Laplaceova transformacija na konusima Banachovih prostora sa strukturom rešetke

Rupčić, Diana

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Diana Rupčić

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA NA KONUSIMA BANACHOVIH PROSTORA SA STRUKTUROM REŠETKE

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2016.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Diana Rupčić

THE LAPLACE TRANSFORM ON THE CONES OF LATTICE-STRUCTURED BANACH SPACES

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2016

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Diana Rupčić

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA NA KONUSIMA BANACHOVIH PROSTORA SA STRUKTUROM REŠETKE

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, 2016.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Diana Rupčić

THE LAPLACE TRANSFORM ON THE CONES OF LATTICE-STRUCTURED BANACH SPACES

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, 2016

Željela bih zahvaliti mentoru, prof. dr. sc. H. Šikiću, na mnogobrojnim savjetima koje mi je uputio tijekom doktorskog studija, a posebno na motivaciji i ohrabrenju u trenucima kada mi je to najviše trebalo.

Hvala mojoj prekrasnoj obitelji – mami, tati, Dinku, Jeleni i Leonu na beskrajnoj podršci i strpljenju koje su pokazali tijekom ovog mog putovanja. Vaša potpora i vjera u mene bile su mi najveći pokretač.

Sadržaj

Poglavlje 1

UVOD

Jedan od klasičnih rezultata harmonijske analize i teorije reprezentacije jest poznati Hausdorff-Bernstein-Widderov teorem iz 1928. godine koji karakterizira Laplaceovu transformaciju $[0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int e^{-xt}\,\mathrm{d}\mu(t)$ konačnih mjera na $[0,\infty\rangle$. Prema tvrdnji teorema funkcija $\phi\colon\ [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *potpuno* je *monotona* na $[0,\infty\rangle$ ako i samo ako se može prikazati kao Laplaceova transformacija neke konačne pozitivne Borelove mjere μ na $[0,\infty\rangle$:

$$\phi(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Pojam potpune monotonosti uveo je Hausdorff 1921. godine, a definicija podrazumijeva da je ϕ neprekidna na $[0,\infty\rangle$, beskonačno puta diferencijabilna na $\langle 0,\infty\rangle$ te da vrijedi $(-1)^n\phi^{(n)}(x) \geqslant 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ i $x > 0$. Neki primjeri potpuno monotonih funkcija su:

- $\phi(x) = c, \qquad c \geqslant 0$
- $\phi(x) = e^{-tx},\ \ t \geqslant 0$
- $\phi(x) = x^s, \qquad s \leqslant 0$
- $\phi(x) = \dfrac{c}{x^{1-c}},\ c \leqslant 1$
- $\phi(x) = \ln(1 + {}^1\!/\!_x)$
- $\phi(x) = e^{1/x}$.

Postupno je pojam potpune monotonosti zamijenjen modernijim konceptom omeđenih pozitivno definitnih funkcija. To su funkcije $\phi\colon\ [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \phi(x_j + x_k) \geqslant 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \{c_1,\ldots,c_n\} \subseteq \mathbb{R}, \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq [0,\infty\rangle\,.$$

S vremenom su iznesene različite generalizacije tog rezultata, ali problem je u suštini ostao isti. S obzirom na to da su Laplaceove transformacije tipični primjeri pozitivno definitnih funkcija, prirodno se nameće pitanje može li se svaka pozitivno definitna funkcija prikazati kao Laplaceova transformacija i ako može pod kojim uvjetima. Ukratko, problem možemo opisati na sljedeći način.

Neka je $S \subseteq V$ konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V, V^* algebarski dual od V te $\Sigma(V^*)$ najmanja σ-algebra na V^* koja sve evaluacije $V^* \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \lambda(v)$ čini izmjerivima. Zanimaju nas funkcije $\phi\colon S \to \mathbb{R}$ koje imaju oblik Laplaceove transformacije neke pozitivne mjere na $(V^*, \Sigma(V^*))$:

$$\phi(s) = \mathcal{L}(\mu)(s) = \int_{V^*} e^{\lambda(s)} \,\mathrm{d}\mu(\lambda), \quad \forall\, s \in S.$$

Općenito, funkcija ϕ ne mora biti definirana na konveksnom konusu. Dovoljno je promatrati polugrupu s involucijom, međutim, u većini konkretnih primjera domena je konveksan konus, a često se radi baš o pozitivnom konusu. U slučaju konveksnog konusa lako se vidi da je pozitivno definitna funkcija realna i nenegativna, a općenito može biti kompleksna. Osim skalarnih pozitivno definitnih funkcija, promatrat ćemo funkcije s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$; prostoru omeđenih linearnih operatora na kompleksnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Takve funkcije prvi je definirao B. Sz.-Nagy, 1960. godine, pritom ih nazivajući funkcijama *pozitivnog tipa*. One generaliziraju skalarne pozitivno definitne funkcije u smislu da je za $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ definicija jednaka kao u skalarnom slučaju. Za polugrupu s involucijom S to su funkcije $\phi\colon S \circ S \to B(\mathcal{H})$ za koje vrijedi

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left\langle \phi(s_j \circ s_k^*) v_k, v_j \right\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{H}, \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq S.$$

Dio pozornosti usmjeren je na istraživanje uvjeta koji omogućuju da reprezentirajuća mjera bude Radonova i uvjeta koji omogućuju da mjera bude koncentrirana na nekom podskupu od V^*, npr. na topološkom dualu V'.

Jedno od najopsežnijih istraživanja ovog tipa napravili su Berg, Christensen i Ressel u 80-im godinama 20. stoljeća kada su razvili teoriju o karakterizaciji Laplaceove transformacije na razini komutativnih involutivnih polugrupa s neutralnim elementom $(S, \circ, *)$, [6]. To je vrlo visoka razina apstrakcije pa je mjera čiju transformaciju promatramo definirana na izrazito velikom prostoru $\widehat{S}$; prostoru svih karaktera na S s topologijom točkovne konvergencije. Karakter je svaki nenul homomorfizam ξ sa S u $(\mathbb{C}, \cdot)$ za koji vrijedi $\xi(s^*) = \overline{\xi(s)}$. Tvrdnja jednog od centralnih teorema u [6] jest da svaka pozitivno definitna eksponencijalno omeđena (omeđena u odnosu na neku apsolutnu vrijednost) funkcija $\phi\colon S \to \mathbb{C}$ ima integralnu reprezentaciju oblika

$$\phi(s) = \int_{\widehat{S}} \xi(s) \,\mathrm{d}\mu(\xi), \tag{1.1}$$

pri čemu je μ jedinstvena pozitivna Radonova mjera na $\widehat{S}$. S (1.1) dana je tzv. *generalizirana Laplaceova transformacija* jer karakteri nisu nužno eksponencijalnog tipa. Rezultati o integralnom prikazu pomoću Laplaceove transformacije uvijek se zasnivaju na takvim rezultatima pri čemu se ispituju uvjeti na funkciju pod kojima karakter ima eksponencijalni oblik. Jedan je od uvjeta eksponencijalna omeđenost.

Općenito, svaku komutativnu polugrupu s involucijom $(S, \circ, *)$ za koju pozitivno definitna funkcija na S ima prikaz kao u (1.1), s time da jedinstvena reprezentirajuća mjera ne mora biti Radonova (σ-algebra na $\widehat{S}$ je $\Sigma(\widehat{S})$), nazivamo *perfect* polugrupom. Bisgaard i Ressel pokazali su da je svaka $*$-djeljiva polugrupa (točnije takva da za svaki $s \in S$ postoje $n, m \in \mathbb{N}_0$ i $t \in S$ takvi da vrijedi $s = nt + mt^*$ i $n + m \geqslant 2$) s neutralnim elementom *perfect*. Ta tvrdnja pokazala se istinitom i za polugrupe bez neutralnog elementa ako vrijedi $S \circ S = S$. Posebno, slijedi da je svaki konveksan konus (s identitetom kao involucijom) *perfect*.

Uočimo da je skup svih karaktera $\widehat{S}$ mnogo veći od svog podskupa $\{e^{\lambda(\cdot)} : \lambda \in V^*\}$ i da sadrži svakakve patologijske slučajeve. Tako za $V = \mathbb{R}$ i $S = [0, \infty\rangle$, $\widehat{S}$ sadrži $2^{2^{\aleph_0}}$ karaktera s prekidom oblika $x \mapsto e^{\alpha(x)}$, pri čemu je $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ endomorfizam s prekidom na grupi $(\mathbb{R}, +)$. Iz tog razloga fokus se zadržava na pozitivno definitnim funkcijama koje se mogu prikazati kao *prava* Laplaceova transformacija.

U velikom broju primjena bilo je potrebno značajno suziti prostor na kojem je mjera definirana. Takva su istraživanja bila motivirana konkretnim problemima iz teorije vjerojatnosti i teorijske fizike pa su i samim time obuhvaćala specijalne primjere prostora V i njihovih konveksnih konusa. Neki od takvih rezultata su Hoffmann-Jørgensen i Resselova karakterizacija [16] potpuno monotonih funkcija na konveksnom konusu $C_+^b(X)$ za potpuno regularan X ili Ressel i Schmidtchenova karakterizacija za $S = C_+^c(X)$ pri čemu je X lokalno kompaktan prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. Dettweiler u [11] proučava pozitivno definitne funkcije definirane na pozitivnom konusu u lokalno konveksnoj vektorskoj rešetki.

Jedan primjer dolazi i iz teorije superprocesa. Fitzsimmons je za konstrukcije superprocesa koristio teoreme tog tipa za polugrupe omeđenih pozitivnih izmjerivih funkcija. Njegov rezultat generalizirao je H. Šikić u [30] koji je pokazao da je Fitzsimmonsova konstrukcija specijalan slučaj općenitije teorije koja se može provesti na klasi Banachovih prostora koji imaju strukturu vektorske rešetke. Time je otvoreno pitanje nužnih i dovoljnih uvjeta na prostor V da bi se mogla provesti karakterizacija pozitivno definitnih funkcija pomoću Laplaceove transformacije mjera, a da te mjere "žive" na dovoljno uskom prostoru. Djelomičan odgovor na to pitanje Šikić je dao u [31] gdje je pokazao da dovoljan uvjet omogućuju prostori koje je nazvao "separabilni prostori funkcija".

Najopćenitiji okvir za promatranje sličnih problema dao je Helge Glöckner u [15] koji se nadograđuje na rad Neeba (svog mentora) i Ressela. Glöckner za V uzima općeniti topološki vektorski prostor te pokazuje da rezultati zapravo ovise o veličini i strukturi konusa na kojem je pozitivno definitna funkcija definirana. Važna generalizacija slijedi i iz činjenice da promatra pozitivno definitne funkcije s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ umjesto realnih ili kompleksnih funkcija. U tom slučaju bilo je potrebno proširiti i značenje nekih definicija poput definicije α-omeđenosti pozitivno definitnih funkcija koja se pokazala najosjetljivijom na tu generalizaciju.

Umjesto prostora operatora $B(\mathcal{H})$ može se promatrati još širi kontekst u kojem pozitivno definitne funkcije imaju vrijednosti u (kompleksnom) lokalno konveksnom Hausdorffovom prostoru X. Takav slučaj promatraju Ressel i Ricker u [24] te daju integralnu reprezentaciju pozitivno definitne funkcije s vrijednostima u X.

Klasični primjeri integralne reprezentacije su Bochnerov i Nussbaumov teorem. Bochnerov teorem tvrdi da je neprekidna funkcija $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ pozitivno definitna na grupi $(\mathbb{R}^n, +)$ ako i samo se može prikazati kao Fourierova transformacija neke konačne mjere na $\mathbb{R}^n$, tj. ako i samo ako postoji Radonova reprezentirajuća mjera na dualnoj grupi. Glöckner generalizira taj rezultat na pozitivno definitne funkcije s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ koje su definirane na realnom vektorskom prostoru V koji ima konačnu topologiju.

Svoje rezultate Glöckner temelji na apstraktnoj integralnoj reprezentaciji pozitivno definitnih α-omeđenih funkcija definiranih na $S \circ S \subseteq S$ s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ pri čemu je S komutativna polugrupa s involucijom koja nužno ne sadrži neutralni element. U tom slučaju mjere imaju vrijednosti u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$; prostoru pozitivno semidefinitnih hermitskih operatora na $\mathcal{H}$. To su tzv. *C-valued* mjere, tj. mjere s vrijednostima u konveksnom konusu, a definirao ih je Neeb u [20]. Za razliku od uobičajenih vektorskih mjera, te mjere smiju poprimiti "beskonačne" vrijednosti izvan konusa C, u topološkoj kompaktifikaciji C_∞. U normiranim vektorskim prostorima integrali prikladnih vektorskih funkcija s obzirom na vektorsku mjeru mogu se definirati ako mjera ima konačnu totalnu varijaciju. Ta restrikcija može se izostaviti kada je riječ o mjerama s vrijednostima u konveksnom konusu [20, Napomena I.14.].

Glöckner primjećuje da svi konkretni primjeri karakterizacija pozitivno definitnih funkcija zapravo "žive" na strukturama koje imaju oblik konveksnog konusa pa vrši vrlo detaljnu analizu takvih struktura i usmjerava svoje istraživanje na reprezentaciju pozitivno definitnih funkcija koje su definirane na konveksnom konusu. Pomoću pojma obraza (*face*) konveksnog skupa karakterizira otvorene konveksne konuse u najvećoj lokalno konveksnoj topologiji, Propozicija 2.40. Upravo ta karakterizacija omogućila je jednostavan izvod Nussbaumovog teorema za otvorene konveksne konuse iz općenitog teorema o integralnoj reprezentaciji, Teorem 3.70. Specijalni slučaj tog teorema za $V = \mathbb{R}$, $S = \langle 0, \infty \rangle$, $\alpha = 1$ i $\phi\colon S \to \mathbb{R}$ upravo je Hausdorff-Bernstein-Widderov teorem.

Prva poopćenja takvih teorema dali su Nussbaum i Bochner 1955. godine. Bochner je promatrao usmjerene otvorene konveksne konuse u konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima dok se Nussbaum bavio potpuno monotonim funkcijama na polugrupama unutar lokalno kompaktnih grupa koje uključuju sve generirajuće konveksne konuse u konačno dimenzionalnim prostorima. Od tada je uobičajeno teoreme u vezi s pozitivno definitnim funkcijama na konveksnom konusu zvati Nussbaumovim teoremima. Svi radovi koji se odnose na tu problematiku bili su primjenjivi na konačno dimenzionalne konveksne konuse, ali vrlo malo govorilo se o beskonačno dimenzionalnom slučaju. Naravno, prijelaz s konačno na beskonačno dimenzionalni slučaj donio je poteškoće jer se mnoga poznata svojstva konveksnih konusa nisu mogla generalizirati no, s druge strane, dobiveni su zanimljivi rezultati i konstruirani primjeri koji se mogu dobiti samo u beskonačno dimenzionalnom slučaju kao što je Primjer 2.41(7). Prvi rad koji je obuhvaćao reprezentaciju potpuno monotonih funkcija na otvorenim potpolugrupama proizvoljnih topoloških grupa bio je rad Devinatza i Nussbauma, *Real characters of certain semigroups with applications* iz 1961. godine čiji se rezultati poklapaju s Glöcknerovim u specijalnim slučajevima.

