su svjetlosnog karaktera, plohe klase  $M_1^0$ . S obzirom da se za različite klase ploha veličine kojima su plohe jednoznačno određene razlikuju, preslikavanje su proučavana za svaku klasu zasebno.

U ovom radu posebna pažnja je posvećena plohama kojima operator oblika plohe nije dijagonalizabilan (tzv. kvazi totalno-umbiličke plohe, odnosno, B-namotajne plohe), plohami klase  $M_1^0$ , te su dani primjeri pravčastih ploha koje u promatranoj točki nemaju realne nego imaginarne glavne zakrivljenosti ([9], [19], [20], [33], [41]). Takve se situacije ne mogu dogoditi u euklidskoj geometriji. Diferencijalno-geometrijska svojstva pravčastih ploha u Minkowskijevom prostoru proučena su u brojnim radovima, primjerice [10], [11], [12], [25], [28], [29], [30], [32], [31], [34], [42].

U klasičnoj euklidskoj diferencijalnoj geometriji u radovima [5], [6], [3], [4], [22], [35] proučena su preslikavanja pravčastih ploha. Posebno su zanimljiva preslikavanja koja su lokalne izometrije i čuvaju izvodnice ploha, tzv. Mindingove izometrije. Ta su preslikavanja pravčastih ploha u jednostavno izotropnom, Galilejevom i pseudo-Galilejevom prostoru proučena u radovima [40], [13]. U Minkowskijevom prostoru dodatnu analizu iziskuju upravo već spomenute B-namotajne plohe. Budući da pri opisivanju Mindingovih izometrija pravčastih ploha važnu ulogu imaju plohe konstantnog nagiba ([17]) najprije je bilo potrebno uvesti definiciju takvih ploha za plohe klase  $M_0$ , te je u radnji dana i njihova karakterizacija.

Nadalje, u euklidskoj diferencijalnoj geometriji u [14] je dokazan i teorem da su svake dvije pravčaste plohe koje su lokalno izometrične, također i izometrične u Mindingovom smislu, osim ukoliko su izometrične s dvostruko-pravčasto kvadrikom čije su izvodnice upravo odgovaraju izvodnicama svake pojedine plohe. Proučavajući analogan problem u  $\mathbb{R}_1^3$  dokazano je da analogan teorem vrijedi samo za prostorne pravčaste plohe klase  $M_1^1$ . U euklidskoj diferencijalnoj geometriji proučen je i sljedeći problem [5]: odrediti sve plohe, ne nužno pravčaste, koje se sastoje od hiperboličkih točaka i koje dopuštaju netrivialnu lokalnu izometriju koja čuva asimptotske krivulje. U euklidskoj geometriji, to su pravčaste plohe, a pripadne lokalne izometrije su Mindingove, dok u izotropnoj geometriji postoje i nepravčaste plohe s tim svojstvima ([40]). U radnji je pokazano da u Minkowskijevom prostoru vrijedi analogan teorem.

Osim navedenih preslikavanja, u euklidskoj su diferencijalnoj geometriji proučena i neka druga preslikavanja, kao konformna ili preslikavanja koja čuvaju površinu [5], [2]. Ovakva preslikavanja proučena su i u jednostavno izotropnom prostoru, [40], dok su kon-

formna transformacije pseudo-Riemannovih podmnogostrukosti proučena u [46]. Također je zanimljivo promatrati i plohe u  $n$ -dimenzionalnom Minkowskijevom prostoru. U radu su stoga promatrane lokalne izometrije  $(k+1)$ -dimenzionalnih pravčastih plohe prostornog, odnosno vremenskog karaktera. Ove plohe su proučavane u [49], [7], [16], [50] dok su Mindingove izometrije ploha u  $n$ -dimenzionalnom euklidskom prostoru proučene u [22].

Neki od rezultata koji su navedeni u disertaciji nalaze se u sljedećim radovima:

- Ž. MILIN ŠIPUŠ, LJ. PRIMORAC GAJČIĆ, *Ruled surfaces of constant slope in 3-Minkowski spaces*, Proceedings of the 16th ICGG, Innsbruck, 2014, 1087–1094.
- LJ. PRIMORAC GAJČIĆ, Ž. MILIN ŠIPUŠ, *Minding isometries of ruled surfaces in Minkowski space*, poslanom u časopis Journal of Geometry.

Neki od rezultata su predstavljani na dva znanstvena skupa

- The 16th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG 2014), Innsbruck, Austria, 4.–8. kolovoza, 2014.
- The 6th Croatian Mathematical Congress, Zagreb, Hrvatska 14-17. lipnja, 2016.
- 19. znanstveno-stručni kolokvij za geometriju i grafiku, Starigrad-Paklenica, Hrvatska, 4.-8. rujna, 2016.

## Doprinosi doktorskog rada

- Doprinos ovog rada očituje se u definicijama i dokazanim teoremima kojima se opisuju lokalne izometrije, konformna preslikavanja, te ekviarealna preslikavanja za sve klase pravčastih ploha u Minkowskijevom prostoru. Također su dane definicije i karakterizacija ploha konstantnog nagiba za plohe klase  $M_0$ , odnosno za  $B$ -namotajne plohe. Kao rezultat disertacije očekuje se nekoliko znanstvenih članaka.

## Pregled doktorskog rada po poglavljima

U prvom poglavlju naslovljenom „Osnovni pojmovi i teoremi” prikazani su osnovne definicije i teoremi u Minkowskijevom trodimenzionalnom prostoru  $\mathbb{R}_1^3$ , odnosno dan je sažet pregled lokalne teorije ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ , kao i klasifikacije pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ , te su opisane njihove invarijante.

U drugom poglavlju naslovljenom „Lokalne izometrije pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ ” iskazani su i dokazani teoremi kojima se opisuju lokalne izometrije pravčastih ploha, odnosno izometrije koje čuvaju izvodnice za svaku klasu ploha zasebno. Dokazani su teoremi kada su dvije lokalno izometrične plohe izometrične u Mindingovom smislu, odnosno dokazano je za koje plohe tvrdnja ne vrijedi, te je dokazan teorem da lokalna izometrija čuva asimptotske krivulje ploha ako je ploha pravčasta, tj. ako je preslikavanje Mindingova izometrija. Također, su definirane nul-pravčaste plohe, odnosno B-namotajne plohe konstantnog nagiba, te su iskazani i dokazani teoremi karakterizacije takvih ploha.

U trećem poglavlju naslovljenom „Konformna preslikavanja pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ ” iskazan je i dokazan teorem kada konformna preslikavanja pravčastih ploha čuvaju izvodnice, te je ispitano koje pravčaste plohe dozvoljavaju samo trivijalna konformna preslikavanja (trivijalnim konformnim preslikavanjem nazivamo kompoziciju izometrije i homotetije) koja čuvaju izvodnice, odnosno određene su plohe koje dozvoljavaju i netrivialna konformna preslikavanja.

U četvrtom poglavlju naslovljenom „Ekviarealna preslikavanja pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ ” proučavana su preslikavanja pravčastih ploha koja čuvaju površinu na plohi. Ovakva preslikavanja su promatrana samo za plohe istog kauzalnog karaktera. Iskazan je i dokazan teorem kada ekviarealna preslikavanja pravčastih ploha čuvaju izvodnice, te su iskazani i dokazani teoremi kako se svaka pravčasta ploha može preslikati na otvorenu poluravninu paralelnih pravaca.

U petom poglavlju naslovljenom „Lokalne izometrije  $(k+1)$ -dimenzionalnih pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^n$ ” proučavane su invarijante  $(k+1)$ -dimenzionalnih pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^n$ , te je iskazan i dokazan teorem o invarijantnosti parametra distribucije  $(k+1)$ -pravčaste plohe.



## Oznake, kratice i slično

U radu je korištena sljedeća notacija:

$\mathbb{R}^n$  realan vektorski prostor dimenzije  $n$

$\mathbb{R}_1^n$  Minkowskijev prostor dimenzije  $n$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  pseudo-skalarni produkt

$\mathbb{S}$  ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ , odnosno  $\mathbb{R}_1^n$ ,

$\mathbb{S}_n$  pravčasta ploha tipa  $n$  u  $\mathbb{R}_1^3$

$S_1^2(p, r)$  pseudosfera s centrom u točki  $p$  i radijusom  $r$

$L_p$  operator oblika plohe u točki  $p$

$D_v$  parcijalna derivacija u smjeru vektora  $v$

$I$  prva fundamentalna forma

$II$  druga fundamentalna forma

$E, F, G$  fundamentalne veličine prvog reda

$L, M, N$  fundamentalne veličine drugog reda

$\Gamma_{ij}^k$  Christoffelovi simboli

$K$  Gaussova zakrivljenost plohe

$H$  srednja zakrivljenost plohe

$E_i$   $i$ -ti prostor izvodnica pravčaste plohe u  $\mathbb{R}_1^n$

$\delta_{ij}^k$  Kroneckerov delta simbol

U radu se pravčaste plohe, odnosno njihova preslikavanja opisuju preko invarijanti ploha koje su funkcije parametra  $u$  koji se radi jednostavnijeg zapisa izostavlja.

# Osnovni pojmovi i teoremi

U ovom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi i teoremi potrebni za razumijevanje ove disertacije. Preciznije, u poglavlju 1.1 dane su definicije pojmova u Minkowskijevom prostoru  $\mathbb{R}_1^3$ , za koje ne vrijede definicije iz euklidskog prostora  $\mathbb{R}^3$ . U poglavlju 2.2 dan je sažet prikaz lokalne teorije ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ , dok je u poglavlju 2.3 dana klasifikacija pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ , te su za svaku klasu ploha navedene njezine invarijante.

## 1.1 Minkowskijev prostor $\mathbb{R}_1^3$

Neka je  $\mathbb{R}^3$  realan vektorski prostor s bazom  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , gdje su

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1).$$

**Definicija 1.1** Lorentz-Minkowskijev prostor je metrički prostor  $\mathbb{R}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ , gdje je metrika (pseudo-skalarni produkt indeksa 1) definirana s

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

Lorentz-Minkowskijev prostor kraće zovemo Minkowskijev prostor, u oznaci  $\mathbb{R}_1^3$ . Uočimo da je definirana metrika zapravo pseudo-metrika budući da ne zadovoljava svojstvo pozitivne definitnosti. Neki autori, poput [10], definiraju metriku s minusom na prvoj koordinati tj.  $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ , dok ćemo se mi u radu služiti definicijom (1.1).

S obzirom na definiranu pseudo-metriku u Minkowskijevom prostoru razlikujemo tri vrste vektora koje definiramo kao slijedi:

**Definicija 1.2** Vektor  $x \in \mathbb{R}_1^3$  se naziva

- (1.) prostorni ako je  $\langle x, x \rangle > 0$  ili  $x = \mathbf{0}$ ,
- (2.) vremenski ako je  $\langle x, x \rangle < 0$ ,
- (3.) svjetlosni (nul, izotropni) ako je  $\langle x, x \rangle = 0$  i  $x \neq \mathbf{0}$ .

Svojstvo biti *prostorni* (odnosno *vremenski*, *svjetlosni*) se kraće naziva kauzalni karakter vektora. Istaknimo da se nul vektor  $x = \mathbf{0}$  smatra prostornim vektorom iako zadovoljava  $\langle x, x \rangle = 0$ .

Nadalje, za dani  $U \subset \mathbb{R}^3$  vektorski potprostor promatramo na  $U$  induciranu metriku  $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ :

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in U.$$

**Definicija 1.3** Potprostor  $U$  se naziva prostornim (vremenskim, odnosno svjetlosnim) ako je inducirana metrika pozitivno definitna (nedegenerirana indeksa 1, odnosno degenerirana i  $U \neq \{\mathbf{0}\}$ ).

**Definicija 1.4** Pseudo-norma vektora  $x \in \mathbb{R}_1^3$  definirana je s

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}.$$

Definicija vektorskog produkta je analogna definiciji vektorskog produkta u  $\mathbb{R}^3$ .

**Definicija 1.5** Vektorski produkt  $v \times_L w$  vektora  $v$  i  $w$  u  $\mathbb{R}_1^3$  dan je s  $v \times_L w = J(v \times w)$ , gdje  $\times$  označava euklidski vektorski produkt, a matrica  $J$  je dana s

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dalje u radu ispuštamo indeks  $L$  u oznaci  $\times_L$ , te će oznaka  $\times$  predstavljati vektorski produkt u Minkowskijevom prostoru, osim ako nije istaknuto drugačije.

U Minkowskijevom prostoru možemo govoriti o vremenskoj orijentaciji vektora koja nam je potrebna za definiciju kuta između vektora.

**Definicija 1.6** Neka je  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Za dani vektor  $x \in \mathbb{R}_1^3$  kažemo da je orijentiran u budućnost (odnosno prošlost) ako vrijedi  $\langle x, e_3 \rangle < 0$  (odnosno  $\langle x, e_3 \rangle > 0$ .)

Kut u  $\mathbb{R}_1^3$  definiran je s obzirom na kauzalni karakter vektora koji ga zatvaraju, ([47]).

**Definicija 1.7** Neka su  $x$  i  $y$  vremenski vektori istog smjera u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada postoji jedinstven realni broj  $\theta \geq 0$  takav da

$$\langle x, y \rangle = -\|x\|\|y\| \operatorname{ch} \theta.$$

Broj  $\theta$  se naziva hiperbolički kut između vektora  $x$  i  $y$ .

**Definicija 1.8** Neka su  $x$  i  $y$  prostorni vektori u  $\mathbb{R}_1^3$  koji razapinju vremenski potprostor. Tada postoji jedinstven realni broj  $\theta \geq 0$  takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \operatorname{ch} \theta.$$

Broj  $\theta$  se naziva središnji kut između vektora  $x$  i  $y$ .

**Definicija 1.9** Neka su  $x$  i  $y$  prostorni vektori u  $\mathbb{R}_1^3$  koji razapinju prostorni potprostor. Tada postoji jedinstven realni broj  $\theta \geq 0$  takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta.$$

Broj  $\theta$  se naziva prostorni kut između vektora  $x$  i  $y$ .

**Definicija 1.10** Neka je  $x$  prostorni, a  $y$  vremenski vektor u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada postoji jedinstven realni broj  $\theta \geq 0$  takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \operatorname{sh} \theta.$$

Broj  $\theta$  se naziva Lorentzov vremenski kut između vektora  $x$  i  $y$ .

Uočimo da se u  $\mathbb{R}_1^3$  kut između dva vektora od kojih je jedan svjetlosnog karaktera ne definira.

Kauzalni karakter krivulje u Minkowskijevom prostoru određen je kauzalnim karakterom njezinog tangencijalnog vektora. Neka je  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  krivulja u  $\mathbb{R}_1^3$ .

**Definicija 1.11** Krivulja  $\alpha$  u  $\mathbb{R}_1^3$  je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) u točki  $t$  ako je vektor  $\alpha'(t)$  prostorni (odnosno vremenski, svjetlosni).

Krivulja  $\alpha$  je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) ako je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) u svakoj točki  $t \in I$ .

Neka je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  injektivna imerzija, tj. lokalna parametrizacija plohe  $\mathbb{S}$ . Prva fundamentalna forma plohe  $\mathbb{S}$  je restrikcija pseudo-skalarog produkta u  $\mathbb{R}_1^3$  na tangencijalne vektore plohe. Kauzalni karakter plohe u Minkowskijevom prostoru određen je njezinom prvom fundamentalnom formom.

**Definicija 1.12** Ploha  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) ako je njezina prva fundamentalna forma pozitivno definitna (odnosno indefinitna, ranga 1).

U  $\mathbb{R}_1^3$  imamo sljedeće kvadrike

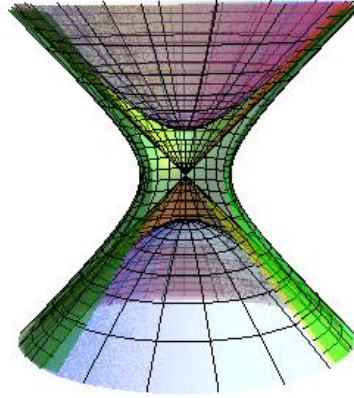
$$LC(p) = \{q \in \mathbb{R}_1^3 : \langle (q - p), (q - p) \rangle = 0\}$$

$$S_1^2(p, r) = \{q \in \mathbb{R}_1^3 : \langle (q - p), (q - p) \rangle = r^2\},$$

$$H^2(p, r) = \{q \in \mathbb{R}_1^3 : \langle (q - p), (q - p) \rangle = -r^2\}$$

Skup  $S_1^2(p, r)$  se naziva Lorentzova sfera ili pseudo-sfera sa središtem u točki  $p$  i radijusom  $r > 0$ , skup  $H^2(p, r)$  je hiperbolička ravnina s centrom u točki  $p$  i radijusom  $r$ , a  $LC(p)$  svjetlosni stožac s vrhom  $p$ . Skup  $S_1^2(p, r)$  nasljeđuje pseudo-metriku indeksa 1,

skup  $H^2(p, r)$  Riemannovu metriku, a  $LC(p)$  degeneriranu metriku ranga 1. Pseudo-sferu  $S_1^2(0, 1)$  ćemo kraće označavati s  $S_1^2$ , te analogno hiperboličku ravninu  $H^2(0, 1)$  s  $H^2$ , odnosno svjetlosni stožac  $LC(0)$  s  $LC$ .



**Slika 1.1:** Pseudo-sfera  $S_1^2$ , hiperbolička ravnina  $H^2$ , i svjetlosni stožac  $LC$

## 1.2 Lokalna teorija ploha u $\mathbb{R}_1^3$

U ovom odjeljku dan je prikaz lokalne teorije prostornih, odnosno vremenskih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Za takve plohe, lokalna teorija je u mnogočemu analogna lokalnoj teoriji ploha u euklidskom prostoru. No ipak postoje neke različitosti uzrokovane inedefinitnošću pseudo-metrike, odnosno kauzalnim karakterom plohe. Na primjer, Weingarteneovo preslikavanje (koje će kasnije biti definirano) u euklidskom prostoru je uvijek dijagonalizibilan operator, dok za vremenske plohe u Minkowskijevom prostoru to općenito ne vrijedi.

Prije nego što prijedemo na lokalnu teoriju ploha, navodimo definiciju Frenetovog trobrida krivulje u  $\mathbb{R}_1^3$ , te zakrivljenosti, odnosno torzije krivulje budući da za određenu krivulju na pravčastoj plohi, tzv. strikcijsku krivulju, ovi pojmovi predstavljaju invarijante pravčaste plohe.

**Definicija 1.13** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$ . Funkciju

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\kappa(s) = \|c''(s)\|$$

nazivamo zakrivljenošću (fleksijom) krivulje  $c$  u točki  $c(s)$ .

Za svaku krivulju  $c$  u  $\mathbb{R}_1^3$  definiramo ortonormirani trobrid (reper), tj. ortonormiranu bazu vektorskog prostora  $\mathbb{R}_{1,c(s)}^3$  u svakoj točki krivulje  $c(s)$ .

Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka. Polje  $T(s) = c'(s)$  je jedinično tangencijalno polje od  $c$ . Polje vektora glavnih normala dano je s

$$N(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}, c''(s) \neq 0,$$

a polje binormala s

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Tada je  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  ortonormirana baza od  $\mathbb{R}_{1,c(s)}^3$  i nazivamo ju Frenetovim (Frenet-Serretovim) trobridom (reperom, okvirom) krivulje  $c$ , ([38]).

Definiramo sada za krivulju parametriziranu duljinom luka i sljedeću funkciju

**Definicija 1.14** Funkcija

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\tau(s) = \langle N(s), B'(s) \rangle$$

naziva se torzijom (sukanjem) krivulje  $c$  parametrizirane duljinom luka u točki  $c(s)$ .

U  $\mathbb{R}_1^3$  također vrijede Frenetove formule analogne onima u euklidskom prostoru

$$T' = \eta\kappa N,$$

$$N' = -\varepsilon\kappa T - \varepsilon\eta\kappa B,$$

$$B' = -\eta\tau N,$$

pri čemu je  $\varepsilon = \langle T, T \rangle = \pm 1, \eta = \langle N, N \rangle = \pm 1$ .

Plohe u  $\mathbb{R}_1^3$  definiramo kao i u  $\mathbb{R}^3$ :

**Definicija 1.15** Podskup  $S \subset R_1^3$  je ploha ako za svaku točku  $p \in S$  postoji otvorena okolina  $V \subset R_1^3$  i preslikavanje  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  s otvorenog skupa  $U \subset R^2$  koje je

(i) homeomorfizam otvorenih skupova,

(ii) glatko preslikavanje.

Preslikavanje  $\mathbf{x}$  nazivamo parametrizacijom (lokalnim koordinatama, koordinatnom kartom) okoline točke  $p$  plohe  $\mathbb{S}$ . Pišemo  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Diferencijal preslikavanja  $\mathbf{x}$  je linearni operator  $\mathbf{x} : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  koji je u paru kanonskih

baza dan Jacobijevom matricom

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Diferencijal je injektivan ako i samo ako je njegova jezgra trivijalna, odnosno ako i samo ako su vektori  $\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ ,  $\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$  linearno nezavisni, što je ekvivalentno uvjetu  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ . Kada je diferencijal preslikavanja  $\mathbf{x}$  injektivan, za plohu kažemo da je regularna (tj. da je preslikavanje  $\mathbf{x}$  regularno).

Ako je  $\mathbb{S}$  glatka imerzirana ploha u Minkowskijev trodimenzionalni prostor  $\mathbb{R}_1^3$  s lokalnom parametrizacijom  $x : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , gdje je  $U \subset \mathbb{R}^2$  otvoren skup, označimo s  $g$  ili  $\langle, \rangle$  induciranu metriku na  $\mathbb{S}$  (njezinu prvu fundamentalnu formu), tj. povlak pseudo-skalarog produkta  $\langle, \rangle$  prostora  $\mathbb{R}_1^3$ . U lokalnim koordinata pišemo  $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ , gdje je  $x_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}$ , tj.  $x_j = \frac{\partial x}{\partial u_j}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Kako je već spomenuto, ploha  $\mathbb{S}$  je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) ako je njezina prva fundamentalna forma  $g$  pozitivno definitna (odnosno indefinitna, ranga 1). Iz daljnjeg razmatranja isključujemo svjetlosne plohe.

Krivulje na plohi definiramo analogno kao u euklidskom prostoru

**Definicija 1.16** Svako glatko preslikavanje  $c : I \rightarrow \mathbb{S}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  nazivamo krivuljom na plohi. Pritom, za preslikavanje  $c : I \rightarrow \mathbb{S}$  kažemo da je glatko ako je preslikavanje  $x^{-1} \circ c : I \rightarrow U$  glatko, za neku kartu  $x : U \rightarrow \mathbb{S}$ ,  $c(I) \subset x(U)$ .

**Definicija 1.17** Neka su  $\mathbb{S}_1$  i  $\mathbb{S}_2$  regularne plohe lokalno parametrizirane s  $x_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , odnosno  $x_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Za preslikavanje  $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$  kažemo da je glatko ako je glatko preslikavanje  $x_2^{-1} \circ f \circ x_1 : U_1 \rightarrow U_2$ .

Na plohi možemo definirati i tzv. parametarske krivulje

**Definicija 1.18** Neka je  $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{S}$  lokalna parametrizacija plohe  $\mathbb{S}$  i  $(u_0, v_0) \in U$ . Krivulje

$$u \mapsto x(u, v_0), v \mapsto x(u_0, v)$$

nazivaju se parametarskim  $u$  i  $v$ -krivuljama.

Analogno kao u euklidskom prostoru definiramo i tangencijalni vektor u točki  $p$  plohe  $\mathbb{S}$ .

**Definicija 1.19** Neka je  $\mathbb{S}$  regularna ploha i  $p \in \mathbb{S}$ . Tangencijalni vektor u točki  $p$  je vektor  $v_p \in T_p \mathbb{R}_1^3$  za koji postoji krivulja  $c : I \rightarrow \mathbb{S}$ , takva da je

$$c(0) = p, \quad c'(0) = v_p.$$

Skup svih tangencijalnih vektora u  $p$  označavamo s  $T_p \mathbb{S}$ .

U  $\mathbb{R}_1^3$  kauzalni karakter plohe može se odrediti i preko kauzalnog karaktera vektora okomitog na tangencijalnu ravninu plohe, tj. vrijedi sljedeća propozicija

**Propozicija 1.20** Ploha (tj. njezin parametrizirani dio) je

- (1.) prostorna ako i samo ako u svakoj točki  $p = x(u, v)$  postoji vremenski vektor  $n \neq 0$  koji je okomit na tangencijalnu ravninu plohe u  $p$ ,
- (2.) vremenska ako i samo ako u svakoj točki  $p = x(u, v)$  postoji prostorni vektor  $n \neq 0$  koji je okomit na tangencijalnu ravninu plohe u  $p$ ,
- (3.) svjetlosna ako i samo ako u svakoj točki  $p = x(u, v)$  postoji svjetlosni vektor  $n \neq 0$  koji je okomit na tangencijalnu ravninu plohe u  $p$ .

Prostorne (odnosno vremenske) plohe imaju jedinstvenu jediničnu normalu koja je nužno vremenska (odnosno prostorna), dok svjetlosne plohe imaju jedinstveni jednodimenzionalni normalni potprostor koji je sadržan u tangencijalnoj ravnini.

Za prostorne (odnosno vremenske) plohe lokalno definiramo jediničnu polje normale

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|},$$

koje je vremensko (odnosno prostorno) polje.

Gaussovo preslikavanje za vremenske, odnosno prostorne plohe dano je s

$$g : D \rightarrow S_1^2$$

$$g(u, v) = n(u, v)$$

odnosno,

$$g : D \rightarrow H^2$$

$$g(u, v) = n(u, v).$$

**Definicija 1.21** Neka je  $p$  točka na plohi  $\mathbb{S}$  i  $n$  njezina jedinična normala u toj točki. Weingartenov endomorfizam (operator oblika plohe)  $\mathbb{S}$  (u točki  $p$ ) definiran je s

$$L_p : T_p\mathbb{S} \rightarrow T_p\mathbb{R}_1^3,$$

$$L_p v = -D_v n.$$

Druga fundamentalna forma  $\mathbf{II}$  u  $p$  je vektor  $\mathbf{II}$  ortogonalan na  $T_p\mathbb{S}$  za koji vrijedi

$$\langle \mathbf{II}_p(v, w), n \rangle = \langle L_p v, w \rangle. \quad (1.1)$$



Operator oblika plohe  $L_p$  je simetričan operator s obzirom na  $\langle, \rangle$ , stoga vrijedi  $\langle L_p v, w \rangle = \langle v, L_p w \rangle$ ,  $v, w \in T_p \mathbb{S}$ . Za pridruženu skalarnu formu  $\mathbf{II}_p$  vrijedi

$$\mathbf{II}_p(v, w) = \mathbf{II}_p(v, w)n = \epsilon \langle L_p v, w \rangle n,$$

tj.  $\mathbf{II}_p(v, w) = \epsilon \langle L_p v, w \rangle n$ , gdje je  $\epsilon = \langle n, n \rangle \in \{-1, 1\}$ .

Svojstvene vrijednosti  $k_1, k_2$  operatora oblika plohe  $L_p$  mogu biti realne ili kompleksno konjugirane. Kada su realne, nazivamo ih glavnim zakrivljenostima, a pripadne svojstvene vektore glavnim smjerovima plohe  $\mathbb{S}$  u točki  $p$ . Na dijelu plohe  $\mathbb{S}$  koji je prostornog karaktera uvijek razlikujemo dvije glavne zakrivljenosti i operator oblika plohe je dijagonalizibilan. Kod vremenskih ploha svojstvene vrijednosti operatora  $L_p$  mogu biti ili realne i različite ( $L_p$  je dijagonalizibilan), realne i jednake ( $L_p$  nije dijagonalizibilan) ili kompleksno konjugirane ( $L_p$  je dijagonalizibilan), tj. operator  $L_p$  u dvodimenzionalnom vektorskom prostoru može imati jedan od sljedeće tri matrična zapisa:

$$(1.) \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$(2.) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

$$(3.) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

gdje su  $a, a_1, a_2, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$  konstante. Svojstvene vrijednosti matrica (1.) i (2.) su realne, dok su  $a \pm bi \in \mathbb{C}$  svojstvene vrijednosti matrice (3.).

U lokalnim koordinatama koeficijente  $h_{ij}$  od  $\mathbf{II}_p$  definiramo kao

$$\mathbf{II}_p(f_i, f_j) = h_{ij}n$$

i stoga je

$$h_{ij} = \epsilon \langle L_p(f_i), f_j \rangle = -\epsilon \langle n_i, f_j \rangle = \epsilon \langle f_{ij}, n \rangle.$$

Također koristimo oznake  $E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}, L = h_{11}, M = h_{12} = h_{21}, N = h_{22}$ . Veličine  $E, F, G$ , odnosno  $L, M, N$  zovemo fundamentalnim veličinama prvog, odnosno drugog reda plohe  $\mathbb{S}$ . Nadalje, vrijede sljedeće formule

$$L_p(f_i) = -n_i = \epsilon \sum_{k,s} h_{ik} g^{ks} f_s, \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

gdje je  $(g^{ij})$  inverzna matrica matrice  $(g_{ij})$ .

Gaussova zakrivljenost plohe  $\mathbb{S}$  definirana je s ([44])

$$K = \epsilon \det L_p = \frac{\langle \mathbf{II}(X, X), \mathbf{II}(Y, Y) \rangle - \langle \mathbf{II}(X, Y), \mathbf{II}(Y, X) \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}, \quad (1.3)$$

a u lokalnim koordinatama ju računamo prema

$$K = \epsilon \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (1.4)$$

Vektorsko polje glavne zakrivljenosti plohe  $\mathbb{S}$  definirano je s ([44])

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{II} = \frac{1}{2} (\epsilon_1 \mathbf{II}(e_1, e_1) + \epsilon_2 \mathbf{II}(e_2, e_2)),$$

gdje je  $(e_1, e_2)$  ortonormirana baza na  $\mathbb{S}$  u točki  $p$  i  $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle, i = 1, 2$ . Stavimo li  $\mathbf{H} = Hn$ , tada (1.1) povlači

$$H\epsilon = \frac{1}{2} (\epsilon_1 \langle \mathbf{II}(e_1, e_1), n \rangle + \epsilon_2 \langle \mathbf{II}(e_2, e_2), n \rangle) = \frac{1}{2} (\epsilon_1 \langle L_p(e_1), e_1 \rangle + \epsilon_2 \langle L_p(e_2), e_2 \rangle) \quad (1.5)$$

i stoga vrijedi

$$H = \frac{\epsilon}{2} \text{tr} L_p. \quad (1.6)$$

U lokalnim koordinatama imamo

$$H = \frac{\epsilon}{2} \frac{LG - 2FM + EN}{EG - F^2}. \quad (1.7)$$

Nadalje, s obzirom na Gaussovu, odnosno srednju zakrivljenost možemo definirati sljedeće vrste ploha:

**Definicija 1.22** Za plohu  $\mathbb{S}$  kažemo da je plosnata ako je  $K(p) = 0$  za svaku točku  $p$  plohe.

Za plohu  $\mathbb{S}$  kažemo da je minimalna ako je  $H(p) = 0$  za svaku točku  $p$  plohe.

Za plohu  $\mathbb{S}$  kažemo da je ploha konstantne zakrivljenosti ako je  $K(p) = \textit{konst.}$  za svaku točku  $p$  plohe.