Hirsch je 1972. godine dokazao Nussbaumov teorem za potpuno monotone funkcije na otvorenim konveksnim konusima u konačno dimenzionalnim prostorima.

Kada je Ressel 1974. godine pokazao da je omeđena neprekidna funkcija $[0, \infty\rangle^n \to \mathbb{R}$ Laplaceova transformacija konačne pozitivne mjere ako i samo ako je funkcija pozitivno definitna, gledište se s potpune monotonosti usmjerilo prema 1-omeđenim (ekvivalentno omeđenim) pozitivno definitnim funkcijama. Hausdorffova definicija potpune monotonosti s vremenom se generalizirala na funkcije $f\colon S \to \mathbb{R}$ pri čemu je S komutativna polugrupa s identitetom kao involucijom. Takva funkcija potpuno je monotona ako je nenegativna i za sve konačne skupove $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq S$ i $s \in S$ vrijedi $\nabla_{a_1} \cdots \nabla_{a_n} f(s) \geqslant 0$ pri čemu je $\nabla_a := I - E_a$, a E_a operator pomaka $E_a\colon \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$, $E_a f(s) = f(s+a)$. Berg, Christensen i Ressel pokazali su u [6] ekvivalenciju između (skalarnih) potpuno monotonih funkcija i omeđenih pozitivno definitnih funkcija u slučaju kada je S 2-djeljiva polugrupa, tj. polugrupa u kojoj se svaki $s \in S$ može napisati kao $s = t \circ t$ za neki $t \in S$.

U već spomenutom radu Devinatza i Nussbauma definirana je potpuna monotonost za funkcije s vrijednostima u uređenom vektorskom prostoru s pozitivnim konusom. Glöckner je u [15, Propozicija 7.19] pokazao ekvivalenciju između potpuno monotonih i 1-omeđenih pozitivno definitnih funkcija $\phi\colon S \to \mathrm{Herm}(\mathcal{H})$ pri čemu je S 2-djeljiva. Uz potpuno monotone i pozitivno definitne funkcije usko su povezane i Bernsteinove funkcije, a detaljan odnos između potpuno monotonih, pozitivno definitnih i Bernsteinovih funkcija istražen je u [28].

U konačno dimenzionalnom slučaju teorem Nussbaumovog tipa za 1-omeđene pozitivno definitne skalarne funkcije na otvorenim konveksnim konusima dokazao je Neeb u [19, Teorem VI.2.10]. Nakon toga uslijedila je generalizacija na α-omeđene pozitivno definitne funkcije s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ pri čemu je α lokalno omeđena apsolutna vrijednost, [20, Teorem IV.3, Korolar IV.4] . Iako je generalizacija bila prirodna, bilo je mnogo teže dobiti integralnu reprezentaciju *vektorskih* pozitivno definitnih funkcija. Jedan od glavnih razloga je to što neprekidna pozitivno definitna funkcija ϕ inducira ne nužno omeđenu reprezentaciju π_ϕ na odgovarajućem prostoru $\mathcal{H}_\phi$ (konstrukcija je navedena u potpoglavlju 3.2), odnosno nije nužno eksponencijalno omeđena. Glöckner je u [15] pokazao da je u slučaju beskonačno dimenzionalnih prostora dovoljno promatrati tzv. *tame* apsolutne vrijednosti α, točnije one apsolutne vrijednosti koje su lokalno omeđene na zrakama i da nema smisla promatrati slučajeve u kojima α nije *tame*.

Osim otvorenih konveksnih konusa, često su se promatrali konveksni konusi s nepraznim interiorom. Takvi konusi čine veću klasu konusa od otvorenih. Budući da se neprekidnost uvijek narušava na rubu konusa, rezultati su pokazali da su u tom slučaju potrebne dodatne pretpostavke na neprekidnost funkcije kako bi se dobila integralna reprezentacija pomoću Laplaceove transformacije.

Već spomenuti Hoffmann-Jørgensen-Resselov rezultat pokazuje da je potpuno monotona funkcija $\phi\colon S \to \mathbb{R}$, $S = C_+^b(X)$ neprekidna ako i samo ako vrijedi $\lim_{t\to 0^+} \phi(t) = \phi(0)$ što je ekvivalentno uvjetu da je Radonova reprezentirajuća mjera na $\widehat{S}_1$ (1-omeđeni karakteri na S) koncentrirana na dualnom konusu. Šikićeva karakterizacija 1-omeđenih pozitivno definitnih funkcija na pozitivnom konusu koji je unutar "separabilnog prostora funkcija" [31] zapravo je poopćenje prethodno spomenutog rezultata. U oba slučaja S je konveksan konus s nepraznim interiorom i Glöckner je pokazao da je taj uvjet dovoljan za Nussbaumov teorem pa se oba rezultata mogu promatrati kao poseban slučaj Glöcknerovog rezultata. Bitna ekvivalencija je, slično kao gore, dana u nekoj vrsti neprekidnosti u nuli, Teorem 3.85.

Sve do Glöcknerovog istraživanja vrlo su se rijetko razmatrali konveksni konusi koji su samo generirajući, u smislu da nemaju dodatnih svojstava ili im njihovo okruženje ne pruža dodatnu strukturu poput nepraznog interiora. Dettweiler u svom istraživanju [11] promatra pozitivno definitne funkcije definirane na pozitivnom konusu S koji može imati i prazan interior, ali pretpostavlja omeđenost i neprekidnost funkcija unutar neke lokalno konveksne vektorske rešetke V. Pokazuje da takve funkcije imaju prikaz pomoću Laplaceove transformacije Radonove mjere na $S^* \cap V'$ ako i samo ako je topologija na V generirana familijom AM-polunormi.

Glöckner promatra generirajuće konveksne konuse unutar realnog vektorskog prostora i to je najopćenitija klasa konusa koja se do tada promatrala u kontekstu Nussbaumovog teorema. Takvi konusi dovoljno su veliki da razapinju cijeli prostor, ali su u beskonačno dimenzionalnom prostoru često praznog interiora. Glöckner pokazuje da u tom slučaju ne postoji *Radonova* reprezentirajuća mjera na V^* niti bilo kakva reprezentirajuća mjera na topološkom dualu $(V', \Sigma(V'))$, Korolar 3.93. Također, daje konkretan primjer 1-omeđene pozitivno definitne funkcije na konusu $S = \ell_+^1$ svih nenegativnih apsolutno sumabilnih nizova te dokazuje gornje tvrdnje na tom primjeru, Propozicija 3.92. Najbolje što se može dobiti u ovom slučaju jedinstvena je reprezentirajuća mjera na $(V^*, \Sigma(V^*))$ i taj rezultat je dokazan za pozitivno definitne funkcije definirane na općenitom konveksnom skupu.

Za takve teoreme kao "lijepo" okruženje mogu poslužiti uređeni Banachovi prostori koji su ujedno i vektorske rešetke, ali nisu nužno Banachove rešetke. To znači da ne zahtijevamo kompatibilnost modula i norme. Takvi prostori čine još uvijek veliku klasu prostora i obuhvaćaju npr. Soboljeve prostore $W^{1,p}(\Omega)$ koji ne pripadaju Banachovim rešetkama kao npr. L^p prostori ili prostori $C(K)$ za neki kompaktan prostor K. Pozitivan konus u tim prostorima uvijek je zatvoren i generirajući, a u slučaju prostora s uređajnom jedinicom, ima i neprazan interior što omogućava postojanje Radonove reprezentirajuće mjere. Nussbaumov teorem može se izvesti izravno iz Berg-Maserickovog teorema dokazanog u [5]. U tom će slučaju mjera biti koncentrirana na znatno manjem skupu neprekidnih α-omeđenih karaktera koji je homeomorfan sa skupom α-omeđenih neprekidnih linearnih funkcionala.

§

Disertacija je podijeljena na četiri poglavlja. Prvo, uvodno poglavlje sadrži povijesni pregled najvažnijih objavljenih rezultata koji se odnose na temu doktorskog rada. Navedene su osnovne ideje i pozadina same teme.

Drugo poglavlje pruža pregled osnovnih rezultata iz funkcionalne i konveksne analize koji će se koristiti u narednim poglavljima. Rezultati su naročito povezani s Banachovim i Soboljevim prostorima, pojmom obraza konveksnog skupa i definicijama koje se odnose na algebru operatora $B(\mathcal{H})$. Drugo poglavlje donosi pregled preliminarnih rezultata i ne sadrži dokaze već se sastoji uglavnom od definicija, iskaza teorema i primjera koji služe za motivaciju.

U trećem poglavlju prezentirane su neke od najvažnijih ideja, rezultata i tehničkih metoda, a vežu se za pozitivno definitne funkcije s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$. Nakon što se definira mjera s vrijednostima u konveksnom konusu nekog topološkog vektorskog prostora i integral s obzirom na takvu mjeru, iskazuju se teoremi Nussbaumovog tipa za koje je ponajviše zaslužan H. Glöckner [15]. Najvažniji teoremi dokazani su kao prikaz tehničkog alata i ideja koje se koriste u dokazima.

Četvrto poglavlje opisuje prostore koji će nam biti od interesa, a to su uređeni Banachovi prostori koji su ujedno i vektorske rešetke, ali ne nužno Banachove rešetke. Dani su osnovni primjeri takvih prostora koji uključuju i neke Soboljeve prostore. Osobito se obraća pozornost na interior pozitivnog konusa u takvim prostorima. Budući da ovakvi prostori imaju topološku strukturu i strukturu uređaja, istražuje se odnos između klasičnog topološkog duala i uređajnog duala te koji sve faktori utječu na interakciju te dvije vrste struktura. Na kraju poglavlja dokazuje se Nussbaumov teorem za pozitivne konuse unutar takvih prostora.

Kako bi se odvojio od ostatka teksta, završetak primjera i napomena označen je simbolom "$\diamondsuit$". Pojmovi koji se definiraju prvi put u tekstu navode se u kurzivu dok se izvan okruženja definicije kurziv koristi za naglašavanje ili navođenje strane riječi. Mnogi pojmovi nisu dosad prevedeni na hrvatski jezik te su navedeni u izvorniku ili je za njih ponuđen prijevod na hrvatski jezik u dogovoru s prof. H. Šikićem.

Poglavlje 2

PRELIMINARNI REZULTATI

2.1 Funkcionalna analiza

U ovom potpoglavlju dan je sažet uvod u osnovne rezultate iz Banachovih prostora, posebno Soboljevih prostora te su navedeni klasični primjeri tih prostora. Opširniji pregled poznatih rezultata, kao i dokazi odgovarajućih tvrdnji, mogu se naći u [9, 13, 26].

2.1.1 Banachovi prostori

Definicija 2.1 Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ pri čemu je $\mathbb{F}$ jednak skupu $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{F}$, $x \mapsto \|x\|$ je *norma* na X ako za sve $x, y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi:

(i) $\|x\| \geqslant 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ nazivamo *normiranim vektorskim prostorom.* Četvrto svojstvo se još naziva i *nejednakost trokuta.*

Svaki normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ ujedno je i metrički prostor kada se definira metrika $d(x, y) = \|x - y\|$ pa su mnoga svojstva normiranih prostora naslijeđena iz metričkih prostora. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema x u normiranom prostoru ako $\|x_n - x\| \to 0$ kada $n \to \infty$. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je *Cauchyjev* ako $\|x_k - x_m\| \to 0$ kada $m, k \to \infty$. Svaki konvergentan niz je Cauchyjev, ali ne vrijedi i obratno. Normirani prostor X u kojem svaki Cauchyjev niz konvergira i limes mu je u X naziva se *potpun* ili *Banachov* prostor.

Teorem 2.2 *Svaki konačno dimenzionalni normirani vektorski prostor je Banachov prostor.*

Teorem ne vrijedi za beskonačno dimenzionalne prostore, ali se svaki normirani prostor može upotpuniti. Kažemo da je podskup $A \subseteq X$ *gust* u X ako je $\overline{A} = X$. Definicija gustoće može se generalizirati i na skupove koji su gusti u nekom podskupu od X. Za $A, B \subseteq X$ kažemo da je A gust u B ako je $\overline{A} \supseteq B$.

Definicija 2.3 Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori. Linearno preslikavanje $\varphi\colon X \to Y$ takvo da za svaki $x \in X$ vrijedi $\|\varphi(x)\|_Y = \|x\|_X$ nazivamo *izometrija*. Ako je φ bijektivna izometrija, onda kažemo da su normirani prostori X i Y *izometrički izomorfni*, u oznaci $X \cong Y$.

Definicija 2.4 *Upotpunjenje* normiranog prostora X je par (Y, φ), pri čemu je Y Banachov prostor, a $\varphi\colon X \to Y$ izometrija za koju je $\varphi(X)$ gust u Y.

Teorem 2.5 *Svaki normirani prostor može se upotpuniti.*

Primijetimo da su Banachovi i općenitije normirani prostori opskrbljeni s dvije različite strukture, algebarskom i topološkom. U tom slučaju prirodno je zahtijevati da se te dvije strukture podudaraju u smislu da su vektorske operacije neprekidne u topologiji norme. Točnije, svaki vektorski prostor X (nad poljem $\mathbb{F}$) s topologijom $\mathcal{T}$ *topološki* je *vektorski prostor* ako su preslikavanja $(x, y) \mapsto x + y$ s $X \times X$ u X i $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ s $\mathbb{F} \times X$ u X neprekidna. Od svih topologija na X koje ga čine topološkim vektorskim prostorom, postoji najveća (najjača) takva, tzv. *najveća vektorska topologija.*

Klasi topoloških vektorskih prostora pripadaju i *lokalno konveksni prostori.* To su prostori u kojima postoji baza topologije koja se sastoji od konveksnih skupova. Budući da je otvorena kugla u normiranom prostoru konveksna, normirani prostori pripadaju lokalno konveksnim prostorima. Oni na neki način generaliziraju normirane prostore jer se topologija definira pomoću familije polunormi. Polunorma je funkcija koja zadovoljava svojstva (i), (iii) i (iv) u Definiciji 2.1. Ako je $(p_i)_{i\in I}$ familija polunormi na vektorskom prostoru X, tada postoji najmanja topologija na X koja ga pretvara u topološki vektorski prostor i u kojoj je svaki p_i neprekidan. U toj je topologiji X lokalno konveksan i baza za filter okolina nule dana je s:

$$\{x \in X : p_{i_1}(x) < \varepsilon, \ldots, p_{i_n}(x) < \varepsilon\}, \quad i_1, \ldots, i_n \in I, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0.$$

Najveća lokalno konveksna topologija jest topologija inducirana familijom svih polunormi na X. Ekvivalentno, baza za filter okolina nule sastoji se od svih skupova A koji su

- konveksni: $tA + (1-t)A \subseteq A$ za $t \in [0, 1]$
- apsorbirajući: $\forall\, x \in X \;\; \exists M > 0$ takav da $x \in \lambda A$ za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| \geqslant M$
- balansirani: $\alpha A \subseteq A$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $|\alpha| \leqslant 1$.

Budući da će se te topologije koristiti u Propoziciji 2.40, spomenimo još i *konačnu topologiju*. Kažemo da je skup $U \subseteq X$ otvoren u konačnoj topologiji ako je $U \cap F$ otvoren u F za svaki konačno dimenzionalni potprostor F od X. U konačnoj topologiji množenje skalarom neprekidno je kao i zbrajanje odvojeno po argumentima. Međutim, konačna topologija nije vektorska jer zbrajanje nije zajednički neprekidno. To je ispunjeno ako i samo ako je X prebrojive dimenzije i u tom je slučaju konačna topologija ekvivalentna najvećoj lokalno konveksnoj topologiji i najvećoj vektorskoj topologiji.

Određena preslikavanja između topoloških prostora čuvaju njihovu topološku strukturu.

Definicija 2.6 Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{Y})$ topološki prostori. *Homeomorfizam* prostora X i Y je bijektivno, neprekidno i otvoreno preslikavanje $f\colon X \to Y$. Kažemo da su X i Y *homeomorfni*, u oznaci $X \sim Y$.

Skup $S \subseteq X$ *kompaktan* je ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji je limes u S. Ekvivalentno, svaki otvoreni pokrivač skupa S može se reducirati na konačan potpokrivač. Svaki kompaktan skup omeđen je i zatvoren, a obrat vrijedi samo u konačno dimenzionalnim normiranim prostorima. Tako na primjer jedinična kugla $S_1 = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ u beskonačno dimenzionalnom normiranom prostoru X nije kompaktan skup. Za $X = L^1([0,1])$ nekompaktnost je dokazana u Primjeru 2.33.

Vratimo se Banachovim prostorima. Na $X = \mathbb{F}^n$ mogu se konstruirati razne norme, a najčešće se koristi *p-norma*:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{za } p \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Tu normu možemo generalizirati i na vektore s beskonačno prebrojivo mnogo koordinata tj. na nizove $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{za } p \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots\}.$$

Ta norma inducira ℓ^p *prostore* beskonačnih nizova realnih ili kompleksnih brojeva s konačnom p-normom. Za $p = 1$ to su apsolutno konvergentni nizovi, a za $p = \infty$ definiran je prostor svih omeđenih nizova. Za $1 \leqslant p \leqslant \infty$, svi ℓ^p prostori su Banachovi prostori, a za $1 \leqslant p < \infty$ su i *separabilni* (sadrže gust prebrojiv podskup).

Daljna generalizacija p-norme na općenite beskonačno dimenzionalne prostore (prostore funkcija) vodi nas do definicije L^p prostora. Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i f izmjeriva funkcija. Za $1 \leqslant p < \infty$ definiramo L^p *normu* i L^p *prostor* sa:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p},$$

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f \colon X \to \mathbb{C} : f \text{ je izmjeriva i } \|f\|_p < \infty\}.$$

Za $p = \infty$ definiramo

$$\|f\|_\infty := \inf\{K \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant K \text{ gotovo svuda na } X\},$$

$$L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f \colon X \to \mathbb{C} : f \text{ je izmjeriva i } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Elementi prostora $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ (kraće $L^p(X), L^p(\mu)$ ili samo L^p) zapravo su klase ekvivalencije, pri čemu identificiramo one funkcije koje su jednake gotovo svuda. Za $1 \leqslant p \leqslant \infty$, svi L^p prostori su Banachovi prostori, a za $1 \leqslant p < \infty$ su i separabilni. Za $0 < p < 1$ nije zadovoljena nejednakost trokuta pa u tom slučaju L^p prostori nisu ni normirani. Primijetimo da su ℓ^p prostori zapravo specijalan slučaj L^p prostora kada je $X = \mathbb{N}$ i μ brojeća mjera na $\mathbb{N}$. Specijalno, prostor $L^2(\mu)$ je Hilbertov (potpuni unitarni prostor) za svaku mjeru μ pri čemu je skalarni produkt dan s $\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$. Za $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *konjugirani eksponent* od p je broj $1 \leqslant q \leqslant \infty$ za koji vrijedi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

uz dogovor da je $1/0 = \infty$ i $1/\infty = 0$. Dualni prostor prostora L^p, točnije prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala na L^p, izometrički je izomorfan s L^q, tj. vrijedi $(L^p)' \cong L^q$ za $1 < p < \infty$. Ako je μ σ-konačna, tvrdnja vrijedi i za $p = 1$. Izomorfizam se postiže pridruživanjem:

$$g \in L^q \mapsto L_g \in (L^p)', \quad L_g(f) = \int fg\,\mathrm{d}\mu,\ f \in L^p.$$

Integrabilnost funkcije fg osigurava *Hölderova nejednakost*:

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q\,, \quad f, g \text{ izmjerive na } X,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Za $1 < p < \infty$, L^p prostori su *refleksivni*, tj. vrijedi $((L^p)')' = L^p$.

Osim L^p prostora, promotrimo još neke klasične primjere Banachovih prostora.

Primjer 2.7 (Banachovi prostori)

1. Vektorski prostori $B(X)$ i $BC(X)$ svih omeđenih te omeđenih i neprekidnih realnih funkcija na topološkom prostoru X s normom $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

2. Prostor $C([a, b])$ svih neprekidnih funkcija na $[a, b]$ s normom $\|\cdot\|_\infty$ je Banachov pri čemu se supremum postiže pa zapravo postoji maksimum. Općenitije, svaki $C(K)$ prostor neprekidnih funkcija na kompaktnom metričkom prostoru K je Banachov.

3. Vektorski prostor $C^k([a, b])$ svih funkcija koje imaju neprekidne derivacije do reda k

na $[a,b]$ s normom $\|f\| = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty$. U rubnim točkama gledaju se jednostrani limesi.

4. Vektorski prostor $M(X)$ svih konačnih realnih mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{M})$ s normom $\|\mu\| = |\mu|\,(X)$ pri čemu je $|\mu|$ *totalna varijacija* mjere μ. Zatvoren potprostor (pa time Banachov) od $M(X)$ je prostor $M_{rb}(X)$ regularnih Borelovih mjera na $(X, \mathcal{B}(X))$ pri čemu je $\mathcal{B}(X)$ Borelova σ-algebra na X.

5. Vektorski prostor c_0 svih realnih nizova koji konvergiraju k nuli sa supremum normom $\|x\|_\infty = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\diamondsuit$

Navedimo iskaze nekih klasičnih teorema funkcionalne analize koji se koriste kao argumenti u dokazima i primjerima.

Teorem 2.8 (Banach-Alaoglu) *Neka je X normirani vektorski prostor. Zatvorena jedinična kugla u X', $B' = \{f \in X' : \|f\| \leqslant 1\}$ kompaktna je u slaboj-$*$ topologiji.*

Teorem 2.9 (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji) *Neka je $\{f_n\}$ niz funkcija u L^1 takav da $f_n \to f$ g.s. i postoji nenegativna funkcija $g \in L^1$ takva da je $|f_n| \leqslant g$ za gotovo svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f \in L^1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.*

2.1.2 Soboljevi prostori

Važnu klasu Banachovih prostora čine *Soboljevi prostori* koji su potprostori L^p prostora. Slijede osnovne definicije i rezultati, a detalji se mogu pronaći u [1] i [32].

Promatrat ćemo kompleksne funkcije $u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definirane na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Neka je $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n-torka brojeva za koju je $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je α *multiindeks*, a *duljina multiindeksa* je broj $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Definirajmo

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

pri čemu je $D_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$ parcijalna derivacija α_i-tog reda po varijabli x_i. Operator D^α *diferencijalni* je *operator* reda $|\alpha|$. S $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označavamo vektorski prostor funkcija koje imaju neprekidne derivacije reda $|\alpha| \leqslant m$ pri čemu je $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ i $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$.

Nosač funkcije u je skup $\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$, a kažemo da u ima *kompaktan nosač* ako je $\operatorname{supp} u$ kompaktan (omeđen i zatvoren) podskup od $\mathbb{R}^n$. Prostori $C_0(\Omega)$ i $C_0^\infty(\Omega)$ označavaju prostore funkcija iz $C(\Omega)$ i $C^\infty(\Omega)$, respektivno, s kompaktnim nosačem u Ω. U prostoru $C_0^\infty(\Omega)$ definiramo konvergenciju niza funkcija na sljedeći način.

Definicija 2.10 Za niz funkcija $(\phi_n) \in C_0^\infty(\Omega)$ kažemo da *konvergira u smislu prostora* $\mathscr{D}(\Omega)$ prema funkciji $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ako:

(i) postoji kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ takav da je $\operatorname{supp}(\phi_n - \phi) \subseteq K \ \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformno na K za svaki multiindeks α.

Na prostoru $C_0^\infty(\Omega)$ postoji lokalno konveksna topologija u kojoj je linearni funkcional T neprekidan ako i samo ako $T(\phi_n) \to T(\phi)$ u $\mathbb{C}$ kad god $\phi_n \to \phi$ u smislu prostora $\mathscr{D}(\Omega)$. Zajedno s tom topologijom $C_0^\infty(\Omega)$ postaje lokalno konveksan topološki vektorski prostor i označavamo ga s $\mathscr{D}(\Omega)$, a njegove elemente nazivamo *test-funkcijama*.

Za funkciju kažemo da je *lokalno integrabilna* na Ω ako je integrabilna na svakom kompaktnom podskupu od Ω. Prostor svih lokalno integrabilnih funkcija označavamo s $L^1_{loc}(\Omega)$.

Dualni prostor $\mathscr{D}'(\Omega)$ prostora $\mathscr{D}(\Omega)$ nazivamo *prostorom distribucija*, a njegove elemente *distribucijama*. To je lokalno konveksan topološki vektorski prostor sa slabom-$*$ topologijom. Svakoj funkciji $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ može se pridružiti distribucija $T_u \in \mathscr{D}'(\Omega)$:

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Napomena 2.11 Ako je $u \neq v$ tada je $T_u \neq T_v$, tj. različite lokalno integrabilne funkcije definiraju različite distribucije. Također, ne može se svaka distribucija $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ prikazati kao $T = T_u$ za neki $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Distribucije koje imaju takvu integralnu reprezentaciju zovu se *regularne distribucije*. ♢

Za $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ i $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, parcijalnim integriranjem $|\alpha|$ puta dobije se jednakost

$$\int_\Omega (D^\alpha u(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x) D^\alpha\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

koja motivira definiciju derivacije $D^\alpha T$ distribucije $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$:

$$D^\alpha T(\phi) \coloneqq (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi).$$

Može se pokazati da je $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ i da je preslikavanje D^α s $\mathscr{D}'(\Omega)$ u $\mathscr{D}'(\Omega)$ neprekidno. Sada možemo definirati slabu derivaciju lokalno integrabilne funkcije.

Definicija 2.12 Neka je $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ako postoji funkcija $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da je $T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u)$ u $\mathscr{D}'(\Omega)$, tj. ako za svaki $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ vrijedi

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

tada je v_α jedinstvena do na skupove mjere nula i nazivamo je *slabom derivacijom* od u, u oznaci $D^\alpha u \coloneqq v_\alpha$.

Napomena 2.13 Uočimo da su oznake za slabu derivaciju i derivaciju u klasičnom smislu jednake. Iz definicije je jasno da je klasična derivacija, ako postoji, jednaka slaboj derivaciji.

Budući da na integral ne utječu vrijednosti funkcije na skupu mjere nula, funkcija koja nema klasičnu derivaciju u konačno mnogo točaka može biti slabo diferencijabilna. $\diamondsuit$

Za $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $1 \leqslant p \leqslant \infty$ definiramo (m,p)-*normu* kao:

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &:= \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad && 1 \leqslant p < \infty \\ \|u\|_{m,\infty} &:= \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_\infty, && p = \infty. \end{aligned}$$

Tako definirana, $\| \cdot \|_{m,p}$ je norma na vektorskim prostorima funkcija na kojima desna strana poprima konačne vrijednosti i u kojima identificiramo funkcije koje su jednake gotovo svuda na Ω. Razmatraju se tri takva prostora:

- $H^{m,p}(\Omega) :=$ upotpunjenje od $\left\{ u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty \right\}$
- $W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p, \text{ za } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m \right\}$
- $W_0^{m,p}(\Omega) :=$ zatvarač od $C_0^\infty(\Omega)$ u prostoru $W^{m,p}(\Omega)$.

U slučaju prostora $W^{m,p}$, $D^\alpha u$ označava slabu derivaciju funkcije u reda $|\alpha|$. Zajedno s (m,p)-normom time su definirani Soboljevi prostori.

Teorem 2.14 $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$.

Teorem 2.15 *Prostori $W^{m,p}(\Omega)$ su Banachovi za $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Napomena 2.16 Uočimo nekoliko činjenica:

- $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$
- $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ za $1 \leqslant p < \infty$ jer je $C_0^\infty(\Omega)$ gust u $L^p(\Omega)$
- postoji lanac *ulaganja*:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Ulaganje $X \hookrightarrow Y$ podrazumijeva da je $X \leqslant Y$ i da je inkluzija $i \colon X \hookrightarrow Y$, $ix = x$ neprekidna. Budući da je i linearno, neprekidnost inkluzije ekvivalentna je sljedećoj tvrdnji:

$$\exists\, C > 0 \quad \text{takav da je} \quad \|ix\|_Y \leqslant C\|x\|_X.$$

U nekim se okolnostima uvjeti da je X potprostor od Y i da je i inkluzija mogu oslabiti tako da se u Y ulažu određene kanonske linearne transformacije od X (Teorem 2.21). $\diamondsuit$

Mnoga važna svojstva prostora $W^{m,p}(\Omega)$ mogu se lako dokazati ako ih se promatra kao zatvorene potprostore Kartezijevog produkta prostora $L^p(\Omega)$. Neka je $N = N(n,m) = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} 1$ broj multiindeksa α koji zadovoljavaju $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$. Neka je

$$L_N^p = \prod_{j=1}^{N} L^p(\Omega), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

i norma od $u = (u_1, \ldots, u_N)$ u L_N^p dana s

$$\|u\|_{L_N^p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|_p^p\right)^{1/p} & \text{za } 1 \leqslant p < \infty \\ \max\{\|u_j\|_\infty : 1 \leqslant j \leqslant N\} & \text{za } p = \infty. \end{cases}$$

Prostori L_N^p su separabilni Banachovi prostori za $1 \leqslant p \leqslant \infty$ i refleksivni su za $1 \leqslant p < \infty$. Pretpostavimo da je skup multiindeksa N potpuno uređen skup u smislu da svakoj funkciji $u \in W^{m,p}(\Omega)$ možemo pridružiti dobro definiran vektor $Pu \in L_N^p$:

$$Pu = (D^\alpha u)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}.$$

Iz $\|Pu\|_{L_N^p} = \|u\|_{m,p}$ slijedi da je P izometrički izomorfizam prostora $W^{m,p}(\Omega)$ na potprostor $W \subset L_N^p$. Zbog potpunosti od $W^{m,p}(\Omega)$, W je zatvoren pa slijedi da je W separabilan za $1 \leqslant p < \infty$ i refleksivan za $1 < p < \infty$. Isto mora vrijediti i za $W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W)$.