Svojtvene vrijednosti  $k_1, k_2$  operatora  $L_p$  iz (1.4) i (1.7) možemo izračunati s

$$k_{1,2} = \epsilon H \pm \sqrt{H^2 - \epsilon K}, \quad (1.8)$$

Za prostorne plohe uvijek vrijedi

$$H^2 - \epsilon K \geq 0,$$

a za vremenske plohe samo u točkama s realnim glavnim zakrivljenostima. Stoga, za razliku od euklidskog prostora, u  $\mathbb{R}_1^3$  postoje i vremenske plohe čije su glavne zakrivljenosti kompleksno konjugirane. Primjere takvih ploha nalazimo i među pravčastim plohama, što će kasnije biti pokazano, a od prije je poznato je da se takve (ne nužno pravčaste) plohe konstantne zakrivljenosti  $K$  mogu dobiti kao rješenja ch-Gordonove jednadžbe  $\omega_{uv} = \text{ch } \omega$ , ([20]).

Na plohama možemo uočiti i tzv. umbiličke točke. To su one točke za koje vrijedi  $H^2 = K$

i operator oblika plohe je dijagonalizibilan. U  $\mathbb{R}_1^3$  postoje i tzv. kvazi-umbiličke točke plohe, tj. točke u kojima vrijedi  $H^2 = K$  ali operator oblika plohe nije dijagonalizibilan. U  $\mathbb{R}_1^3$  vrijedi i analogon Gaussovog *veličanstvenog* teorema

**Teorem 1.23** (Theorema Egregium) Zakrivljenost  $K$  je invarijantna pri lokalnim izometrijama, tj. ako je  $F : M \rightarrow N$  lokalna izometrija, tada je

$$K(p) = K(F(p)), p \in M.$$

Dokaz teorema svodi se na pokazivanje da se i u  $\mathbb{R}_1^3$  Gaussova zakrivljenost može odrediti preko fundamentalnih veličina prvog reda i njihovih derivacija, tj. vrijedi tzv. intrinzična formula.

Neka je  $x : U \rightarrow \mathbb{S}$  lokalna parametrizacija plohe klase barem  $C^3$ . Prema tome vrijedi

$$\begin{aligned} (x_{11})_2 &= (x_{12})_1 \\ (x_{22})_1 &= (x_{21})_2 \\ n_{12} &= n_{21} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Vrijedi i

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + h_{ij} n, \quad i, j = 1, 2$$

te Weingartenove formule

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\partial n}{\partial u_1} = a_{11} f_1 + a_{12} f_2, \\ n_2 &= \frac{\partial n}{\partial u_2} = a_{21} f_1 + a_{22} f_2, \end{aligned}$$

gdje su

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\varepsilon(LG - FM)}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{\varepsilon(EM - FL)}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{\varepsilon(MG - FN)}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{\varepsilon(EN - FM)}{EG - F^2} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Uvrštavanjem u uvjete (1.9), dobivamo izraze oblika  $Ax_1 + Bx_2 + Cn = 0$ , odakle zbog linearne nezavisnosti slijedi  $A = B = C = 0$ . Tako dobivamo

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 x_{12} + \Gamma_{11}^2 x_{22} + Ln_2 + (\Gamma_{11}^1)_2 x_1 + (\Gamma_{11}^2)_2 x_2 + L_2 n = \\ &= \Gamma_{12}^1 x_{11} + \Gamma_{12}^2 x_{21} + Mn_1 + (\Gamma_{12}^1)_1 x_1 + (\Gamma_{12}^2)_1 x_2 + M_1 n. \end{aligned}$$

U  $\mathbb{R}_1^3$  Christoffelovi simboli  $\Gamma_{ij}^k$  se mogu izračunati prema

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2W^2} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_1}{2W^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2W^2} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_2}{2W^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2W^2} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2W^2}\end{aligned}\tag{1.11}$$

gdje je  $W^2 = EG - F^2$ . Korištenjem izraza kojima definiramo Christoffelove simbole i izjednačavanjem člana uz  $x_2$  sa 0, dobivamo

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - La_{22} + (\Gamma_{11}^2)_2 = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2 - Ma_{21} + (\Gamma_{12}^2)_1.\tag{1.12}$$

Uvrštavanjem u (1.12) koeficijenata iz (1.10) slijedi

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + L\varepsilon\frac{FM - EN}{EG - F^2} + (\Gamma_{11}^2)_2 &= \\ = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2 + M\varepsilon\frac{FL - EM}{EG - F^2} + (\Gamma_{12}^2)_1.\end{aligned}$$

Dakle

$$\begin{aligned}(\Gamma_{12}^2)_1 - (\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^2 &= \\ = \frac{L(FM - EN) - M(FL - EM)}{EG - F^2} = \frac{-E(LN - M^2)}{EG - F^2} = -EK.\end{aligned}$$

Prema tome, dobili smo sljedeći izraz za Gaussovu zakrivljenost (intrinzična formula)

$$K = \frac{1}{E} \left( (\Gamma_{11}^2)_2 - (\Gamma_{12}^2)_1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^2 \right)\tag{1.13}$$

Formula 1.13 se naziva Gaussova formula.

U  $\mathbb{R}_1^3$  vrijede i analogne Codazzi-Mainardi jednadžbe

$$\begin{aligned}L_2 - M_1 - \Gamma_{12}^1L + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)M + \Gamma_{11}^2N &= 0, \\ N_1 - M_2 + \Gamma_{22}^1L + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1)M - \Gamma_{12}^2N &= 0.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Uvjet jednakosti Gaussovih zakrivljenosti dviju ploha nužan je ali ne i dovoljan uvjet izometričnosti tih ploha. Primjerice, u euklidskom prostoru helikoid i lijevak (ploha koja

nastaje rotacijom krivulje  $c(u) = (u, \log u, 0)$  oko  $y$ -osi) nisu izometrične plohe, iako imaju jednaku Gaussovu zakrivljenost. On je dovoljan samo za plohe konstantne zakrivljenosti, tj. vrijedi sljedeći teorem, ([23])

**Teorem 1.24** (Mindingov teorem) Svake dvije plohe jednake konstantne zakrivljenosti su lokalno izometrične, tj. postoje lokalne parametrizacije  $x$  i  $\bar{x}$  tako da za njihove prve fundamentalne forme vrijedi  $I = \bar{I}$ .

U dokazu teorema je korištena parametrizacija plohe geodetskim polarnim koordinatama. Prema [46], parametrizacija geodetskim polarnim koordinatama u  $\mathbb{R}_1^3$  je analogna takvoj parametrizaciji u  $\mathbb{R}_1^3$ , te je stoga i dokaz teorema analogan.

Sljedeći teorem koji se naziva *Fundamentalni teorem teorija ploha* daje odgovor na pitanje kojim veličinama je ploha (do na položaj u prostoru) jednoznačno određena.

**Teorem 1.25** Neka su  $E, F, G, L, M, N$  glatke funkcije definirane na otvorenom skupu  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $E \neq 0$ ,  $G \neq 0$  koje zadovoljavaju Gaussovu formulu i Mainardi-Codazzi jednadžbe, te neka je  $EG - F^2 \neq 0$ . Tada za svaku točku  $q \in U$  postoji okolina  $V \subset U$  od  $q$  i glatki difeomorfizam  $f : V \rightarrow f(V) \subset \mathbb{R}_1^3$  tako da regularna ploha  $f(U) \subset \mathbb{R}_1^3$  ima funkcije  $E, F, G, L, M, N$  za fundamentalne veličine prvog, odnosno drugog reda. Nadalje, ako je  $V$  povezan, a  $\bar{f} : V \rightarrow \bar{f}(V) \subset \mathbb{R}_1^3$  neki drugi glatki difeomorfizam koji zadovoljava navedene uvjete, tada postoji izometrija prostora  $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  tako da je  $\bar{f} = F \circ f$ .

## 1.3 Pravčaste plohe u $\mathbb{R}_1^3$

Pravčaste plohe su specijalna vrsta ploha koje možemo zamisliti kao plohe koje nastaju tako duž neke krivulje povuče pravac. Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoren interval i neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$   $C^1$ -krivulja dana svojim parametarskim prikazom  $c$ . Neka je nadalje na  $I$  zadana jedno-parametarska familija pravaca  $r(u) \subseteq \mathbb{R}_1^3$ ,  $u \in I$ .

**Definicija 1.26** Skup točaka  $S \subset \mathbb{R}_1^3$  dan parametarskim prikazom

$$f(u, v) = c(u) + vr(u), u \in I \subset \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

pri čemu su vektori  $f_u, f_v$  linearno nezavisni predstavlja jednu  $C^1$ -plohu u  $\mathbb{R}_1^3$  koju nazivamo pravčasta ploha. Krivulja  $c$  se naziva bazna krivulja (direktrisa, vodilica, ravnalica) a pravci određeni vektorom smjera  $r(u)$  izvodnice (generatriše) plohe.

Specijalno, krivulja  $r(u)$  se naziva direkcijska krivulja pravčaste plohe. Izvodnice pravčaste plohe su zadane s  $v \mapsto c(u_0) + vr(u_0)$ .

Dalje u tekstu, bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je polje  $r(u)$  jedinično. U [25] navedene su četiri klase pravčastih ploha koja se pojavljuju u  $\mathbb{R}_1^3$  :

1. pravčaste ploha čija bazna krivulja, odnosno izvodnice nisu svjetlosnog karaktera i linearno su nezavisni, klasa  $M_1$ ,
2. pravčaste plohe čija bazna krivulja je svjetlosnog karaktera, a izvodnice su prostornog, odnosno vremenskog karaktera, te  $\langle c', r \rangle \neq 0$ ,
3. pravčaste plohe čija bazna krivulja je prostornog, odnosno vremenskog karaktera, a izvodnice su svjetlosnog karaktera, te  $\langle c', r \rangle \neq 0$ ,
4. pravčaste ploha čija bazna krivulja i izvodnice su svjetlosnog karaktera i linearno su nezavisni, klasa  $M_0$ ,

te je pokazano da se, uz odgovarajuću reparametrizaciju bazne krivulje, pravčaste plohe u  $\mathbb{R}_1^3$  mogu svesti na plohe klase  $M_1$ , odnosno  $M_0$ . Kako je ranije navedeno, iz razmatranja smo isključili svjetlosne plohe. Skup svjetlosnih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  čine svjetlosna ravnina, svjetlosni stožac, te pravčaste plohe sa specijalnom baznom krivuljom i svjetlosnim izvodnicama, ([8]).

S obzirom na kauzalni karakter izvodnice  $r$  i njezine derivacije  $r'$  plohe klase  $M_1$  dalje možemo podijeliti na

- plohe klase  $M_1^1$ , ako  $r$  i  $r'$  nisu svjetlosnog karaktera,
- plohe klase  $M_1^0$ , ako  $r$  nije, ali  $r'$  jest svjetlosnog karaktera

Pravčaste plohe klase  $M_1^1$  ćemo kroz rad zvati ne-nul pravčaste plohe, dok će se za plohe klase  $M_0$  koristiti termin nul-pravčaste plohe uz napomenu da su ove plohe vremenskog, a ne svjetlosnog karaktera na što bi mogao asociirati termin "nul". Dalje je važno napomenuti da je lokalna teorija ne-nul pravčastih ploha analogna teoriji pravčastih ploha u euklidskom prostoru, dok za nul-pravčaste plohe, kao i za plohe klase  $M_1^0$  koje nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru to općenito ne vrijedi.

### 1.3.1 Pravčaste plohe klase $M_1^1$

Pravčaste plohe klase  $M_1^1$  možemo smatrati svojevrsnim analogonima pravčastih ploha iz

euklidskog prostora budući da za njih vrijede analogne definicije i teoremi za pravčaste plohe u  $\mathbb{R}^3$ . U  $\mathbb{R}_1^3$  pravčaste plohe možemo razlikovati s obzirom na kauzalni karakter bazne krivulje, odnosno izvodnica. Ako je bazna krivulja  $c$  prostornog ili vremenskog karaktera, tada se izvodnice  $r$  mogu odabrati tako da su ortogonalne na krivulju  $c$ . Budući da u  $\mathbb{R}_1^3$  vremenski vektor može biti ortogonalan samo na prostorni vektor [38], među plohama klase  $M_1^1$  razlikujemo tri različita tipa ploha s obzirom na kauzalni karakter bazne krivulje, odnosno izvodnica:

- plohe tipa  $S_1$ , pravčaste plohe s prostornom baznom krivuljom i prostornim izvodnicama,
- plohe tipa  $S_2$ , pravčaste plohe s prostornom baznom krivuljom i vremenskim izvodnicama,
- plohe tipa  $S_3$ , pravčaste plohe s vremenskom baznom krivuljom i prostornim izvodnicama.

Plohe tipa  $S_1$  su prostorne plohe, dok su plohe tipa  $S_2$ , odnosno  $S_3$  vremenske pravčaste plohe.

Među plohama klase  $M_1^1$  možemo uočiti neke specijalne pravčaste plohe,

**Definicija 1.27** Pravčasta ploha s konstantnim vektorskim poljem  $r(u)$  naziva se cilindričnom pravčastom plohom.

Ako bazna krivulja plohe degenerira u točku, pripadnu pravčastu plohu nazivamo konusnom plohom.

Ploha koju čine tangente neke prostorne krivulje naziva se tangentnom plohom.

Ravnina je očito primjer cilindrične plohe. Cilindrične, konusne i tangentne plohe su tzv. razvojne plohe, tj. plohe koje se mogu izometrički preslikati u ravninu. Diferencijalno-geometrijska karakterizacija takvih ploha je da je njihova Gaussova zakrivljenost  $K = 0$ . Plohe koje nisu razvojne, nazivaju se vitopere pravčaste plohe. Njihova Gaussova zakrivljenost je očito  $K \neq 0$ . Ove plohe su karakterizirane uvjetom  $\det(c'(u), r(u), r'(u)) \neq 0$ .

Promotrimo sada dvije susjedne izvodnice generirane vektorima  $r(u), r(u + \delta u)$ . Ako ploha nije cilindrična, izvodnice su mimoilazni pravci u prostoru. Za vitopere pravčaste plohe definira se specijalna krivulja na plohi

**Definicija 1.28** Nožište zajedničke okomice dviju susjednih izvodnica naziva se strikcijskom točkom pravčaste plohe, a lokus svih strikcijskih točaka plohe se naziva strikcijskom krivuljom plohe.

Parametrizacija strikcijske krivulje je dana s

$$s(u) = c(u) - \frac{\langle c'(u), r'(u) \rangle}{\langle r'(u), r'(u) \rangle} r(u). \quad (1.16)$$

Za strikcijsku krivulju vrijedi sljedeća propozicija, ([48])

**Propozicija 1.29** Neka je  $S$  pravčasta ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  s parametrizacijom (1.15) takva da je  $\langle r, r \rangle = konst.$  i  $\langle r', r' \rangle \neq 0$ . Tada postoji jedinstvena bazna krivulja  $s$  takva da je  $\langle s', r' \rangle = 0$ , štoviše,  $s$  ne ovisi o izboru bazne krivulje  $c$ .

Specijalno, svaka vitopera ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  u  $\mathbb{R}_1^3$  s parametrizacijom (1.15) dozvoljava reparametrizaciju

$$\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = s(u) + ve(u), \quad (1.17)$$

gdje je  $e(u) = \frac{r(u)}{\|r(u)\|}$ ,  $e^2 = \pm 1$ , te je  $s(u)$  strikcijska krivulja. Veličinu

$$\delta = \frac{\det(c', e, e')}{e'^2} \quad (1.18)$$

nazivamo parametrom distribucije plohe. Vitopere pravčaste plohe su karakterizirane s parametrom distribucije  $\delta \neq 0$ .

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da promatrane pravčaste plohe imaju parametrizaciju oblika (1.17), gdje je  $u$  parametar duljine luka strikcijske krivulje. Analogno kao u euklidskom prostoru, svakoj ne-nul pravčastoj plohi možemo pridružiti tzv. Sannijin trobrid, tj. ortonormirani trobrid koji određuje invarijante plohe: njezinu zakrivljenost  $\kappa$ , torziju  $\tau$  i strikciju  $\sigma$ . Svaka ne-nul pravčasta ploha je do na položaj u prostoru jednoznačno određena s ove tri invarijante.

Pravčastoj plohi  $\mathbb{S}_1$  pridružujemo Sannijin trobrid na sljedeći način: neka je  $n = e'$ , te  $z = e \times n$ . Svakoj strikcijskoj točki plohe  $\mathbb{S}_1$  pridružujemo ortonormirani trobrid  $\{e, n, z\}$ , gdje je  $n$  vremenski, a  $e$  i  $z$  prostorni vektori. Frenetove formule ovog trobrida glase ([15])

$$\begin{aligned} e' &= \kappa n \\ n' &= \kappa e + \tau z, \\ z' &= \tau n, \end{aligned}$$

gdje su  $\kappa$  i  $\tau$  zakrivljenost, odnosno torzija izvodnice  $e(u)$ .

Tangencijalni vektor strikcijske krivulje plohe  $\mathbb{S}_1$  je  $s' = \cos \sigma e + \sin \sigma z$ , gdje je kut  $\sigma$ , kut koji zatvaraju  $s'$  i  $e$ , njezina strikcija. Stoga se prostorna pravčasta ploha  $\mathbb{S}_1$  može parametrizirati s

$$f(u, v) = \int (\cos \sigma e(u) + \sin \sigma z(u)) du + ve(u).$$

Slično, za pravčastu plohu  $\mathbb{S}_2$  s ortonormiranim trobridom  $\{e, n, z\}$ , gdje je  $e$  vremenski



a  $n$  i  $z$  prostorni vektori definirani kao za plohu  $\mathbb{S}_1$ , Frenetove formule glase ([15])

$$\begin{aligned} e' &= \kappa n \\ n' &= \kappa e - \tau z, \\ z' &= \tau n. \end{aligned}$$

Za pravčastu plohu  $\mathbb{S}_3$ , s ortonormiranim trobridom  $\{e, n, z\}$  gdje je  $z$  vremenski, a  $e$  i  $n$  prostorni vektori, Frenetove formule glase

$$\begin{aligned} e' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa e + \tau z, \\ z' &= \tau n. \end{aligned}$$

Budući da za obje plohe tangencijalni vektor ostaje u vremenskoj ravnini određenoj s  $e$  i  $z$ , on je dan s  $s' = \sinh \sigma e + \cosh \sigma z$ , gdje realan broj  $\sigma$ , vremenski kut koji zatvaraju  $s'$  i  $e$ , strikcija plohe. Stoga se obje plohe mogu parametrizirati s

$$f(u, v) = \int (\sinh \sigma e(u) + \cosh \sigma z(u)) du + ve(u).$$

### 1.3.2 Pravčaste plohe klase $M_1^0$

Plohe klase  $M_1^0$  su plohe s parametrizacijom (1.15) čije su izvodnice prostornog, a vektorska polja  $r'$  svjetlosnog karaktera, tj.  $\langle r', r' \rangle = 0$ . Ovakve plohe nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru budući da u euklidskom prostoru samo za cilindrične plohe vrijedi  $\langle r', r' \rangle = 0$  tj. vektorsko polje  $r$  je konstantno. U Minkowskijevom prostoru zbog indefinitnosti metrike imamo specijalan slučaj ploha čije da vektorsko polje  $r$  nije konstantno ali  $\langle r', r' \rangle = 0$  (prisjetimo se da je vektor  $x = \mathbf{0}$  prostornog karaktera). Za takve plohe također možemo reći da je direkcijska krivulja pravčaste plohe svjetlosnog karaktera. Invarijante ove klase ploha analizirane su u [10],[48].

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da ploha  $\mathbb{S}$  klase  $M_1^0$  dozvoljava parametrizaciju oblika

$$f(u, v) = c(u) + vr(u), u \in I \subset \mathbb{R}, v \in \mathbb{R},$$

gdje su  $\langle r, r \rangle = 1$ ,  $\langle r', r' \rangle = 0$  i  $\langle c', r \rangle = 0$ .

Budući da su  $r \times r'$  i  $r'$  ortogonalni svjetlosni vektori, oni su kolinearni. Dalje, možemo pretpostaviti  $r \times r' = r'$ . Promjenom parametra  $u$ , ukoliko je potrebno, možemo postići

$$r'' = 0.$$

Definiramo funkcije na plohi,  $Q : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$Q := \det(c', r, r'),$$

$$R := \langle c', c' \rangle.$$

Za funkciju  $Q$  vrijedi  $Q = \langle c', r' \rangle$ . Uz eventualnu promjenu bazne krivulje  $c + \tilde{v}r$  za neki realan broj  $v \neq 0$ , možemo pretpostaviti  $R \neq 0$ . Uz ortonormirani trobrid  $\{\frac{1}{\sqrt{|R|}}c', r, \frac{1}{\sqrt{|R|}}c' \times e\}$ , gdje su  $\frac{1}{\sqrt{|R|}}c'$  i  $r$  prostorni, a  $\frac{1}{\sqrt{|R|}}c' \times e$  vremenski vektor, slijedi

$$r' = \frac{Q}{R}(c' - c' \times r).$$

Vrijede i sljedeće jednakosti:

$$(i) \quad Q' = \langle c'', r' \rangle = \frac{Q}{R}\langle c'', c' \rangle - \frac{Q}{R}\det(c'', c', r),$$

$$(ii) \quad \det(c'', c', r) = \frac{R'}{2} - \frac{RQ'}{Q} \text{ i}$$

$$(iii) \quad c'' = \frac{R'}{2R}c' - Qr + \left(\frac{Q'}{Q} - \frac{R'}{2R}\right)c \times r.$$

Fundamentalne veličine prvog reda plohe dane su s

$$E = R + 2Qv, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

odnosno prva fundamentalna forma je dana s

$$I = R + 2Qv. \tag{1.19}$$

Jedinično polje normale plohe je

$$n = \frac{1}{\sqrt{|R + 2Qv|}} \left( \left(1 + \frac{Q}{R}v\right)c' \times r - \frac{Q}{R}vc' \right),$$

te su fundamentalne veličine drugog reda plohe dane s

$$L = \frac{1}{\sqrt{|R + 2Qv|}} \left( \frac{R'}{2} - \frac{RQ'}{Q} - Q'v \right), \quad M = \frac{Q}{\sqrt{|R + 2Qv|}}, \quad N = 0.$$

Gaussova zakrivljenost, odnosno srednja zakrivljenost plohe je dana s

$$K = \frac{Q^2}{(R + 2Qv)^2},$$

$$H = \frac{-2RQ' + R'Q - 2QQ'v}{Q|R + 2Qv|^{\frac{3}{2}}}.$$

Uočimo da plohu možemo micati kroz prostor tako da postignemo  $r = (1, u, u)$ . Tada se bazna krivulja  $c(u) = (c_1(u), c_2(u), c_3(u))$  može odrediti preko sljedećih jednadžbi

$$\begin{aligned} c_1'^2 + (c_2' - c_3')(c_2' + c_3') &= \langle c', c' \rangle = R \\ c_1' + u(c_2' - c_3') &= \langle c', r \rangle = 0, \\ c_2' - c_3' &= \langle c', r' \rangle = Q. \end{aligned}$$

Slijedi

$$c' = \frac{Q}{2} \left( -2u, \frac{R}{Q^2} + 1 - u^2, \frac{R}{Q^2} - 1 - u^2 \right).$$

Stoga invarijante  $Q$  i  $R$  jednoznačno određuju pravčastu plohu, do na položaj u prostoru.

### 1.3.3 Pravčaste plohe klase $M_0$

Kao što smo ranije naveli, pravčaste plohe sa svjetlosnim izvodnicama i svjetlosnom baznom krivuljom zovemo plohama klase  $M_0$  ili nul-pravčastim plohama. Za plohe klase  $M_0$  prema definiciji vrijedi linearna nezavisnost bazne krivulje  $c$  i izvodnica  $r$ . Budući da su dva svjetlosna vektora linearno zavisna ako i samo ako je njihov pseudo-skalarni produkt jednak nula, ([38]), slijedi  $\langle c', r \rangle \neq 0$ . Stoga su nam od velikog značaja tzv.  $B$ -namotajne plohe koje definiramo kako slijedi,

**Definicija 1.30** Pravčasta ploha sa svjetlosnim izvodnicama i baznom krivuljom koja je svjetlosna Frenetova krivulja sa svjetlosnim trobridom  $(A, B, C)$ , pri čemu je

$$c' = A, \quad \langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle C, C \rangle = 1,$$

$$\langle A, B \rangle = 1, \quad \langle A, C \rangle = 0, \quad \langle B, C \rangle = 0,$$

te su izvodnice određene s vektorskim poljem  $r = B$ , naziva se  $B$ -namotajna ploha.

Dakle,  $B$ -namotajna ploha ima parametrizaciju oblika

$$f(u, v) = c(u) + vB(u), \quad u \in I \subset \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}. \quad (1.20)$$

Prema [25] svaka nul-pravčasta ploha za koju vrijedi  $\langle c', r \rangle \neq 0$  može se parametrizirati kao  $B$ -namotajna ploha.

Za vektorska polja  $(A, B, C)$  vrijede analogni Frenetovih formula

$$A' = k_2 C, \quad B' = k_3 C, \quad C' = -k_3 A - k_2 B, \quad (1.21)$$

pri čemu se funkcije  $k_2$  i  $k_3$  nazivaju zakrivljenostima krivulje  $c$ .

$B$ –namotajne plohe su vremenske plohe i njihova prva fundamentalna forma  $I$ , odnosno druga fundamentalna forma  $II$ , te operator oblika  $L_p$  dani su s ([25])

$$I = k_3^2 v^2 du^2 + 2dudv, \quad (1.22)$$

$$II = k_2 + vk_3' + v^2 k_3^3 du^2 + 2k_3 dudv, \quad (1.23)$$

$$L_p = \begin{pmatrix} k_3 & 0 \\ k_2 + vk_3'^2 & k_3 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Gaussova zakrivljenost  $K$ , odnosno srednja zakrivljenost  $H$ ,  $B$ –namotajne plohe su dani s  $K = k_3^2$ , odnosno  $H = k_3$ . Stoga za  $B$ –namotajne plohe uvijek vrijedi  $H^2 = K$ , te su one ili totalno umbiličke kao što su pseudosfere  $S_1^2(p, r)$  ili kvazi-umbiličke. Primjeri  $B$ –namotajnih ploha uključuju plosnate (očito i minimalne)  $B$ –namotajne plohe kao što su parabolički svjetlosni cilindar.

# Izometrije pravčastih ploha u $\mathbb{R}_1^3$

## 2.1 Lokalne izometrije ploha u $\mathbb{R}_1^3$

Lokalne izometrije ploha su diferencijabilna preslikavanja koja čuvaju intrinzičnu metriku (prvu fundamentalnu formu) ploha. Posebno je zanimljivo izučavati ovakva preslikavanja za različite klase ploha postavljajući određene uvjete na njih. Na primjer, Bonnetove plohe su plohe jednake srednje zakrivljenosti koje su lokalno izometrične. Helikoid i katenoid su primjer para takvih ploha u euklidskom prostoru. Analogan problem je proučavan i u Minkowskijevom prostoru, ([18]). Također prema Bourovom teoremu ([21]) postoji lokalna izometrija između helikoidalnih i rotacijskih ploha pri kojoj se zavojnice helikoidalne plohe preslikaju u kružnice na rotacijskoj plohi. U ovom radu izučavamo lokalne izometrije u klasi pravčastih ploha te se prirodno nameće pitanje pod kojim uvjetima lokalne izometrije čuvaju izvodnice na plohi. Izometrija helikoida koji je pravčasta ploha i katenoida koji je rotacijska ploha pokazuje da uvjet da obje plohe budu pravčaste nije trivijalan. U euklidskom prostoru ovakva preslikavanja je proučavao njemačko-pruski matematičar F. Minding (1806.-1885.) i stoga se nazivaju Mindingove izometrije. S aspekta diferencijalne geometrije problem je proučavao E. Kruppa, ([35]).

Neka su  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  pravčaste plohe u  $\mathbb{R}_1^3$  zadane parametrizacijama  $x : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , odnosno  $\bar{x} : \bar{I} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ . Neka je  $F : \mathbb{S} \rightarrow \bar{\mathbb{S}}$  preslikavanje ploha. Definiramo diferencijalno preslikavanje  $F$  (push-forward) preslikavanja  $F$  u točki  $p$  na sljedeći način:

**Definicija 2.1**  $F_{*p}$  je linearna transformacija između tangencijalnih prostora

$$F_{*p} : T_p\mathbb{S} \rightarrow T_{F(p)}\bar{\mathbb{S}},$$

$$F_{*p}(x_p) = (F(p), \frac{dF \circ x \circ c}{dt}(0)),$$

gdje je  $x \circ c : I \rightarrow \mathbb{S}$  krivulja na  $\mathbb{S}$  za koju vrijedi

$$x \circ c(0) = p, \quad F \circ x \circ c : I \rightarrow \bar{\mathbb{S}}, \quad F \circ x \circ c(0) = F(p),$$

i

$$x_p = \left( p, \frac{dx \circ c}{dt}(0) \right).$$

**Definicija 2.2** Linearni izomorfizam  $T : V \rightarrow W$  mnogostrukosti  $V$  i  $W$  koji čuva pseudo-skalarini produkt se naziva linearna izometrija.

**Definicija 2.3** Lokalna izometrija pseudo-Riemannovih mnogostrukosti  $M$  i  $N$  je glatko preslikavanje  $F : M \rightarrow N$  za koje je svako diferencijalno preslikavanje  $F_* : T_p M \rightarrow T_p N$  linearni izomorfizam, tj. vrijedi  $\langle F_*(v), F_*(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ , za sve  $v, w \in T_p M, p \in M$ .

**Definicija 2.4** Neka su  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  pravčaste plohe u  $\mathbb{R}_1^3$ . Preslikavanje  $F : \mathbb{S} \rightarrow \bar{\mathbb{S}}$  se naziva Mindingova izometrija ako je  $F$  lokalna izometrija ploha koja preslikava izvodnice plohe  $\mathbb{S}$  u izvodnice plohe  $\bar{\mathbb{S}}$ .

Za lokalnu izometriju ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  vrijede sljedeće propozicije

**Propozicija 2.5** Lokalna izometrija ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  čuva kauzalni karakter vektora.

*Dokaz.* Neka je  $F$  lokalna izometrija ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Tada je  $\langle F_{*p}(v), F_{*p}(w) \rangle = \langle v, w \rangle$  za svaki  $v, w \in T_p \mathbb{S}, p \in \mathbb{S}$ . Specijalno za  $v = w$  slijedi tvrdnja propozicije.  $\square$

**Propozicija 2.6** Lokalna izometrija ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  čuva kauzalni karakter krivulja.

*Dokaz.* Kauzalni karakter krivulje  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  određen je kauzalnim karakterom njezinog tangencijalnog vektora  $\alpha'$ . Tvrdnja slijedi iz  $\langle F_{*p}(\alpha'), F_{*p}(\alpha') \rangle = \langle \alpha', \alpha' \rangle$ .  $\square$

**Propozicija 2.7** Lokalna izometrija ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  čuva kauzalni karakter plohe.

*Dokaz.* Kauzalni karakter plohe  $S$  određen je kauzalnim karakterom njezine tangencijalne ravnine.

Tangencijalna ravnina prostorne plohe je prostorna ravnina. Budući da lokalna izometrija čuva kauzalni karakter vektora, a prostorna ravnina je određena s dva prostorna vektora koja sadrži, slijedi da se prostorna ravnina lokalnom izometrijom preslika u prostornu ravninu, tj. prostorna ploha se preslika u prostornu plohu.

Tangencijalna ravnina vremenske plohe je vremenska ravnina. Vremenska ravnina je određena s dva linearno nezavisna svjetlosna vektora koja sadrži. Dva svjetlosna vektora  $v$  i  $w$  su linearno zavisni ako i samo ako je  $\langle v, w \rangle = 0$ . Očito se dva linearno nezavisna svjetlosna vektora lokalnom izometrijom preslikaju u dva linearno nezavisna svjetlosna vektora, odnosno vremenska ravnina se lokalnom izometrijom preslika u vremensku ravninu.

Tangencijalna ravnina svjetlosne plohe je svjetlosna ravnina. Svjetlosna ravnina određena je jedinstvenim svjetlosnim vektorom koji sadrži. Prema definiciji lokalne izometrije, slijedi da se svjetlosna ravnina preslika u svjetlosnu ravninu.  $\square$

Analogno kao u euklidskom prostoru vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.8** Glatko preslikavanje  $x$  je lokalna izometrija ako i samo ako su  $E = \overline{E}$ ,  $F = \overline{F}$ ,  $G = \overline{G}$ , pri čemu su funkcije  $E, F, G$ , odnosno  $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$  fundamentalne veličine prvog reda s obzirom na parametrizaciju  $x$ , odnosno  $\overline{x}$  definirane na istom otvorenom skupu  $U$ .

*Dokaz.* Neka je  $x : U \rightarrow \mathbb{S}$  parametrizacija na  $\mathbb{S}$ . Pokažimo da je glatko preslikavanje  $F$  je lokalna izometrija ako i samo ako

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \overline{x} \circ \phi}{\partial u_i}, \frac{\partial \overline{x} \circ \phi}{\partial u_j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.1)$$

Kako vrijedi  $F \circ x = \overline{x} \circ \phi : U \rightarrow \overline{x}(\overline{U})$ , te uz  $(F \circ c)(t) = (F \circ x)(u_1(t), u_2(t))$ , za parametarske krivulje  $u_1 = (u_1)_0$  i  $u_2 = (u_2)_0$  u točki  $p = x((u_1)_0, (u_2)_0)$  vrijedi

$$F_{*|p}(x_{u_1}) = \frac{d(F \circ x)(u_1, (u_2)_0)}{du_1} = \frac{d(\overline{x} \circ \phi)(u_1, (u_2)_0)}{du_1} = \frac{\partial(\overline{x} \circ \phi)(u_1, u_2)}{\partial u_1}.$$

Analogno,

$$F_{*|p}(x_{u_2}) = \frac{\partial(\overline{x} \circ \phi)(u_1, u_2)}{\partial u_2},$$

iz čega slijedi (2.1). Nadalje, budući da vektori  $\{x_u, x_v\}$  čine bazu za tangencijalnu ravninu  $T_p\mathbb{S}$ , uvjet (2.1) je dovoljno provjeriti na njima. Primjerice, za  $E = \langle x_u, x_u \rangle$  dobivamo

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial \overline{x}(\overline{u}, \overline{v})}{\partial u}, \frac{\partial \overline{x}(\overline{u}, \overline{v})}{\partial u} \right\rangle = \left( \frac{\partial \overline{x}(\overline{u}, \overline{v})}{\partial \overline{u}} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \frac{\partial \overline{x}(\overline{u}, \overline{v})}{\partial \overline{v}} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} \right)^2 = \\ &= \overline{E} \left( \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} \right)^2 + 2\overline{F} \left( \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} \right) + \overline{G} \left( \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} \right)^2. \end{aligned}$$

Uzmemo li sad za domene parametrizacija isti skup, tj.  $U = \overline{U}$ , a za koordinatno preslikavanje  $\phi = Id$ , tvrdnja teorema očito slijedi.  $\square$

## 2.1.1 Lokalne izometrije ploha klase $M_1^1$

Promotrimo sada lokalne izometrije pravčastih ploha klase  $M_1^1$  koje su opisane u odjeljku 1.3.1.

Za prvu fundamentalnu formu  $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  ne-nul pravčastih ploha dobivamo redom:

- za prostornu pravčastu plohu  $\mathbb{S}_1$

$$I = (1 - v^2\kappa^2)du^2 + 2 \cos \sigma dudv + dv^2,$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_2$

$$I = (1 + v^2\kappa^2)du^2 - 2 \sinh \sigma dudv - dv^2,$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_3$

$$I = (-1 + v^2\kappa^2)du^2 + 2 \sinh \sigma dudv + dv^2.$$

Druga fundamentalna forma  $I = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$  ovih ploha je dana s:

- za prostornu pravčastu plohu  $\mathbb{S}_1$

$$II = \frac{\kappa \cos \sigma \sin \sigma + \tau \sin^2 \sigma + v\kappa' \sin \sigma - \sigma' \cos \sigma v\kappa + v^2\kappa^2\tau}{\sqrt{|-\sin^2 \sigma + v^2\kappa^2|}} du^2 + \frac{\kappa \sin \sigma}{\sqrt{|-\sin^2 \sigma + v^2\kappa^2|}} dudv,$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_2$

$$II = \frac{\kappa \sinh \sigma \cosh \sigma + \tau \cosh^2 \sigma + v\kappa' \cosh \sigma + \sigma' \sinh \sigma v\kappa - v^2\kappa^2\tau}{\sqrt{|\cosh^2 \sigma + v^2\kappa^2|}} du^2 + \frac{\kappa \cosh \sigma}{\sqrt{|\cosh^2 \sigma + v^2\kappa^2|}} dudv,$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_3$

$$II = \frac{\kappa \sinh \sigma \cosh \sigma + \tau \cosh^2 \sigma + v\kappa' \cosh \sigma - \sigma' \sinh \sigma v\kappa - v^2\kappa^2\tau}{\sqrt{|\cosh^2 \sigma - v^2\kappa^2|}} du^2 + \frac{\kappa \cosh \sigma}{\sqrt{|\cosh^2 \sigma - v^2\kappa^2|}} dudv.$$

Možemo uočiti da za sve tri vrste ploha klase  $M_1^1$ , prva fundamentalna forma ne ovisi o torziji  $\tau$ , te se ne mijenja s promjenom predznaka zakrivljenosti  $\kappa$ , a specijalno za prostorne pravčaste plohe  $\mathbb{S}_1$  se ne mijenja s promjenom predznaka strikcije  $\sigma$ . Stoga vrijedi sljedeći teorem

**Teorem 2.9** Svake dvije ne-nul prostorne (odnosno vremenske) pravčaste plohe  $\mathbb{S}(\kappa, \tau, \sigma)$  i  $\bar{\mathbb{S}}(\pm\kappa, \bar{\tau}, \pm\sigma)$  (odnosno  $\bar{\mathbb{S}}(\pm\kappa, \bar{\tau}, \sigma)$ ) su lokalno izometrične.



Uz uvjet da su pravčaste plohe parametrizirane na istom skupu, lokalna izometrija čuva njihove izvodnice, tj. vrijedi sljedeći teorem

**Teorem 2.10** Neka su  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  pravčaste plohe parametrizirane s  $(u, v) \in I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , odnosno  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{I} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Lokalna izometrija  $\gamma : \mathbb{S} \rightarrow \bar{\mathbb{S}}$  preslikava izvodnice plohe  $\mathbb{S}$  u izvodnice plohe  $\bar{\mathbb{S}}$  ako je preslikavanje parametara dano s  $u = \bar{u}, v = \bar{v}$ .

*Dokaz.* Neka je preslikavanje parametara  $(u, v)$  dano s

$$u = F(\bar{u}, \bar{v}), v = G(\bar{u}, \bar{v}).$$

Na ovo preslikavanje postavljamo uvjete da se izvodnice, tj.  $v$ -krivulje ( $u = u_0$ ) na plohi  $\mathbb{S}$  se preslikaju u izvodnice, tj.  $\bar{v}$ -krivulje na plohi  $\bar{\mathbb{S}}$ , da su sve izvodnice su pravci, te da je preslikavanje  $\gamma$  lokalna izometrija između  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$ , odnosno za kvadrat metrike na plohi vrijedi  $ds^2 = d\bar{s}^2$ .

Budući da preslikavanje čuva izvodnice, možemo pretpostaviti da se  $\bar{u} = \bar{u}_0$  preslika u  $u = u_0$ . Tada je

$$u_0 = F(\bar{u}_0, \bar{v}) \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{v}} = 0,$$

tj.  $F$  ne ovisi o  $\bar{v}$ . Stoga je  $F(\bar{u}, \bar{v}) = u + C$ , gdje je  $C \in \mathbb{R}$  konstanta. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti  $C = 0$ , te neka je stoga

$$u = f(\bar{u}). \tag{2.2}$$

Također zbog uvjeta regularnosti reparametrizacije vrijedi  $f'(\bar{u}) \neq 0$ .

Nadalje, budući da je svaka izvodnica pravac, mora se čuvati linearna veza po  $v$  parametru i on se mora moći separirati. Stoga vrijedi

$$v = \bar{v} + h(\bar{u}). \tag{2.3}$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $\mathbb{S}$  ne-nul pravčasta ploha tipa  $S_1$  (dokaz je analogan za ne-nul pravčaste plohe tipa  $S_2$  i  $S_3$ , kao i za nul-pravčaste plohe).

Prostorna pravčasta ploha  $\bar{\mathbb{S}}$  parametrizirana s  $(\bar{u}, \bar{v})$  ima kvadrat metrike dan s

$$d\bar{s}^2 = (1 + \bar{v}^2 \kappa^2) d\bar{u}^2 + 2 \cos \bar{\sigma} d\bar{u} d\bar{v} + d\bar{v}^2. \tag{2.4}$$

Prema (2.2), odnosno (2.3) za diferencijale  $du$ , odnosno  $dv$ , vrijedi

$$du = f'(\bar{u}) d\bar{u}, \quad dv = d\bar{v} + h'(\bar{u}) d\bar{u},$$

te njihovim uvrštavanjem u  $ds^2$  i izjednačavanjem s (2.4) dobivamo

$$ds^2 = (1 + (\bar{v} + h(\bar{u}))^2 \kappa^2) f'(\bar{u})^2 d\bar{u}^2 + 2 \cos \sigma f'(\bar{u}) d\bar{u} (d\bar{v} + h'(\bar{u}) d\bar{u}) + (d\bar{v} + h'(\bar{u}) d\bar{u})^2 = d\bar{s}^2.$$

Promotrimo koeficijente uz  $d\bar{u}^2$

$$(1 + (\bar{v} + h(\bar{u}))^2 \kappa^2) f'(\bar{u})^2 + 2 \cos \sigma f'(\bar{u}) h' + h'^2 = 1 + \bar{v}^2 \kappa^2.$$

To je polinom varijable  $\bar{v}$  i usporedbom odgovarajućih koeficijenata slijedi  $h(\bar{u}) = 0$  za svaki  $\bar{u} \in \mathbb{R}$ , tj.  $h$  je nul-funkcija, te  $f'(u)^2 = 1$  tj.  $f'(u) = \pm 1$ . Tada je  $f(u) = \pm \bar{u} + c$ , gdje je  $c \in \mathbb{R}$  konstanta. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti  $f(u) = \bar{u}$ , pa prema (2.2) i (2.3) slijedi  $u = \bar{u}$ ,  $v = \bar{v}$ . □

Očito uz takvu parametrizaciju vrijedi i sljedeći korolar

**Korolar 2.11** Strikcijska krivulja plohe  $\mathbb{S}$  se Mindingovom izometrijom preslika u strikcijsku krivulju plohe  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Tvrdnja slijedi iz  $v = \bar{v}$ . □

Sada iz Teorema 2.9 i Teorema 2.10 slijedi da su za ne-nul pravčaste plohe Mindingove izometrije zadane promjenom predznaka funkcije  $\kappa$ , te zamjenom  $C^1$ -funkcije  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljnom  $C^1$ -funkcijom  $\bar{\tau} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , a specijalno za prostorne pravčaste plohe  $\mathbb{S}_1$  i promjenom predznaka funkcije  $\sigma$ . Štoviše, vrijedi sljedeća propozicija

**Propozicija 2.12** Apsolutna vrijednost parametra distribucije  $|\delta|$  prostorne (odnosno vremenske) pravčaste plohe  $\mathbb{S}_1$  ( $\mathbb{S}_2$ ,  $\mathbb{S}_3$ ) je invarijanta Mindingove izometrije.

*Dokaz.* Prema formuli (1.18) slijedi

$$|\delta| = \left| \frac{\sin \sigma}{\kappa} \right| \quad (\text{odnosno} \quad |\delta| = \left| \frac{\cosh \sigma}{\kappa} \right|)$$

te budući su apsolutne vrijednosti funkcija  $\sigma$  i  $\kappa$  invarijante Mindingove izometrije, tvrdnja slijedi. □

Riješavanjem problema koji uključuju određivanje proizvoljne funkcije  $\bar{\tau}$  za ne-nul pravčaste plohe dobivaju se teoremi analogni teoremima u euklidskom prostoru, ([35]), imajući u vidu da se Mindingova izometrija promatra samo između ploha kauzalnog karaktera, a za vremenske ne-nul pravčaste plohe između ploha istog tipa.

Među pravčastim plohama možemo uočiti tzv. konoidalne plohe.

**Definicija 2.13** Konoidalna pravčasta ploha je pravčasta ploha čije su izvodnice paralelne s određenom fiksnom ravninom (koja se naziva direkcijskom ravninom).

Ovakve plohe su karakterizirane sljedećim teoremom

**Teorem 2.14** Ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  je konoidalna pravčasta ploha ako i samo ako je njezina torzija  $\tau = 0$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $\mathbb{S}$  konoidalna pravčasta ploha tj. izvodnice  $e$  su paralelne s fiksnom ravninom koja je razapeta konstantnim vektorima  $a$  i  $b$ . Tada je i  $e'(u) = x'(u)a + y'(u)b$ , te  $e''(u) = x''(u)a + y''(u)b$ . Kako je  $\tau := \det(e, e', e'')$  slijedi  $\tau = 0$ . Obratno, ako je  $\tau = 0$ , vektor binormale  $z$  je konstantan vektor na koji su ortogonalne sve izvodnice pravčaste plohe.  $\square$

**Teorem 2.15** Svaka ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s konoidalnom pravčastom plohom.

*Dokaz.* Konoidalne pravčaste plohe su karakterizirane s torzijom  $\tau = 0$ . Tvrdnja teorema očito vrijedi.  $\square$

Među vitoperim pravčastim plohamo možemo uočiti specijalnu vrstu ploha, tzv. plohe konstantnog nagiba.

**Definicija 2.16** Ne-nul pravčasta ploha konstantnog nagiba je vitopera pravčasta ploha čije izvodnice zatvaraju konstantan kut s određenim fiksim vektorom.

Kako bismo karakterizirali plohu konstantnog nagiba, najprije definirajmo Darbouxov trobrid njezinog direkcijskog stošca.

Neka je  $\mathbb{S}$  ploha koje nije cilindrična, tj.  $e \neq konst$ . Direkcijski stožac pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  zadan je parametrizacijom  $x(u, v) = ve(u)$ , te je definiran krivuljom  $e(u)$  koja leži na jediničnoj pseudosferi, a  $u$  je parametar duljine luka direkcijske kružnice. Direkcijskom stošcu sad možemo pridružiti trobrid  $\{e, n, z\}$  pri čemu je  $n = e'$ , te  $z = e \times n$  i vrijede formule

$$\begin{aligned} e' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa e + kz, \\ z' &= -kn, \end{aligned}$$

pri čemu je koeficijent  $k$  geodetska zakrivljenost krivulje  $e(u)$ , odnosno konusna zakrivljenost plohe  $\mathbb{S}$ . Konoidalne plohe su karakterizirane sljedećim teoremom

**Teorem 2.17** Ne-nul pravčasta ploha je ploha konstantnog nagiba ako i samo ako je njezina konusna zakrivljenost  $k = \frac{\tau}{\kappa} = konst. \neq 0$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $\mathbb{S}$  pravčasta ploha tipa  $S_1$  (za vremenske pravčaste plohe tipa  $S_2$ , odnosno  $S_3$  dokaz je analogan).  $e' = n, n' = -e + kb, b' = -kn$  gdje je  $k = \frac{\tau}{\kappa}$ . Pretpostavimo da je  $\mathbb{S}$  ploha konstantnog nagiba, tj. postoji konstantan vektor  $q \in \mathbb{R}_1^3$  takav da

$$\angle(e, q) = konst., \quad \text{tj.} \quad \langle e, q \rangle = konst.$$

Neka je  $q = q_1e + q_2n + q_3b$ . Tada je po pretpostavci

$$\langle q, e \rangle = konst. = q_1.$$

Derivacijom dobivamo

$$\langle q, e' \rangle = 0 = q_2 \quad \text{i} \quad q_3' = \langle q, b' \rangle = -k\langle q, n \rangle = 0, \quad \text{tj.} \quad q_3 = konst.$$

Budući da je vektor  $q$  konstantan dalje vrijedi

$$q' = q_1e' + q_3n' = q_1e' + q_3(-ke') = (q_1 - kq_3)e' = 0,$$

te je stoga  $k = \frac{q_1}{q_3} = konst.$  Očito je  $q_3 \neq 0$ , inače  $q = 0$ , što je kontradikcija.

Obratno, neka je  $k = konst.$  i  $q = ke + b$ . Tada je vektor  $q$  konstantan tj.  $q' = ke' + b' = 0$  i vrijedi  $\langle q, e \rangle = k = konst.$

□

**Teorem 2.18** Svaka ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s pravčastom plohom konstantnog nagiba.

*Dokaz.* Ne-nul pravčaste plohe konstantnog nagiba su karakterizirane s  $\frac{\tau}{\kappa} = konst.$  Tvrdnja teorema očito vrijedi.

□

Također na plohama možemo uočiti neke specijalne krivulje.

Asimptotska krivulja plohe  $\mathbb{S}$  je integralna krivulja asimptotskog smjera, tj. smjera  $v \in T_p\mathbb{S}$  za koji vrijedi  $\mathbf{II}(v) = \langle L_p v, v \rangle = 0$ . Ove krivulje su zadane jednadžbom

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0, \tag{2.5}$$

gdje su  $L, M$  i  $N$  fundamentalne veličine drugog reda plohe  $\mathbb{S}$ .

**Teorem 2.19** Svaka ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  tipa  $S_1$  ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s pravčastom plohom  $\bar{\mathbb{S}}$  tipa  $S_1$  ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) pri čemu se dana krivulja  $v = v(u)$  na  $\mathbb{S}$  preslika u asimptotsku krivulju od  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Kako je asimptotska krivulja plohe  $\mathbb{S}$  karakterizirana jednadžbom (2.5), za danu  $v$ -krivulju  $v = v(u)$ , torziju  $\bar{\tau}$  možemo odrediti

- za prostornu plohu  $\mathbb{S}_1$  iz jednadžbe oblika:

$$(\kappa \cos \sigma \sin \sigma + \tau \sin^2 \sigma + v\kappa' \sin \sigma - \sigma' \cos \sigma v\kappa + v^2\kappa^2\tau)du^2 + 2\kappa \sin \sigma dudv = 0,$$

- za vremensku plohu  $\mathbb{S}_2$  iz jednadžbe oblika:

$$(\kappa \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \sigma + \tau \operatorname{ch}^2 \sigma + v\kappa' \operatorname{ch} \sigma + \sigma' \operatorname{sh} \sigma v\kappa - v^2 \kappa^2 \tau) du^2 + 2\kappa \operatorname{ch} \sigma dudv = 0,$$

- za vremensku plohu  $\mathbb{S}_3$  iz jednadžbe oblika:

$$(\kappa \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \sigma + \tau \operatorname{ch}^2 \sigma + v\kappa' \operatorname{ch} \sigma - \sigma' \operatorname{sh} \sigma v\kappa - v^2 \kappa^2 \tau) du^2 + 2\kappa \operatorname{ch} \sigma dudv = 0.$$

□

Krivulja zakrivljenosti plohe  $\mathbb{S}$  je integralna krivulja (realnog) glavnog smjera plohe  $\mathbb{S}$ , a određena je jednadžbom

$$(EM - FL)du^2 + (EN - LG)dudv + (FN - MG)dv^2 = 0, \quad (2.6)$$

gdje su  $E, F, G$  odnosno  $L, M, N$  fundamentalne veličine prvog, odnosno drugog reda.

**Teorem 2.20** Svaka ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  tipa  $S_1$  (tipa  $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s pravčastom plohom  $\bar{\mathbb{S}}$  tipa  $S_1$  ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) pri čemu se dana krivulja  $v = v(u)$  na  $\mathbb{S}$  preslika u krivulju zakrivljenosti od  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Budući je krivulja zakrivljenosti plohe  $\mathbb{S}$  određena jednadžbom (2.6), za danu krivulju  $v = v(u)$ , torziju  $\bar{\tau}$  možemo odrediti iz jednadžbe oblika

$$Adu^2 + Bdudv + Cdv^2 = 0,$$

gdje je

- za prostornu pravčastu plohu  $\mathbb{S}_1$

$$A = (1 - v^2 \kappa^2) \kappa \sin \sigma - (\kappa \cos \sigma \sin \sigma + \tau \sin^2 \sigma + v\kappa' \sin \sigma - \sigma' \cos \sigma v\kappa + v^2 \kappa^2 \tau) \cos \sigma,$$

$$B = \sigma' \cos \sigma v\kappa - \kappa \cos \sigma \sin \sigma - \tau \sin^2 \sigma - v\kappa' \sin \sigma - v^2 \kappa^2 \tau,$$

$$\text{i } C = -\kappa \sin \sigma,$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_2$

$$A = (1 + v^2 \kappa^2) \kappa \operatorname{ch} \sigma + (\kappa \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \sigma + \bar{\tau} \operatorname{ch}^2 \sigma + v\kappa' \operatorname{ch} \sigma + \sigma' \operatorname{sh} \sigma v\kappa - v^2 \kappa^2 \bar{\tau}) \operatorname{sh} \sigma,$$

$$B = \kappa \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + \bar{\tau} \operatorname{ch}^2 \sigma + v\kappa' \operatorname{ch} \sigma + v\kappa \sigma' \operatorname{sh} \sigma - v^2 \kappa^2 \bar{\tau}$$

$$\text{i } C = \kappa \operatorname{ch} \sigma,$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_3$

$$A = (v^2\kappa^2 - 1)\kappa \operatorname{ch} \sigma - (\kappa \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \sigma + \tau \operatorname{ch}^2 \sigma + v\kappa' \operatorname{ch} \sigma - \sigma' \operatorname{sh} \sigma v\kappa - v^2\kappa^2\tau) \operatorname{sh} \sigma$$

$$B = -(\kappa \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma + \tau \operatorname{ch}^2 \sigma + v\kappa' \operatorname{ch} \sigma - v\kappa\sigma' \operatorname{sh} \sigma - v^2\kappa^2\tau$$

$$\text{ i } C = -\kappa \operatorname{ch} \sigma.$$

□

Za plohe čije su glavne zakrivljenosti kompleksne, krivulje zakrivljenosti se ne definiraju. Primjeri takvih ploha su vremenske minimalne ( $H = 0$ ) vitopere ( $K \neq 0$ ) pravčaste plohe. Za razliku od  $\mathbb{R}^3$  gdje je jedina minimalna vitopera pravčasta ploha (desni) helikoid, minimalne vitopere pravčaste plohe u  $\mathbb{R}_1^3$  su: Lorentzovi helikoidi (helikoid prve, druge i treće vrste), te konjugat Enneperove plohe, ([48]).

Budući da se glavne zakrivljenosti mogu izračunati prema (1.8), za vremenske minimalne vitopere pravčaste plohe one su očito imaginarne, budući da je Gaussova zakrivljenost vitoperih pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  uvijek pozitivna. Pokažimo posljednju tvrdnju.

Prema formuli (1.4) slijedi da se za pravčaste plohe u  $R_1^3$  Gaussova zakrivljenost računa prema

$$K = \varepsilon \frac{-M^2}{EG - F^2}, \quad \varepsilon = \langle n, n \rangle = \pm 1.$$

Kako je za prostorne (odnosno vremenske) plohe  $\varepsilon = -1$ , ( $\varepsilon = 1$ ), a  $EG - F^2 > 0$ , ( $EG - F^2 < 0$ ), očito vrijedi  $K > 0$ .

Stoga u primjere ploha s imaginarnim glavnim zakrivljenostima ubrajamo: helikoid prve (slika 2.7), odnosno treće vrste, (slika 2.4) te konjugat Enneperove plohe, (slika 2.9).

Geodetska krivulja plohe  $\mathbb{S}$  je krivulja čiji je vektor normale ili nul vektor ili paralelan s plošnom normalom. Ove krivulje su karakterizirane jednadžbom

$$(u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v + \Gamma_{22}^1 v'^2)du + (u'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v + \Gamma_{22}^2 v'^2)dv = 0, \quad (2.7)$$

gdje su  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$  Christoffelovi simboli dani s (1.11).

**Teorem 2.21** Svaka ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  tipa  $S_1$  ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s pravčastom plohom  $\bar{\mathbb{S}}$  tipa  $S_1$  ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) pri čemu se geodetska krivulja na  $\mathbb{S}$  preslika u pravac na  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Krivulja  $v = v(u)$  na  $\mathbb{S}$  s parametrizacijom  $\mathbf{x}(u) = s(u) + v(u)e(u)$  je pravac kada su  $\mathbf{x}'$  i  $\mathbf{x}''$  linearno zavisni, tj. kada je

- za prostorne pravčaste plohe  $\mathbb{S}_1$  matrica

$$\begin{bmatrix} \cos \sigma + v' & v\kappa & \sin \sigma \\ -\sin \sigma' + v'' + v\kappa^2 & \cos \sigma\kappa + \sin \sigma\tau + 2v'\kappa + v\kappa' & \cos \sigma\sigma' + v\kappa\tau \end{bmatrix}$$

- za vremenske pravčaste plohe  $\mathbb{S}_2$  matrica

$$\begin{bmatrix} \text{sh } \sigma + v' & v\kappa & \text{ch } \sigma \\ \text{ch } \sigma' + v'' + v\kappa^2 & \text{sh } \sigma\kappa + \text{ch } \sigma\tau + 2v'\kappa + v\kappa' & \text{sh } \sigma\sigma' - v\kappa\tau \end{bmatrix}$$

- za vremenske pravčaste plohe  $\mathbb{S}_3$  matrica

$$\begin{bmatrix} \text{sh } \sigma + v' & v\kappa & \text{ch } \sigma \\ \text{ch } \sigma\sigma' + v'' - v\kappa^2 & \text{sh } \sigma\kappa + \text{ch } \sigma\tau + 2v'\kappa + v\kappa' & \text{sh } \sigma\sigma' + v\kappa\tau \end{bmatrix}$$

ranga 1. Iz toga uvjeta dobivamo sljedeće jednadžbe:

- za prostorne pravčaste plohe  $\mathbb{S}_1$

$$\begin{vmatrix} \cos \sigma + v' & \sin \sigma \\ -\sin \sigma' + v'' + v\kappa^2 & \cos \sigma\sigma' + v\kappa\tau \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

i

$$\begin{vmatrix} \cos \sigma + v' & v^2\kappa^2 + \sin^2 \sigma \\ -\sin \sigma' + v'' + v\kappa^2 & v\kappa(\cos \sigma\kappa + \sin \sigma\tau + 2v'\kappa + v\kappa') + \sin \sigma(\cos \sigma\sigma' + v\kappa\tau) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

,

- za vremenske pravčaste plohe  $\mathbb{S}_2$

$$\begin{vmatrix} \text{sh } \sigma + v' & \text{ch } \sigma \\ \text{ch } \sigma' + v'' + v\kappa^2 & \text{sh } \sigma\sigma' - v\kappa\tau \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

i

$$\begin{vmatrix} \text{sh } \sigma + v' & -v^2\kappa^2 - \text{ch}^2 \sigma \\ \text{ch } \sigma' + v'' + v\kappa^2 & -v\kappa(\text{sh } \sigma\kappa + \text{ch } \sigma\tau + 2v'\kappa + v\kappa') - \text{ch } \sigma(\text{sh } \sigma\sigma' - v\kappa\tau) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

- za vremenske pravčaste plohe  $\mathbb{S}_3$

$$\begin{vmatrix} \text{sh } \sigma + v' & \text{ch } \sigma \\ \text{ch } \sigma\sigma' + v'' - v\kappa^2 & \text{sh } \sigma\sigma' + v\kappa\tau \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

i

$$\left| \begin{array}{cc} \text{sh } \sigma + v' & v^2 \kappa^2 - \text{ch}^2 \sigma \\ \text{ch } \sigma' + v'' + v \kappa^2 & v \kappa (\text{sh } \sigma \kappa + \text{ch } \sigma \tau + 2v' \kappa + v \kappa') - \text{ch } \sigma (\text{sh } \sigma \sigma' + v \kappa \tau) \end{array} \right| = 0 \quad (2.13)$$

Jednadžba (2.9) (odnosno (2.11), (2.13)) je jednadžba geodetske krivulje na plohi.