Teorem 2.17 *$W^{m,p}(\Omega)$ je separabilan za $1 \leqslant p < \infty$ i refleksivan za $1 < p < \infty$. Posebno, $W^{m,2}(\Omega)$ je separabilan Hilbertov prostor sa skalarnim produktom*

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle ,$$

pri čemu je $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$ skalarni produkt u $L^2(\Omega)$.

Prije definicije prostora $W^{-m,q}(\Omega)$ (duali prostora $W^{m,p}(\Omega)$), uvedimo potrebne oznake i rezultate. Neka je $\langle u, v\rangle := \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ pri čemu su u, v funkcije za koje desna strana jednakosti ima smisla.

Teorem 2.18 *Neka je $1 \leqslant p < \infty$. Za svaki $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$ postoji $v = v_\alpha \in L_N^q$ takav da za svaki $u \in W^{m,p}(\Omega)$ vrijedi*

$$L(u) = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \langle D^\alpha u, v_\alpha\rangle . \tag{2.1}$$

Također je

$$\|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))'} = \inf\|v\|_{L_N^q} = \min\|v\|_{L_N^q} ,$$

pri čemu se infimum uzima i postiže na skupu svih $v \in L^q_N$ *za koje vrijedi* (2.1) *za svaki* $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Korisno je na restrikciju funkcionala $L|_{\mathscr{D}(\Omega)}$ gledati kao na distribuciju iz $\mathscr{D}(\Omega)$. Naime, ako je $1 \leqslant p < \infty$ i $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$ tada se L može zapisati kao u (2.1). Ako definiramo $T_{v_\alpha}, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ s:

$$\begin{aligned} T_{v_\alpha} &:= \langle \phi, v_\alpha \rangle, \quad \phi \in \mathscr{D}(\Omega), 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m, \\ T &:= \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha T_{v_\alpha}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

tada za svaki $\phi \in \mathscr{D}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$ imamo

$$T(\phi) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} T_{v_\alpha}(D^\alpha \phi) = L(\phi), \text{ tj. } T = L|_{\mathscr{D}(\Omega)}.$$

Postoji mogućnost da distribucija oblika (2.2) ima nejedinstveno proširenje na $W^{m,p}(\Omega)$, ali se može pokazati da ima jedinstveno proširenje na $W^{m,p}_0(\Omega)$.

Teorem 2.19 *Neka je* $1 \leqslant p < \infty$. *Dualni prostor* $(W^{m,p}_0(\Omega))'$ *izometrički je izomorfan Banachovom prostoru distribucija* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *oblika* (2.2) *za neki* $v \in L^q_N$.

Napomena 2.20 Dual $(W^{m,p}_0(\Omega))'$ označavamo s $W^{-m,q}(\Omega)$ pri čemu je q konjugirani eksponent od p. Dualni prostor $(W^{m,p}(\Omega))'$ karakterizira se (za $1 < p < \infty$) kao upotpunjenje od $L^q(\Omega)$ s obzirom na normu

$$\|v\|^{\sim}_{-m,q} = \sup \left\{ |\langle u, v \rangle| : u \in W^{m,p}(\Omega), \|u\|_{m,p} \leqslant 1 \right\}. \qquad \diamondsuit$$

Za kraj iznesimo još rezultat poznat kao *Soboljev teorem o ulaganju.* Tvrdnje teorema odnose se na ulaganje prostora $W^{m,p}(\Omega)$ u prostore $W^{j,q}(\Omega)$ za $j \leqslant m$ (posebno $L^q(\Omega)$) te prostore $C^j_B(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega) : D^\alpha u \text{ omeđen na } \Omega \text{ za } |\alpha| \leqslant j\}$. Pritom domena mora zadovoljavati određene uvjete. Kažemo da Ω zadovoljava *uvjet konusa* ako postoji konačan konus C takav da je svaka točka $x \in \Omega$ vrh konačnog konusa C_x iz Ω koji je kongruentan s C. Tvrdnja da je Soboljev prostor $W^{m,p}(\Omega)$ uložen u Banachov prostor funkcija X na Ω zapravo podrazumijeva da svaku funkciju u iz $W^{m,p}(\Omega)$ (točnije, svaku klasu ekvivalencija) možemo redefinirati na skupu mjere nula na način da modificirana funkcija $\tilde{u}$ (koja je jednaka u na $W^{m,p}(\Omega)$) pripada prostoru X i zadovoljava

$$\|\tilde{u}\|_X \leqslant C\|u\|_{m,p},$$

za neki $C > 0$ koji ne ovisi o u. Teorem neće biti iznijet u cijelosti već samo dio koji će biti koristan u narednim poglavljima.

Teorem 2.21 (Soboljev teorem o ulaganju)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup koji zadovoljava uvjet konusa, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $1 \leqslant p < \infty$.

(a) *Za $mp = n$ vrijedi*
$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; p \leqslant q < \infty.$$
Za $p = 1$, tj. $m = n$ vrijedi
$$W^{m,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

(b) *Za $mp > n$ vrijedi*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$
Posebno za $j = 0$ to znači
$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow BC(\Omega).$$

2.2 Obraz konveksnog skupa

Osnovni cilj ovog rada karakterizacija je pozitivno definitnih funkcija koje su definirane na konveksnim konusima stoga se u ovom potpoglavlju vrši detaljna analiza takve vrste skupova. Većinu definicija i tvrdnji čine poznati rezultati iz područja konveksne analize te će se navoditi bez dokaza koji se mogu pronaći u [10, 25, 29]. Od posebne važnosti bit će pojam *obraza* konveksnog skupa te su dani osnovni primjeri i tvrdnje povezane s tim pojmom. Nakon toga će se obraz proučavati u sklopu konveksnih konusa te će se pokazati da se otvoreni konveksni konusi mogu karakterizirati pomoću njih. Rezultati koji se odnose na obraz *konveksnog konusa* dani su u [15]. Osim ako nije drugačije navedeno u tekstu, V će označavati realan vektorski (ne nužno konačno dimenzionalan) prostor.

Definicija 2.22 Skup $C \subseteq V$ je *konveksan* ako za svaki $x, y \in C$ i $\lambda \in [0,1]$ vrijedi $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

Definicija 2.23 Skup $C \subseteq V$ je *konus* ako za svaki $x \in C$ i $\lambda > 0$ vrijedi $\lambda x \in C$.[1]

Jednostavno se pokaže da je skup C *konveksan konus* ako i samo ako

$$\forall\, x, y \in C \text{ i } \alpha, \beta > 0 \text{ vrijedi } \alpha x + \beta y \in C.$$

Uočimo da je $C - C = \operatorname{span}(C) = \operatorname{aff}(C)$. Kažemo da je C *generirajući* ako je $C - C = V$ tj. ako C razapinje V. Konveksni konusi koji ne sadrže pravac zovu se *usmjereni* i za njih vrijedi $C \cap (-C) \subseteq \{0\}$.

[1] Neki autori u definiciji konusa dopuštaju $\lambda = 0$ čime konus automatski sadrži nulu. Ovdje se to neće pretpostavljati.

Primjer 2.24 (Primjeri konveksnih konusa)

1. U vektorskom prostoru V svaki vektorski potprostor C konveksan je konus. Najmanji konveksni konus je $\{0\}$, a najveći V. Vektorski potprostor C ne može biti usmjeren konveksan konus jer je $C \cap (-C) = C$ osim u slučaju $C = \{0\}$. C je generirajući ako i samo ako je $C = V$.

2. Nenegativni ortant u $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0, \forall\, i\},$$

usmjeren je i generirajući konveksan konus. Ako je $x_i > 0$ za svaki i tada se radi o pozitivnom ortantu $\mathbb{R}^n_{++}$ koji je također usmjeren i generirajući. Konveksan konus

$$C = \{(x_1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

nije generirajući jer je dimenzije $n - 1$.

3. Neka su X i Y vektorski prostori i $\mathcal{L}(X, Y)$ skup svih neprekidnih linearnih operatora s X u Y. Tada je za $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, $C = \{x : L(x) \geqslant 0\}$ konveksan konus. Taj primjer generira mnoštvo beskonačno dimenzionalnih, usmjerenih, generirajućih konveksnih konusa. Neki od njih su $\{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \geqslant 0\}$, $\{f \in B([0,1]) : f(1) \geqslant 0\}$ i $\left\{f \in C([0,1]) : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0\right\}$.

4. Skupovi $C_1 = \left\{f \in C^1([0,1]) : f \geqslant 0\right\}$ i $C_2 = \left\{f \in C^1([0,1]) : f' \geqslant 0\right\}$ u prostoru $C^1([0,1])$ su konveksni konusi, pri čemu C_2 nije usmjeren jer sadrži sve konstantne funkcije. ♢

Definicija 2.25 *Obraz*[2] *konveksnog skupa* C je konveksan skup $F \subseteq C$ takav da za sve $x, y \in C$ i neki $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi da ako je $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$ tada su $x, y \in F$.

Ako s $\langle x, y\rangle := \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in \langle 0,1\rangle\}$ označimo linijski otvoreni interval između x i y, a s $[x, y]$ linijski segment, tada rubovi svakog intervala $[x, y]$ iz C koji ima barem jednu unutarnju točku u F moraju biti sadržani u obrazu F. Ekvivalentni zapis definicije mogao bi glasiti:

$$x, y \in C, \langle x, y\rangle \cap F \neq \emptyset \Rightarrow [x, y] \subseteq F.$$

Primijetimo da svaki konveksan skup C ima dva *trivijalna* obraza, prazan skup $\emptyset$ i cijeli C. Obraz koji nije trivijalan nazivamo *pravim*.

Uočimo da čim je $\dim V > 1$, skup $\langle x, y\rangle$ nije pravi interior segmenta $[x, y]$. Često se promatrani konveksni skupovi nalaze u potprostorima koji su strogo manjih dimenzija

[2] Izvorni engleski termin je *face*, a u konačno dimenzionalnom slučaju koristi se i prijevod *ekstremna (ekstremalna) stranica*.

od polaznog prostora. Interior takvih skupova uvijek je prazan skup pa se uvodi pojam *relativnog interiora* $\mathrm{ri}(S) = \mathrm{int}_{\mathrm{aff}(S)}(S)$ kao interiora unutar afine ljuske. Dimenzija konveksnog skupa S definira se kao dimenzija afine ljuske od S koja odgovara dimenziji potprostora dobivenog translacijom afine ljuske. Očito je da su pravi i relativni interior jednaki ako je $\dim S = \dim V$. Relativni rub od S je $\partial^r S = \overline{S} \setminus \mathrm{ri}(S)$.

Napomena 2.26 Svaki neprazan konačno dimenzionalan konveksan skup ima neprazan relativni interior dok u beskonačnim dimenzijama to ne mora vrijediti. Štoviše, u svakom beskonačno dimenzionalnom vektorskom prostoru može se pronaći neprazan konveksan skup s praznim relativnim interiorom. Na primjer, skup pozitivnih realnih nizova konveksan je skup koji ima prazan relativni interior u $\mathbb{R}^\infty$. Od sada na dalje koristit ćemo izraz interior i za pravi i za relativni interior kada je jasno iz konteksta o kojem interioru se radi. $\diamondsuit$

Definicija 2.27 Nula dimenzionalan obraz konveksnog skupa C naziva se *ekstremna točka*. Jednodimenzionalan obraz $\{\lambda s : \lambda > 0\}$, $s \in C \setminus \{0\}$ nazivamo *ekstremnom zrakom*.

Dakle, $x \in C$ je ekstremna točka ako iz $x = \lambda z + (1 - \lambda)y$, $y, z \in C, \lambda \in \langle 0, 1\rangle$ slijedi $x = y = z$, tj. x se ne nalazi u relativnom interioru niti jednog segmenta iz C. Unutar konveksnog konusa koncept ekstremne točke beskoristan je s obzirom na to da je jedini kandidat ishodište. Lako se pokaže da vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 2.28 *Ako je C usmjeren konveksan konus i $0 \in C$, tada je 0 ekstremna točka.*

Analogon ekstremne točke u konveksnim konusima jednodimenzionalni je obraz odnosno ekstremna zraka. U konveksnim konusima koji sadrže nulu obraz oblika $\{\lambda s : \lambda \geqslant 0\}$ također nazivamo ekstremnom zrakom.

Primjer 2.29 (Obraz konveksnog skupa u $\mathbb{R}^n$)

1. Ako je $K = \{(x, y, z) : 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$ zatvorena jedinična kocka u $\mathbb{R}^3$, tada su svi vrhovi, bridovi i stranice obrazi te kocke.

2. Zatvoreni jedinični krug $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ima za ekstremne točke sve točke s ruba od S, $\partial S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ i to su ujedno i jedini obrazi.

3. Zadan je skup u $\mathbb{R}^2$, $A = \mathrm{conv}\{(x, y, 0) : x^2+y^2 = 1\}\cup\{(1, 0, \pm 1)\}$. Skup ekstremnih točaka od A, u oznaci $\mathrm{Ext}(A)$ jednak je:

$$\mathrm{Ext}(A) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1, x \neq 1\} \cup \{(1, 0, \pm 1)\}.$$

   Točka $(1, 0, 0)$ nije ekstremna točka jer se može napisati kao $\frac{1}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, -1)$. Obrazi u A su sve ekstremne točke od A, linija $\{(1, 0, y) : |y| \leqslant 1\}$ i sve linije oblika

$\{t(x,y,0)+(1-t)(1,0,\pm 1)\}$ pri čemu su x,y takvi da je $x^2+y^2=1$, $x\neq 1$, $t\in\langle 0,1\rangle$. $\diamondsuit$

Podsjetimo se da je H *hiperravnina* u V ako je to nul-prostor nekog nenul linearnog funkcionala iz V^* ili ekvivalentno, H je potprostor kodimenzije jedan. *Potporna hiperravnina* skupa $S\subseteq V$ je hiperravnina u kojoj funkcional postiže svoj maksimum na S. Preciznije, to je skup oblika

$$H=\{x\in V : f(x)=\alpha\},\ f\in V^*\backslash\{0\} \text{ i } f(x)\leqslant\alpha, \forall x\in S.$$

Ako je H potporna hiperravnina skupa S tada se jednostavno pokaže da je

$$F=H\cap S=\{x\in S : f(x)=\alpha\}$$

obraz od S. Štoviše, ako f nije konstanta na S, tada je F pravi obraz. Svaki obraz konstruiran na taj način pomoću linearnog funkcionala naziva se *izloženi obraz.* Nula dimenzionalni izloženi obraz naziva se *izložena točka*, a jednodimenzionalni *izložena zraka.* Svaka izložena točka (zraka) ekstremna je točka (zraka), ali obrat ne vrijedi.