Budući da je krivulja  $v = v(u)$  prema pretpostavci geodetska krivulja, ona zadovoljava jednadžbu 2.9, (odnosno (2.11), (2.13)). Sada iz jednadžbe (2.8) (odnosno (2.10), (2.12)) možemo odrediti torziju  $\bar{\tau}$ .  $\square$

**Teorem 2.22** Svaka ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  tipa  $S_1$  ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s pravčastom plohom  $\bar{\mathbb{S}}$  tipa  $S_1$  ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) pri čemu se dana krivulja  $v = v(u)$  na  $\mathbb{S}$  preslika u ravninsku krivulju na  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Ravninska krivulja  $c$  karakterizirana je jednadžbom  $\det(c', c'', c''') = 0$ . Iz te jednadžbe dobivamo jednadžbu oblika

$$F_3 \tau^3 + F_2 \tau^2 + F_1 \tau + F_0 + G \tau' = 0,$$

iz koje možemo dobiti  $\bar{\tau}$  gdje su

- za prostornu pravčastu plohu  $\mathbb{S}_1$

$$F_3 = \cos \sigma \sin^2 \sigma + \sin^2 \sigma v' - \cos \sigma \kappa v^2 - v' \kappa^2 v^2,$$

$$F_2 = 2 \cos^2 \sigma \sin \sigma \kappa - \sin^3 \sigma \kappa + 7 \cos \sigma \sin \sigma v' \kappa + 5 \sin \sigma v'^2 \kappa - 2 \cos^2 \sigma \sigma' v + \\ + 3 \cos \sigma \sin \sigma \kappa' v + 3 \sin \sigma v' \kappa' v - \cos^2 \sigma \sigma' \kappa v - 3 \cos \sigma \sigma' v' \kappa v + \sin \sigma \kappa^3 v^2,$$

$$F_1 = -2 \cos^3 \sigma \sigma'^2 - 3 \cos \sigma'^2 \sigma \sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma \sigma'^2 \sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma \sin \sigma \sigma'' + \sin^3 \sigma \sigma'' - \\ - \sin^2 \sigma v''' - 2 \cos^2 \sigma \sigma'^2 v' - \sigma'^2 \sin^2 \sigma v' + \cos \sigma \sin \sigma \sigma'' v' + 2 \cos \sigma \sigma' \sin \sigma v'' + \cos^3 \sigma \kappa^2 - \\ - 2 \cos \sigma \sin^2 \sigma \kappa^2 + 6 \cos^2 \sigma v' \kappa^2 - 5 \sin^2 \sigma v' \kappa^2 + 11 \cos \sigma v'^2 \kappa^2 + 6 v'^3 \kappa^2 - \cos^2 \sigma \kappa' v - \\ - 3 \cos \sigma v' \kappa' v + 2 \cos \sigma \sigma' \sin \sigma \kappa v + 3 \cos^2 \sigma \kappa' \kappa v - 4 \sin^2 \sigma \kappa' \kappa v + 9 \cos \sigma v' \kappa' \kappa v + 4 v'^2 \kappa' \kappa v - \\ - 3 \cos \sigma v'' \kappa v + 4 \cos \sigma \sigma' \sin \sigma \kappa^2 v + 5 \sigma' \sin \sigma v' \kappa^2 v - \cos \sigma v'' \kappa^2 v - 6 v' v'' \kappa^2 v + 2 \cos \sigma \kappa'^2 v^2 + \\ + 2 v' \kappa'^2 v^2 - \cos \sigma \kappa'' v^2 + 2 \sigma' \sin \sigma \kappa' \kappa v^2 - 2 \kappa' v'' \kappa v^2 - v' \kappa'' \kappa v^2 - \cos^2 \sigma \sigma'^2 \kappa^2 v^2 - \sin \sigma \sigma'' \kappa^2 v^2 + \\ + v''' \kappa^2 v^2 - \cos \sigma \kappa^3 v^2 - v' \kappa^4 v^2 + \kappa' \kappa^3 v^3$$

$$F_0 = -\cos^3 \sigma \sigma' \kappa' - \cos \sigma \sigma' \sin^2 \sigma \kappa' - 4 \cos^2 \sigma \sigma' v' \kappa' - 3 \sigma' \sin^2 \sigma v' \kappa' - 3 \cos \sigma \sigma' v'^2 \kappa' +$$



$$\begin{aligned}
 & + \cos \sigma \sin \sigma \kappa' v'' + 3 \sin \sigma v' \kappa' v'' + \cos^2 \sigma \sigma'^2 \sin \sigma \kappa + \cos^3 \sigma \sigma'^2 \sin \sigma \kappa + 2 \sigma'^2 \sin^3 \sigma \kappa + \\
 & + \cos^3 \sigma \sigma'' \kappa + \cos \sigma \sin^2 \sigma \sigma'' \kappa - \cos \sigma \sin \sigma v''' \kappa - \cos \sigma \sigma'^2 \sin \sigma v' \kappa + 2 \cos^2 \sigma \sigma'^2 \sin \sigma v' \kappa + \\
 & + 3 \cos^2 \sigma \sigma'' v' \kappa + 2 \sin^2 \sigma \sigma'' v' \kappa - 2 \sin \sigma v''' v' \kappa - 2 \sigma'^2 \sin \sigma v'^2 \kappa + 2 \cos \sigma \sigma'' v'^2 \kappa - \\
 & - 3 \cos^2 \sigma \sigma' v'' \kappa - 5 \sigma' \sin^2 \sigma v'' \kappa - 3 \cos \sigma \sigma' v' v'' \kappa + 3 \sin \sigma v'^2 \kappa - \cos^2 \sigma \sin \sigma \kappa^3 - 5 \cos \sigma \sin \sigma v' \kappa^3 - \\
 & - 6 \sin \sigma v'^2 \kappa^3 - \cos \sigma \sigma'^2 \sin \sigma \kappa' v + \cos^2 \sigma \sigma'^2 \sin \sigma \kappa' v + \cos^2 \sigma \sigma'' \kappa' v + \sin^2 \sigma \sigma'' \kappa' v - \\
 & - \sin \sigma v''' \kappa' v - \sigma'^2 \sin \sigma v' \kappa' v + \cos \sigma \sigma'' v' \kappa' v - \cos^2 \sigma \sigma' \kappa'' v - \sigma' \sin^2 \sigma \kappa'' v - \cos \sigma \sigma' v' \kappa'' v + \\
 & + \sin \sigma v'' \kappa'' v - \cos^3 \sigma \sigma'^3 \kappa v - \sigma'^3 \sin^2 \sigma \kappa v + \cos \sigma \sigma' v''' \kappa v + \sigma'^2 \sin \sigma v'' \kappa v - \cos \sigma \sigma'' v'' \kappa v - \\
 & - 3 \cos \sigma \sin \sigma \kappa' \kappa^2 v - 6 \sin \sigma v' \kappa' \kappa^2 v - 3 \sigma' \sin^2 \sigma \kappa^3 v + 2 \cos \sigma \sigma' v' \kappa^3 v + 4 \sin \sigma v'' \kappa^3 v - \\
 & - 3 \sin \sigma \kappa'^2 \kappa v^2 + 3 \cos \sigma \sigma' \kappa' \kappa^2 v^2 + \sin \sigma \kappa'' \kappa^2 v^2 + \sigma'^2 \sin \sigma \kappa^3 v^2 - \cos \sigma \sigma'' \kappa^3 v^2 + \sin \sigma \kappa^5 v^2 \\
 \\
 G = & - \cos^2 \sigma \sigma' \sin \sigma - \sigma' \sin^3 \sigma - \cos \sigma \sigma' \sin \sigma v' + \sin^2 \sigma v'' + \cos^2 \sigma \kappa^2 v + \sin^2 \sigma \kappa^2 v + \\
 & + 3 \cos \sigma v' \kappa^2 v + 2 v'^2 \kappa^2 v + \cos \sigma \kappa' \kappa v^2 + v' \kappa' \kappa v^2 + \sigma' \sin \sigma \kappa^2 v^2 - v'' \kappa^2 v^2 - \kappa^4 v^3,
 \end{aligned}$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_2$

$$F_3 = -\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch}^2 \sigma - \operatorname{ch}^2 \sigma v' - v' \kappa v^2 - \operatorname{sh} \sigma \kappa^2 v^2,$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & -2 \operatorname{sh}^2 \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa - \operatorname{ch}^3 \sigma \kappa - 7 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma v' \kappa - 5 \operatorname{ch} \sigma v'^2 \kappa + 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' v - 3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa' v - \\
 & - 3 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa' v + 3 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' \kappa v + \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' \kappa v - \operatorname{ch} \sigma \kappa^3 v^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 = & -2 \operatorname{sh}^3 \sigma \sigma'^2 + 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma'^2 \operatorname{ch}^2 \sigma + \operatorname{sh}^2 \sigma \operatorname{ch} \sigma \sigma'' - \operatorname{ch}^3 \sigma \sigma'' - \operatorname{ch}^2 \sigma v''' - 2 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'^2 v' + \\
 & + \sigma'^2 \operatorname{ch}^2 \sigma v' + \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \sigma'' v' + 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma' \operatorname{ch} \sigma v'' - \operatorname{sh}^3 \sigma \kappa^2 - 2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa^2 - 6 \operatorname{sh}^2 \sigma v' \kappa^2 - \\
 & 5 \operatorname{ch}^2 \sigma v' \kappa^2 - 11 \operatorname{sh} \sigma v'^2 \kappa^2 - 6 v'^3 \kappa^2 + \operatorname{sh} \sigma v' \kappa' v + 3 v'^2 \kappa' v + 2 \sigma' \operatorname{ch} \sigma v' \kappa v - 2 \operatorname{sh}^2 \sigma \kappa' \kappa v - \\
 & - 4 \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa' \kappa v - 7 \operatorname{sh} \sigma v' \kappa' \kappa v - 7 v'^2 \kappa' \kappa v + 3 v' v'' \kappa v + 6 \operatorname{sh} \sigma \sigma' \operatorname{ch} \sigma \kappa^2 v + 3 \sigma' \operatorname{ch} \sigma v' \kappa^2 v + \\
 & + 4 \operatorname{sh} \sigma v'' \kappa^2 v + 3 v' v'' \kappa^2 v - 2 \operatorname{sh} \sigma \kappa'^2 v^2 - 2 v' \kappa'^2 v^2 + v' \kappa'' v^2 + 2 \sigma' \operatorname{ch} \sigma \kappa' \kappa v^2 + 2 \kappa' v'' \kappa v^2 + \\
 & + \operatorname{sh} \sigma \kappa'' \kappa v^2 - \operatorname{sh} \sigma \sigma'^2 \kappa^2 v^2 - \operatorname{ch} \sigma \sigma'' \kappa^2 v^2 - v''' \kappa^2 v^2 + v' \kappa^3 v^2 + \operatorname{sh} \sigma \kappa^4 v^2 - \kappa' \kappa^3 v^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_0 = & -\operatorname{sh}^3 \sigma \sigma' \kappa' + \operatorname{sh} \sigma \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa' - 4 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' v' \kappa' + 3 \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma v' \kappa' - 3 \operatorname{sh} \sigma \sigma' v'^2 \kappa' + \\
 & + \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa' v'' + 3 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa' v'' - 2 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma \kappa + 2 \sigma'^2 \operatorname{ch}^3 \sigma \kappa + \operatorname{sh}^3 \sigma \sigma'' \kappa - \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch}^2 \sigma \sigma'' \kappa -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma v''' \kappa - \operatorname{sh} \sigma \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa + 3 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'' v' \kappa - 2 \operatorname{ch}^2 \sigma \sigma'' v' \kappa - 2 \operatorname{ch} \sigma v''' v' \kappa + \\
 & 2 \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma v'^2 \kappa + 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma'' v'^2 \kappa - 3 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' v'' \kappa + 5 \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma v'' \kappa - 3 \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' v'' \kappa + \\
 & + 3 \operatorname{ch} \sigma v''^2 \kappa - \operatorname{sh}^2 \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa^3 - 5 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma v' \kappa^3 - 6 \operatorname{ch} \sigma v'^2 \kappa^3 + \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'' \kappa' v - \\
 & - \operatorname{ch}^2 \sigma \sigma'' \kappa' v - \operatorname{ch} \sigma v''' \kappa' v + \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa' v + \operatorname{sh} \sigma \sigma'' v' \kappa' v - \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' \kappa'' v + \\
 & + \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa'' v - \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' \kappa'' v + \operatorname{ch} \sigma v'' \kappa'' v + \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'^3 \kappa v - \sigma'^3 \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa v + \\
 & + \operatorname{sh} \sigma \sigma' v''' \kappa v - \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma v'' \kappa v - \operatorname{sh} \sigma \sigma'' v'' \kappa v - 3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa' \kappa^2 v - 6 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa' \kappa^2 v + \\
 & + 3 \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa^3 v + 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' \kappa^3 v + 4 \operatorname{ch} \sigma v'' \kappa^3 v - 3 \operatorname{ch} \sigma \kappa'^2 \kappa v^2 + 3 \operatorname{sh} \sigma \sigma' \kappa' \kappa^2 v^2 + \\
 & + \operatorname{ch} \sigma \kappa'' \kappa^2 v^2 - \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma \kappa^3 v^2 - \operatorname{sh} \sigma \sigma'' \kappa^3 v^2 + \operatorname{ch} \sigma \kappa^5 v^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G = & -\operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' \operatorname{ch} \sigma + \sigma' \operatorname{ch}^3 \sigma - \operatorname{sh} \sigma \sigma' \operatorname{ch} \sigma v' + \operatorname{ch}^2 \sigma v'' - \operatorname{sh}^2 \sigma \kappa^2 v + \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa^2 v - \\
 & - 3 \operatorname{sh} \sigma v' \kappa^2 v - 2 v'^2 \kappa^2 v - \operatorname{sh} \sigma \kappa' \kappa v^2 - v' \kappa' \kappa v^2 + \sigma' \operatorname{ch} \sigma \kappa^2 v^2 + v'' \kappa^2 v^2 + \kappa^4 v^3,
 \end{aligned}$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_3$

$$F_3 = \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch}^2 \sigma + \operatorname{ch}^2 \sigma v' - \operatorname{sh} \sigma \kappa^2 v^2 - v' \kappa^2 v^2,$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & 2 \operatorname{sh}^2 \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa + \operatorname{ch}^3 \sigma \kappa + 7 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma v' \kappa + 5 \operatorname{ch} \sigma v'^2 \kappa + 3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa' v + \\
 & + 3 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa' v - 3 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' \kappa v - 3 \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' \kappa v - \operatorname{ch} \sigma \kappa^3 v^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 = & -2 \operatorname{sh}^3 \sigma \sigma'^2 + 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma'^2 \operatorname{ch}^2 \sigma + \operatorname{sh}^2 \sigma \operatorname{ch} \sigma \sigma'' - \operatorname{ch}^3 \sigma \sigma'' - \operatorname{ch}^2 \sigma v''' - \\
 & - 2 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'^2 v' + \sigma'^2 \operatorname{ch}^2 \sigma v' + \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \sigma'' v' + 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma' \operatorname{ch} \sigma v'' + \operatorname{sh}^3 \kappa^2 + \\
 & + 2 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa^2 + 6 \operatorname{sh}^2 \sigma v' \kappa^2 + 5 \operatorname{ch}^2 \sigma v' \kappa^2 + 11 \operatorname{sh} \sigma v'^2 \kappa^2 + 6 v'^3 \kappa^2 + \\
 & + 2 \operatorname{sh}^2 \sigma \kappa' \kappa v + 4 \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa' \kappa v + 6 \operatorname{sh} \sigma v' \kappa' \kappa v + 4 v'^2 \kappa' \kappa v - 6 \operatorname{sh} \sigma \sigma' \operatorname{ch} \sigma \kappa^2 v - \\
 & - 5 \sigma' \operatorname{ch} \sigma v' \kappa^2 v - 4 \operatorname{sh} \sigma v'' \kappa^2 v - 6 v' v'' \kappa^2 v + 2 \operatorname{sh} \sigma \kappa'^2 v^2 + 2 v' \kappa'^2 v^2 - \\
 & - 2 \sigma' \operatorname{ch} \sigma \kappa' \kappa v^2 - 2 \kappa' v'' \kappa v^2 - \operatorname{sh} \sigma \kappa'' \kappa v^2 - v' \kappa'' \kappa v^2 + \operatorname{sh} \sigma \sigma'^2 \kappa^2 v^2 + \\
 & + \operatorname{ch} \sigma \sigma'' \kappa^2 v^2 + v''' \kappa^2 v^2 + \operatorname{sh} \sigma \kappa^4 v^2 + v' \kappa^4 v^2 - \kappa' \kappa^3 v^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_0 = & -\operatorname{sh}^3 \sigma \sigma' \kappa' + \operatorname{sh} \sigma \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa' - 4 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' v' \kappa' + 3 \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma v' \kappa' - 3 \operatorname{sh} \sigma \sigma' v'^2 \kappa' + \\
 & + \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa' v'' + 3 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa' v'' - 2 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma \kappa + 2 \sigma'^2 \operatorname{ch}^3 \sigma \kappa + \operatorname{sh}^3 \sigma \sigma'' \kappa -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch}^2 \sigma \sigma'' \kappa - \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma v''' \kappa - \operatorname{sh} \sigma \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa + 3 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'' v' \kappa - \\
 & -2 \operatorname{ch}^2 \sigma \sigma'' v' \kappa - 2 \operatorname{ch} \sigma v''' v' \kappa + 2 \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma v'^2 \kappa + 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma'' v'^2 \kappa - 3 \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' v'' \kappa + \\
 & + 5 \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma v'' \kappa - 3 \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' v'' \kappa + 3 \operatorname{ch} \sigma v''^2 \kappa + \operatorname{sh}^2 \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa^3 + 5 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma v' \kappa^3 + \\
 & + 6 \operatorname{ch} \sigma v'^2 \kappa^3 + \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'' \kappa' v - \operatorname{ch}^2 \sigma \sigma'' \kappa' v - \operatorname{ch} \sigma v''' \kappa' v + \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa' v + \\
 & + \operatorname{sh} \sigma \sigma'' v' \kappa' v - \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' \kappa'' v + \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa'' v - \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' \kappa'' v + \operatorname{ch} \sigma v'' \kappa'' v + \\
 & + \operatorname{sh}^2 \sigma \sigma'^3 \kappa v - \sigma'^3 \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa v + \operatorname{sh} \sigma \sigma' v''' \kappa v - \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma v'' \kappa v - \operatorname{sh} \sigma \sigma'' v'' \kappa v + \\
 & + 3 \operatorname{sh} \sigma \operatorname{ch} \sigma \kappa' \kappa^2 v + 6 \operatorname{ch} \sigma v' \kappa' \kappa^2 v - 3 \sigma' \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa^3 v - 2 \operatorname{sh} \sigma \sigma' v' \kappa^3 v - 4 \operatorname{ch} \sigma v'' \kappa^3 v + \\
 & + 3 \operatorname{ch} \sigma \kappa'^2 \kappa v^2 - 3 \operatorname{sh} \sigma \sigma' \kappa' \kappa^2 v^2 - \operatorname{ch} \sigma \kappa'' \kappa^2 v^2 + \sigma'^2 \operatorname{ch} \sigma \kappa^3 v^2 + \operatorname{sh} \sigma \sigma'' \kappa^3 v^2 + \operatorname{ch} \sigma \kappa^5 v^2 \\
 \\
 G = & -\operatorname{sh}^2 \sigma \sigma' \operatorname{ch} \sigma + \sigma' \operatorname{ch}^3 \sigma - \operatorname{sh} \sigma \sigma' \operatorname{ch} \sigma v' + \operatorname{ch}^2 \sigma v'' + \operatorname{sh}^2 \sigma \kappa^2 v - \operatorname{ch}^2 \sigma \kappa^2 v + \\
 & + 3 \operatorname{sh} \sigma v' \kappa^2 v + 2 v'^2 \kappa^2 v + \operatorname{sh} \sigma \kappa' \kappa v^2 + v' \kappa' \kappa v^2 - \sigma' \operatorname{ch} \sigma \kappa^2 v^2 - v'' \kappa^2 v^2 + \kappa^4 v^3.
 \end{aligned}$$

□

**Teorem 2.23** Svaka ne-nul pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  tipa  $S_1$  (odnosno tipa  $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s pravčastom plohom  $\bar{\mathbb{S}}$  tipa  $S_1$  (odnosno tipa  $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) pri čemu se dana krivulja  $v = v(u)$  na  $\mathbb{S}$  preslika u krivulju na  $\bar{\mathbb{S}}$  duž koje iščezava srednja zakrivljenost  $H$  plohe  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Srednja zakrivljenost plohe  $\mathbb{S}$  dana je s (1.7). Za danu krivulju  $v = v(u)$  prema pretpostavci vrijedi  $H = 0$ , odakle torziju  $\bar{\tau}$  možemo odrediti

- za prostornu pravčastu plohu  $\mathbb{S}_1$  s

$$\bar{\tau} = \frac{\kappa \cos \sigma \sin \sigma + \sigma' \cos \sigma v \kappa - v \kappa' \sin \sigma}{\sin^2 \sigma + v \kappa^2}.$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_2$  s

$$\bar{\tau} = \frac{\kappa \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \sigma + \sigma' \operatorname{sh} \sigma v \kappa + v \kappa' \operatorname{ch} \sigma}{v^2 \kappa^2 - \operatorname{ch} \sigma},$$

- za vremensku pravčastu plohu  $\mathbb{S}_3$  s

$$\bar{\tau} = \frac{\kappa \operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \sigma + \sigma' \operatorname{sh} \sigma v \kappa - v \kappa' \operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{ch} \sigma - v^2 \kappa^2}.$$

□

Navedene ne-nul pravčaste plohe možemo jednoznačno odrediti (do na položaj u prostoru) preko funkcija  $F, Q$  i  $J$ , ([10]), koje definiramo u nastavku.

Neka je  $t$  duljina luka direkcijske krivulje plohe  $\mathbb{S}$  zadane parametrizacijom (1.15). Tada vrijedi

$$\langle e(t), e(t) \rangle = \epsilon, \quad \langle e'(t), e'(t) \rangle = \mu, \quad \epsilon, \mu \in \{-1, 1\},$$

te  $\langle c'(t), e'(t) \rangle = 0$ , tj.  $c$  je strikcijska krivulja. Ovakva parametrizacija se naziva standardna parametrizacija pravčaste plohe. Sada definiramo funkcije  $F, Q$  i  $J$  kao

$$\begin{aligned} F(t) &= \langle s'(t), e(t) \rangle \\ Q(t) &= \det(s'(t), e(t), e'(t)), \\ J(t) &= \det(e(t), e'(t), e''(t)). \end{aligned}$$

Funkcija  $J$  se naziva geodetska zakrivljenost direkcijske krivulje ili konusna zakrivljenost plohe. Invarijante  $\kappa, \tau, \sigma$  su s invarijantama  $F, Q, J$  povezane na sljedeći način: Neka je  $s$  duljina luka strikcijske krivulje, a  $t$  standardni parametar, tj. duljina luka direkcijske krivulje  $e(u)$ , tj. neka je

$$t = \int_{s_0} s \|e'(s)\| ds = \int_{s_0} s \kappa(s) ds.$$

Stoga za proizvoljnu  $C^1$ -funkciju  $f$  imamo sljedeću vezu derivacija s obzirom na različite parametre (lančano pravilo)

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \kappa(s) \frac{df}{dt}.$$

Stoga dobivamo

$$\begin{aligned} e(t) &= e(t(s)) = e(s), \\ e'(t) &= \frac{de}{dt} = \frac{de}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = e'(s) \cdot \frac{1}{\kappa(s)}, \\ e''(t) &= \frac{d}{dt}(e'(t)) = \frac{d}{dt}\left(e'(s) \cdot \frac{1}{\kappa(s)}\right) = \frac{d}{dt}(e'(s)) \cdot \frac{1}{\kappa(s)} + e'(s) \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \\ &= \frac{d}{ds}(e'(s)) \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\kappa(s)} + e'(s) \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \cdot \frac{ds}{dt} \\ &= e''(s) \cdot \frac{1}{\kappa^2(s)} + e'(s) \cdot \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' \cdot \frac{1}{\kappa(s)}, \end{aligned}$$

te  $c(t) = c(t(s)) = c(s)$ ,

$$c'(t) = c'(s) \cdot \frac{dt}{ds} = c'(s) \frac{1}{\kappa(s)}.$$

Uvrstimo li sada dobivene derivacije u definiciju funkcije dobivamo očite veze

$$F(t) = \langle c'(t), e(t) \rangle = \langle c'(s) \cdot \frac{1}{\kappa(s)}, e(s) \rangle = \langle c'(s), e(s) \rangle \cdot \frac{1}{\kappa(s)},$$

$$Q(t) = \det(c'(t), e(t), e'(t)) = \det\left(\frac{1}{\kappa(s)}c'(s), e(s), \frac{1}{\kappa(s)}e'(s)\right) = \frac{\det(c'(s), e(s), e'(s))}{\kappa^2(s)} = \delta(s),$$

$$\begin{aligned} J(t) &= \det(e(t), e'(t), e''(t)) = \\ &= \det\left(e(s), e'(s) \cdot \frac{1}{\kappa(s)}, e''(s) \cdot \frac{1}{\kappa^2(s)} + e'(s) \cdot \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' \cdot \frac{1}{\kappa(s)}\right) = \\ &= \det\left(e(s), e'(s) \cdot \frac{1}{\kappa(s)}, e''(s) \cdot \frac{1}{\kappa^2(s)}\right) + \det\left(e(s), e'(s) \cdot \frac{1}{\kappa(s)}, e'(s) \cdot \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' \cdot \frac{1}{\kappa(s)}\right) = \\ &= \det\left(e(s), e'(s) \cdot \frac{1}{\kappa(s)}, e''(s) \cdot \frac{1}{\kappa^2(s)}\right) = \\ &= \frac{1}{\kappa^3(s)} \det(e(s), e'(s), e''(s)) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}. \end{aligned}$$

Zadamo li sada ne-nul pravčaste plohe preko funkcija  $F, Q$  i  $J$ , fundamentalne veličine prvog reda su dane s

$$E = \langle c', c' \rangle + \langle e', e' \rangle v^2, \quad F = \langle c', e \rangle, \quad G = \langle e, e \rangle,$$

te su Mindingove izometrije opisane zamjenom  $C^1$ –funkcije  $J$  proizvoljnom  $C^1$ –funkcijom  $\bar{J}$  i svi prethodno izrečeni teoremi mogu se dokazati koristeći invarijante  $F, Q$  i  $J$ . Ovdje kao primjer navodimo karakterizaciju konoidalne plohe preko funkcije  $J$ . Ostali teoremi su dokazani na sličan način.

**Propozicija 2.24** Pravčasta ploha  $x(u, v) = c(u) + ve(u)$  je konoidalna pravčasta ploha ako i samo ako je  $J = 0$ .

*Dokaz.* Poštujući vezu između funkcija  $\tau$  i  $J$ , tvrdnja očito slijedi.  $\square$

Dalje navodimo nekoliko primjera ne-nul pravčastih ploha koje se mogu dobiti kao slike Mindingovih izometrija.

**Primjer 2.25** Helikoid druge vrste (Slika 2.1) s parametrizacijom

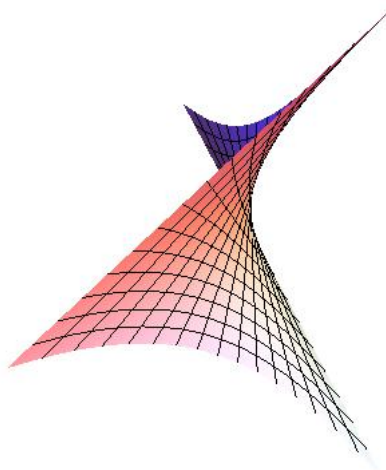
$$f(u, v) = (v \operatorname{ch} u, u, v \operatorname{sh} u)$$

je pravčasta ploha tipa  $S_1$  i primjer je plohe konstantnog nagiba u  $\mathbb{R}_1^3$ .

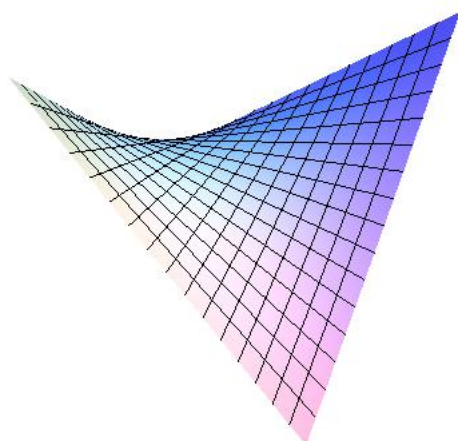
Hiperbolički paraboloid (Slika 2.2) s parametrizacijom

$$h(u, v) = (u, v, uv),$$

je također ploha tipa  $S_1$  za  $u \in [-1, 1]$  i primjer je konoidalne plohe u  $\mathbb{R}_1^3$ .



**Slika 2.1:** Helikoid druge vrste



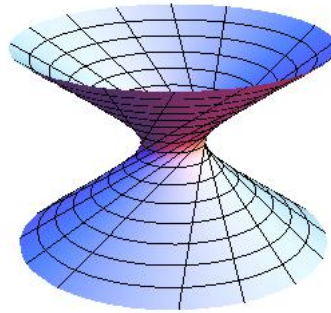
**Slika 2.2:** Hiperbolički paraboloid

■

**Primjer 2.26** Prostorni jednoplošni hiperboloid (Slika 2.3) s parametrizacijom

$$g(u, v) = (\cos u - 3v \sin u, \sin u + 3 \cos u, 2v)$$

je pravčasta ploha tipa  $S_1$  i svaka pravčasta ploha tipa  $S_1$  s zakrivljenošću  $\kappa = 3$  i strikcijom  $\sigma = \arccos \frac{3}{\sqrt{5}}$  se može Mindingovom izometrijom preslikati u njega.



**Slika 2.3:** Prostorni jednoplošni hiperboloid

■

**Primjer 2.27** Helikoid treće vrste (Slika 2.4) s parametrizacijom

$$f(u, v) = (v \operatorname{sh} u, u, v \operatorname{ch} u)$$

je pravčasta ploha tipa  $S_2$  i primjer je plohe konstantnog nagiba u  $\mathbb{R}_1^3$ .  
Konoid druge vrste (Slika 2.5) s parametrizacijom

$$g(u, v) = (v \operatorname{sh} u, \cos u, v \operatorname{ch} u)$$

je također ploha tipa  $S_2$  i primjer je konoidalne plohe u  $\mathbb{R}_1^3$ .

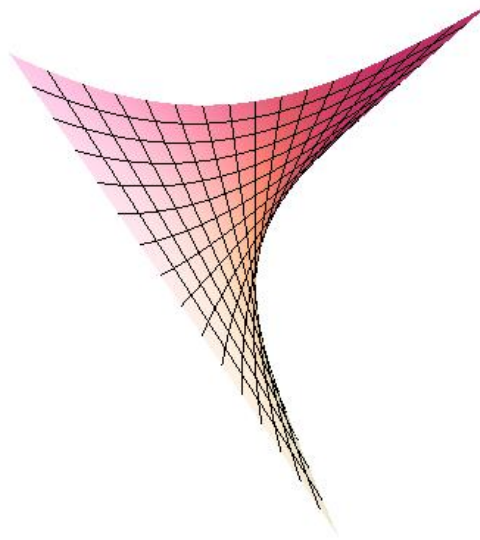
■

**Primjer 2.28** Vremenski jednoplošni hiperboloid (Slika 2.6) s parametrizacijom

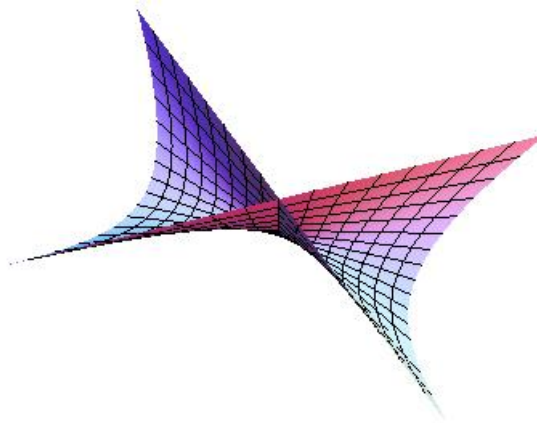
$$g(u, v) = (\cos u - 2v \sin u, \sin u + 2 \cos u, 3v)$$

je pravčasta ploha tipa  $S_2$  i svaka pravčasta ploha tipa  $S_2$  s zakrivljenošću  $\kappa = 2$  i strikcijom  $\sigma = \operatorname{arcsinh} \frac{2}{\sqrt{5}}$  može se Mindingovom izometrijom preslikati u njega.

■



Slika 2.4: Helikoid treće vrste



Slika 2.5: Konoid druge vrste

**Primjer 2.29** Helikoid prve vrste (Slika 2.7) s parametrizacijom

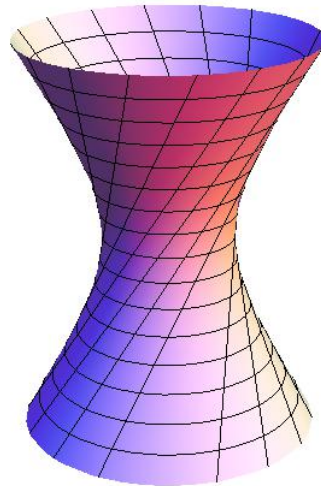
$$f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

je pravčasta ploha tipa  $S_3$  i primjer je plohe konstantnog nagiba u  $\mathbb{R}_1^3$ .  
Plückerov konoid (Slika 2.8) s parametrizacijom

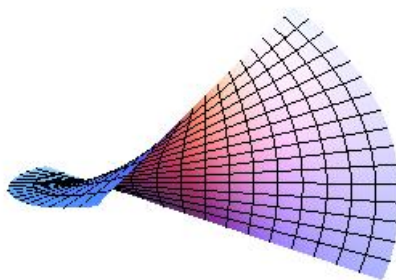
$$g(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \sin 2u)$$

je također pravčasta ploha tipa  $S_3$  i primjer je konoidalne plohe u  $\mathbb{R}_1^3$ .