U konačno dimenzionalnom slučaju za svaku točku s relativnog ruba konveksnog skupa S postoji potporna hiperravnina od S koja prolazi kroz tu točku. U beskonačno dimenzionalnom slučaju to vrijedi samo ako S ima neprazan interior ([2, Lema 7.7]).

Primjer 2.30 (Izloženi obraz konveksnog skupa)

1. Vrhovi i stranice zatvorenog kvadrata u $\mathbb{R}^2$, $K=\{(x,y) : 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$ izloženi su obrazi jer se mogu dobiti kao presjek kvadrata i potpornog pravca.

2. Promotrimo $C([0,1])$, skup svih neprekidnih funkcija na $[0,1]$ i konveksan skup $S=\{f\in C([0,1]) : 0\leqslant f\leqslant 1\}$. Za linearni funkcional koji funkciji $f\in C([0,1])$ pridružuje Lebesgueov integral $L_f=\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x$ vrijedi $L_f\leqslant 1$ čim je $f\in S$ pa možemo definirati potpornu hiperravninu skupa S

$$H=\left\{f\in C([0,1]) : \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x=1\right\}.$$

Tada je $f_1\equiv 1=H\cap S$ pa je f_1 izložena točka skupa S.

3. Neka je $K=\{x\in H : \|x\|\leqslant 1\}$ zatvorena jedinična kugla u Hilbertovom prostoru H. Tada je svaka točka iz ∂K izložena točka od K (za dokaz vidi [2, Lema 7.85]). $\diamondsuit$

Iz prethodnih primjera daje se naslutiti da se svaki pravi obraz u konačno dimenzionalnim skupovima nalazi na relativnom rubu samog skupa i da je strogo manje dimenzije. Ta tvrdnja upravo je korolar sljedećeg teorema. U njemu je V konačno dimenzionalan.

Teorem 2.31 *Neka je $C \subseteq V$ konveksan skup i F obraz od C. Ako je D konveksan skup u C takav da je $\mathrm{ri}(D) \cap F \neq \emptyset$ tada je $D \subseteq F$.*

Korolar 2.32 *Ako je F pravi obraz konveksnog skupa C tada je $F \subseteq \partial^r C$ i vrijedi $\dim F < \dim C$.*

Može se reći da ekstremne točke karakteriziraju sve ostale točke konveksnog skupa. Naime, svaki neprazan, kompaktan i konveksan podskup lokalno konveksnog prostora je zatvorena konveksna ljuska svojih ekstremnih točaka. To je poznati Krein-Milmanov teorem čiji se dokaz može pronaći u [6] ili [26]. Iako ga trenutačno spominjemo u kontekstu jednodimenzionalnog obraza, tj. ekstremnih točaka, njegova integralna verzija pokazat će se vrlo važnim alatom u integralnoj reprezentaciji pozitivno definitnih funkcija.

Pokazali smo da su u konačno dimenzionalnom slučaju sve točke s ruba zatvorene jedinične kugle ekstremne. U beskonačno dimenzionalnom slučaju, zatvorena jedinična kugla ne mora imati ekstremne točke ako nije kompaktna u nekoj lokalno konveksnoj topologiji.

Primjer 2.33 (Ekstremne točke i obrazi u $L^1([0,1])$)
Neka je B zatvorena jedinična kugla u prostoru $L^1([0,1])$,

$$B = \left\{ f \in L^1([0,1]) : \|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant 1 \right\}.$$

Pokazat ćemo da B ne sadrži niti jednu ekstremnu točku, ali da ima beskonačno mnogo pravih obraza. Neka je $f \in B, f \neq 0$. Definirajmo neprekidnu funkciju $H_f(s) := \int_{[0,s]} |f(t)| \, \mathrm{d}t$. Očito je $H_f(0) = 0$ i $H_f(1) = \alpha \leqslant 1$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Dakle, postoji $s_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ za koji je $H_f(s_0) = \alpha/2$. Neka su

$$g := 2f \cdot 1_{[0,s_0]}, \quad h := 2f \cdot 1_{[s_0,1]}.$$

Tada je $\|f\|_1 = \|g\|_1 = \|h\|_1 = \alpha \leqslant 1$, $f = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}g$ i $h \neq g$ pa f nije ekstremna točka. Nula također nije ekstremna točka jer je $0 = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}(-f)$. Možemo zaključiti da konveksan skup B nema ekstremnih točaka. Posebno, iz Krein-Milmanovog teorema slijedi da B nije kompaktan niti u jednoj lokalno konveksnoj topologiji što znači da $L^1([0,1])$ nije dual niti jednog normiranog prostora po Banach-Alaogluovom teoremu. Nekompaktnost se naravno mogla pokazati i izravno.

U istom prostoru promotrimo skup

$$F_\alpha = \{ f \in L^1([0,1]) : \|f\|_1 = 1, f \geqslant 0, f(x) = 0 \text{ na } [0,\alpha] \} \subseteq \partial B.$$

F_α je obraz za svaki $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ i uočimo da je $F_\beta \subset F_\alpha$ čim je $\beta > \alpha$, tj. $\{F_\alpha\}$ je totalno uređen skup s obrnutom inkluzijom kao uređajem. Primijetimo da su svi obrazi F_α sadržani u obrazu $F = \{ f \in L^1[0,1] : \|f\|_1 = 1, f \geqslant 0 \}$. ♢

Napomena 2.34 Promotrimo prostor $L^1(X,\mu)$ pri čemu je μ pozitivna mjera na X i neka je B zatvorena jedinična kugla u njemu. Ako je A konveksan podskup jedinične sfere $S = \{x \in L^1(X) : \|x\| = 1\}$, tada za sve $x, y \in A$, skup $\operatorname{supp} x^+ \cap \operatorname{supp} y^-$ ima mjeru nula. Naime, kad bi za $E = \operatorname{supp} x^+ \cap \operatorname{supp} y^-$ bilo $\mu(E) > 0$ tada bi na E vrijedilo $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$, tj.

$$\int_E |x+y| \, d\mu < \int_E (|x| + |y|) \, d\mu$$

iz čega slijedi $\int {}^1\!/_2|x+y| \, d\mu < \int {}^1\!/_2(|x|+|y|) \, d\mu = 1$ što je u kontradikciji s konveksnošću od A.

Također primijetimo da je obraz F iz prethodnog primjera maksimalni obraz u smislu da je svaki drugi pravi obraz sadržan u njemu. Općenitije, može se pokazati da svaki maksimalni pravi obraz u B ima oblik:

$$F = \{x \in B : \operatorname{supp} x^+ \subseteq Y, \operatorname{supp} x^- \subseteq X \setminus Y, \|x\| = 1\},$$

za neki izmjerivi skup Y. Vrijedi i obrat, svaki skup F tog oblika maksimalni je pravi obraz u B. Za dokaz vidjeti [18]. $\diamondsuit$

Primjer 2.35 (Ekstremne točke u prostoru mjera)
Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor i $\mathcal{M}_1(X)$ skup regularnih Borelovih vjerojatnosnih mjera na X. Pokazat ćemo koje su mjere ekstremne točke u tom prostoru. Neka je $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ i $C \subset X$ takav da je $\mu(C) \neq 0$. Definirajmo oznake:

$$\mu_C(B) := \mu(B|C) = \frac{\mu(B \cap C)}{\mu(C)}, \quad \mu_{C^c}(B) := \mu(B|C^c) = \frac{\mu(B \setminus C)}{\mu(C^c)}.$$

Tada za $\theta := \mu(C) \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi $\mu = \theta\mu_C + (1-\theta)\mu_{C^c}$ pa μ nije ekstremna točka. Neka je sada mjera μ takva da je $\mu(A)$ jednaka 0 ili 1, $\forall A \subseteq X$. Neka su x i y različite točke iz $\operatorname{supp}\mu$. Tada postoje disjunktne otvorene okoline B i C takve da je $x \in B$ i $y \in C$ te mora vrijediti $\mu(B) > 0$ i $\mu(C) > 0$. Po pretpostavci je onda $\mu(B) = \mu(C) = 1$ što je kontradikcija jer bi bilo $\mu(B \cup C) = 2$. Slijedi da se u $\operatorname{supp}\mu$ nalazi samo jedna točka i $\mu = \delta_x$ za neki x, tj.

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A. \end{cases}$$

Štoviše, sve su točke iz skupa Diracovih mjera $\{\delta_x : x \in X\}$ ekstremne, tj. vrijedi $\operatorname{Ext}(\mathcal{M}_1(X)) = \{\delta_x : x \in X\}$. Naime, ako je $\delta_x = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ za $t \in \langle 0, 1\rangle$ i $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(X)$, tada za proizvoljni otvoreni skup $U \subset X$, $x \notin U$ mora vrijediti $\mu_1(U) = \mu_2(U) = 0$ iz čega slijedi $\mu_i = \delta_x$, $i = 1, 2$. $\diamondsuit$

Primijetimo iz prethodnih primjera da se niti jedan obraz (beskonačno dimenzionalnog konveksnog skupa) nije nalazio u interioru konveksnog skupa.

Propozicija 2.36 *Neka je S konveksan skup i F pravi obraz od S. Tada je F sadržan u topološkom rubu od S. Obratno, ako je S podskup lokalno konveksnog topološkog vektorskog prostora X i $\operatorname{Int} S \neq \emptyset$, tada svaka točka $x \in S \cap \partial S$ leži u nekom pravom obrazu od S.*

Korolar 2.37 *Neka je S neprazan konveksan konus u lokalno konveksnom prostoru X. Tada je S otvoren u $\operatorname{span}(S)$ ako i samo ako ne sadrži pravi obraz.*

Lema 2.38 *Neka je V realni vektorski prostor i $S \subseteq V$ konveksan konus. Tada vrijedi:*

(a) *Svaki obraz F od S je konveksan konus.*

(b) *Ako je $W \leqslant V$ i F obraz od S tada je $F \cap W$ obraz od $S \cap W$.*

(c) *F je obraz od S u smislu Definicije* 2.25 *ako i samo ako je F obraz od S u smislu polugrupe.* (F je obraz u smislu polugrupe ako je F potpolugrupa od S i vrijedi $\forall\, x, y \in S$, $x + y \in F \Rightarrow x, y \in F$.)

(d) *Presjek obraza od S je obraz od S. Posebno, za svaki $x \in S$ postoji najmanji obraz $F_s(x)$ koji sadrži x, obraz generiran s x.*

(e) *Za svaki $x \in S$, obraz generiran s x je $F_S(x) = (\mathbb{R}^+ x - S) \cap S$. Ako je W vektorski potprostor od V koji sadrži x i $T := S \cap W$, tada je $F_T(x) = F_S(x) \cap W$.*

(f) *Ako je F pravi obraz od S tada je $S \setminus F$ gust u S s obzirom na bilo koju vektorsku topologiju na V. Preciznije, $\forall\, x \in S$ i $y \in S \setminus F$ vrijedi $tx + (1-t)y \in S \setminus F$, $\forall\, t \in \langle 0, 1\rangle$.*

Propozicija 2.39 *U svakom normiranom prostoru $(V, \|\cdot\|)$ postoji usmjeren, zatvoren konveksan konus s nepraznim interiorom.*

Karakterizacija otvorenih konusa pomoću obraza bit će korisna u narednim poglavljima.

Propozicija 2.40 *Neka je $S \neq \emptyset$ konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) *S nema pravi obraz*

(b) *S je otvoren u $\operatorname{span}(S)$ u konačnoj topologiji*

(c) *S je otvoren u $\operatorname{span}(S)$ u najvećoj vektorskoj topologiji*

(d) *S je otvoren u $\operatorname{span}(S)$ u najvećoj lokalno konveksnoj topologiji.*

Primjer 2.41 (Beskonačno dimenzionalni konveksni konusi i njihovi obrazi)

1. Za kompaktan topološki prostor K, $S \coloneqq \{f \in C(K) : f > 0\}$ je usmjeren otvoren konveksan konus u Banachovom prostoru $C(K)$ pa S nema pravi obraz.

2. Neka je $C^\infty([0,1])$ prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija na $[0,1]$ (s jednostranim limesima u 0 i 1). S $\|f\|_k \coloneqq \max\{|f^{(k)}(x)| : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ definiran je niz polunormi koji inducira topologiju na tom prostoru. Može se pokazati da je to nuklearni Fréchetov prostor i $S \coloneqq \{f \in C^\infty([0,1]) : f > 0\}$ je usmjeren otvoren konveksan konus pa S nema pravi obraz.

3. U Banachovom prostoru c_0 svih realnih nizova koji konvergiraju k nuli, konveksan konus $S \coloneqq \{(x_n) \in c_0 : x_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ je zatvoren i generirajući, ali $\operatorname{Int} S = \emptyset$. Naime, neka je $(x_n) \in S$ i $\varepsilon > 0$. Zbog $x_n \to 0$, postoji n_0 takav da je $x_{n_0} < \varepsilon$. Ako definiramo niz $y_n \coloneqq x_n$, $n \neq n_0$, $y_{n_0} = -\varepsilon$, tada je $\|x_n - y_n\| < 2\varepsilon$ i $y_n \notin S$, dakle S ima prazan interior. Ekstremna točka je očito $(x_n) = (0, 0, \ldots)$.

   Za $x = (x_n) > 0 \in S$, svaki obraz generiran s (x_n) bit će jednak cijelom S, tj. vrijedi
   $$F_S(x) = S, \quad x \in S \text{ i } x > 0.$$
   Fiksirajmo $x = (x_n) \in S$, $x > 0$ i neka je $y = (y_n) \in S$ proizvoljan, $y \neq 0$. Ako definiramo
   $$c \coloneqq \sup_n \frac{y_n}{x_n}, \quad z_n \coloneqq cx_n - y_n,$$
   tada je $c > 0$ i $z_n \in S$ te vrijedi $y_n = cx_n - z_n$ i $y_n \geqslant 0 \; \forall n$, tj. $y_n \in F_S(x)$. Ako je $y = 0$, tada je $y = 1x - x$.

   Za $x = (x_n) \in S$ takav da je $x_i = 0$ za neki $i \in \mathbb{N}$, vrijedi $F_S(x) \subset S$. Naime, ako uzmemo $y = (y_n) \in S$ takav da je $y_i > 0$ tada za proizvoljne $c > 0$ i $(z_n) \in S$ imamo
   $$0 < y_i = cx_i - z_i = -z_i$$
   što je kontradikcija pa smo našli niz u S koji nije u obrazu generiranom s (x_n).

   Na primjer, niz $x_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{n} \in c_0$ generira pravi obraz u S:
   $$F_S(x) = \{(y_n) \in S : y_i = 0, \ i \text{ paran } \}.$$

4. Generalizirajmo prethodni primjer na sve funkcije $f \colon I \to \mathbb{R}$, pri čemu je I beskonačan. Definirajmo $S \coloneqq \{f \in \mathbb{R}^I : f \geqslant 0\}$. To je zatvoren konveksan konus u $\mathbb{R}^I$ koji je snabdjeven najvećom lokalno konveksnom topologijom. Slično kao gore, može se pokazati da je S usmjeren, generirajući i da ima prazan interior.

Pokažimo da je $\operatorname{Int} S = \emptyset$. Baza topologije je filter okolina oko nule oblika

$$B = \{f \in \mathbb{R}^I : |\phi_k(f)| < \varepsilon,\ k = 1, \dots, n\},$$

pri čemu su ϕ_k linearni funkcionali na $\mathbb{R}^I$. Tada je $\operatorname{Ker} \phi_k$ kodimenzije jedan za svaki k pa $\bigcap_k \operatorname{Ker} \phi_k$ sadrži netrivijalan element, recimo g. Tada je $g \in B$ i također $\lambda g \in B$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ pa za neki λ sigurno vrijedi da je $\lambda g \notin S$.

Ako označimo $J := \{i \in I : f(i) > 0\}$, tada je obraz generiran s $f \in S$ jednak $F_S(f) = ([0, \infty\rangle)^J \times \{0\}^{I \setminus J}$.

5. Za svaku pozitivnu mjeru μ, konveksan konus $S := \{f \in L^2(X, \mu) : f \geqslant 0\}$ je usmjeren i generirajući, ali može imati prazan interior, npr. za $X = \mathbb{R}$ i Lebesgueovu mjeru μ. Štoviše, pozitivni konus u svakom $L^p(X, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ ima prazan interior, a neprazan u prostoru $L^\infty(X, \mu)$. Više detalja bit će dano u četvrtom poglavlju u kojem će se definirati AM i AL-prostori.

6. Konveksan konus $S := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : f > 0\}$ u nuklearnom Fréchetovom prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ je usmjeren. Može se pokazati da je S i generirajući (za dokaz vidi [15, str. 51]).

7. $S = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : f > 0\}$ je konveksan konus u Schwartzovom prostoru brzo padajućih realnih funkcija na $\mathbb{R}^n$. Konus S je usmjeren i generirajući, ali sadrži pravi obraz. Za svaki $f \in S$, obraz $F_S(f)$ od S generiran s funkcijom f je pravi obraz i gust u S (dokaz se može naći u doktorskoj disertaciji H. Glöcknera).

8. Promotrimo Banachov prostor $M_{br}(X)$ konačnih, regularnih, realnih Borelovih mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{B}(X))$ i pozitivni konus $S := \{\mu \in M_{br}(X) : \mu \geqslant 0\}$. Očito je S usmjeren, generirajući i nul-mjera je ekstremna točka od S. Obraz generiran mjerom $\mu \in S$ je po Lemi 2.38(e), $F_\mu = (\mathbb{R}^+ \mu - S) \cap S$. Ako je A nul-skup za μ, tada A očito mora biti nul-skup za svaku mjeru iz F_μ. Na ostalim izmjerivim skupovima (nenul-skupovima) svaka se mjera ν iz S može prikazati u obliku $\nu = c\mu - m$ za dovoljno veliki $c > 0$ i mjeru $m \in S$. Slijedi da je obraz od S generiran mjerom μ jednak skupu mjera koje su apsolutno neprekidne u odnosu na μ, tj.
$$F_\mu = \{\nu \in S : \nu \ll \mu\}.$$

Nadalje, postavlja se pitanje "najmanjeg" obraza u S, tj. postoji li jednodimenzionalni obraz odnosno ekstremna zraka u S? To će biti obraz generiran Diracovom mjerom. Ako promotrimo zraku $F_\delta^1 = \{t\delta_a : t \geqslant 0\}$ pri čemu je δ_a Diracova mjera s masom u točki $a \in X$, vidimo da je F_δ^1 konveksan konus pa je po Lemi 2.38(c) dovoljno provjeriti da za svake dvije mjere iz S čiji je zbroj u F_δ^1 vrijedi da su obje iz F_δ^1. Neka su $\mu, \nu \in S$ i $t \geqslant 0$ takvi da je $\mu + \nu = t\delta_a$. Tada je

$$0 = (\mu + \nu)(\{a\}^c) = \mu(\{a\}^c) + \nu(\{a\}^c) \Rightarrow \mu(\{a\}^c) = \nu(\{a\}^c) = 0$$

pa su i njihove mase koncentrirane u a, tj. mjere μ, ν pripadaju F_δ^1. Slijedi da je F_δ^1 ekstremna zraka u S sa smjerom δ_a.

Za dvije Diracove mjere δ_a i δ_b, najmanji konveksan konus koji sadrži te dvije mjere bit će upravo obraz generiran tim mjerama, tj. dobije se 2-dimenzionalni obraz

$$F_\delta^2 = \{\alpha\delta_a + \beta\delta_b : \alpha, \beta \geqslant 0\},$$

te općenito, n-dimenzionalni obraz je konveksan konus generiran s n Diracovih mjera,

$$F_\delta^n = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} : \alpha_i \geqslant 0, x_i \in X \right\}.$$

Nadalje, promotrimo skup svih mjera koje su singularne s mjerom μ

$$F_\mu^\perp = \{\nu \in S : \nu \perp \mu\}.$$

To su sve mjere ν za koje postoji izmjeriv skup A takav da je $\mu(A) = 0$ i $\nu(A^c) = 0$. Uzmimo dvije mjere $\nu_1 \perp \mu$, $\nu_2 \perp \mu$ i $c_1, c_2 > 0$. Tada postoje $A, B \in \mathcal{B}(X)$ takvi da je $\nu_1(A) = \nu_2(B) = 0$ i $\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0$. Zbog $X = (A \cap B) \cup (A \cap B)^c$ i $(c_1\nu_1 + c_2\nu_2)(A \cap B) = 0$, $\mu(A^c \cup B^c) = 0$, $F_\mu^\perp$ je konveksan konus. Ako uzmemo $\nu_1, \nu_2 \in S$ takve da je $(\nu_1 + \nu_2) \perp \mu$, slijedi da su ν_1 i ν_2 singularne s μ čime smo pokazali da je $F_\mu^\perp$ obraz od S. Očito je jedina mjera u presjeku obraza $F_\mu^\perp$ i F_μ nul-mjera. Iz Lebesgueove dekompozicije znamo da se svaka σ-konačna realna mjera može napisati kao suma σ-konačnih realnih mjera pri čemu je jedna apsolutno neprekidna u odnosu na neku σ-konačnu pozitivnu mjeru μ, a druga singularna s μ. Ako dekomponiramo konačnu pozitivnu mjeru tada su i mjere u sumi konačne pozitivne mjere. Slijedi da se pozitivni konus S može zapisati kao direktna suma obraza

$$S = F_\mu^\perp \oplus F_\mu.$$

U slučaju $X = \mathbb{R}^n$ singularni dio može se dodatno rastaviti na zbroj singularne neprekidne mjere u odnosu na Lebesgueovu mjeru λ i diskretne mjere (pozitivna kombinacija Diracovih mjera), tj. za regularnu Borelovu mjeru μ na $\mathbb{R}^n$ vrijedi dekompozicija

$$\mu = \mu_d + \mu_{sc} + \mu_{ac}. \tag{2.3}$$

U rastavu (2.3), μ_d je diskretna mjera, $\mu_d = \sum_j \alpha_j \delta_{x_j}$ za prebrojiv skup $\{x_j\} \subseteq \mathbb{R}^n$

i $\alpha_j \geqslant 0$, μ_{sc} je singularna s Lebesgueovom mjerom i $\mu_{sc}(\{x\}) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, a μ_{ac} je apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru. Budući da svaka od ovih mjera pripada jednom od prethodno definiranih obraza, vrijedi da je

$$S = F_\delta^{\aleph_0} \oplus F_\lambda^{\perp} \oplus F_\lambda.$$

Uočimo da svaka mjera koja ima barem jedan nul-skup A pripada obrazu

$$F_A = \{\mu \in S : \mu(A) = 0\},$$

iz čega slijedi da svaka takva mjera pripada rubu od S. Štoviše, sve mjere pripadaju rubu jer je interior od S prazan. Naime, S je pozitivni konus u skupu $M_{br}(X) \subseteq M(X)$, a prostor konačnih realnih mjera $M(X)$ pripada klasi AL-prostora (Definicija 4.9). Točnije, za svake dvije mjere $\mu, \nu \in S$ vrijedi

$$\|\mu + \nu\| = |\mu + \nu|\,(X) = (\mu + \nu)(X) = \mu(X) + \nu(X) = \|\mu\| + \|\nu\|.$$

Može se pokazati da svaki pozitivni konus u beskonačno dimenzionalnom AL-prostoru ima prazan interior ([2, Korolar 9.41]).

Vratimo se prostoru $M(X)$ konačnih realnih mjera na X. Uočimo da je obraz F_μ od $S = M(X)_+$ koji je generiran mjerom $\mu \in S$ izometrički izomorfan s $L^1(\mu)_+$,

$$F_\mu \cong L^1(\mu)_+.$$

Naime, za $f \in L^1(\mu)_+$ definirajmo funkciju $\nu_f : \Sigma \to [0, \infty\rangle$ s

$$\nu_f(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Tako definirana ν_f očito je pozitivna mjera omeđene varijacije koja je apsolutno neprekidna u odnosu na μ, tj. $\nu_f \in F_\mu$. Obratno, po Radon-Nikodymovom teoremu za svaku mjeru $\nu \in F_\mu$ postoji jedinstvena μ-integrabilna funkcija f takva da je $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu$. Iz

$$\|\nu_f\| = \nu_f(X) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1$$

slijedi izometrija.

9. Struktura pozitivnog konusa u Soboljevim prostorima $W^{m,p}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ovisi o odnosu brojeva m, p i n. Precizniji iskazi nalaze se u četvrtom poglavlju. $\diamondsuit$

Primijetimo da je u Primjeru 2.41(7) obraz gust u konveksnom konusu što nije moguće u konačnom dimenzionalnom prostoru u kojem je obraz strogo manje dimenzije od dimenzije konveksnog skupa. Većina primjera preuzeta je iz [15], a Primjeri 2.41(3) i 2.41(8) autoričini su.

2.3 Algebra operatora $B(\mathcal{H})$

Budući da će se u narednim poglavljima promatrati funkcije čije su vrijednosti u skupu $B(\mathcal{H})$, potrebno je definirati osnovne pojmove i iskazati tvdnje povezane s tim skupom. Definicije su preuzete iz [19, Dodatak I] i [17].

S $B(\mathcal{H})$ označavamo kompleksnu algebru omeđenih operatora na kompleksnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. To je skup svih linearnih operatora $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ čija je norma $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leqslant 1\}$ konačna ili ekvivalentno skup svih neprekidnih linearnih operatora na $\mathcal{H}$. Može se pokazati da za $A \in B(\mathcal{H})$ vrijedi da je

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : x, y \in \mathcal{H}, \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}^3.$$

Za $A \in B(\mathcal{H})$, A^* označava *adjungirani operator* operatora A; to je jedinstveno određeni operator iz $B(\mathcal{H})^4$ za koji vrijedi

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle\,, \ \ \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Može se pokazati da je $(A^*)^* = A$ i $\|A^*\| = \|A\|$. Svojstvo $\|A^*A\| = \|A\|^2$ za $A \in B(\mathcal{H})$ čini $B(\mathcal{H})$ C^*-algebrom.

Operatore $A \in B(\mathcal{H})$ za koje vrijedi $A = A^*$ nazivamo *hermitskim* i skup svih takvih operatora, $\mathrm{Herm}(\mathcal{H})$, čini realni vektorski potprostor od $B(\mathcal{H})$. Operator $A \in B(\mathcal{H})$ je hermitski ako i samo ako je $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ za svaki $x \in \mathcal{H}$.

Pozitivno semidefinitni operatori $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ su hermitski operatori A za koje vrijedi $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0, \ \forall\, x \in \mathcal{H}$ te čine konveksan konus u skupu hermitskih operatora.

Za $A \in B(\mathcal{H})$ kažemo da je *Hilbert-Schmidtov operator* ako je

$$\|A\|_2 \coloneqq \left(\sum_k \|Ae_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)} < \infty,$$

pri čemu je $\{e_k\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, a $\mathrm{tr}B = \sum_k \langle Be_k, e_k\rangle$ trag matrice $B \in B(\mathcal{H})$. Prostor Hilbert-Schmidtovih operatora označava se s $B_2(\mathcal{H})$ i to je Hilbertov prostor u kojem se skalarni produkt definira kao:

$$\langle A, B\rangle \coloneqq \sum_k \langle B^*Ae_k, e_k\rangle = \mathrm{tr}(AB^*).$$

[3]Tvrdnja zapravo vrijedi i za operatore koji nisu nužno omeđeni u smislu da se dopušta mogućnost da oba supremuma iznose $+\infty$.

[4]Ako je $A \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, tada je $A^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.

Za $A \in B(\mathcal{H})$ kažemo da je *trace class* operator ako je $A \in B_2(\mathcal{H})$ i

$$\|A\|_1 := \sup\{|\langle A, B\rangle| : B \in B_2(\mathcal{H}), \|B\| \leqslant 1\} < \infty.$$

Skup svih *trace class* operatora označavamo s $B_1(\mathcal{H})$ te je $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ Banachov prostor. Uočimo da je $B_1(\mathcal{H}) \subseteq B_2(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$ te vrijedi $\|A\| \leqslant \|A\|_2$ za $A \in B_2(\mathcal{H})$ i $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_1$ za $A \in B_1(\mathcal{H})$.

Za operatore $A \in B(\mathcal{H})$, $B \in B_1(\mathcal{H})$ vrijedi da su AB i BA iz $B_1(\mathcal{H})$ te imaju jednak trag. Pomoću preslikavanja

$$A \in B(\mathcal{H}) \mapsto \phi_A \in B_1(\mathcal{H})', \quad \phi_A(B) = \operatorname{tr}(AB),\ B \in B_1(\mathcal{H})$$

identificiramo Banachov prostor $(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ s dualom prostora $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$. To pridruživanje može se zapisati i na sljedeći način:

$$B(\mathcal{H}) \times B_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB).$$

Uvedimo oznake:

$$\operatorname{Herm}_1(\mathcal{H}) := \operatorname{Herm}(\mathcal{H}) \cap B_1(\mathcal{H}), \quad \operatorname{Herm}_1^+(\mathcal{H}) := \operatorname{Herm}^+(\mathcal{H}) \cap \operatorname{Herm}_1(\mathcal{H}).$$

Slično kao gore, pomoću pridruživanja

$$\operatorname{Herm}_1(\mathcal{H}) \times \operatorname{Herm}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB),$$

identificiramo $\operatorname{Herm}_1(\mathcal{H})$ s potprostorom od $\operatorname{Herm}(\mathcal{H})'$.