Slika 2.6: Vremenski jednoplošni hiperboloid



Slika 2.7: Helikoid prve vrste

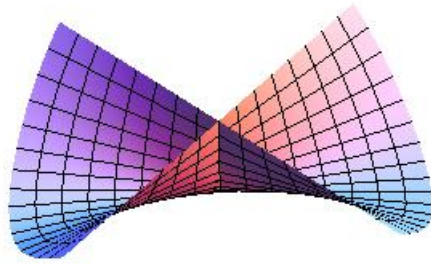
■

### 2.1.2 Lokalne izometrije pravčastih ploha klase $M_1^0$

Promotrimo sada lokalne izometrije pravčastih ploha klase  $M_1^0$ , tj. ploha čije su izvodnice  $e$  prostornog, a  $e'$  svjetlosnog karaktera. Tada još kažemo da je direkcijska krivulja pravčaste plohe svjetlosnog karaktera.

Neka je ploha  $\mathbb{S}$  pravčasta ploha sa svjetlosnom direkcijskom krivuljom, tj. ploha  $\mathbb{S}$  dozvoljava parametrizaciju oblika

$$x(u, v) = c(u) + ve(u), \|c'\| = \pm 1, \|e\| = 1, \|e'\| = 0, \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$



**Slika 2.8:** Plückerov konoid

Fundamentalne veličine prvog reda plohe  $\mathbb{S}$  su dane s

$$E = R + 2Qv, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

odnosno prva fundamentalna forma plohe  $\mathbb{S}$  je dana s

$$I = (R + 2Qv)du^2 + dv^2.$$

Budući da je ranije pokazano da je svaka pravčasta ploha klase  $M_1^0$  jednoznačno određena invarijantama  $Q$  i  $R$  (do na položaj u prostoru), a prva fundamentalna forma ovisi samo o  $Q$  i  $R$ , slijedi

**Teorem 2.30** Dvije pravčaste plohe klase  $M_1^0$  su lokalno izometrične ako i samo ako su kongruentne.

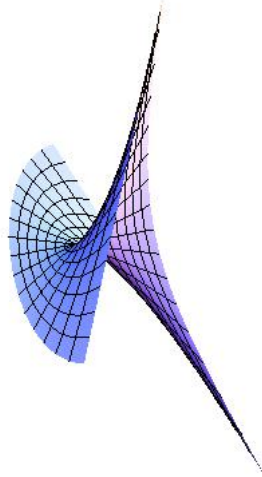
*Dokaz.* Neka su  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  dvije pravčaste plohe klase  $M_1^0$  parametrizirane istim parametrima  $(u, v) \in I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Neka su plohe  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  lokalno izometrične, tj. za koeficijente prve fundamentalne forme vrijedi  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$ ,  $G = \bar{G}$ . Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata slijedi  $R = \bar{R}$ , te  $Q = \bar{Q}$ . Kako je invarijantama  $Q$  i  $R$  ploha jednoznačno određena slijedi da su  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  kongruentne plohe.

Obratan smjer očito vrijedi. □

**Primjer 2.31** Konjugat Enneperove plohe druge vrste (ili Cayley-Lie minimalna pravčasta ploha) zadana parametrizacijom

$$x(u, v) = \left(a\left(\frac{u^3}{3} + u\right) + uv, a\left(\frac{u^3}{3} - u\right) + uv, au^2 + v\right), a \neq 0$$

je pravčasta ploha klase  $M_1^0$ . Ova ploha je također primjer minimalne plohe, kao i primjer pravčaste plohe s imaginarnim glavnim zakrivljenostima. Teorem (2.30) povlači da ne postoje pravčaste plohe koje su izometrične u Mindingovom smislu s ovom plohom (osim kongruentnih ploha). ■



**Slika 2.9:** Konjugat Enneperove plohe

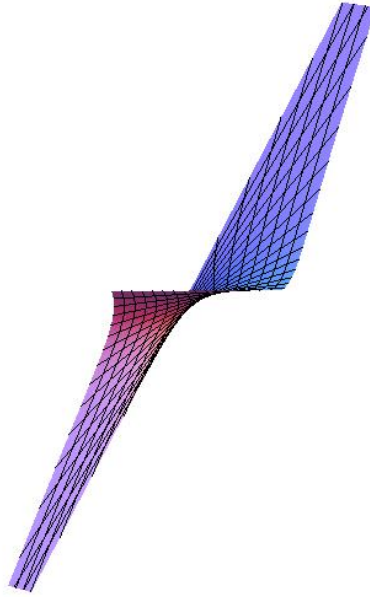
**Primjer 2.32 Nomizu-Sasaki plohe.** Dvoparametarska familija helikoidalnih pravčastih ploha koje se nazivaju Nomizu-Sasaki plohe zadana je s

$$x(u, v) = \left( \frac{a}{2}e^{-u} + ve^u, -\frac{a}{2}e^{-u} + ve^u, b \ln |a| + v - bu \right), a, b \text{ konst. } a \neq 0.$$

Ove plohe su pravčaste plohe klase  $M_1^0$ , te također ne postoje pravčaste plohe koje su izometrične u Mindingovom smislu s ovim plohami (osim kongruentnih ploha). ■

## 2.2 Lokalne izometrije pravčastih ploha klase $M_0$

U ovom poglavlju promatramo lokalne izometrije pravčastih ploha koje također nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru, tj. pravčastih ploha čija je bazna krivulja, kao i izvodnice, svjetlosnog karaktera. Budući da za određivanje lokalno izometričnih u Mindingovom smislu ne-nul pravčastih ploha važnu ulogu imaju plohe konstantnog nagiba, odnosno konoidalne plohe, postavlja se pitanje postoje li plohe konstantnog nagiba, odnosno konoidalne plohe među nul pravčastim plohami. Budući da nul pravčaste plohe konstantnog nagiba



Slika 2.10: Nomizu-Sasaki ploha

nisu definirane, prije proučavanja Mindingovih izometrija nul-pravčastih ploha, dat ćemo definiciju takvih ploha, dati njihovu karakterizaciju, te pokazati da među nul pravčastim plohamo nema konoidalnih ploha. Sve definicije i teoreme ćemo izvesti i za  $B$ -namotajne plohe, kao i za  $B$ -namotajne plohe sa specijalnom parametrizacijom.

## 2.2.1 Nul-pravčaste plohe konstantnog nagiba

Kao što smo već spomenuli, pravčaste plohe konstantnog nagiba su plohe čije izvodnice zatvaraju konstantan kut s određenim vektorom. U Minkowskijevom prostoru  $\mathbb{R}_1^3$ , kut između dva vektora od kojih je jedan svjetlosni nije definiran, te se nul-pravčaste plohe konstantnog nagiba ne mogu definirati na isti način kao za ne-nul pravčaste plohe. Analogno definiciji svjetlosnih krivulja konstantnog nagiba (poopćenih svjetlosnih zavojnica ([25])) dajemo sljedeću definiciju

**Definicija 2.33** Pravčastu plohu sa svjetlosnim izvodnicama  $e$  zovemo ploha konstantnog nagiba ako postoji konstantan vektor  $q \neq 0$  tako da vrijedi

$$\langle q, e \rangle = konst. \quad (2.14)$$

Neka je  $\mathbb{S}$  ne-cilindrična ploha, tj.  $e' \neq 0$ . Budući je vektor  $e'$  ortogonalan na  $e$ , slijedi da je  $e'$  prostorni vektor. Tada se (prostorna) direkcijska krivulja  $e(u)$  može parametrizirati

duljinom luka  $u$ ,  $\langle e'(u), e'(u) \rangle = 1$ .

Nadalje, za svjetlosnu krivulju  $e(u)$  koja leži na svjetlosnom stošću  $LC$ , možemo definirati svjetlosnu bazu  $\{e, e', y\}$  za  $R_1^3$ , ([37]) tako da vrijedi

$$\langle e, e \rangle = \langle y, y \rangle = 0, \quad \langle e', e' \rangle = 1, \quad \langle e, y \rangle = 1, \quad \langle e, e' \rangle = \langle e', y \rangle = 0$$

i vrijede sljedeće formule

$$e'' = ke - y, \quad y' = -ke'. \quad (2.15)$$

Funkcija  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  se naziva konusna zakrivljenost pravčaste plohe. To je, zapravo, geodetska zakrivljenost krivulje  $e(u)$  na  $LC$ . Za krivulju parametriziranu duljinom luka krivulje  $e(u)$ , dana je s

$$k(u) = -\frac{1}{2} \langle e''(u), e''(u) \rangle.$$

Označimo li s  $\bar{\kappa}$ ,  $\bar{\tau}$  zakrivljenost i torziju svjetlosne direkcijske krivulje  $e(u)$  koja je parametrizirana duljinom luka u  $\mathbf{R}_1^3$  i s  $t = e'$  njezinu tangentu,  $n$  glavnu normalu i  $b$  binormalu, tada Frenetove formule glase

$$t' = \bar{\kappa}n, \quad n' = -\bar{\kappa}t + \bar{\tau}b, \quad b' = -\bar{\tau}n. \quad (2.16)$$

Nadalje, mogu se ostvariti i sljedeće veze

$$\bar{\kappa} = \sqrt{-2\varepsilon k}, \quad \bar{\tau} = -\frac{1}{2} \left( \frac{k'}{k} \right), \quad \varepsilon = n^2. \quad (2.17)$$

**Teorem 2.34** Neka je  $\mathbb{S}$  nul-pravčasta ploha koja nije cilindrična, te neka je  $e(u)$  njezina direkcijska krivulja, a  $k(u)$  njezina konusna zakrivljenost. Tada je  $\mathbb{S}$  ploha konstantnog nagiba ako i samo ako

$$k = konst.$$

*Dokaz.* Ako je  $\mathbb{S}$  ploha konstantnog nagiba, tada postoji konstantan vektor  $q \neq 0$  takav da vrijedi (2.14). Neka je  $q = q_1e + q_2e' + q_3y$ , gdje je  $q_1 = \langle q, y \rangle$ ,  $q_2 = \langle q, e' \rangle$ ,  $q_3 = \langle q, e \rangle$ . Pretpostavka (2.14) povlači  $q_3 = konst$ . Sada, derivirajući (2.14) dobivamo  $q_2 = \langle q, e' \rangle = 0$ . Slično,  $q_1' = \langle q, y' \rangle = -k \langle q, e' \rangle = 0$ . Stoga, imamo  $q = q_1e + q_3y$ , gdje je  $q_1, q_3 = konst$ . Budući je  $q$  konstantan, slijedi  $q' = (q_1 - q_3k)e' = 0$ , a kako  $\mathbb{S}$  nije cilindrična ploha,  $e' \neq 0$ , imamo  $q_1 - q_3k = 0$ , tj.

$$k = \frac{q_1}{q_3} = konst.$$

Uočimo da vrijedi  $q_3 \neq 0$ , budući da je inače  $q = q_1e$ . Tada bi vrijedilo  $0 = q' = q_1e'$  i  $q_1 = 0$ , tj.  $q = 0$ , što je kontradikcija. Vektor  $q$  koji određuje os plohe konstantnog nagiba može se napisati kao

$$q = q_3(ke + y), \quad q_3 = konst. \neq 0.$$

Obratno, ako je  $k = konst.$ , tada promatramo vektor  $q = q_3(ke + y)$ ,  $q_3 = konst$ . Vektor

$q$  je konstantan vektor,  $q' = q_3(ke' + y') = 0$ , i vrijedi  $\langle q, e \rangle = q_3$ . Stoga,  $\mathbb{S}$  je ploha konstantnog nagiba.  $\square$

Također vrijedi i

**Korolar 2.35** Neka  $\mathbb{S}$  nul-pravčasta ploha koja nije cilindrična i koja je konstantnog nagiba, te neka je  $e(u)$  njezina direkcijska krivulja (parametrizirana duljinom luka  $u$ ). Tada je  $e(u)$  ravninska krivulja. Preciznije,  $e$  je (pseudo)-kružnica, tj. elipsa ( $k < 0$ ), parabola čija je os paralelna s vektorom svjetlosnog smjera u svjetlosnoj ravnini ( $k = 0$ ) ili hiperbola u vremenskoj ravnini ( $k > 0$ ).

*Dokaz.* Direkcijska krivulja  $e(u)$  je prostorna krivulja s zakrivljenošću  $\bar{\kappa}$  i torzijom  $\bar{\tau}$  povezanima s  $k$  jednadžbom (2.17). Teorem 2.34 povlači da  $\bar{\tau} = 0$ , i stoga je  $e(u)$  ravninska krivulja.

Ako je  $k \neq 0$ ,  $e(u)$  leži u svojoj oskulacijskoj ravnini razapetoj s  $e'$  i  $e'' = ke - y$ , tj. ravnini s normalom  $q = ke + y$ . Ova normala je prostorni (odnosno vremenski) vektor, i stoga je ravnina koja sadrži  $e$  vremenska (odnosno prostorna) ako i samo ako  $k > 0$  (odnosno  $k < 0$ ). Nadalje, budući,  $\bar{\kappa} = konst.$ , krivulja  $e$  je (pseudo)-kružnica. Uočimo da je normala ravnine  $q = ke + y$  upravo os plohe  $\mathbb{S}$ .

Kada je  $k = 0$  tada  $\bar{\kappa} = 0$  i  $\bar{\tau}$  nije definirano. U ovom slučaju,  $e''(u)^2 = 0$  i  $e''(u) = -y(u) \neq 0$ , te je stoga  $e''$  svjetlosni vektor. Sada  $y' = 0$  povlači  $e''' = 0$  i stoga je  $e(u)$  parabola,  $e(u) = -\frac{1}{2}y(u)u^2 + a_1u + a_2$ , gdje su  $a_1, a_2$  konstantni vektori. Ona leži u ravnini razapetoj s  $e'$  i  $y$  koja je svjetlosna (sadrži samo jedan svjetlosni smjer – smjer svjetlosnog vektor  $y$ ). Os parabole  $e(u)$  je pravac određen s  $y$ , stoga je  $e(u)$  parabolička kružnica.  $\square$

Suprotno situaciji u euklidskom prostoru, nul-pravčaste plohe s  $k = 0$  nisu konoidalne. Možemo uočiti da je  $k = 0$  ako i samo ako  $q^2 = 0$ , tj. ako i samo ako je os pravčaste plohe konstantnog nagiba svjetlosnog karaktera. Štoviše, vrijedi sljedeće:

**Korolar 2.36** Neka je  $\mathbb{S}$  nul-pravčasta ploha koja nije cilindrična. Tada  $\mathbb{S}$  nije konoidalna ploha.

*Dokaz.* Neka je  $\mathbb{S}$  nul-pravčasta ploha koja nije cilindrična. Pretpostavimo da je  $\mathbb{S}$  konoidalna ploha i neka je  $\pi$  njezina direkcijska ravnina s normalom  $q$ ,  $q = q_1e + q_2e' + q_3y$ . Uočimo da budući su  $e(u)$  paralelni s ravninom  $\pi$ ,  $\pi$  mora biti vremenska ili svjetlosna. Sada  $q_3 = \langle e, q \rangle = 0$  i  $\langle e', q \rangle = \langle e'', q \rangle = 0$ . Posljednja jednadžba povlači  $q_1 = \langle y, q \rangle = 0$ . Stoga je  $q$  kolinearan s  $e'$ ,  $q = q_2(u)e'(u)$ . Budući  $q_2 = \langle e', q \rangle = 0$ , slijedi  $q = 0$ , što je kontradikcija.  $\square$

$B$ -namotajne plohe konstantnog nagiba su također definirane s (2.33). Nadalje, one su karakterizirane sljedećim teoremom

**Teorem 2.37** Ploha  $\mathbb{S}$  je  $B$ -namotajna ploha konstantnog nagiba ako i samo ako:

- $k_2 \neq 0$  i  $\frac{k_3}{k_2} = konst.$  Ako  $\frac{k_3}{k_2} = konst \neq 0$ , tada je  $\mathbb{S}$   $B$ -namotajna ploha nad općom svjetlosnom zavojnicom, i ako  $k_3 = 0$ , tada je  $\mathbb{S}$   $B$ -namotajna ploha nad općom svjetlosnom kubikom (tada je  $\mathbb{S}$  cilindrična ploha).
- $k_2 = 0$ . Tada je  $\mathbb{S}$   $B$ -namotajna ploha nad svjetlosnim pravcem, specijalno, pseudo-sfera  $S_1^2(p, r)$ .

*Dokaz.* Neka je  $q$  konstantan vektor takav da  $\langle q, B \rangle = konst.$  Možemo pisati

$$q = q_A A + q_B B + q_C C,$$

gdje je

$$q_A = \langle q, B \rangle = konst.,$$

$$q_B = \langle q, A \rangle,$$

$$q_C = \langle q, C \rangle.$$

Deriviranjem  $q_A$ , dobivamo

$$q'_A = \langle q, B' \rangle = k_3 q_C = 0$$

i stoga ili  $k_3 = 0$  ili  $q_C = 0$ .

- Ako je  $k_3 = 0$ , tada je  $c$  poopćena svjetlosna kubika ([25]). Vrijedi  $B' = 0$ , pa je  $B$  konstantno polje i  $\mathbb{S}$  je cilindrična. Stoga je  $\mathbb{S}$   $B$ -namotajna ploha nad poopćenom svjetlosnom kubikom. Njezina os nije jedinstvena, vrijedi  $\langle q, B \rangle =$  za svaki konstantan vektor  $q$ .
- Ako je  $q_C = 0$ , tada  $q'_B = (\langle q, A \rangle)' = k_2 q_C = 0$ , tj.  $q_B$  je također konstantna funkcija. Štoviše,  $0 = q'_C = -k_3 q_B - k_2 q_A$ .

Ako je  $k_2 \neq 0$  tada  $\frac{k_3}{k_2} = -\frac{q_A}{q_B} = konst.$  čime je bazna krivulja  $c$  od  $\mathbb{S}$  karakterizirana kao opća svjetlosna zavojnica ([25]). Tada je  $\mathbb{S}$   $B$ -namotajna ploha nad općom svjetlosnom zavojnicom s osima

$$q = q_A A + q_B B, \quad q_A, q_B = konst.$$

Obratno, ako je  $\frac{k_3}{k_2} = konst.$ , tada konstantan vektor  $q = q_A \left( A - \left( \frac{k_2}{k_3} \right) B \right)$ ,  $q_A = konst. \neq 0$ , je os plohe konstantnog nagiba,  $\langle q, B \rangle = q_A$ .

Ako je  $k_2 = 0$ , tada  $0 = q'_C = -k_3 q_B$  i  $k_3 \neq 0$  povlači  $q_B = 0$  i stoga je os od  $\mathbb{S}$  određena s  $q = q_A A$  koji je svjetlosni vektor. Nadalje, budući je  $A' = 0$ , tangencijalni vektor  $c' = A$  je konstantan vektor, te je stoga bazna krivulja  $c$  svjetlosnog karaktera.

Za vektorsko polje  $C$  vrijedi  $C' = k_3(u)A$ , pa ga možemo odrediti s

$$C(u) = A \left( \int k_3(s) ds \right) + A_1,$$

gdje je  $A_1$  konstantan vektor. Budući je  $C$  jedinični prostorni vektor, imamo  $\langle A, A_1 \rangle = 0$ ,  $\langle A_1, A_1 \rangle = 1$ .

Konačno,

$$B(u) = \int k_3(s)C(s)ds + B_1,$$

$$B_1 = konst., \quad \langle B_1, B_1 \rangle = 0.$$

Prema tome, svjetlosni trobrid bazne krivulje  $c$  je određen. Uočimo da je direkcijska krivulja  $B(u)$  parabola s osi  $A$  (ili njezin dio).

Ovo možemo uvidjeti uvodeći novi parametar  $s^* = \int k_3(s)ds$ . Tada je krivulja  $C(s^*) = As^* + A_1$  pravac. Budući  $\frac{ds^*}{ds} = k_3(s)$  i  $\frac{dB(s)}{ds} = k_3(s)C(s)$ , imamo  $B(s^*) = \int C(s^*)ds^*$ , i stoga  $B(s^*)$  parametrizira parabolu.

Obratno, ako je  $k_2 = 0$ , tada konstantan svjetlosni vektor  $q = q_A A$ ,  $q_A = konst.$ , generira os plohe konstantnog nagiba,  $\langle q, B \rangle = q_A$ .

□

**Primjer 2.38** Pseudosfera  $S_1^2(p, r)$  je dvostruko pravčasta ploha čije su obje familije izvodnica svjetlosnog karaktera. Lokalna parametrizacija plohe  $S_1^2(p, r)$  kao  $B$ -namotajne plohe je sljedećeg oblika

$$f(u, v) = (r, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0, u, u) + v\left(-\frac{u}{r}, -\frac{u^2}{2\sqrt{2}r^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{u^2}{2\sqrt{2}r^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Direkcijska krivulja  $e(u)$  plohe  $S_1^2(p, r)$  je parabola u ravnini  $y - z = \sqrt{2}$  s osi  $(0, 1, 1)$  usmjerenom u svjetlosnom smjeru ravnine (u smjeru vektora  $A$ ). Njezine zakrivljenosti su  $k_2 = 0$ ,  $k_3(u) = -\frac{1}{r}$ . Stoga je  $S_1^2(p, r)$  pravčasta ploha konstantnog nagiba, kao i konstantne Gaussove i srednje zakrivljenosti.

■

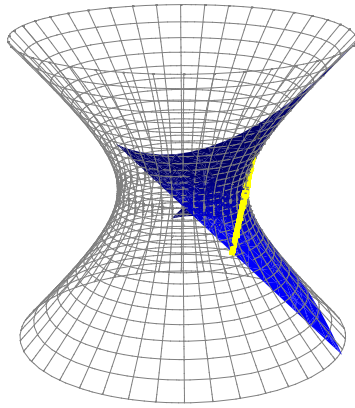
**Primjer 2.39** Krivulja parametrizirana s

$$c(s) = \left( f(s), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s + \frac{g(s)}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s - \frac{g(s)}{2}\right) \right),$$

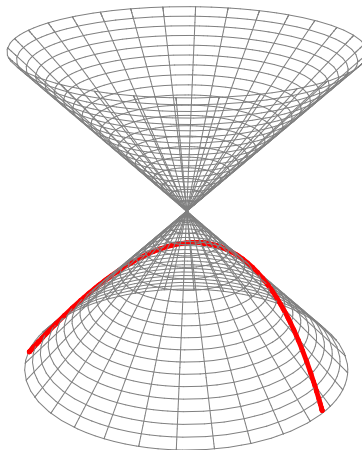
gdje su  $f, g$   $C^2$ -funkcije,  $g' = (f')^2$ , je opća svjetlosna kubika. Njezin Frenetov trobrid je dan s

$$A(s) = \left( f'(s), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{g'(s)}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{g'(s)}{2}\right) \right)$$





**Slika 2.11:** Pseudosfera  $S_1^2(p, r)$  parametrizirana kao  $B$ -namotajna ploha i njezina bazna krivulja



**Slika 2.12:** Direkcijska krivulja  $e(u)$  od  $S_1^2(p, r)$  na svjetlosnom stošcu  $LC$

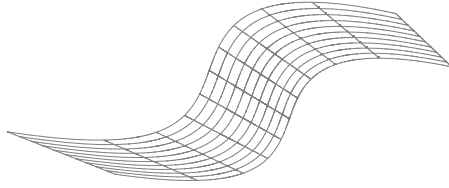
$$B(s) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad C(s) = \left(1, -\frac{f'(s)}{\sqrt{2}}, \frac{f'(s)}{\sqrt{2}}\right)$$

a njezine zakrivljenosti s  $k_2(s) = f''(s)$ ,  $k_3(s) = 0$ .  $B$ -namotajna ploha nad općom svjetlosnom kubikom je cilindrična ploha, stoga ravna i minimalna.

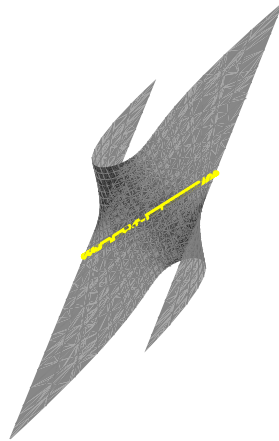
■

**Primjer 2.40** Ako je  $k_2 = 0$ , tada je  $\mathbb{S}$  ploha konstantnog nagiba. Na slici 2.14 je prikazana ploha za koju vrijedi  $k_3(u) = 2u$ , te je stoga primjer pravčaste plohe konstantnog nagiba ali ne i konstantne Gaussove zakrivljenosti  $K$  i srednje zakrivljenosti  $H$ .

■



**Slika 2.13:**  $B$ -namotajna ploha nad općom svjetlosnom kubikom



**Slika 2.14:** Ploha konstantnog nagiba s  $k_2 = 0$ ,  $k_3(u) = 2u$

Konačno, možemo koristiti i specijalne parametre krivulje  $c$   $B$ -namotajne plohe. Bazna krivulja  $c$  za koju vrijedi  $\langle c''(s), c''(s) \rangle > 0$  (stoga je  $k_2 \neq 0$ ) može se reparametrizirati parametrom duljinom tzv. pseudoluka,  $\langle c''(s), c''(s) \rangle = 1$ . Tada vrijedi

$$c' = A, \quad A' = C, \quad B' = k_L C, \quad C' = -k_L A - B, \quad (2.18)$$

gdje se funkcija  $k_L = \frac{1}{2}c'''^2$  naziva svjetlosna zakrivljenost krivulje  $c$ . Krivulja  $c$  je opća svjetlosna zavojnica ako i samo ako je svjetlosna zavojnica ([25]), tj. krivulja konstantne svjetlosne zakrivljenosti. Stoga vrijedi sljedeći korolar:

**Korolar 2.41** Neka je  $\mathbb{S}$   $B$ -namotajna ploha konstantnog nagiba nad svjetlosnom Frenetovom krivuljom  $c$  parametriziranom duljinom pseudoluka. Tada je  $c$  opća svjetlosna zavojnica ( $k_L = konst.$ ) i ona je kongruentna s jednom od sljedećih krivulja  $k_L = \frac{\sigma^2}{2} > 0$ ,

$k_L = -\frac{\sigma^2}{2} < 0$  ili  $k_L = 0$ , odnosno:

$$c_1(s) = \left( \frac{1}{\sigma^2} \cos(\sigma s), \frac{1}{\sigma^2} \sin(\sigma s), -\frac{s}{\sigma} \right),$$

$$c_2(s) = \left( -\frac{s}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2} \cosh(\sigma s), \frac{1}{\sigma^2} \sinh(\sigma s) \right),$$

$$c_3(s) = \left( \frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} + \frac{s}{3} \right).$$

Jednostavnim računom dobivamo:

**Korolar 2.42** Izvodnice  $B$ -namotajne plohe konstantnog nagiba nad svjetlosnom Frenetovom krivuljom  $c$  parametriziranom duljinom pseudoluka su određene s

$$B_1(s) = \left( -\frac{\sigma}{2} \sin(\sigma s), \frac{\sigma}{2} \cos(\sigma s), \frac{\sigma}{2} \right),$$

$$B_2(s) = \left( -\frac{\sigma}{2}, -\frac{\sigma}{2} \sinh(\sigma s), -\frac{\sigma}{2} \cosh(\sigma s) \right),$$

$$B_3(s) = \left( -\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2} \right).$$

*Dokaz.* Služimo se jednadžbama koje slijede iz (2.18),

$$A = c', \quad C = c'', \quad B = -kA - C = -kc' - c''.$$

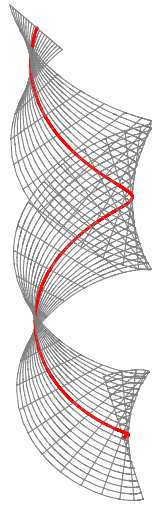
□

Uočimo da je direkcijska krivulja  $B$ -namotajne plohe generirane s  $B_1$  (odnosno  $B_2$ ) kružnica (odnosno pseudokružnica), prema Korolaru 2.35 o nul-pravčastim necilindričnim ploham konstantnog nagiba.  $B$ -namotajna ploha generirana s baznom krivuljom  $c_3$  i izvodnicama  $B_3$  je cilindrična ploha i stoga se na nju ne odnosi Korolar 2.35.

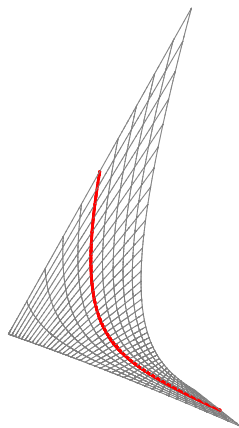
Nadalje, uočimo da se  $B$ -namotajne plohe s parabolama kao direkcijskim krivuljama ne pojavljuju u Korolaru 2.41, budući da za njih vrijedi  $k_2 = 0$  i njihova bazne krivulje se ne mogu parametrizirati duljinom pseudoluka.

## 2.2.2 Lokalne izometrije $B$ -namotajnih ploha

Promotrimo sada lokalne izometrije  $B$ -namotajnih ploha. Vidjeli smo da je za  $B$ -namotajne plohe prva fundamentalna forma dana s  $I = k_3^2 v^2 du^2 + 2dudv$ , pa budući da ne ovisi o zakrivljenosti  $k_2$  vrijedi sljedeći teorem



**Slika 2.15:**  $B$ -namotajna ploha s baznom krivuljom  $c_1$  i izvodnicama  $B_1$



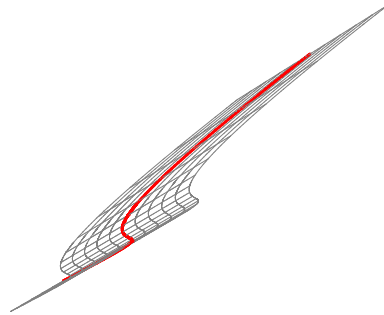
**Slika 2.16:**  $B$ -namotajna ploha s baznom krivuljom  $c_2$  i izvodnicama  $B_2$

**Teorem 2.43**  $B$ -namotajne plohe  $\mathbb{S}(k_2, k_3)$  i  $\overline{\mathbb{S}}(\overline{k}_2, k_3)$  su lokalno izometrične.

Za  $B$ -namotajne plohe također vrijedi teorem 2.10 pa očito vrijedi sljedeći korolar

**Korolar 2.44** Mindingova izometrija čuva bazne krivulje  $B$ -namotajnih ploha.

Sada prema Teoremu 2.43 i Teoremu 2.10 slijedi da se sve  $B$ -namotajne plohe lokalno izometrične u Mindingovom smislu s plohom  $\mathbb{S}$  mogu se zamjenom  $C^1$ -funkcije  $k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljnom  $C^1$ -funkcijom  $\overline{k}_2 : \overline{I} \rightarrow \mathbb{R}$ . Stoga vrijede sljedeći teoremi



**Slika 2.17:**  $B$ -namotajna ploha s baznom krivuljom  $c_3$  i izvodnicama  $B_3$

**Teorem 2.45** Svaka  $B$ -namotajna ploha  $\mathbb{S}$  je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s  $B$ -namotajnom plohom konstantnog nagiba.