Za $v, w \in \mathcal{H}$ možemo definirati operator $P_{v,w} \in B_1(\mathcal{H})$ pomoću $P_{v,w}(x) = \langle x, w\rangle v$ za $x \in \mathcal{H}$. Vrijedi da je $\operatorname{tr} P_{v,w} = \langle v, w\rangle$ i $AP_{v,w}B^* = P_{Av,Bw}$ za $A, B \in B(\mathcal{H})$. S P_v označavamo $P_v := P_{v,v}$ te uočimo da je $P_v \in \operatorname{Herm}_1^+(\mathcal{H})$ za svaki $v \in \mathcal{H}$.

Ortogonalni projektor je svaki operator $A \in B(\mathcal{H})$ za koji vrijedi $A^2 = A = A^*$ te skup svih takvih operatora označavamo s $P_{\mathcal{H}}$. Uočimo da je $P_{\mathcal{H}} \subseteq \operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$.

Prostor $B(\mathcal{H})$ možemo snabdijeti različitim topologijama.

Definicija 2.42

(i) *Topologija norme* na $B(\mathcal{H})$ topologija je inducirana operatorskom normom $\|\cdot\|\colon B(\mathcal{H}) \to [0, \infty\rangle$.

(ii) *Ultraslaba operatorska topologija* na $B(\mathcal{H})$ inicijalna je topologija na $B(\mathcal{H})$ s obzirom na familiju linearnih funkcionala $B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}, A \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ pri čemu je $B \in B_1(\mathcal{H})$.

(iii) *Jaka operatorska topologija* na $B(\mathcal{H})$ inicijalna je topologija na $B(\mathcal{H})$ s obzirom na familiju $(f_v)_{v\in\mathcal{H}}$ linearnih preslikavanja $f_v\colon B(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$, $A \mapsto Av$ (topologija konvergencije po točkama).

(iv) *Slaba operatorska topologija* na $B(\mathcal{H})$ inicijalna je topologija na $B(\mathcal{H})$ s obzirom na familiju $(f_{v,w})_{(v,w)\in\mathcal{H}^2}$ pri čemu je $f_{v,w}\colon B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ linearni funkcional oblika $f_{v,w}(A) = \langle Av, w\rangle$.

Topologija norme (uniformna operatorska topologija) najjača je topologija na $B(\mathcal{H})$ i jedina ga pretvara u Banachov prostor dok je u preostalim topologijama $B(\mathcal{H})$ lokalno konveksan topološki vektorski prostor. Ipak, topologija norme prejaka je za mnoge svrhe jer u njoj $B(\mathcal{H})$ nije separabilan prostor. Slaba operatorska topologija je najslabija. Sve te četiri topologije induciraju jednake bornologije na $B(\mathcal{H})$, odnosno omeđenost podskupa $X \subseteq B(\mathcal{H})$ u topologiji norme ekvivalentna je omeđenošću od X u ostalim topologijama. Ultraslaba operatorska topologija na $B(\mathcal{H})$ jednaka je slaboj-$*$ topologiji s obzirom na identifikaciju $B(\mathcal{H}) \cong B_1(\mathcal{H})'$.

Lema 2.43 *Neka je X k-prostor*[5]*, $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor i $f\colon X \to B(\mathcal{H})$ funkcija. Tada je f neprekidna s obzirom na slabu operatorsku topologiju na $B(\mathcal{H})$ ako i samo ako je neprekidna s obzirom na ultraslabu operatorsku topologiju na $B(\mathcal{H})$.*

Definicija 2.44 *Neomeđen operator* A na kompleksnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je linearno preslikavanje $A\colon \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ pri čemu je $\mathcal{D}(A) \leqslant \mathcal{H}$. Ako je $\mathcal{D}(A)$ gust u $\mathcal{H}$, označimo s $\mathcal{D}(A^*)$ skup:

$$\mathcal{D}(A^*) \coloneqq \{v \in \mathcal{H} :\ \text{funkcija } w \mapsto \langle Aw, v\rangle \text{ s } \mathcal{D}(A) \text{ u } \mathbb{C} \text{ je neprekidna}\} \leqslant \mathcal{H}.$$

Adjunkta od A jedinstveni je neomeđeni operator $A^*\colon \mathcal{D}(A^*) \to \mathcal{H}$ za koji vrijedi $\langle Aw, v\rangle = \langle w, A^*v\rangle$.

Operator A je *zatvoren* ako je njegov graf $\Gamma(A) \coloneqq \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$ zatvoren skup u $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Ako su A i B neomeđeni operatori na $\mathcal{H}$, kažemo da je B *proširenje* od A ako je $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ i $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$. Operator A *se može zatvoriti* (*closable*) ako ima zatvoreno proširenje B za koje vrijedi $\overline{\Gamma(A)} = \Gamma(B)$ i u tom slučaju označavamo $B \coloneqq \overline{A}$ (zatvarač od A).

Napomena 2.45 Uočimo da prema prethodnoj (standarnoj) definiciji neomeđeni operatori obuhvaćaju i omeđene operatore. Mogu se promatrati i algebre omeđenih operatora na zajedničkoj domeni. $\diamondsuit$

[5]Hausdorffov topološki prostor X je *k-prostor* ako je induktivan limes svojih kompaktnih podskupova. Svaki lokalno kompaktan ili metrizabilan topološki prostor je k-prostor.

Definicija 2.46 Neka je $\mathcal{H}^0$ kompleksan predhilbertov prostor s upotpunjenjem $\mathcal{H}$. Tada s $B_0(\mathcal{H}^0)$ označavamo $*$-algebru linearnih operatora

$$A\colon \mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^0,$$

za koje vrijedi $\mathcal{H}^0 \subseteq \mathcal{D}(A^*)$ i $A^*(\mathcal{H}^0) \subseteq \mathcal{H}^0$ (A se promatra kao neomeđeni operator). Involucija se u tom slučaju označava s $\sharp$ i definira kao $A^\sharp := A^*|_{\mathcal{H}^0}^{\mathcal{H}^0}$, a produkt je kompozicija operatora.

Napomena 2.47 Podalgebra omeđenih operatora u $B_0(\mathcal{H}^0)$ izometrički je izomorfna s $*$-podalgebrom od $B(\mathcal{H})$ putem neprekidnog proširenja $A \mapsto \overline{A}$ koje operatoru pridružuje njegov zatvarač. Istaknimo da se svaki $A \in B_0(\mathcal{H}^0)$ može zatvoriti pomoću $(A^\sharp)^*$. $\diamondsuit$

Napomena 2.48 Na početku ovog potpoglavlja definiran je pojam adjungiranog operatora na Hilbertovim prostorima. Napomenimo da postoji još jedan pojam istog naziva, a koji se koristi u dokazima. Iz konteksta je uvijek jasno na koji operator se pritom misli. $\diamondsuit$

Definicija 2.49 Neka je $T\colon X \to Y$ linearan operator između vektorskih prostora X i Y te X^*, Y^* algebarski duali od X i Y respektivno. *Adjungirani operator (algebarska adjunkta)* od T je linearan operator $T^*\colon Y^* \to X^*$ za koji vrijedi $T^*y^*(x) = y^*(Tx)$, $\forall\, y^* \in Y^*$, $x \in X$.

Poglavlje 3

POZITIVNO DEFINITNE FUNKCIJE

3.1 Mjere s vrijednostima u konveksnom konusu

Motivacija je pozitivna mjera na izmjerivom prostoru (X, Σ), $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty]$ pri čemu skup $[0, \infty]$ promatramo kao kompaktifikaciju konveksnog konusa $[0, \infty\rangle$ koji je gust u $[0, \infty]$ i uočimo da je $[0, \infty]$ kompaktan topološki monoid s obzirom na zbrajanje. Cilj je generalizirati tu ideju s mjerama koje imaju vrijednosti u konveksnom konusu C (koji pripada općenitom realnom vektorskom prostoru), ali im se dopuštaju "beskonačne" vrijednosti izvan konusa C, u kompaktifikaciji C_∞. Definicije i dokazi tvrdnji koje se odnose na mjere s vrijednostima u konveksnom konusu mogu se pronaći u [20] i [15]. Kao što je uobičajeno, V^* označavat će algebarski dual prostora V, a V' topološki.

Definicija 3.1 Neka je C konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V. *Dualni konus* od C je

$$C^* := \{\lambda \in V^* : \lambda(C) \subseteq [0, \infty\rangle\}.$$

Za konveksan konus (ili podskup) $T \subseteq V^*$ definiramo

$${}^*T := \{x \in V : \lambda(x) \geqslant 0, \, \forall\, \lambda \in T\}.$$

Napomena 3.2 Uočimo da je dualni konus C^* zatvoren u slaboj-$*$ topologiji. Također, ako je konveksan konus C zatvoren u lokalno konveksnom prostoru V, tada iz Hahn-Banachovog teorema separacije slijedi $C = {}^*(C^*) = {}^*(C^* \cap V')$ ([2, Korolar 5.84]). $\diamondsuit$

Definicija 3.3 Neka su $(S, \circ)$ i $(T, \star)$ polugrupe (monoidi). *Homomorfizam polugrupa (monoida)* je preslikavanje $\varphi\colon S \to T$ za koje vrijedi $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$, $\forall\, a, b \in S$. Oznaka za skup svih homomorfizama sa S u T je $\hom(S, T)$.

Definicija 3.4 *Kodomena podataka*[1] je trojka $(W, W^\sharp, C)$ u kojoj je W realni vektorski prostor, $W^\sharp$ vektorski potprostor od W^* i C konveksan konus u W takvi da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

[1] Izvorni engleski termin ovog pojma glasi *range data* i uveo ga je K. H. Neeb u [20].

(i) C je usmjeren i generirajući, tj. vrijedi $C \cap (-C) \subseteq \{0\}$ i $C - C = W$.

(ii) $C = {}^*(C^*) = \{x \in W : \lambda(x) \geqslant 0, \forall\, \lambda \in C^*\}$ pri čemu je dualni konus ovdje definiran kao presjek dualnog konusa od C s $W^\sharp$, tj. $C^* := \left\{\lambda \in W^\sharp : \lambda(C) \subseteq [0, \infty\rangle\right\}$. Također pretpostavljamo da je C^* generirajući, tj. $C^* - C^* = W^\sharp$.

(iii) Neka je

$$C_\infty := \hom\left(C^*, [0, \infty]\right)$$

kompaktan topološki monoid svih homomorfizama između monoida C^* i $[0, \infty]$ pri čemu je topologija na C_∞ topologija konvergencije po točkama (naslijeđena topologija produktne topologije na $[0, \infty]^{C^*}$). Pritom je operacija na monoidu zbrajanje. Definirajmo preslikavanje

$$k \colon C \to C_\infty, \quad x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x)).$$

Preslikavanje k je injekcija te zahtijevamo da vrijedi $k(C) = \hom\left(C^*, [0, \infty\rangle\right)$.

Uočimo da ako W snabdijemo slabom topologijom $\sigma(W, W^\sharp)$ (najmanja topologija koja linearne funkcionale iz $W^\sharp$ čini neprekidnima), tada k postaje topološko ulaganje. Može se pokazati da je $k(C)$ gust u C_∞ čime C_∞ postaje kompaktifikacija od C [20, Propozicija I.4.].

Napomena 3.5 Budući da je $C = {}^*(C^*)$ usmjeren, $W^\sharp$ separira točke na W. Točnije, za svaki $x, y \in W$, $x \neq y$ postoji $\lambda \in W^\sharp$ takav da je $\lambda(x) \neq \lambda(y)$. ♢

Definicija 3.6 Neka je $(W, W^\sharp, C)$ kodomena podataka i (X, Σ) izmjeriv prostor. *Mjera s vrijednostima u konveksnom konusu* C je σ-aditivna funkcija $\mu \colon \Sigma \to C_\infty$ takva da je $\mu(\emptyset) = 0$. Mjera μ je *konačna* ako je $\mu(X) \in \hom(C^*, [0, \infty\rangle) \sim C$ te *σ-konačna* ako postoji niz skupova $(X_n), X_n \in \Sigma$ takvih da je $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ i $\mu(X_n) \in C$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 3.7 Za $\lambda \in C^*$ definirajmo $\mu_\lambda \colon \Sigma \to [0, \infty]$ s

$$\mu_\lambda(A) = \mu(A)(\lambda), \;\; A \in \Sigma.$$

Zbog topologije konvergencije po točkama u C_∞, μ_λ je σ-aditivna i stoga pozitivna mjera na (X, Σ). Uočimo da je $\mu_{\lambda_1 + \lambda_2} = \mu_{\lambda_1} + \mu_{\lambda_2}$ pa je preslikavanje $\lambda \mapsto \mu_\lambda$ s C^* u $[0, \infty]^\Sigma$ homomorfizam monoida. Obratno, za familiju $(\nu^\lambda)_{\lambda \in C^*}$ pozitivnih mjera na (X, Σ), takvih da je $\lambda \mapsto \nu^\lambda$ s C^* u $[0, \infty]^\Sigma$ homomorfizam monoida, postoji jedinstvena mjera ν s vrijednostima u C takva da je $\nu_\lambda = \nu^\lambda$, $\forall\, \lambda \in C^*$. Često se mjere s vrijednostima u konveksnom konusu konstruiraju upravo na taj način. ♢

Propozicija 3.8 *Trojka*

$$(W, W^\sharp, C) = (\mathrm{Herm}(\mathcal{H}), \mathrm{Herm}_1(\mathcal{H}), \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H}))$$

čini kodomenu podataka, tj. zadovoljeni su uvjeti iz Definicije 3.4 *pri čemu je dualni konus jednak* $C^* = \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H})$.

Mjere koje ćemo promatrati bit će isključivo mjere s kodomenom podataka iz Propozicije 3.8. Dakle, to su mjere s vrijednostima u konveksnom konusu $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ odnosno σ-aditivne funkcije

$$\mu\colon \Sigma \to \hom(\mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H}), [0,\infty]),$$

takve da je $\mu(\emptyset) = 0$. Mjera μ je konačna ako je $\mu(X) \in \hom(\mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H}), [0,\infty\rangle) \sim \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ pri čemu se homeomorfizam '$\sim$' ostvaruje pomoću

$$k\colon \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H}) \to \hom(\mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H}), [0,\infty\rangle), \quad A \mapsto (B \mapsto \mathrm{tr}(BA)).$$

Napomena 3.9 Za kodomenu podataka $(W, W^\sharp, C) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, [0,\infty\rangle)$ mjera μ s vrijednostima u $C = [0,\infty\rangle$ pozitivna je mjera $\mu\colon \Sigma \to [0,\infty]$ u klasičnom smislu te se integral s obzirom na tu mjeru podudara s klasično definiranim integralom. ♢

Napomena 3.10 Neka je μ *spektralna mjera* na (X, Σ), tj. funkcija $\mu\colon \Sigma \to P_{\mathcal{H}}$ za koju je

$$\mu_{v,w}\colon \Sigma \to \mathbb{C}, \quad A \mapsto \langle \mu(A)v, w\rangle$$

kompleksna mjera za svaki $v, w \in \mathcal{H}$ i $\mu(X) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Tada je μ mjera s vrijednostima u konusu $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ u smislu Definicije 3.6. ♢

Integracija s obzirom na mjeru s vrijednostima u konveksnom konusu

Definirajmo integrale skalarnih i vektorskih funkcija s obzirom na mjeru s vrijednostima u konveksnom konusu. Kompleksifikaciju realnog vektorskog prostora W označavat ćemo s $W_{\mathbb{C}} := W + iW$.