*Dokaz.* Odgovarajućim izborom funkcije  $k_2$  dobivamo  $B$ -namotajnu plohu konstantnog nagiba.  $\square$

**Teorem 2.46** Svaka  $B$ -namotajna ploha  $\mathbb{S}$  je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s  $B$ -namotajnom plohom  $\bar{\mathbb{S}}$  pri čemu se dana krivulja  $v = v(u)$  preslika u asimptotsku krivulju od  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Asimptotska krivulja  $B$ -namotajne plohe karakterizirana je jednadžbom

$$(\bar{k}_2 + vk'_3 + v^2k_3^3)du^2 + 2k_3dudv = 0.$$

Za zadanu krivulju  $v = v(u)$   $k_2$  odredimo iz gornje jednadžbe.  $\square$

Za razliku od ne-nul pravčastih ploha,  $B$ -namotajne plohe mogu biti ili totalno umbiličke ili kvazi-umbiličke. Kvazi-umbiličkim nazivamo one  $B$ -namotajne plohe čiji operator oblika  $L_p$  nije dijagonalizibilan ali vrijedi  $K = H^2$ . Za takve plohe svojstveni potprostor operatora  $L_p$  je jednodimenzionalan te stoga imamo samo jedan glavni smjer. Za takve  $B$ -namotajne plohe, krivulje zakrivljenosti su zapravo njezine izvodnice. Očito, ako je  $\mathbb{S}$   $B$ -namotajna ploha s parametrizacijom (1.20) i operatorom oblika plohe (1.24), tada su krivulje zakrivljenosti  $B$ -namotajne plohe zadane jednadžbom  $(k_2 + vk_3^2)du = 0$ . Budući da za kvazi-umbiličke  $B$ -namotajne plohe vrijedi  $(k_2 + vk_3^2) \neq 0$ , slijedi  $du = 0$ . Stoga su  $v$ -krivulje tj. izvodnice  $B$ -namotajne plohe ujedno i krivulje zakrivljenosti plohe.

Nadalje vrijedi

**Teorem 2.47** Svaka  $B$ –namotajna ploha  $\mathbb{S}$  je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s  $B$ –namotajnom plohom  $\bar{\mathbb{S}}$  pri čemu se geodetska krivulja na  $\mathbb{S}$  preslika u pravac na  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Iz uvjeta da je matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & v' & vk_3 \\ -vk_3^2 & -k_2k_3v + v'' & k_2 + 2v'k_3 + vk_3' \end{bmatrix}$$

ranga 1 slijede jednadžbe

$$\begin{vmatrix} 1 & v' + vk_3 \\ -vk_3^2 & -k_2k_3v + v'' \end{vmatrix} = 0, \quad (2.19)$$

i

$$\begin{vmatrix} 1 & v' + (vk_3)^2 \\ -vk_3^2 & -k_2k_3v + v'' + vk_3(k_2 + 2v'k_3 + vk_3') \end{vmatrix} = 0. \quad (2.20)$$

Jednadžba (2.20) je diferencijalna jednadžba geodetske krivulje na  $B$ –namotajnoj plohi. Budući da je  $v = v(u)$  geodetska krivulja, ona zadovoljava jednadžbu (2.20), te iz (2.20) možemo odrediti  $\bar{k}_2$ .  $\square$

**Teorem 2.48** Svaka  $B$ –namotajna ploha  $\mathbb{S}$  je lokalno izometrična u Mindingovom smislu s  $B$ –namotajnom plohom  $\bar{\mathbb{S}}$  pri čemu se krivulja  $v = v(u)$  na  $\mathbb{S}$  preslika u ravninsku krivulju  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Iz uvjeta da za planarnu krivulju  $\alpha$  vrijedi  $\det(\alpha, \alpha', \alpha'') = 0$  slijedi jednadžba

$$k_2^3 + F_2k_2^2 + F_1k_2 + F_0 + Gk_2' = 0,$$

gdje su funkcije

$$F_2 = 4v'k_3 + 3k_3'v + 2k_3^3v^2,$$

$$F_1 = v'^2k_3^2 - v''' - 4k_3^2v''v - 2v'k_3^4v^2 + 2k_3'^2v^2 - k_3k_3''v^2 - k_3^3k_3'v^3,$$

$$F_0 = -6v'^3k_3^3 + 3v'k_3'v'' + 3k_3v''^2 - 2v'k_3v''' - 6v'^2k_3^2k_3'v + 6v'k_3^3v''v + v''k_3''v - k_3'v'''v - 3v'k_3k_3'^2v^2 + 3k_3^2k_3'v''v^2 + v'k_3^2k_3''v^2 - k_3^3v''''v^2,$$

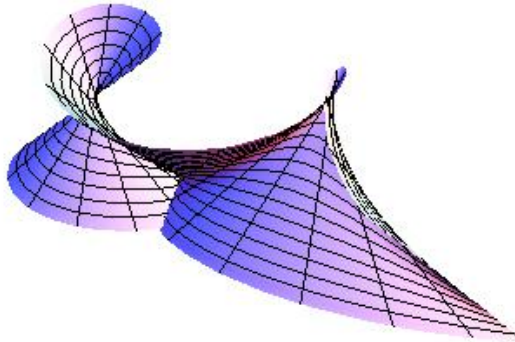
$$G = v'' + 3v'k_3^2v + k_3k_3'v^2 + k_3^4v^3.$$

$\square$

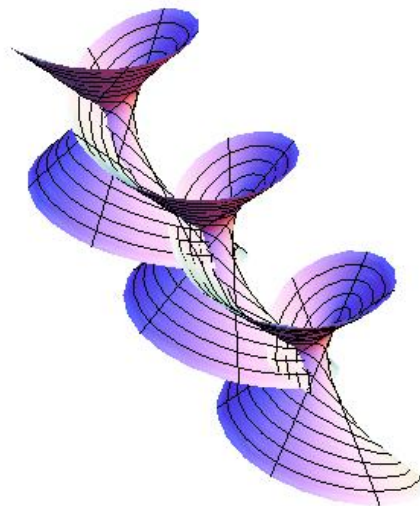
**Primjer 2.49** Nul-pravčasta ploha s  $k_3 = konst. \neq 0$  se naziva izoparameterska ploha ([10]). Ove plohe su plohe konstantne Gaussove i srednje zakrivljenosti. Ako je takva ploha

ploha konstantnog nagiba tada, parametriziramo li ju kao  $B$ -namotajnu plohu, također vrijedi  $k_2 = konst.$ . Specijalan slučaj je  $S_1^2(p, r)$ . Opća parametrizacija takve plohe je dana u ([10]) s

$$f(u, v) = (g(u), 0, -au + \int g'(u) \cos u \, du) + v(\cos u, \sin u, 1).$$



**Slika 2.18:** Izoparametarska ploha s  $g(u) = u$



**Slika 2.19:** Izoparametarska ploha s  $g(u) = u^2$

■

## 2.3 Izometrije pravčastih ploha koje ne čuvaju izvodnice

U euklidskom prostoru vrijedi teorem da ako su svake dvije pravčaste plohe lokalno izometrične, one su također izometrične u Mindingovom smislu, osim ukoliko su izometrične s dvostruko pravčastom kvadrikom čije izvodnice upravo odgovaraju izvodnicama svake pojedine plohe, ([14]).

U Minkowskijevom prostoru  $\mathbb{R}_1^3$  analogan teorem vrijedi za prostorne pravčaste plohe  $\mathbb{S}_1$ .

**Teorem 2.50** Ako su dvije pravčaste plohe tipa  $S_1$   $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  lokalno izometrične, tada je lokalna izometrija Mindingova izometrija, osim ako su obje plohe lokalno izometrične s dvostruko-pravčasto kvadrikom u čije se izvodnice preslikaju izvodnice ploha  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$ .

*Dokaz.* Neka su  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  dvije pravčaste plohe tipa  $S_1$  s parametrizacijama oblika (1.17) i odgovarajućim parametrima  $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$  odnosno  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{I} \times \mathbb{R}$ . Očito su  $v$ -krivulje ( $u = konst.$ ) izvodnice plohe  $\mathbb{S}$ , te  $u$ -krivulje ( $v = konst.$ ) zovimo *krivuljama* plohe  $\mathbb{S}$ . Analogno definiramo izvodnice, odnosno *krivulje* plohe  $\bar{\mathbb{S}}$ . Pretpostavimo da se *krivulje* plohe  $\mathbb{S}$  preslikaju u izvodnice plohe  $\bar{\mathbb{S}}$ , te obratno. U  $R_1^3$  vrijede analogne Codazzi-Mainardi jednadžbe (1.14) koje zbog  $\frac{\partial}{\partial u} \ln W = \frac{W_u}{W} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2$ , odnosno  $\frac{\partial}{\partial v} \ln W = \frac{W_v}{W} = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2$ , možemo pisati i u obliku

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{W}\right)_v - \left(\frac{M}{W}\right)_u + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{L}{W}\right) - 2\Gamma_{12}^2 \left(\frac{M}{W}\right) + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{N}{W}\right) &= 0 \\ \left(\frac{N}{W}\right)_u - \left(\frac{M}{W}\right)_v + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{L}{W}\right) - 2\Gamma_{12}^1 \left(\frac{M}{W}\right) + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{N}{W}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Kako za plohu  $S$  vrijedi  $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ , te se jednadžbe svedu na

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{W}\right)_v - \left(\frac{M}{W}\right)_u - 2\Gamma_{12}^2 \left(\frac{M}{W}\right) &= 0 \\ -\left(\frac{M}{W}\right)_v - 2\Gamma_{12}^1 \left(\frac{M}{W}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{W}\right)_v &= 2\Gamma_{12}^1 \left(\frac{M}{W}\right) \\ \left(\frac{M}{W}\right)_u &= \left(\frac{L}{W}\right)_v - 2\Gamma_{12}^1 \left(\frac{M}{W}\right). \end{aligned}$$

Uzmemo li  $K = \frac{1}{\rho} = \frac{M^2}{W^2}$ , dobivamo  $\rho\rho_v = \left(\frac{W}{M}\right)\left(\frac{W}{M}\right)_v$  i prema gornjoj jednadžbi slijedi

$$\frac{\partial}{\partial v} \ln \rho = \frac{\rho_v}{\rho} = 2\Gamma_{12}^1. \quad (2.21)$$



Budući da su plohe  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  lokalno izometrične pri čemu se  $v$ -krivulje plohe  $\mathbb{S}$  preslikaju u  $\bar{u}$ -krivulje plohe  $\bar{\mathbb{S}}$ , tj.  $u = \bar{v}, v = \bar{u}$ , te zbog invarijantnosti Gaussove zakrivljenosti,  $K(u, v) = K(\bar{u}, \bar{v}) = K(v, u)$  zamjenom parametara dobivamo jednadžbu

$$\frac{\partial}{\partial u} \ln \rho = \frac{\rho_u}{\rho} = 2\Gamma_{12}^2. \quad (2.22)$$

Jednadžbe (2.21) i (2.22) su nužni i dovoljni uvjeti egzistencije plohe  $\Sigma$  koja je lokalno izometrična s plohama  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  i čije su asimptotske krivulje parametarske krivulje. Zaista, kako su asimptotske krivulje parametarske krivulje na plohi ako i samo ako je  $L = N = 0$ , tada slijedi  $K = \frac{M^2}{W^2} = \frac{1}{\rho^2}$ , te su Codazzijeve jednadžbe ove plohe dane s (2.21) i (2.22). Stoga slijedi da su  $u = konst$  i  $v = konst$  asimptotske krivulje na plohi  $\Sigma$ . Nadalje, one su kao slike geodetskih krivulja (izvodnica) pri izometriji i same geodetske krivulje, te su nužno pravci. Stoga je  $\Sigma$  dvostruko pravčasta ploha.  $\square$

U dokazu prethodnog teorema tvrdimo da ako je geodetska zakrivljenost  $k_g$  i normalna zakrivljenost  $k_n$  krivulje jednake nula, onda je krivulja pravac. U eulidskom prostoru ova tvrdnja vrijedi, budući da je veza između zakrivljenosti  $\kappa$ , te  $k_g$  i  $k_n$  dana s  $\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2$ . U  $\mathbb{R}_1^3$ , imamo nekoliko slučajeva. Pretpostavimo da je bazna krivulja pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  parametrizirana duljinom luka, tj. vrijedi  $c'^2 = \pm 1$ . Neka je  $\{c', s, n\}$  Darbouxov trobrid za krivulju  $c$  na  $\mathbb{S}$ , te pretpostavimo da je  $\mathbb{S}$  vremenskog karaktera. Za vremensku plohu  $\mathbb{S}$  plošna normala je prostornog karaktera, tj.  $n^2 = 1$ . Dalje razlikujemo dva slučaja:

1. Pretpostavimo da je  $c$  prostornog karaktera, tj.  $c'^2 = 1$ . Budući da je  $c'$  ortogonalan na  $c''$ , tada je  $c''$  vremenskog ili prostornog karaktera. Nadalje, budući da je ploha  $\mathbb{S}$  vremenska, tangencijalna ravnina  $T_p\mathbb{S}$  je vremenska i vektor  $s$  koji je ortogonalan s  $c'$  je vremenskog karaktera. Razlikujemo dva podslučaja:

- 1a. Pretpostavimo da je  $c''$  prostorni vektor. Tada prema definiciji kuta (1.10) vrijedi

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{\langle c'', s \rangle}{\|c''\| \|s\|} = \frac{k_g}{\kappa}, \text{ tj. } k_g = \kappa \operatorname{sh} \theta,$$

te prema definiciji kuta (1.8)

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{\langle c'', n \rangle}{\|c''\| \|n\|} = \frac{k_n}{\kappa}, \text{ tj. } k_n = \kappa \operatorname{ch} \theta.$$

Stoga je

$$\kappa^2 = (\kappa \operatorname{ch} \theta)^2 - (\kappa \operatorname{sh} \theta)^2 = k_n^2 - k_g^2.$$

- 1b. Pretpostavimo sada da je  $c''$  vremenski vektor. Tada prema definiciji kuta (1.7) vrijedi

$$\operatorname{ch} \theta = -\frac{\langle c'', s \rangle}{\|c''\| \|s\|} = -\frac{k_g}{\kappa}, \text{ tj. } k_g = -\kappa \operatorname{ch} \theta,$$

te prema definiciji kuta (1.10)

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{\langle c'', n \rangle}{\|c''\| \|n\|} = \frac{k_n}{\kappa}, \text{ tj. } k_n = \kappa \operatorname{sh} \theta.$$

Stoga je

$$\kappa^2 = (-\kappa \operatorname{ch} \theta)^2 - (\kappa \operatorname{sh} \theta)^2 = k_g^2 - k_n^2.$$

2. Pretpostavimo da je  $c'$  vremenskog karaktera, tj.  $c'^2 = -1$ . Tada je vektor  $s$  prostornog karaktera, a budući je  $c'$  ortogonalan na  $c''$ , vektor  $c''$  je nužno prostornog karaktera. Razlikujemo podslučajeve:

2a. Pretpostavimo da vektori  $s$  i  $c''$  razapinju prostornu ravninu. Tada prema definiciji kuta (1.9) vrijedi

$$\cos \theta = \frac{\langle c'', s \rangle}{\|c''\| \|s\|} = \frac{k_g}{\kappa}, \text{ tj. } k_g = \kappa \cos \theta,$$

$$\sin \theta = \frac{\langle c'', n \rangle}{\|c''\| \|n\|} = \frac{k_n}{\kappa}, \text{ tj. } k_n = \kappa \sin \theta.$$

Stoga je

$$\kappa^2 = (\kappa \cos \theta)^2 + (\kappa \sin \theta)^2 = k_n^2 + k_g^2.$$

2b. Pretpostavimo sada da vektori  $s$  i  $c''$  razapinju vremensku ravninu. Tada prema definiciji kuta (1.8) vrijedi

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{\langle c'', s \rangle}{\|c''\| \|s\|} = \frac{k_g}{\kappa}, \text{ tj. } k_g = \kappa \operatorname{ch} \theta,$$

te prema definiciji kuta (1.10)

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{\langle c'', n \rangle}{\|c''\| \|n\|} = \frac{k_n}{\kappa}, \text{ tj. } k_n = \kappa \operatorname{sh} \theta.$$

Ponovno zaključujemo

$$\kappa^2 = k_g^2 - k_n^2.$$

Očito i u  $\mathbb{R}_1^3$  vrijedi da ako su geodetska zakrivljenost  $k_g$  i normalna zakrivljenost  $k_n$  krivulje jednake nula, onda je krivulja pravac.

Budući da lokalna izometrija čuva kauzalni karakter izvodnica, odnosno bazne krivulje za vremenske ne-nul pravčaste plohe očito vrijedi sljedeći korolar

**Korolar 2.51** Ako su dvije vremenske pravčaste plohe istog tipa ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) lokalno izometrične, tada su one izometrične u Mindingovom smislu.

Kao što smo već spomenuli, Mindingove izometrije možemo proučavati samo između

ploha istog tipa. S druge strane, pretpostavimo da su dvije vremenske pravčaste plohe koje nisu istog tipa,  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  lokalno izometrične pri čemu se izvodnice jedne plohe preslikavaju u krivulje druge plohe i obratno (budući da su plohe različitog tipa, bazna krivulja, odnosno izvodnice su istog kauzalnog karaktera, te ova pretpostavka ima smisla). Uz odgovarajuću promjenu predznaka, analognim dokazom kao za Teorem (2.50) mogli bismo zaključiti da su i ove plohe lokalno izometrične s dvostruko pravčastom plohom  $\Sigma$  pri čemu se izvodnice plohe  $\mathbb{S}$ , odnosno  $\bar{\mathbb{S}}$  preslikavaju u izvodnice pojedine familije izvodnica plohe  $\Sigma$ . Ova tvrdnja povlači da ploha  $\Sigma$  tada ima izvodnice različitog kauzalnog karaktera, te ćemo stoga pokazati da u  $\mathbb{R}_1^3$  postoji dvostruko pravčasta ploha s familijama izvodnica različitog kauzalnog karaktera. Primjer takve plohe je hiperbolički paraboloid s parametrizacijom  $x : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ ,

$$\begin{aligned} x(u, v) = (uv, v, u) &= (0, 0, u) + v(u, 1, 0) \\ &= (0, v, 0) + u(v, 0, 1). \end{aligned}$$

Očito, za  $|v| < 1$  familija izvodnica zadanih s  $e_1(v) = (v, 0, 1)$  je vremenska, dok je familija izvodnica zadanih s  $e_2(u) = (u, 1, 0)$  prostorna. Stoga vrijedi

**Korolar 2.52** Ako su dvije vremenske pravčaste plohe različitog tipa ( $S_2$ , odnosno  $S_3$ ) lokalno izometrične, tada su one izometrične s dvostruko pravčastom plohom.

Promotrimo sada lokalne izometrije koje preslikavaju izvodnice plohe u krivulje plohe za nul-pravčaste plohe. Za  $B$ -namotajne plohe vrijedi sljedeći analogon Teorema 2.50.

**Teorem 2.53** Ako su dvije  $B$ -namotajne plohe ne-konstantne zakrivljenosti lokalno izometrične, tada su one izometrične u Mindingovom smislu.

*Dokaz.* Neka su  $\mathbb{S}(k_2, k_3)$  i  $\bar{\mathbb{S}}(\bar{k}_2, \bar{k}_3)$   $B$ -namotajne plohe parametrizirane s

$$f(u, v) = c(u) + vB(u) \tag{2.23}$$

odnosno

$$\bar{f}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{c}(\bar{u}) + \bar{v}\bar{B}(\bar{u}) \tag{2.24}$$

Neka su  $v$ -krivulje izvodnice na  $\mathbb{S}$ , a  $u$ -krivulje 'krivulje' na  $\mathbb{S}$ , te neka analogno vrijedi za  $\bar{v}$ -krivulje i  $\bar{u}$ -krivulje.

Pretpostavimo da se lokalnom izometrijom  $u$ -krivulje od  $\mathbb{S}$  preslikaju u  $\bar{v}$ -krivulje od  $\bar{\mathbb{S}}$ , te obratno, tj. vrijedi  $u = \bar{v}, v = \bar{u}$ .

Neka je  $u = u_0$ . Tada je Gaussova zakrivljenost  $K(u_0, v) = k_3^2(u_0)$ , te deriviramo li izraz po  $v$ , dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial v} K(u_0, v) = 0,$$

tj.  $K$  ne ovisi o  $v$ . S druge strane, zbog invarijantnosti Gaussove zakrivljenosti slijedi

$$K(u_0, v) = K(\bar{u}_0, \bar{v}) = K(v_0, u) = k_3^2(v_0).$$

Deriviramo li prethodni izraz po  $u$  dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial u} K(v_0, u) = 0,$$

tj.  $K$  ne ovisi o  $u$ .

Budući da funkcija  $K$  ne ovisi niti o  $u$  niti o  $v$ , slijedi da je  $K$  konstantna funkcija, što je kontradikcija. Stoga ako su plohe  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  lokalno izometrične, tada lokalna izometrija čuva izvodnice ploha.  $\square$

Istaknimo stoga da su lokalno izometrične  $B$ -namotajne plohe gotovo uvijek izometrične u Mindingovom smislu, osim ako su plohe konstantne zakrivljenosti (tj.  $k_3 = konst.$ ). U tom su slučaju, kako je pokazano u Primjeru 2.49,  $B$ -namotajne plohe izometrične s pseudosferom  $S_1^2(p, r)$ .

## 2.4 Izometrije koje čuvaju familiju asimptotskih krivulja na plohi

U euklidskoj diferencijalnoj geometriji proučen je sljedeći problem:

Odrediti sve plohe, ne nužno pravčaste, koje se sastoje od hiperboličkih točaka (tj. točaka u kojima je  $K < 0$ ) i koje dopuštaju netrivialnu lokalnu izometriju koja čuva familiju asimptotskih krivulja.

U euklidskom prostoru je pokazano da su to upravo pravčaste plohe, a pripadne lokalne izometrije su Mindingove izometrije, ([6]).

Ova tvrdnja vrijedi i u Minkowskijevom prostoru, uz "suprotnu" pretpostavku, tj. u Minkowskijevom prostoru postoje dvije familije asimptotskih krivulja u točkama plohe u kojima je Gaussova zakrivljenost  $K > 0$ , te stoga problem ima smisla promatrati samo u okolini ovih točaka.

**Teorem 2.54** Za svaku točku plohe  $\mathbb{S}$  u kojoj je  $K > 0$  postoje dvije familije asimptotskih krivulja.

*Dokaz.* Asimptotska krivulja na plohi je zadana jednačbom (2.5). Najprije uočimo da ako u okolini neke točke plohe jednačba (2.5) ima dva različita realna rješenja, tada

postoje dvije familije asimptotskih krivulja.

Pretpostavimo da jednadžba

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

ima različita realna rješenja. Tada ju možemo faktorizirati kao

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = (Adu + Bdv)(Cdu + Ddv),$$

gdje su  $A, B, C, D$  realne funkcije. Jednu familiju asimptotskih krivulja čine rješenja jednadžbe  $Adu + Bdv = 0$ , odnosno  $Cdu + Ddv = 0$ .

Pokažimo sada da za  $K > 0$  jednadžba asimptotske krivulje ima dva različita realna rješenja. Rješenja jednadžbe dana su se

$$\frac{du}{dv} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L},$$

te različita realna rješenja postoje uz uvjet

$$M^2 - LN > 0. \quad (2.25)$$

Za prostorne (vremenske) plohe vrijedi  $EG - F^2 > 0$  ( $EG - F^2 < 0$ ), te prema (1.4) slijedi da  $K > 0$  povlači  $M^2 - LN > 0$ .  $\square$

Prije nego što iskažemo teorem o čuvanju familije asimptotskih krivulja na plohi, dokažimo da se geodetska zakrivljenost  $k_g$  krivulje na plohi može računati prema

**Propozicija 2.55** Neka je  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{S}$  krivulja na plohi  $\mathbb{S}$  s parametrizacijom  $x : U \rightarrow \mathbb{S}$ . Tada je

$$k_g(\alpha) \|\alpha'\|^3 = \sqrt{|EG - F^2|} (\Gamma_{11}^2 u'^3 - \Gamma_{22}^1 v'^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) u'^2 v' - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2) u' v'^2 - u'' v' + v'' u).$$

*Dokaz.* Vrijedi  $\alpha' = x_u du + x_v dv$  i

$$\alpha'' = x_{uu} du^2 + 2x_{uv} dudv + x_{vv} dv^2 + x_u d^2u + x_v d^2v, \text{ te je}$$

$$\begin{aligned} \alpha' \times \alpha'' &= (x_{uu} \times x_u) du^3 + (x_{vv} \times x_v) dv^3 + (x_{uu} \times x_v + 2x_{uv} \times x_u) du^2 dv + \\ &+ (x_{vv} \times x_u + 2x_{uv} \times x_v) dudv^2 + (d^2u dv - d^2v du) x_u \times x_v. \end{aligned}$$

Stoga

$$\begin{aligned} \langle (\alpha'' \times \alpha'), (x_u \times x_v) \rangle &= \langle (x_{uu} \times x_u), (x_u \times x_v) \rangle du^3 + \langle (x_{vv} \times x_v), (x_u \times x_v) \rangle dv^3 + \\ &+ \langle (x_{uu} \times x_v + 2x_{uv} \times x_u), (x_u \times x_v) \rangle du^2 dv + \langle (x_{vv} \times x_u + 2x_{uv} \times x_v), (x_u \times x_v) \rangle dudv^2 + \\ &+ (d^2u dv - d^2v du) \|x_u \times x_v\|^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Koeficijente uz  $du^3, dv^3, du^2dv, dudv^2$  na desnoj strani gornje jednakosti možemo zapisati u terminima fundamentalnih veličina prvog reda  $E, F, G$  i Christoffelovih simbola. Koristeći analogon Lagrangeovog identiteta u  $\mathbb{R}_1^3$  i formule za Christoffelove simbole dobivamo

$$\begin{aligned} \langle (x_{uu} \times x_u), (x_u \times x_v) \rangle &= \langle x_{uu}, x_u \rangle \langle x_u, x_v \rangle - \langle x_{uu}, x_v \rangle \|x_u\|^2 = \\ &= -\frac{1}{2}E_u F + (F_u - \frac{1}{2}E_v)E = (EG - F^2)\Gamma_{11}^2. \end{aligned}$$

Slično,

$$\begin{aligned} \langle (x_{vv} \times x_v), (x_u \times x_v) \rangle &= -(EG - F^2)\Gamma_{22}^1, \\ \langle (x_{uu} \times x_v + 2x_{uv} \times x_u), (x_u \times x_v) \rangle &= -\frac{1}{2}E_u G - (F_u - \frac{1}{2}E_v)F + E_v F - G_u E = (EG - F^2)(2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1), \\ \langle (x_{uv} \times x_u + 2x_{uv} \times x_v), (x_u \times x_v) \rangle &= (EG - F^2)(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih jednakosti u izraz (2.26) dobivamo traženu formulu.  $\square$

Sada možemo dokazati sljedeći teorem o čuvanju familije asimptotskih krivulja na plohi

**Teorem 2.56** Ako lokalna izometrija  $F : \mathbb{S} \rightarrow \bar{\mathbb{S}}$  čuva familiju asimptotskih krivulja na plohi, tada su plohe pravčaste, a izometrija  $F$  je Mindingova izometrija.

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je  $\mathbb{S}$  vremenska (odnosno prostorna) ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ , te neka je  $p$  točka na plohi  $\mathbb{S}$  u kojoj je  $K > 0$ . Tada plohu  $\mathbb{S}$  u otvorenoj okolini  $U$  točke  $p$  možemo parametrizirati asimptotskim koordinatama, tj. vrijedi  $L = N = 0$ . Neka su  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  lokalno izometrične plohe parametrizirane istim parametrima  $(u, v)$ . Tada vrijedi

$$E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G}, \quad \Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k,$$

te pretpostavimo da se asimptotska  $u$ -krivulja ( $v = v_0$ ) na plohi  $\mathbb{S}$  preslika u asimptotsku krivulju na plohi  $\bar{\mathbb{S}}$ . Tada je i  $\bar{L} = 0$ . Zbog invarijantnosti Gaussove zakrivljenosti (uz eventualnu promjenu orijentacije) nužno vrijedi i  $M = \bar{M}$ . Codazzi-Mainardi jednadžbe

$$M_u = (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)M,$$

odnosno

$$\bar{M}_u = (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\bar{M} + \Gamma_{11}^2\bar{N}$$

povlače  $\Gamma_{11}^2\bar{N} = 0$ . Uvjet  $\bar{N} = 0$ , povlači da su plohe  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  kongruentne tj. izometrija je trivijalna. Stoga pretpostavimo  $\bar{N} \neq 0$ , što povlači  $\Gamma_{11}^2 = 0$ , odakle slijedi da za  $u$ -krivulje geodetska zakrivljenost iščezava, a budući da su po pretpostavci  $u$ -krivulje i asimptotske krivulje, nužno su i pravci. Dakle, izometrija čuva pravce na plohi, te su stoga plohe pravčaste, a lokalna izometrija je Mindingova izometrija.  $\square$

# Konformna preslikavanja pravčastih ploha u $\mathbb{R}_1^3$

## 3.1 Konformna preslikavanja ploha u $\mathbb{R}_1^3$

U prethodnom poglavlju proučavali smo lokalne izometrije pravčastih ploha koje čuvaju izvodnice, odnosno tražili smo pravčaste plohe s lokalno istom metrikom. Taj uvjet možemo i malo oslabiti, odnosno možemo promatrati preslikavanja pravčastih ploha koja čuvaju kut između krivulja, tj. tangencijalnih vektora na plohi. Takva preslikavanja zovemo konformna preslikavanja ploha. Ova preslikavanja pravčastih ploha u  $\mathbb{R}^3$  su u proučavana u [5], dok su u jednostavno izotropnom prostoru proučavana u [40].

**Definicija 3.1**  $C^r$ -preslikavanje ploha  $F : \mathbb{S} \rightarrow \bar{\mathbb{S}}, r \geq 1$  je lokalno konformno preslikavanje ako za diferencijalno preslikavanje  $F_* : T_p\mathbb{S} \rightarrow T_p\bar{\mathbb{S}}$  vrijedi  $F_*g = \mu\bar{g}$  za glatku funkciju  $\mu : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , odnosno  $\mu : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}_-$ , gdje su  $g$ , odnosno  $\bar{g}$  inducirana metrika na plohi  $\mathbb{S}$ , odnosno plohi  $\bar{\mathbb{S}}$ .

Dakle, za takva preslikavanja vrijedi  $\langle F_*(v), F_*(w) \rangle = \mu\langle v, w \rangle$  za svaki  $v, w \in T_p\mathbb{S}$ . Ovo preslikavanje čuva kut (odnosno ortogonalnost) svaka dva prostorna ili vremenska vektora.

Preslikavanje je konformno ako je bijektivna lokalno konformno preslikavanje. Svaka Mindingova izometrija pravčastih ploha je lokalno konformno preslikavanje koje čuva izvodnice plohe (za  $\mu = 1$ ). Nadalje, restrikcija homotetije  $h : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3, h(x) = Kx, K = konst. \neq 0$  na  $\mathbb{S}$  je također konformno preslikavanje koje čuva izvodnice. Stoga se konformno preslikavanje koje čuva izvodnice i koje je kompozicija restrikcije homotetije na plohu  $\mathbb{S}$  i Mindingove izometrije plohe  $h(\mathbb{S})$  naziva trivijalnim konformnim preslikavanjem. Dalje nas zanimaju konformna preslikavanja koja čuvaju koja nisu trivijalna.

Uočimo da konformna preslikavanje ploha u  $\mathbb{R}_1^3$  s  $\mu > 0$  čuvaju kauzalni karakter vektora, odnosno krivulja, kao i ploha. Ovu tvrdnju možemo dokazati analogno dokazu da lokalna izometrija čuva kauzalni karakter vektora (krivulja, ploha).

Obratno, pri konformnom preslikavanju s  $\mu < 0$  prostorni vektor (odnosno krivulja) se preslika u vremenski vektor (odnosno krivulju) i obratno, dok se kauzalni karakter plohe ne mijenja. Stoga konformna preslikavanja s  $\mu > 0$  promatramo između ne-nul pravčastih ploha istog tipa, te nul-pravčastih ploha dok konformna preslikavanja s  $\mu < 0$  možemo promatrati samo između ne-nul vremenskih pravčastih ploha različitog tipa, odnosno između nul-pravčastih ploha.

Analogno kao za lokalne izometrije dokazujemo sljedeći teorem,

**Teorem 3.2** Glatko preslikavanje  $x$  s je konformno preslikavanje ako i samo ako vrijedi

$$E : \bar{E} = F : \bar{F} = G : \bar{G} = \mu(u, v)$$

za neku ne-nul funkciju  $\mu$  pri čemu su funkcije  $E, F, G$ , odnosno  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  fundamentalne veličine prvog reda s obzirom na parametrizaciju  $x$ , odnosno  $\bar{x}$  definirane na istom otvorenom skupu  $U$ .

### 3.1.1 Konformna preslikavanja ploha klase $M_1^1$

Promotrimo sada konformna preslikavanja pravčastih ploha klase  $M_1^1$ . Budući da konformna preslikavanja čuvaju kut između krivulja, ovdje ćemo pravčaste plohe parametrizirati malo drugačije nego kada smo promatrali lokalne izometrije.

Neka je  $\mathbb{S}$  pravčasta ploha klase  $M_1^1$ , te neka je bazna krivulja plohe ortogonalna trajektorija izvodnica tj. ploha  $\mathbb{S}$  ima lokalnu parametrizaciju oblika

$$x(u, v) = c(u) + ve(u), u \in I \subset \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

pri čemu je  $\|c'^2\| = 1, \|e^2\| = 1, \langle c', e \rangle = 0$ .

Pretpostavimo da ploha  $\bar{\mathbb{S}}$  ima parametrizaciju istog oblika. Uz uvjet da konformno preslikavanje pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  čuva njezine izvodnice, za preslikavanje parametara na skupu  $I_1 \times I_2 \subseteq I \times \mathbb{R}$ ,  $(0, 0) \in I_1 \times I_2$  vrijedi sljedeći teorem,

**Teorem 3.3** Neka su  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  pravčaste plohe parametrizirane s  $(u, v) \in I_1 \times I_2$ , odnosno  $\bar{I}_1 \times \bar{I}_2$ . Konformno preslikavanje  $\alpha : \mathbb{S} \rightarrow \bar{\mathbb{S}}$  preslikava izvodnice plohe  $\mathbb{S}$  u izvodnice plohe  $\bar{\mathbb{S}}$  ako je preslikavanje parametara dano s  $\bar{u} = p(u), \bar{v} = q(v)$ , gdje su  $p : I_1 \rightarrow \bar{I}_1$  i  $q : I_2 \rightarrow \bar{I}_2$  glatke funkcije.



*Dokaz.* Pretpostavimo da je preslikavanje parametara  $(u, v)$  dano s

$$\bar{u} = F(u, v), \quad \bar{v} = G(u, v).$$

Na ovo preslikavanje imamo uvjet da čuva izvodnice i da je konformno preslikavanje tj. da čuva kutove, te stoga i ortogonalne trajektorije ploha. Budući da preslikavanje čuva izvodnice možemo pretpostaviti da se  $u = u_0$  preslika u  $\bar{u} = \bar{u}_0$ . Tada je

$$\bar{u}_0 = F(u_0, v) \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

tj.  $F$  ne ovisi o  $v$ . Stoga je  $F(u, v) = \bar{u} + C$ , gdje je  $C \in \mathbb{R}$  konstanta. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti  $C = 0$ , te možemo pisati  $\bar{u} = p(u)$ .

Kako ploha  $\mathbb{S}$ , odnosno  $\bar{\mathbb{S}}$  ima parametrizaciju oblika (3.1), očito su  $u$ -krivulje ortogonalne trajektorije izvodnica, te možemo pretpostaviti da se  $v = v_0$  preslika u  $\bar{v} = \bar{v}_0$ . Tada je

$$\bar{v}_0 = G(u, v_0) \quad \text{i} \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

tj.  $G$  ne ovisi o  $v$ . Stoga je  $G(u, v) = \bar{v} + C$ , gdje je  $C \in \mathbb{R}$  konstanta. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti  $C = 0$ , te stoga pišemo  $\bar{v} = q(v)$ .  $\square$

Uz parametrizaciju oblika (3.1), fundamentalne veličine prvog reda plohe  $\mathbb{S}$  su dane s

$$E = \varepsilon + 2va + v^2e'^2, \quad F = 0, \quad G = \nu, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad \nu \in \{-1, 1\},$$

$$a := \langle c', e' \rangle, \quad a : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti  $p(0) = 0$ ,  $q(0) = 0$ . Nadalje uz preslikavanje parametara definirano kao u teoremu 3.3,  $\alpha(u, v) = (p(u), q(v))$ , ploha  $\tilde{\mathbb{S}}$  s parametrizacijom  $\tilde{x} = x \circ \alpha$  je parametrizirana istim parametrima kao ploha  $\mathbb{S}$ . Prema Teoremu 3.2 preslikavanje ploha  $\mathbb{S}$  i  $\tilde{\mathbb{S}}$   $\alpha$  konformno ako i samo ako postoji funkcija  $\mu : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  (odnosno  $\mu : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}_-$ ) takva da je

$$\tilde{E} = \mu E, \quad \tilde{F} = \mu F, \quad \tilde{G} = \mu G \quad \text{na } I_1 \times I_2.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je funkcija  $\mu$  pozitivna. Uz parametrizaciju  $\tilde{x} = x \circ \alpha$  fundamentalne veličine prvog reda plohe  $\tilde{\mathbb{S}}$  su

$$\tilde{E} = p'^2 + 2q\tilde{a} + q^2\tilde{e}'^2, \quad \tilde{F} = 0, \quad \tilde{G} = q'^2$$

$$\tilde{a} := \left\langle \frac{d\bar{c} \circ p}{du}, \frac{d\bar{e} \circ p}{du} \right\rangle, \quad \tilde{a} : I_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{e} := \bar{e} \circ p, \quad \tilde{e} : I_1 \rightarrow \mathbb{R}_1^3.$$

Stoga za konformno preslikavanje u  $I_1 \times I_2$  dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$(\varepsilon + 2va + v^2e'^2)q'^2 - \nu(p'^2 + 2q\tilde{a} + q^2\tilde{e}'^2) = 0. \quad (3.2)$$

Uz uvjete  $p(0) = 0$ ,  $q(0) = 0$ ,  $p'(0) = \alpha > 0$  derivacijom od (3.2) po  $v$  i  $q''(0) = \beta$  dobivamo  $\tilde{a} = \alpha a + \beta$  slijedi

$$q'^2 + 2q'^2va + q'^2v^2e'^2 - e'^2 - 2q\tilde{a} - q^2\tilde{e}'^2 = 0. \quad (3.3)$$

Analizirajući gornju jednadžbu (3.3), analogno kao u euklidskom slučaju, ([3]) slijedi da s jednadžba ima netrivialno rješenje ako je  $\frac{a}{e'^2} = konst$ , odnosno  $a = konst$ . za cilindrične plohe.

Za vitopere plohe klase  $M_1^1$  strikcijska krivulja je zadana s (1.16). Deriviramo li (1.16), te pomnožimo s  $e$  slijedi

$$\langle s', e \rangle = -\left(\frac{a}{e'^2}\right)'$$

Očito je  $\frac{a}{e'^2} = konst$ . ako i samo ako je  $\langle s', e \rangle = 0$ , tj. ako je strikcijska krivulja plohe ortogonalna trajektorija izvodnica ili ako bazna krivulja degenerira u točku, tj. ako je krivulja konusna. Plohe čija je strikcijska krivulja i ortogonalna trajektorija izvodnice su cilindrične i binormalne pravčaste plohe, tj. plohe s parametrizacijom  $f(u, v) = c(u) + vb(u)$ , gdje je  $b$  binormala krivulje  $c$ . Stoga vrijedi sljedeći teorem

**Teorem 3.4** Za sve pravčaste plohe klase  $M_1^1$ , osim cilindričnih, konusnih i binormalnih ploha, postoji samo trivijalno konformno preslikavanje koje čuva izvodnice plohe.

### 3.1.2 Konformna preslikavanja $M_1^0$

Promotrimo sada konformna preslikavanja pravčastih ploha klase  $M_1^0$ . Pretpostavimo da plohe klase  $M_1^0$  imaju parametrizaciju oblika (3.1). Za plohe klase  $M_1^0$  također vrijedi Teorem (3.3). Nadalje, koeficijenti prve fundamentalne forme plohe  $\mathbb{S}$  s parametrizacijom(3.1) su dane s

$$E = \varepsilon + 2va, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

$$a := \langle c', e' \rangle, \quad a : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Za plohu  $\tilde{S}$  s parametrizacijom  $\tilde{x} = x \circ \alpha$ , gdje je  $\alpha$  konformno preslikavanje ploha  $S$  i  $\bar{S}$  definirano kao u Teoremu 3.3 dobivamo

$$\tilde{E} = p'^2 + 2q\tilde{a}, \quad \tilde{F} = 0, \quad \tilde{G} = q'^2$$

$$\tilde{a} := \left\langle \frac{d\bar{c} \circ p}{du}, \frac{d\bar{e} \circ p}{du} \right\rangle, \quad \tilde{a} : I_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{e} := \bar{e} \circ p, \quad \tilde{e} : I_1 \rightarrow \mathbb{R}_1^3.$$

Uz ovako definirane fundamentalne veličine prvog reda, prema Teoremu 3.3, uz korištenje početnih uvjeta kao za plohe klase  $M_1^1$  za konformno preslikavanje ploha klase  $M_1^0$  dobivamo diferencijalnu jednadžbu oblika

$$a'(vq' - \alpha q) = 0.$$

Rješavajući gornju jednadžbu, dobivamo da je rješenje jednadžbe  $(vq' - \alpha q) = 0$  trivijalno ( $q(v) = \alpha v$ , a po pretpostavci je  $p(u) = \alpha u$ ), dok netrivialno rješenje postoji za plohe za koje vrijedi  $a = konst$ . Unutar klase  $M_1^0$  plohe za koje vrijedi  $\langle c', e' \rangle = konst$ , su konusne plohe, te tzv. helikoidalne plohe. Helikoidalne plohe su plohe koje nastaju tzv. helikoidalnim gibanjem krivulje u prostoru. To je gibanje u kojem krivulja rotira oko neke osi u ravnini i istovremeno vrši pomak u smjeru te osi. Takva ploha klase  $M_1^0$  je konjugat Enneperove plohe, slika 2.9. Stoga vrijedi sljedeći teorem

**Teorem 3.5** Sve pravčaste plohe klase  $M_1^0$ , osim konusnih ploha i konjugata Enneperove plohe, dozvoljavaju samo trivijalno konformno preslikavanje koje čuva izvodnice.

### 3.1.3 Konformna preslikavanja $B$ –namotajnih ploha

Promotrimo sada konformna preslikavanja  $B$ –namotajnih ploha. Budući da u  $\mathbb{R}_1^3$  kut između dva vektora od kojih je jedan svjetlosnog karaktera nije definiran, za konformno preslikavanje  $B$ –namotajnih ploha ne možemo reći da čuva kut između krivulja već govorimo čuva pseudo-skalarni produkt tangencijalnih vektora na način kako je dano u Definiciji 3.1.

$B$ –namotajne plohe su definirane svojom parametrizacijom oblike (1.20), gdje su bazne krivulje ujedno i pseudo-ortogonalne trajektorije izvodnica, tj. vrijedi  $\langle c', B \rangle = 1$ .

Neka su  $S$  i  $\bar{S}$   $B$ –namotajne plohe,  $\alpha : S \rightarrow \bar{S}$  konformno preslikavanje definirano kao u Teoremu 3.3, te  $\tilde{S}$  ploha definirana parametrizacijom  $\tilde{x} = \bar{x} \circ \alpha$ , kao u prethodnim

odjeljcima. Tada su koeficijenti prve fundamentalne forme plohe  $\mathbb{S}$ , odnosno  $\tilde{\mathbb{S}}$  dani s

$$E = k_3^2 v^2, \quad F = 1, \quad G = 0,$$

odnosno

$$\tilde{E} = \bar{k}_3^2 q^2 p'^2, \quad \tilde{F} = q' p', \quad \tilde{G} = 0.$$

Stoga za konformno preslikavanje između ploha  $\mathbb{S}$  i  $\tilde{\mathbb{S}}$  koje čuva izvodnice za  $v \neq 0$  uz uvjet teorema (3.3) vrijedi diferencijalna jednačba

$$k_3^2 v^2 q' - q^2 \bar{k}_3^2 \alpha = 0. \tag{3.4}$$

Rješenje jednačbe (3.4) dano je s

$$q(v) = v - a \ln |v + a|, \quad a = \frac{\bar{k}_3^2 \alpha}{k_3}$$

uz pretpostavku  $k_3 \neq 0, \bar{k}_3 \neq 0$ . Stoga slijedi sljedeći teorem

**Teorem 3.6** Svaka  $B$ -namotajna ploha s  $k_3 \neq 0$  dozvoljava netrivialno konformno preslikavanje.

# Ekviarealna preslikavanja pravčastih ploha u $\mathbb{R}_1^3$

## 4.1 Ekviarealna preslikavanja ploha u $\mathbb{R}_1^3$

Ekviarealna preslikavanja ploha su preslikavanja koja čuvaju površinu dijela plohe. U euklidskom prostoru površina dijela plohe je definirana s  $\Delta(u, v) = \sqrt{(EG - F^2)}$ , te stoga između ploha  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  postoji ekviarealno preslikavanje ako vrijedi  $EG - F^2 = \overline{EG} - \overline{F^2}$ , kada su plohe parametrizirane istim skupom parametara.

U  $\mathbb{R}_1^3$ , prema [52], površina dijela plohe je definirana s  $\Delta(u, v) = \sqrt{|EG - F^2|}$ , te analogno slijedi da između ploha  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  postoji ekviarealno preslikavanje ako vrijedi  $|EG - F^2| = |\overline{EG} - \overline{F^2}|$  (kada su plohe parametrizirane istim skupom parametara). Uz ovakvu definiciju slijedi da ekviarealna preslikavanja možemo promatrati između ploha različitog kauzalnog karaktera, no ovdje se ograničavamo na ekviarealna preslikavanja među plohami s istim kauzalnim karakterom, odnosno preuzimamo definiciju iz euklidskog prostora.

**Definicija 4.1**  $C^r$ -preslikavanje  $f : \mathbb{S} \rightarrow \bar{\mathbb{S}}$ ,  $r \geq 1$  za koje vrijedi

$$\bar{\Delta}(u, v) = \overline{EG} - \overline{F^2} = EG - F^2 = \Delta(u, v),$$

kada su plohe  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  parametrizirane na istom skupu parametara naziva se ekviarealno preslikavanje ploha

Ekviarealno preslikavanje  $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$  čuva izvodnice pravčastih ploha uz uvjet  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = 0$ , tj.  $\varphi_1(u, v) = p(u)$ , gdje je  $p : I \rightarrow \bar{I}$  glatka funkcija. Zaista, pretpostavimo li da je preslikavanje parametara dano s  $\bar{u} = \varphi_1(u, v)$ ,  $\bar{v} = \varphi_2(u, v)$  zbog uvjeta čuvanja izvodnica možemo pretpostaviti da se  $u = u_0$  preslika u  $\bar{u} = \bar{u}_0$ . Tada je  $\bar{u}_0 = \varphi_1(u_0, v)$  i  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = 0$ .

### 4.1.1 Ekviarealna preslikavanja ploha klase $M_1^1$

Promotrimo sada ekviarealna preslikavanja za pravčaste plohe klase  $M_1^1$ , te pretpostavimo da je bazna krivulja plohe njezina strikcijska krivulja, tj. ploha  $\mathbb{S}$  ima parametrizaciju oblika 1.17. Uz uvjet da ploha nije cilindrična vrijedi sljedeći teorem

**Teorem 4.2** Pravčasta ploha tipa  $S_1$  s zakrivljenošću  $\kappa \neq 0$  na  $I$  dozvoljava difeomorfizam koji čuva izvodnice i površinu dijela plohe na otvorenu poluravninu paralelnih pravaca.

*Dokaz.* Površina dijela plohe tipa  $S_1$  dana je s

$$\Delta(u, v) = EG - F^2 = 1 - v\kappa^2 - \cos^2 \sigma = \sin^2 \sigma - v\kappa^2 = d^2\kappa^2 - v^2\kappa^2 = \kappa^2(d^2 - v^2),$$

gdje su  $\kappa, \sigma, d$  redom zakrivljenost, strikcija, odnosno parametar distribucije plohe  $\mathbb{S}$ . Budući da je ploha  $\mathbb{S}$  prostorna, vrijedi  $(d^2 - v^2) > 0$ . Globalno preslikavanje  $\psi : I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{I} \times \mathbb{R}_+, 0 \in I$  dano s

$$\bar{u} = \int_0^u \kappa(t) dt, \quad \bar{v} = (d^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}$$

je zbog  $\kappa > 0$ , odnosno  $(d^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} > 0$  bijekcija. Nadalje, vrijedi

$$\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| = \kappa(d^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} > 0$$

i stoga je

$$\varphi := \psi^{-1} : \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow I \times \mathbb{R}_+$$

difeomorfizam  $\bar{\Delta}(u, v) \circ \psi = \Delta(u, v) \left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right|^{-2} = 1$ , što je jednako  $\bar{\Delta}(\bar{u}, \bar{v})$  otvorene poluravnine  $y$ -paralelnih pravaca parametriziranoj s  $x = \bar{u}, y = \bar{v}$ .  $\square$

Analogan teorem vrijedi i za vremenske pravčaste plohe,

**Teorem 4.3** Pravčasta ploha tipa  $S_2$  (odnosno  $S_3$ ) s zakrivljenošću  $\kappa \neq 0$  na  $I$  dozvoljava difeomorfizam koji čuva izvodnice i površinu dijela plohe na otvorenu poluravninu paralelnih pravaca.

*Dokaz.* Površina dijela plohe tipa  $S_2, (S_3)$  dana je s

$$\Delta(u, v) = -(EG - F^2) = \text{sh}^2 \sigma + 1 + v^2\kappa^2 = \text{ch}^2 \sigma + v^2\kappa^2 = d^2\kappa^2 + v^2\kappa^2 = \kappa^2(d^2 + v^2).$$

Budući da je ploha  $\mathbb{S}$  vremenska, vrijedi  $d^2 + v^2 > 0$ . Globalno preslikavanje  $\psi : I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{I} \times \mathbb{R}_+, 0 \in I$  dano s

$$\bar{u} = \int_0^u \kappa(t) dt, \quad \bar{v} = (d^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

je zbog  $\kappa > 0$ , odnosno  $(d^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} > 0$  bijekcija. Nadalje, vrijedi

$$\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| = \kappa(d^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} > 0$$

i stoga je

$$\varphi := \psi^{-1} : \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow I \times \mathbb{R}_+$$

difeomorfizam  $\bar{\Delta}(u, v) \circ \psi = \Delta(u, v) \left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right|^{-2} = 1$ , što je jednako  $\bar{\Delta}(\bar{u}, \bar{v})$  otvorene poluravnine  $y$ -paralelnih pravaca parametriziranoj s  $x = \bar{u}, y = \bar{v}$ .  $\square$

Iz prethodnih teorema smo uvjetom  $\kappa \neq 0$  isključili cilindrične plohe. Međutim, prisjetimo li se da su cilindrične plohe razvojne plohe slijedi da se one mogu preslikati na ravninu pri čemu se ortogonalne trajektorije preslikaju na  $x$ -os.

Promotrimo sad preslikavanje dano s

$$(u, v) \in \mathbb{R}_1^2 \mapsto (\bar{u} = a(u), \bar{v} = b(u, v)) \in \mathbb{R}_1^2 \quad (4.1)$$

pri čemu su  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $b : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$  glatke funkcije. Tada zbog  $\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \frac{da}{du} \frac{\partial b}{\partial v}$  i  $\Delta(u, v) = \Delta(\bar{u}, \bar{v}) = 1$ , nužno vrijedi

$$\frac{da}{du} \frac{\partial b}{\partial v} = 1. \quad (4.2)$$

Uvođenjem funkcije  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zbog 4.2 i 4.1 slijedi

$$\bar{u} = a(u), \quad \bar{v} = \pm \frac{1}{a'} v + p(u), \quad a' = \frac{da}{dx}.$$

Zadamo li sada u dvije ravnine bazne krivulje  $c$ , odnosno  $\bar{c}$  poluravnina paralelnih pravaca kao graf  $C^1$ -funkcije  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , odnosno  $\bar{z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , koje možemo parametrizirati s  $u \mapsto (u, z(u))$ , odnosno  $\bar{u} \mapsto (\bar{u}, \bar{z}(\bar{u}))$  i  $C^1$ -difeomorfizam koji preslikava  $c$  u  $\bar{c}$  kojeg definiramo s  $\bar{u} = a(u)$ ,  $a \neq 0$ , prema (4.2), difeomorfizam ploha je jedinstven za unaprijed zadan rast parametara na slici izvodnica. Time je dokazan sljedeći teorem

**Teorem 4.4** Za svake dvije plohe  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  kao u gornjim teoremima postoji jedinstven difeomorfizam ploha  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  koji čuva izvodnice i površinu dijela plohe i koji je proširenje difeomorfizma baznih krivulja od  $\mathbb{S}$ , odnosno  $\bar{\mathbb{S}}$  i ima unaprijed zadani rast parametara na slici izvodnica.

## 4.1.2 Ekviarealna preslikavanja ploha klase $M_1^0$

Sada promotrimo ekviarealna preslikavanja pravčastih ploha klase  $M_1^0$ . Za njih je površina dijela plohe dana s

$$\Delta(u, v) = EG - F^2 = R + 2Qv.$$

Sada prema  $K = \frac{(R + 2Qv)^2}{Q^2}$  slijedi da je površina dijela plohe dana s  $\Delta(u, v) = \sqrt{K}Q$ . Stoga za pravčaste plohe klase  $M_1^0$  difeomorfizam koji čuva površinu dijela plohe, kao i izvodnice zadan je sljedećim teoremom,

**Teorem 4.5** Pravčasta ploha klase  $M_1^0$  dozvoljava difeomorfizam koji čuva izvodnice i površinu dijela plohe na otvorenu poluravninu paralelnih pravaca.

*Dokaz.* Definiramo globalno preslikavanje  $\psi : I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{I} \times \mathbb{R}_+, 0 \in I$

- za prostorne plohe s

$$\bar{u} = \int_0^u, \bar{v} = Q^{\frac{1}{2}}v,$$

odnosno za

- za vremenske plohe s

$$\bar{u} = \int_0^u, \bar{v} = -Q^{\frac{1}{2}}v.$$

koje je zbog  $K^{\frac{1}{4}} > 0$ , te  $Q^{\frac{1}{2}} > 0$ , odnosno  $Q^{\frac{1}{2}} < 0$  bijekcija. Nadalje, vrijedi

$$\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| = 0$$

i stoga je

$$\varphi := \psi^{-1} : \bar{I} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow I \times \mathbb{R}_+$$

difeomorfizam  $\bar{\delta}(u, v) \circ \psi = \Delta(u, v) \left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right|^{-2} = 1$ , što je jednako  $\bar{\Delta}(\bar{u}, \bar{v})$  otvorene poluravnine  $y$ -paralelnih pravaca parametriziranoj s  $x = \bar{u}, y = \bar{v}$ .  $\square$

Za plohe klase  $M_1^0$  također vrijedi Teorem 4.4.



### 4.1.3 Ekviarealna preslikavanja $B$ –namotajnih ploha

Promotrimo sada preslikavanja koja čuvaju površinu dijela  $B$ –namotajne plohe. Kako je ranije navedeno, fundamentalne veličine prvog reda  $B$ –namotajne plohe su dane s  $E = k_3^2 v^2$ ,  $F = 1$ ,  $G = 0$  te je stoga  $\Delta(u, v) = |EG - F^2| = 1$ . Dakle, površina dijela  $B$ –namotajne plohe je uvijek jednaka 1. Stoga očito vrijedi sljedeći teorem

**Teorem 4.6** Za svake dvije  $B$ –namotajne plohe postoji difeomorfizam koji čuva izvodnice i površinu dijela plohe. Specijalno, postoji difeomorfizam  $B$ –namotajne plohe na ravninu paralelnih pravaca.

Ponovno, kao za ne-nul pravčaste plohe, vrijedi Teorem (4.4).

# Izometrije pravčastih ploha u $\mathbb{R}_1^n$

## 5.1 n-dimenzionalni Minkowskijev prostor $\mathbb{R}_1^n$

Minkowskijev prostor  $\mathbb{R}_1^n$  je  $n$ -dimenzionalni vektorski prostor  $\mathbb{R}^n$  s pseudo-skalarnim produktom definiranim s

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Analogno kao u  $\mathbb{R}_1^3$ , vektor  $v \in \mathbb{R}_1^n$  zovemo prostornim ako je  $\langle v, v \rangle > 0$  ili  $v = 0$ , vremenskim ako je  $\langle v, v \rangle < 0$ , odnosno svjetlosnim ako je  $\langle v, v \rangle = 0$  i  $v \neq 0$ , ([36]). Slično, proizvoljna krivulja  $\alpha \in \mathbb{R}_1^n$  je prostornog (vremenskog, svjetlosnog) karaktera u točki  $t$  ako je vektor  $\alpha'(t)$  prostornog (vremenskog, svjetlosnog) karaktera. Norma vektora  $v \in \mathbb{R}_1^n$  je dana s  $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ .

Nadalje, neka je  $U$  potprostor od  $\mathbb{R}_1^n$  i označimo s  $\langle, \rangle_U$  induciranu metriku na  $U$  :  $\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle$ ,  $u, v \in U$ . Potprostor  $U$  se naziva prostornim (vremenskim, svjetlosnim) ako je inducirana metrika pozitivno definitna (nedegenerirana indeksa 1, odnosno degenerirana), ([44]).

Neka je  $\Gamma$  skup svih vremenskih vektora u  $\mathbb{R}_1^n$ . Za  $v \in \Gamma$  skup

$$C(v) = \{w \in \Gamma : \langle v, w \rangle < 0\}$$

nazivamo vremenskim konusom prostora  $\mathbb{R}_1^n$ , ([44]).

Neka su  $x$  i  $y$  dva vremenska vektora u  $\mathbb{R}_1^n$ . Ako se vektori  $x$  i  $y$  nalaze u istom vremenskom konusu, tada postoji jedinstveni ne-negativan realni broj  $\theta \geq 0$  takav da

$$\langle x, y \rangle = -\|x\|\|y\| \operatorname{ch} \theta,$$

pri čemu se broj  $\theta$  naziva kutom između vremenskih vektora, ([44]).

Neka su  $x$  i  $y$  prostorni vektori u  $\mathbb{R}_1^n$  koji razapinju prostorni potprostor. Tada postoji

jedinstveni realan broj  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \Pi$  takav da

$$\langle x, y \rangle = -\|x\| \|y\| \cos \theta,$$

pri čemu se broj  $\theta$  naziva Lorentzovim prostornim kutom između vektora  $x$  i  $y$ , ([47]).

Neka su  $x$  i  $y$  prostorni vektori u  $\mathbb{R}_1^n$  koji razapinju vremenski potprostor. Tada postoji jedinstveni realan broj  $\theta > 0$  takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \operatorname{ch} \theta,$$

pri čemu se broj  $\theta$  naziva Lorentzovim vremenskim kutom između vektora  $x$  i  $y$ , ([47]).

Neka je  $x$  prostorni, a  $y$  vremenski vektor u  $\mathbb{R}_1^n$ . Tada postoji jedinstveni realan broj  $\theta \geq 0$  takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \operatorname{sh} \theta,$$

pri čemu se broj  $\theta$  naziva Lorentzovim vremenskim kutom između vektora  $x$  i  $y$ , ([47]).

## 5.2 Pravčaste plohe u $\mathbb{R}_1^n$

Promotrimo sada pravčaste plohe u  $\mathbb{R}_1^n$ . Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoren interval i neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$   $C^1$ -krivulja dana svojim parametarskim prikazom  $c$ . Neka je nadalje na  $I$  zadana jednoparametarska familija  $m$ -dimenzionalnih potprostora  $E_k(u) \subset \mathbb{R}_1^n$ ,  $t \in I$ ,  $1 \leq k \leq n - 2$ .

Neka je u potprostoru  $E_k(u)$  zadana ortonormirana baza  $\{e_1(u), \dots, e_k(u)\}$  pri čemu su  $e_i : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ , funkcije klase  $C^1$  na  $I$ .

**Definicija 5.1** Skup točaka  $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}_1^n$  dan parametarskim prikazom

$$x(u, v_1, \dots, v_k) = c(u) + \sum_{i=1}^k v_i e_i, \quad u, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

pri čemu vrijedi

$$\operatorname{rang}(x_u, x_{v_1}, \dots, x_{v_k}) = \operatorname{rang}(c' + \sum_{i=1}^k v_i e_i', e_1, \dots, e_k) = k + 1$$

predstavlja jednu regularnu  $(k + 1)$ -dimenzionalnu  $C^1$ -plohu u  $\mathbb{R}_1^n$  koju nazivamo  $(k + 1)$ -pravčasta ploha. Krivulju  $c$  nazivamo baznom krivuljom (ravnalicom), a prostor  $E_k(u)$  prostorom izvodnica od  $\mathbb{S}$ .

Primijetimo da su 2-pravčaste plohe uobičajene pravčaste plohe generirane pravcima nanesenima na neku krivulju.

U  $\mathbb{R}_1^n$  razlikujemo prostorne, vremenske, te svjetlosne  $(k + 1)$ –dimenzionalne plohe. Iz razmatranja isključujemo svjetlosne plohe. Također ćemo promatrati samo plohe čiji prostor izvodnica, niti bazna krivulja nisu svjetlosnog karaktera.

Prostorna  $(k + 1)$ –pravčasta ploha je ploha s baznom krivuljom, odnosno prostorom izvodnica prostornog karaktera, dok vremenska  $(k + 1)$ –pravčasta ploha nastaje nanesimo li na vremensku (prostornu) baznu krivulju prostor izvodnica koji je prostornog (vremenskog) karaktera. Kao i u  $\mathbb{R}_1^3$ , prostorne  $(k + 1)$ –pravčaste plohe ćemo zvati pravčaste plohe tipa  $S_1$ , dok je vremenska ploha s prostornom (vremenskom) baznom krivuljom i vremenskim (prostornim) prostorom izvodnica tipa  $S_2$  ( $S_3$ .)

Uz vektore izvodnica  $e_1(u), \dots, e_k(u)$  promatramo i njihove derivacije  $e'_1(u), \dots, e'_k(u)$ , te definiramo asimptotski svežanj plohe  $\mathbb{S}$  s obzirom na  $E_k(t)$  s

$$A(u) = \text{span}\{e_1(u), \dots, e_k(u), e'_1(u), \dots, e'_k(u)\}.$$

Ovdje pretpostavljamo da vrijedi

$$\dim A(u) = k + m, \quad 0 \leq m \leq k,$$

te postoji ortonormirana baza od  $A(u)$  koju označavamo s

$$\{e_1(u), \dots, e_k(u), a_{k+1}(u), \dots, a_{k+m}(u)\}.$$

Asimptotski svežanj je istog kauzalnog karaktera kao i prostor izvodnica.

Tangencijalna  $(k + 1)$ –ravnina regularne  $(k + 1)$ –pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  u točki  $P(v_1, \dots, v_k)$  prostora izvodnica  $E_k(u)$  razapeta je vektorima  $\{c + \sum_{i=1}^k v_i e'_i, e_1, \dots, e_k\}_P$ . Stoga tangencijalna  $(k + 1)$ –ravnina plohe  $\mathbb{S}$  u svim točkama  $P$  nekog fiksnog prostora izvodnica  $E_k(u)$  leže u prostoru

$$T(u) = \text{span}\{c', e'_1, \dots, e'_k, e_1, \dots, e_k\}.$$

Prostor  $T(u)$  nazivamo tangencijalnim svežnjem od  $\mathbb{S}$  u  $\mathbb{R}_1^n$ .

Asimptotski svežanj od  $\mathbb{S}$  u  $\mathbb{R}_1^n$  je potprostor tangencijalnog svežnja  $T(u)$  koji je razapet tangencijalnim  $(k + 1)$ –ravninama u beskonačno dalekim točkama od  $E_k(u)$ . Prema tome vrijedi

$$k + m \leq \dim T(u) \leq k + m + 1, \quad 0 \leq m \leq k.$$

Nadalje, razlikujemo dva slučaja:

1. Neka je  $\dim T(u) = k + m$ . Tada su i asimptotski svežanj i tangencijalni svežanj razapeti vektorima  $e_1(u), \dots, e_k(u), a_{k+1}(u), \dots, a_{k+m}(u)$ .
2. Neka je  $\dim T(u) = k + m + 1$ . U ovom slučaju, skup vektora  $e_1(u), \dots, e_k(u), a_{k+1}(u), \dots, a_{k+m+1}(u)$  je ortonormirana baza tangencijalnog svežnja  $T(u)$ .

Ako je  $\dim T(u) = k + m$ , tada  $(k + 1)$ -pravčasta ploha  $\mathbb{S}$  ima  $(k - m)$ -dimenzionalni potprostor koji nazivamo grebenski prostor od  $\mathbb{S}$  i označavamo s  $K_{k-m}(u)$ . Grebenski prostor  $K_{k-m}(u) \subset E_k(u)$  plohe tipa  $S_3$  je prostornog karaktera, dok za plohe tipa  $S_2$  može biti vremenskog ili prostornog karaktera.

Izaberemo li grebenski prostor  $K_{k-m}(u)$  za prostor izvodnica, te ga nanesimo na baznu krivulju  $c$  plohe  $\mathbb{S}$  generiramo  $(k - m + 1)$ -pravčastu plohu koju sadrži ploha  $\mathbb{S}$ . Ova ploha se naziva grebenska pravčasta ploha i njezin kauzalni karakter odgovara kauzalnom karakteru grebenskog prostora.

Ako je  $\dim T(u) = k + m + 1$ , tada  $(k + 1)$ -pravčasta ploha ima  $(k - m)$ -dimenzionalni potprostor koji se naziva strikcioni (centralni) potprostor od  $\mathbb{S}$  i označava s  $Z_{k-m}(u) \subset E_k(u)$ . Za pravčaste plohe tipa  $S_2$  prostor  $Z_{k-m}$  je ili vremenskog ili prostornog karaktera, dok je za plohe tipa  $S_3$  prostornog karaktera.

Izaberemo li strikcionu prostor  $Z_{k-m}(u)$  za prostor izvodnica i nanesimo ga na baznu krivulju  $c$  plohe  $\mathbb{S}$ , definiramo  $(k - m + 1)$ -pravčastu plohu sadržanu u  $\mathbb{S}$  koju zovemo strikciona (centralna) pravčasta ploha i označavamo s  $\Omega$ . Za pravčaste plohe tipa  $S_2$  ploha  $\Omega$  je ili prostornog ili vremenskog karaktera, dok je za plohe tipa  $S_3$  vremenskog karaktera. Za bazne vektore prostora  $E_k(u)$  vrijede sljedeće jednadžbe

$$e'_\sigma = \sum_{\mu=1}^k c_{\sigma\mu} e_\mu + \kappa_\sigma a_{k+\sigma}, \quad 1 \leq \sigma \leq m$$

$$e'_{m+\rho} = \sum_{\mu=1}^k c_{(m+\rho)\mu} e_\mu, \quad 1 \leq \rho \leq k - m,$$

gdje je  $c_{i\mu} = -c_{\mu i}$  i  $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_m > 0$ .

Neka je  $\mathbb{S}$  pravčasta ploha u  $\mathbb{R}_1^n$  sa strikcionom pravčastom plohom  $\Omega$ . Glavna zraka  $h_\sigma = \text{span}\{e_\sigma\}$ ,  $1 \leq \sigma \leq m$  generira  $m$  2-dimenzionalnih pravčastih ploha duž bazne krivulje  $c(u)$  strikcione plohe  $\Omega$  koje se nazivaju glavne zrakaste plohe od  $\mathbb{S}$ , a parametarski su zadane s

$$\phi_\sigma(u, v) = c(u) + v e_\sigma(u), \quad 1 \leq \sigma \leq m, \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

Za plohe tipa  $S_3$  glavna zrakasta ploha  $\phi_\sigma$  je vremenskog karaktera. Za plohe tipa  $S_2$  vrijedi sljedeće:

Ako je strikciona ploha  $\Omega$  vremenska, nanesimo li prostorni vektor  $h_\sigma$ ,  $1 \leq \sigma \leq m$ , duž prostorne krivulje  $c$  generiramo  $m$  glavnih zrakastih ploha koje su prostornog karaktera. Ako je strikciona ploha  $\Omega$  prostorna, tada je jedan od vektora  $h_\sigma$ ,  $1 \leq \sigma \leq m$  vremenski, a  $(m - 1)$  vektora je prostornog karaktera. Tada nanesimo li vektor  $h_\sigma$  na krivulju  $r$  generirali smo jednu vremensku i  $(m - 1)$  prostornih glavnih zrakastih ploha. Ako je  $(k + 1)$ -pravčasta ploha cilindar (tj.  $m = 0$ ) tada ne postoji glavna zrakasta ploha od  $\mathbb{S}$ .

Bazna krivulja  $c$   $(k + 1)$ -pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  je bazna krivulja grebenske ili strikcione plohe

$\Omega \subset \mathbb{S}$  ako i samo ako tangencijalni vektor ima oblik

$$c'(u) = \sum_{v=1}^k \zeta_v e_v + \eta_{m+1} a_{k+m+1},$$

pri čemu je  $\eta_{m+1} \neq 0$ , a  $a_{k+m+1}$  je jedinični vektor definiran do na predznak uvjetom da je skup vektora  $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$  ortonormirana baza tangencijalnog svežnja od  $\mathbb{S}$ . Pokazano je da vrijedi  $\eta_{m+1} = 0$  u  $u \in I$  ako i samo ako prostor izvodnica  $E_k(u)$  sadrži grebenski prostor  $K_{k-m}(u)$ , [51].

Za  $\eta_{m+1} \neq 0$  definiramo  $m$ -magnitudo, odnosno  $\sigma$ . parametar distribucije (vitoperost) kao

$$P_\sigma = \frac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}, \quad 1 \leq \sigma \leq m. \quad (5.2)$$

Štoviše, u [51] parametar distribucije  $(k+1)$ -pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  dan je s

$$P = \sqrt[m]{|P_1 \cdots P_m|}. \quad (5.3)$$

Kanonska baza tangencijalnog svežnja pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  dana je s, ([16])

$$\left\{ \sum_{v=1}^k (\zeta_v + \sum_{\mu} c_{v\mu} u_\mu) e_v + \sum_{\sigma=1}^m u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}, e_1, \dots, e_k \right\}.$$

Radi jednostavnijeg zapisa neka je  $u_0 = u$ , te su koeficijenti metrike na  $\mathbb{S}$  dani s

$$g_{00} = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad g_{v0} = \langle \varphi_{u_v}, \varphi_u \rangle, \quad g_{v\mu} = \langle \varphi_{u_v}, \varphi_{u_\mu} \rangle, \quad 1 \leq v, \mu \leq k.$$

Nadalje, u slučaju  $\dim T(u) = k + m + 1$ , tj. kada je  $a_{k+m+1}$  vremenski vektor dobivamo

$$g_{00} = \sum_{v=1}^k (\zeta_v + \sum_{\mu=1}^k c_{v\mu} u_\mu)^2 + \sum_{\sigma=1}^m (u_\sigma \kappa_\sigma)^2 - (\eta_{m+1})^2,$$

$$g_{v0} = \zeta_v + \sum_{\mu=1}^k c_{v\mu} u_\mu, \quad 1 \leq v \leq k,$$

$$g_{v\mu} = \delta_{v\mu}, \quad 1 \leq v, \mu \leq k.$$

Stoga je  $[g_{ij}] =$

$$\begin{bmatrix} \sum_{v=1}^k (\zeta_v + \sum_{\mu=1}^k c_{v\mu} u_\mu)^2 + \sum_{\sigma=1}^m (u_\sigma \kappa_\sigma)^2 - (\eta_{m+1})^2 & \zeta_1 + \sum_{\mu=1}^k c_{1\mu} u_\mu & \zeta_2 + \sum_{\mu=1}^k c_{2\mu} u_\mu & \cdots & \zeta_k + \sum_{\mu=1}^k c_{k\mu} u_\mu \\ \zeta_1 + \sum_{\mu=1}^k c_{1\mu} u_\mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \zeta_2 + \sum_{\mu=1}^k c_{2\mu} u_\mu & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_k + \sum_{\mu=1}^k c_{k\mu} u_\mu & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Iz zadnje jednadžbe dobivamo

$$g = \det[g_{ij}] = \sum_{\sigma=1}^m (u_{\sigma} \kappa_{\sigma})^2 - \eta_{m+1}^2, \quad 0 \leq i, j \leq k, \quad (5.4)$$

te slijedi

$$\begin{aligned} g_{00} &= g + \sum_{v=1}^k (\zeta_v + \sum_{\mu=1}^k c_{v\mu} u_{\mu})^2, \\ g_{v0} &= \zeta_v + \sum_{\mu=1}^k c_{v\mu} u_{\mu}, \\ g_{v\mu} &= \delta_{v\mu}. \end{aligned}$$

Christoffelovi simboli za  $1 \leq v, \mu, \lambda \leq k$  su dani s

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2g} \left[ \frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{v=1}^k (\zeta_v + \sum_{\mu=1}^k c_{v\mu} u_{\mu}) \frac{\partial g}{\partial u_v} \right], \\ \Gamma_{00}^{\lambda} &= \frac{1}{2g} \left[ -(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^k c_{\lambda\mu} u_{\mu}) \left( \frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{v=1}^k (\zeta_v + \sum_{\mu=1}^k c_{v\mu} u_{\mu}) \frac{\partial g}{\partial u_v} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2g \left( (\zeta'_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^k c_{\lambda\mu} u_{\mu}) + \sum_{v=1}^k (\zeta_v + \sum_{\mu=1}^k c_{v\mu} u_{\mu}) c_{\lambda v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}} \right) \right] \\ \Gamma_{v\mu}^0 &= \Gamma_{\mu v}^0 = 0, \\ \Gamma_{v\mu}^{\lambda} &= \Gamma_{\mu v}^{\lambda} = 0, \\ \Gamma_{\lambda 0}^0 &= \Gamma_{0\lambda}^0 = \frac{1}{2g} - \frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}}, \\ \Gamma_{v0}^{\lambda} &= \Gamma_{0v}^{\lambda} = \frac{1}{2g} \left[ -(\zeta_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^k c_{\lambda\mu} u_{\mu}) \frac{\partial g}{\partial u_v} + 2g(c_{\lambda v}) \right]. \end{aligned}$$

Uzmemo li za bazu tangencijalnog prostora u okolini točke s koordinatama  $(u_0, u_1, \dots, u_k)$  skup  $\{\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_k\}$ ,  $(\frac{\partial}{\partial u_i} = \partial_i, 0 \leq i \leq k)$  Riemannov tenzor zakrivljenosti  $(k+1)$ -pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  dan je s

$$R_{\partial_i \partial_j}(\partial_l) = \sum_{r=0}^k R_{lij}^r \partial_r,$$

pri čemu su koeficijenti Riemannovog tenzora zakrivljenosti dani s

$$R_{lij}^r = \frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jl}^r - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{il}^r - \sum_{S=0}^k \Gamma_{il}^S \Gamma_{jS}^r + \sum_{S=0}^k \Gamma_{jl}^S \Gamma_{iS}^r.$$

Stoga Riemann-Christoffelov tenzor zakrivljenosti postaje

$$R_{hlij} = \sum_{r=0}^k g_{rh} \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jl}^r - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{il}^r \right) - \sum_{S=0}^k \Gamma_{il}^S \Gamma_{jS}^r + \sum_{S=0}^k \Gamma_{jl}^S \Gamma_{iS}^r.$$

### 5.3 Lokalne izometrije pravčastih ploha u $\mathbb{R}_1^n$

Za lokalnu izometriju ploha u  $\mathbb{R}_1^n$  također vrijedi definicija (2.3), tj. lokalna izometrija ploha je preslikavanje koje čuva pseudo-skalarni produkt tangencijalnih vektora na plohi. Analogno kao u  $\mathbb{R}_1^3$ , lokalna izometrija  $(k+1)$ –pravčastih ploha  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  pri kojoj se prostor izvodnica plohe  $\mathbb{S}$  preslika na prostor izvodnica plohe  $\bar{\mathbb{S}}$  naziva se Mindingova izometrija.

Ako su  $(k+1)$ –pravčaste plohe parametrizirane na istom skupu, tada lokalna izometrija čuva prostor izvodnica, kao i bazne krivulje ploha.

Prema (5.4) slijedi da se metrika na  $(k+1)$ –pravčastoj plohi ne mijenja s promjenom predznaka od  $\eta_{m+1}$ , odnosno s promjenom predznaka od  $\kappa_i$ . Štoviše, vrijedi sljedeći teorem

**Teorem 5.2** Apsolutna vrijednost  $i$ -tog parametra distribucije  $(k+1)$ –pravčaste plohe je invarijanta Mindingove izometrije.

*Dokaz.* Pretpostavimo da su  $(k+1)$ –pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  i  $\bar{\mathbb{S}}$  parametrizirane na istom skupu parametara. Budući Mindingova izometrija čuva bazne krivulje strikcionih ploha, te kao lokalna izometrija čuva pseudo-skalarni produkt tangencijalnih vektora plohe slijedi

$$\sum_{v=1}^k (\zeta_v)^2 - (\eta_{m+1})^2 = \sum_{v=1}^k (\tilde{\zeta}_v)^2 - (\tilde{\eta}_{m+1})^2.$$

Vrijedi i  $g_{v0} = \bar{g}_{v0}$ ,  $v = 1, \dots, k$  odnosno  $g_{v0} = \zeta_v = \bar{\zeta}_v = \bar{g}_{v0}$  za sve  $v = 1, \dots, k$  dobivamo

$$(\eta_{m+1})^2 = (\bar{\eta}_{m+1})^2. \quad (5.5)$$

Izjednačavanjem metrika  $g$  i  $\bar{g}$

$$g = \sum_{\sigma=1}^m (u_\sigma \kappa_\sigma)^2 - \eta_{m+1}^2 = \sum_{\sigma=1}^m (u_\sigma \bar{\kappa}_\sigma)^2 - \bar{\eta}_{m+1}^2$$

zbog 5.5 slijedi

$$(\kappa_i)^2 = (\bar{\kappa}_i)^2 \quad \text{za sve } i = 1, \dots, m. \quad (5.6)$$

Sada zbog (5.5) i (5.6) prema formuli (5.2) očito vrijedi tvrdnja teorema.  $\square$



Kao posljedicu gornjeg teorema dobivamo sljedeći korolar

**Korolar 5.3** Parametar distribucije  $(k + 1)$ –pravčaste plohe je invarijanta Mindingove izometrije.

*Dokaz.* Budući da je parametar distribucije  $(k + 1)$ –pravčaste plohe dan s (5.3), prema teoremu (5.2) tvrdnja slijedi. □

Dvodimenzionalni potprostor  $\Pi$   $(k + 1)$ –pravčaste plohe u točki  $\xi \in T_{\mathbb{S}}$  se naziva tangencijalna ravnina plohe  $\mathbb{S}$  u točki  $\xi$ . Ako vektori  $x$  i  $y$  čine bazu tangencijalne ravnine  $\Pi$ , tada je  $P(x, y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 \neq 0$  ako i samo ako je  $\Pi$  nedegeneriran prostor.  $P(x, y)$  predstavlja kvadrat Lorentzove površine paralelograma određenog s  $x$  i  $y$ . Koristeći kvadrat Lorentzove površine paralelograma određenog s baznim vektorima  $\{x, y\}$ , imamo sljedeću klasifikaciju tangencijalne ravnine pravčaste plohe:

1.  $P(x, y) > 0$  prostorna ravnina,
2.  $P(x, y) < 0$  vremenska ravnina,
3.  $P(x, y) = 0$  degenerirana ravnina.

Za ne-degeneriranu tangencijalnu ravninu  $\Pi$  zadanu bazom  $\{x, y\}$  od  $\mathbb{S}$  u točki  $\xi$

$$K_{\xi}(x, y) = \frac{\langle R_{xy}x, y \rangle}{P(x, y)} = \frac{\sum R_{ijkm} \beta_i \gamma_j \beta_k \gamma_m}{P(x, y)}$$

se naziva ravninska zakrivljenost plohe  $\mathbb{S}$  u točki  $\xi$ , pri čemu su  $x = (\beta_0, \dots, \beta_k)$ ,  $y = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)$ , ([43]).

Vektor normale

$$n = \sum_{\sigma=1}^m u_{\sigma} \kappa_{\sigma}(u) a_{k+\sigma}(u) + \eta_{m+1} a_{k+m+1}(u), \quad \eta_{m+1} \neq 0$$

je vremenski ili prostorni vektor. To znači da je tangencijalna ravnina  $(e_v, n)$ ,  $1 \leq v \leq k$  u točki  $\xi \in \mathbb{S}$  vremenskog ili prostornog karaktera. Ovako zadana ravnina se naziva  $v$ –ta glavna tangencijalna ravnina od  $\mathbb{S}$ . Neovisno o tome je li  $v$ –ta glavna tangencijalna ravnina vremenska ili prostorna, vrijedi sljedeći teorem, ([16]):

**Teorem 5.4** Neka je  $\mathbb{S}$   $(k + 1)$ –pravčasta ploha sa strikcionom pravčastom plohom i neka je  $n$  nedegenerirani vektor normale u  $\mathbb{R}_1^n$ .  $\sigma$ –ta glavna ravninska zakrivljenost,  $1 \leq \sigma \leq m$ , te  $(m + \rho)$ –ta glavna ravninska zakrivljenost,  $1 \leq \rho \leq k - m$  plohe  $\mathbb{S}$  u točki  $\xi \in \mathbb{S}$  su

$$K_{\xi}(e_{\sigma}, n) = \frac{1}{P_{\sigma}^2}, \quad 1 \leq \sigma \leq m,$$

$$K_\xi(e_{m+\rho}, n) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq k - m,$$

gdje je  $P_\sigma$ ,  $1 \leq \sigma \leq m$ ,  $\sigma$ -ti glavni parametar distribucije plohe  $\mathbb{S}$ .

Sada prema gornjem teoremu i Teoremu 5.2 slijedi sljedeći korolar:

**Korolar 5.5** Glavna ravninska zakrivljenost  $(k + 1)$ -pravčaste plohe  $\mathbb{S}$  je invarijanta Mindingove izometrije.

# Zaključak

U ovoj radnji su proučavana preslikavanja pravčastih ploha u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru  $\mathbb{R}_1^3$ , odnosno lokalne izometrije  $(k + 1)$ –pravčastih ploha u  $n$ –dimenzionalnom Minkowskijevom prostoru  $\mathbb{R}_1^n$ .

Preslikavanja koja su proučavana u  $\mathbb{R}_1^3$  su lokalne izometrije, konformna te ekviarealna preslikavanja, te su proučavana za sve klase pravčastih ploha u  $\mathbb{R}_1^3$ . Posebna pažnja je posvećena plohama koje nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru, tj. pravčastim plohama klase  $M_1^0$ , odnosno  $B$ –namotajnim plohama. Također su dani primjeri pravčastih ploha koje u promatranoj točki nemaju realne nego imaginarne glavne zakrivljenosti, što se u euklidskom prostoru ne može dogoditi. Navedena preslikavanja su također proučavana uz uvjet da čuvaju izvodnice te su iskazani i dokazani teoremi kojima se opisuju takva preslikavanja.

Pored navedenih rezultata javljaju se i nove ideje koje daju prostora za daljnje istraživanje preslikavanja pravčastih ploha u  $n$ –dimenzionalnom Minkowskijevom prostoru, odnosno u Lorentzovim prostornim formama.

# Bibliografija

- [1] R. A. Abdel-Baky i M. T. Aldossary. “On the Null Scrolls in Minkowski 3-space  $E_1^3$ ”. *IOSR-JM* 6 (2013), str. 11–16.
- [2] H. Brauner. “Abbildungen aus Regelflächen”. *Ber.Stat.Sekt.Graz* 140 (1980), str. 1–12.
- [3] H. Brauner. “Die erzeugendtreue konformen Abbildungen aus Regelflächen”. *Arch.Math* 33 (1979), str. 470–477.
- [4] H. Brauner. “Die flächentreue Abbildungen aus Regelflächen, bei denen die Erzeugenden geradlinig bleiben”. *Arch.Math* 38 (1982), str. 102–105.
- [5] H. Brauner. *Differentialgeometrie*. Braunschweig:Vieweg, 1981.
- [6] H. Brauner. “Über schmieglinientreue Isometrien”. *Sitzber. Akad. Wiss. Wien* 188 (1979), str. 15–21.
- [7] S. Can, B. Uyar i I. Aydemir. “On the properties of  $(k + 1)$ –dimensional time-like ruled surfaces with space-like generating space in the Minkowski space  $R_1^n$ ”. *MATH. COMPUT. APPL.* 9.3 (2004), str. 393–398.
- [8] B. Carlsen i J. N. Clelland. “The geometry of lightlike surfaces in Minkowski space”. *J. Geometry Phys.* 74 (2013), str. 43–55.
- [9] J. N. Clelland. “Totally quasi-umbilical timelike surfaces in  $\mathbb{R}^{1,2}$ ”. *Asian J.Math.* 16 (2012), str. 189–208.
- [10] F. Dillen i W. Kühnel. “Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space”. *Manuscripta Math.* 98 (1999), str. 307–320.
- [11] F. Dillen i W. Sodsiri. “Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space”. *J. geom.* 83 (2005), str. 10–21.
- [12] F. Dillen, I. Van de Woestyne, L. Verstraelen i J. Walrave. “Ruled surfaces of finite type in 3-dimensional Minkowski space”. *Results Math.* 27 (1995), str. 250–255.
- [13] B. Divjak i Ž. Milin Šipuš. “Minding isometries of ruled surfaces in pseudo-Galilean space”. *J. geom.* 77 (2003), str. 35–47.
- [14] L. P. Eisenhart. *A treatise of the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. The Cornell University Library Digital Collections, 1991/Ginn & co. 1909.

- [15] S. Ersoy i M. Tosun. “Lamarle Formula in 3-Dimensional Lorentz Space”. *Math. Commun.* 20 (2010), str. 1–15.
- [16] S. Ersoy i M. Tosun. “Lorentzian Beltrami-Euler Formula and generalized Lorentzian Lamarle Formula in  $\mathbb{R}_1^n$ ”. *Le Matematiche* 64 (2009), str. 25–45.
- [17] Y. Fu i X. Wang. “Classification of Timelike Constant Slope Surfaces in 3-Dimensional Minkowski Space”. *Results Math.* 63.3-4 (2013), str. 1095–1108.
- [18] G. Grantcharov i R. Salom. “Bonnet Pairs of Surfaces in Minkowski Space”. *Afr. Diaspora J. Math. (N.S.)* 14 (2012), str. 57–75.
- [19] L. K. Graves. “Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 252 (1979), str. 367–392.
- [20] C. H. Gu, H. S. Hu i J. Inoguchi. “On time-like surfaces of positive Gaussian curvature and imaginary principal curvatures”. *J. Geom. Phys.* 99 (1985), str. 29–36.
- [21] E. Güler i A. T. Vanli. “Bour’s theorem in Minkowski 3-space”. *J. Math. Kyoto Univ.* 46 (2006), str. 47–63.
- [22] H. Hagen. “Minding-Isometrien bei  $(k + 1)$ -Regelflächen”. *Monatsh. Math.* (1971).
- [23] U. Hertrich-Jeromin. *Differential Geometry: a concise introduction*. TU Wien, 2013.
- [24] J. Hoschek. *Liniengeometrie*. Bibliographisches Institut, Zürich, 1971.
- [25] J. I. Inoguchi i S. Lee. “Null curves in Minkowski 3-space”. *IEJG* 1.2 (2008), str. 40–83.
- [26] E. Kasap. “Ruled surfaces with timelike ruling”. *Appl. Math. Comput.* 179 (2006), str. 402–405.
- [27] E. Kasap, I. Aydemir i N. Kuruoglu. “Ruled surfaces with timelike rulings”. *Appl. Math. Comput.* 174 (2006), str. 1660–1667.
- [28] D. S. Kim, Y. H. Kim i D. W. Yoon. “On ruled surfaces in Minkowski spaces”. *Commun. Korean Math. Soc* 18 (2003), str. 289–295.
- [29] Y. H. Kim i D. W. Yoon. “Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces”. *J. Geom. Phys.* 49 (2004), str. 89–100.
- [30] Y. H. Kim i D. W. Yoon. “On non-developable ruled surfaces in Lorentz-Minkowski 3-spaces”. *Taiwanese J. Math.* 11 (2007), str. 197–214.
- [31] Y. H. Kim i D. W. Yoon. “On the Gauss map of ruled surfaces in Minkowski space”. *Rocky Mountain J. Math.* 35 (2005), str. 1555–1581.
- [32] Y. H. Kim i D. W. Yoon. “Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map”. *J. Geom. Phys.* 34 (2000), str. 191–205.

- [33] T. Klotz Milnor. “Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-space”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 280 (1983), str. 161–185.
- [34] O. Kobayashi. “Maximal surfaces in the 3-Dimensional Minkowski Space  $L^3$ ”. *Tokyo J. Math* 6 (1983), str. 297–309.
- [35] E. Kruppa. “Naturliche Geometrie der Mindigschen Verbiegung der Strahlflächen”. *Monatsh.Math.* 55 (1951), str. 340–345.
- [36] W. Kühnel. *Differential geometry - curves, surfaces, manifolds*. AMS (American Math Society), 2003.
- [37] H. Liu. “Curves in the Lightlike Cone”. *Beitr. Algebra Geom.* 45 (2004), str. 291–303.
- [38] R. Lopez. “Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space”. *Mini-course taught at the Instituto de Matematica e Estatistica, University of Sao Paulo, Brasil* (<https://arxiv.org/abs/0810.3351> 2008).
- [39] L. McNertney. *One-parameter families of surfaces with constant mean curvature in Lorentz 3-space*. Ph. D. Thesis, Brown Univ., Providence, RI, U.S.A., 1980.
- [40] Ž. Milin Šipuš i B. Divjak. “Mappings of Ruled Surfaces in Simply Isotropic Space  $I_3^1$  that Preserve the Generators”. *Monatsh. Math.* 139 (2003), str. 235–245.
- [41] Ž. Milin Šipuš i V. Volenec. “Harmonic evolutes of surfaces in Minkowski space”. *Math. Commun.* 19.1 (2014), str. 43–55.
- [42] P. Mira i J. A. Pastor. “Helicoidal Maximal Surfaces in Lorentz-Minkowski Space”. *Monatsh. Math.* 140 (2003), str. 315–334.
- [43] B. O’Neill. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, New York, 2006.
- [44] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1983.
- [45] H. Pottmann i J. Wallner. *Computational Line Geometry*. Springer, 2001.
- [46] H. Rademacher i W. Kühnel. *Conformal transformations of pseudo-Riemannian manifolds*. Eds.: D.Alekseevsky, H. Baum, ESI Lect. Math. Phys. EMS Publ. House Zürich, 2008.
- [47] J. G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Departement of Mathematics, Vanderbilt University, 1994.
- [48] W. Sodsiri. *Ruled Surfaces of Weingarten Type in Minkowski 3-space*. Ph. D. Thesis, Departement of Mathematics, K.U.Leuven, 2005.
- [49] M. Tosun i I. Aydemir. “On  $(k + 1)$ –dimensional space-like ruled surface in the Minkowski space  $R_1^n$ ”. *Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.* 46.1 (1998), str. 1–9.
- [50] M. Tosun, S. Ersoy i M. A. Gungor. “On the Blaske invariant of generalized timelike ruled surfaces”. *Applied Sciences* 9 (2007), str. 181–193.

- [51] M. Tosun i N. Kuruoglu. “On properties of generalized time like ruled surface in the Minkowski space  $R_1^n$ ”. *Antarct. J. Math.* 2.2 (2005), str. 173–180.
- [52] T. Weinstein. *An Introduction to Lorentz Surfaces*. De Gruyter expositions in mathematics, 22, de Gruyter, Berlin, 1996.

# Popis slika

1.1	Pseudo-sfera $S_1^2$ , hiperbolička ravnina $H^2$ , i svjetlosni stožac $LC$ . . . . .	9
2.1	Helikoid druge vrste . . . . .	42
2.2	Hiperbolički paraboloid . . . . .	42
2.3	Prostorni jednoplošni hiperboloid . . . . .	43
2.4	Helikoid treće vrste . . . . .	44
2.5	Konoid druge vrste . . . . .	44
2.6	Vremenski jednoplošni hiperboloid . . . . .	45
2.7	Helikoid prve vrste . . . . .	45
2.8	Plückerov konoid . . . . .	46
2.9	Konjugat Enneperove plohe . . . . .	47
2.10	Nomizu-Sasaki ploha . . . . .	48
2.11	Pseudosfera $S_1^2(p, r)$ parametrizirana kao $B$ -namotajna ploha i njezina bazna krivulja . . . . .	53
2.12	Direkcijska krivulja $e(u)$ od $S_1^2(p, r)$ na svjetlosnom stošcu $LC$ . . . . .	53
2.13	$B$ -namotajna ploha nad općom svjetlosnom kubikom . . . . .	54
2.14	Ploha konstantog nagiba s $k_2 = 0$ , $k_3(u) = 2u$ . . . . .	54
2.15	$B$ -namotajna ploha s baznom krivuljom $c_1$ i izvodnicama $B_1$ . . . . .	56
2.16	$B$ -namotajna ploha s baznom krivuljom $c_2$ i izvodnicama $B_2$ . . . . .	56
2.17	$B$ -namotajna ploha s baznom krivuljom $c_3$ i izvodnicama $B_3$ . . . . .	57
2.18	Izoparametarska ploha s $g(u) = u$ . . . . .	59
2.19	Izoparametarska ploha s $g(u) = u^2$ . . . . .	59



# Životopis

Ljiljana Primorac Gajčić rođena je 11. prosinca 1984. godine u Vukovaru. Nakon završene osnovne škole, upisuje Jezičnu gimnaziju u Vukovaru, te potom 2003. godine upisuje nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. U listopadu 2007. godine uspješno brani diplomski rad stekavši time zvanje profesora matematike i informatike. Akademske godine 2007./2008. upisuje poslijediplomski doktorski studij matematike pri Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, te počinje raditi kao asistent na Odjelu za matematiku u Osijeku. Kao asistent u nastavi sudjelovala je u izvođenju vježbi iz nekoliko računarskih i matematičkih kolegija. Za vrijeme trajanja poslijediplomskog studija sudjelovala je u radu seminara za diferencijalnu geometriju i seminara za numeričku matematiku, u DAAD školi s temom „Hyperbolic Geometry and Arithmetics (Applications of the Selberg Trace Formula)“, te na nekoliko znanstvenih konferencija. Dobitnica je nagrade za najbolje postersko izlaganje matematičke sekcije na prvom simpoziju studenata doktorskih studija PMF-a. Udana je i majka dvoje djece.