Definicija 3.11 Neka je $\mu\colon \Sigma \to C_\infty$ mjera s vrijednostima u konveksnom konusu na izmjerivom prostoru (X, Σ) i kodomenom podatka $(W, W^\sharp, C)$. Za izmjerivu funkciju $f\colon X \to [0,\infty]$ definiramo integral $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in C_\infty$ s

$$\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right)(\lambda) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu_\lambda, \;\; \lambda \in C^*.$$

Kažemo da je izmjeriva funkcija $f\colon X \to \mathbb{C}$ *μ-integrabilna* ako je $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \in C$, tj. ako je $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu_\lambda < \infty$ za svaki $\lambda \in C^*$. Ako je $f\colon X \to \mathbb{C}$ μ-integrabilna, integral funkcije f definira se kao

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu + i\int_X f_3 \,\mathrm{d}\mu - i\int_X f_4 \,\mathrm{d}\mu \;\in W_{\mathbb{C}},$$

pri čemu je $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ i $f_i \geqslant 0$ za $i = 1, \ldots, 4$. Za integrabilnu funkciju $f\colon X \to \mathbb{C}$ i $\lambda_{\mathbb{C}} \in W_{\mathbb{C}}^{\sharp}$ vrijedi

$$\left\langle \lambda_{\mathbb{C}}, \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right\rangle = \int_X f \, \mathrm{d}\mu_\lambda, \quad \lambda \in C^*.$$

Napomena 3.12 Uočimo da za izmjerivu funkciju $f\colon X \to [0, \infty]$ vrijedi $\int_X f \, \mathrm{d}\mu_{\lambda_1 + \lambda_2} = \int_X f \, \mathrm{d}\mu_{\lambda_1} + \int_X f \, \mathrm{d}\mu_{\lambda_2}$, tj. da integrali $\int_X f \, \mathrm{d}\mu_\lambda \in [0, \infty]$ ovise aditivno o $\lambda \in C^*$ te stoga definiraju homomorfizam monoida $C^* \to [0, \infty]$. Dakle, preslikavanje $\lambda \mapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu_\lambda$ je element iz C_∞. ♢

Lema 3.13 *Neka je $\mu\colon \Sigma \to C_\infty$ mjera s vrijednostima u konveksnom konusu na izmjerivom prostoru (X, Σ) i kodomenom podataka $(W, W^\sharp, C)$. Ako je C konačno dimenzionalan i $\lambda_0 \in \operatorname{Int} C^*$, tada je izmjeriva funkcija $f\colon X \to [0, \infty]$ μ-integrabilna ako i samo ako je μ_{λ_0}-integrabilna.*

Napomena 3.14 Podsjetimo se definicije vektorske mjere koja se može naći npr. u [8] ili [12]. Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor i B Banachov prostor. *Mjera s vrijednostima u B* (*vektorska mjera*) je svaka funkcija $\mu\colon \Sigma \to B$ za koju je

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, za svaki niz disjunktnih skupova (A_i) iz Σ.

Varijacija mjere μ je funkcija

$$|\mu| : \Sigma \to [0, \infty], \quad |\mu|(A) = \sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\|,$$

pri čemu se supremum uzima po svim disjunktnim konačnim particijama skupa A na Σ-izmjerive skupove. Ako je $|\mu|(X) < \infty$, kažemo da je μ *omeđene varijacije*.

Uočimo da konačnu mjeru μ na (X, Σ) s vrijednostima u $C \subseteq B$ (u smislu Definicije 3.6) možemo promatrati kao vektorsku mjeru čije se vrijednosti nalaze u konveksnom konusu C. U slučaju konačno dimenzionalnog prostora B može se pokazati da je pristup integraciji vektorskih funkcija razvijen u [20] (opisan niže) ekvivalentan standarnom pristupu integraciji ([20, Napomena I.14]). Razlika se očituje u beskonačno dimenzionalnom slučaju. Naime, u standarnom pristupu integral se može definirati samo ako je mjera omeđene varijacije dok se to ograničenje može odbaciti kad su u pitanju mjere s vrijednostima u konveksnom konusu. Prednost se očituje i u tome što integral postoji bez obzira na integrabilnost funkcije te pripada prostoru C_∞ ili $[0, \infty]$ ovisno o tome je li podintegrabilna funkcija vektorska ili skalarna. ♢

Definicija 3.15 Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor, μ mjera na (X, Σ) s vrijednostima u konveksnom konusu i kodomenom podataka $(W, W^\sharp, C)$ te $f\colon X \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija.

Označimo s Γ familiju otvorenih podskupova $U \subseteq \mathbb{C}$ takvih da je $\mu(f^{-1}(U)) = 0$. Budući da $\mathbb{C}$ zadovoljava 2. aksiom prebrojivosti i da je μ σ-aditivna, vrijedi da je $U_0 := \bigcup \Gamma \in \Gamma$. *Esencijalni rang od f s obzirom na μ* zatvoreni je podskup od $\mathbb{C}$, $\operatorname{ess\,range}_\mu(f) := \mathbb{C} \setminus U_0$. *Esencijalni supremum od f s obzirom na μ* je broj $\operatorname{ess\,sup}_\mu(f) := \sup |\operatorname{ess\,range}_\mu(f)|$.

Definirajmo sada integral *vektorskih* funkcija s obzirom na mjeru μ s vrijednostima u konveksnom konusu C koja je definirana na izmjerivom prostoru (X, Σ) i ima kodomenu podataka $(W, W^\sharp, C)$. Neka je μ σ-konačna.

Za početak pretpostavimo da je W konačno dimenzionalan. Budući da $W^\sharp$ separira točke na W, a to implicira $\dim W^\sharp \geqslant \dim W$, mora vrijediti da je $W^\sharp = W^*$. Također, zbog usmjerenosti od C, konveksan konus C^* ima neprazan interior pa možemo izabrati $\lambda_0 \in \operatorname{Int} C^*$. Budući da su mjere μ_λ apsolutno neprekidne u odnosu na μ_{λ_0} za svaki $\lambda \in C^*$, iz Radon-Nikodymovog teorema slijedi da postoji izmjeriva funkcija $h_0 \colon X \to C$ takva da je

$$\mathrm{d}\mu_\lambda = (\lambda \circ h_0)\, \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}, \quad \lambda \in C^*.$$

Tada se integral izmjerive funkcije $f \colon X \to C^*$ s obzirom na μ definira kao integral funkcije $\langle f, h_0 \rangle : X \to [0, \infty\rangle$ s obzirom na μ_{λ_0}:

$$\int_X \langle f, \mathrm{d}\mu \rangle := \int_X \langle f(x), h_0(x) \rangle \, \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}(x) \ \in [0, \infty] \,.$$

Izmjeriva funkcija $f \colon X \to W^*_{\mathbb{C}}$ je *μ-integrabilna* ako je $\langle f, h_0 \rangle : X \to \mathbb{C}$ μ_{λ_0}-integrabilna, tj. ako je $\int_X |\langle f(x), h_0(x) \rangle| \, \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}(x) < \infty$ te se integral $\int \langle f, \mathrm{d}\mu \rangle$ definira kao:

$$\int_X \langle f, \mathrm{d}\mu \rangle := \int_X \langle f(x), h_0(x) \rangle \, \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}(x) \ \in \mathbb{C}.$$

Može se pokazati da integrabilnost (i vrijednost integrala) ne ovisi o izboru λ_0.

Slučaj kada je W beskonačno dimenzionalan vektorski prostor može se svesti na prethodno opisan konačni slučaj na sljedeći način.

Definicija 3.16 Neka je $(W, W^\sharp, C)$ kodomena podataka. Konačno dimenzionalni potprostor $W_0^\sharp \leqslant W^\sharp$ je *dopustiv* (*admissible*) ako $C^* \cap W_0^\sharp$ ima neprazan interior u $W_0^\sharp$.

Pretpostavimo da je $f \colon X \to (W^\sharp)_{\mathbb{C}}$ izmjeriva i $\dim \operatorname{span} f(X) < \infty$. Budući da je svaki konačno dimenzionalni potprostor od $C^* - C^* = W^\sharp$ sadržan u nekom dopustivom prostoru, postoji dopustiv $W_0^\sharp \leqslant W^\sharp$ takav da je $f(X) \subseteq (W_0^\sharp)_{\mathbb{C}}$. Neka je ${}^\perp(W_0^\sharp) := \{x \in W : \lambda(x) = 0, \forall\, \lambda \in W_0^\sharp\}$ anihilator od $W_0^\sharp$ u W i definirajmo kvocijentni prostor

$$W_0 := \frac{W}{{}^\perp(W_0^\sharp)}.$$

Neka je

$$q \colon W \to W_0, \ \ q(x) = [x], \ x \in W$$

kvocijentni operator (prirodna projekcija od W na W_0) i $C_0 := \overline{q(C)}$. Tada je C_0 zatvoren generirajući konveksan konus u W_0. Kao posljedica prvog teorema o izomorfizmu postoji izomorfizam vektorskih prostora (bijektivni linearni operator)

$$\psi \colon W_0^* \to W_0^\sharp, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ q$$

i vrijedi $\psi(C_0^*) = C^* \cap W_0^\sharp$ (konveksan konus). Budući da je $\dim W_0^\sharp < \infty$ tada je i $\dim W_0 < \infty$.

Neka je $\tilde{\psi} := \psi|_{C_0^*}^{C^* \cap W_0^\sharp}$ i $j \colon C^* \cap W_0^\sharp \hookrightarrow C^*$ inkluzija. Kao i prije, C_∞ označava prostor $\hom(C^*, [0,\infty])$ te definirajmo $(C_0)_\infty := \hom(C_0^*, [0,\infty])$. Neka je

$$H_{j\circ\tilde{\psi}} \colon C_\infty \to (C_0)_\infty, \ \ \xi \mapsto \xi \circ j \circ \tilde{\psi}.$$

Tada je

$$\mu^0 \colon \Sigma \to (C_0)_\infty, \ \ \mu^0 := H_{j\circ\tilde{\psi}} \circ \mu$$

mjera s vrijednostima u C_0 na (X, Σ). Neka je

$$f_0 \colon X \to (W_0^*)_{\mathbb{C}}, \ \ f_0 := \psi_{\mathbb{C}}^{-1} \circ f|^{(W_0^\sharp)_{\mathbb{C}}}.$$

Kažemo da je f *μ-integrabilna* ako je f_0 μ^0-integrabilna i u tom slučaju definiramo integral $\int f \,\mathrm{d}\mu$ kao

$$\int_X \langle f, \,\mathrm{d}\mu\rangle := \int_X \left\langle f_0, \,\mathrm{d}\mu^0\right\rangle = \int_X \langle f_0(x), h_0(x)\rangle \,\mathrm{d}\mu^0_{\lambda_0}(x) \ \in \mathbb{C},$$

pri čemu je $h_0 \colon X \to C_0$ i $\lambda_0 \in \operatorname{Int}(C_0^*)$ kao što su prethodno definirani za konačno dimenzionalni slučaj. Integral izmjerive funkcije f s konačno dimenzionalnom slikom i vrijednostima u C^* definira se analogno i ima vrijednosti u $[0,\infty]$. Može se pokazati da definicija integrabilnosti i vrijednost integrala ne ovise o izboru dopustivog prostora $W_0^\sharp$.

Lema 3.17 *Ako je $f \colon X \to \mathbb{C}$ μ-integrabilna i $\lambda \in W_{\mathbb{C}}^\sharp$ tada je $x \mapsto f(x)\lambda$ μ-integrabilna funkcija s vrijednostima u $W_{\mathbb{C}}^\sharp$ i vrijedi*

$$\left\langle \lambda, \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right\rangle = \int_X \langle f(x)\lambda, \,\mathrm{d}\mu(x)\rangle\,.$$

L^2 prostori vektorskih funkcija

Neka je μ σ-konačna mjera na izmjerivom prostoru (X, Σ) s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ i kodomenom podataka $(\operatorname{Herm}(\mathcal{H}), \operatorname{Herm}_1(\mathcal{H}), \operatorname{Herm}^+(\mathcal{H}))$. Definirajmo Hilbertov prostor $L^2(X, \mu)$.

Uzmimo izmjerivu funkciju $f \colon X \to \mathcal{H}$ s konačno dimenzionalnom slikom. Promotrimo preslikavanje s X u $\operatorname{Herm}_1^+(\mathcal{H})$, $x \mapsto P_{f(x)}$ pri čemu je $P_{f(x)}$ operator definiran kao u potpoglavlju 2.3 s $P_{f(x)}(y) = \langle y, f(x)\rangle\, f(x)$. To preslikavanje je izmjerivo i slika preslikavanja sadržana je u konačno dimenzionalnom prostoru $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{P_v : v \in \mathcal{H}_0\} \subseteq \operatorname{Herm}_1(\mathcal{H})$. Definirajmo L^2 normu od f:

$$\|f\|_2^2 \coloneqq \int_X \left\langle P_{f(x)},\, \mathrm{d}\mu(x)\right\rangle \in [0,\infty]\,,$$

te označimo s $\mathcal{L}^2(X,\mu)$ kompleksan vektorski prostor svih izmjerivih funkcija $f\colon X \to \mathcal{H}$ s konačno dimenzionalnom slikom za koje vrijedi $\|f\|_2 < \infty$.

Preslikavanje $\mathcal{L}^2(X,\mu)^2 \to \mathbb{C}$ definirano s

$$(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle \coloneqq \int_X \left\langle P_{f(x),g(x)},\, \mathrm{d}\mu(x)\right\rangle$$

je pozitivno semidefinitna seskvilinearna forma na $\mathcal{L}^2(X,\mu)$. Ako definiramo $N \coloneqq \{f \in \mathcal{L}^2(X,\mu) : \|f\|_2 = 0\}$ i $\langle f+N, g+N\rangle \coloneqq \langle f, g\rangle$, tada je $\mathcal{L}^2(X,\mu)/N$ predhilbertov prostor čije upotpunjenje označavamo s $L^2(X,\mu)$.

Definirajmo pojmove i iskažimo još neke korisne tvrdnje koje se odnose na mjeru s vrijednostima u konveksnom konusu.

Definicija 3.18

(i) Neka je X Hausdorffov prostor i $\mathcal{B}(X)$ Borelova σ-algebra na X. Svaku mjeru definiranu na $(X,\mathcal{B}(X))$ nazivamo *Borelovom mjerom* na X.

(ii) Neka je (Y,Σ) izmjeriv prostor. Pozitivna mjera $\mu\colon \Sigma \to [0,\infty]$ na (Y,Σ) je *regularna iznutra* s obzirom na Hausdorffovu topologiju τ na Y ako je $\mu(A) = \sup \mu^*(K)$ za svaki $A \in \Sigma$ pri čemu je $\mu^*\colon \mathcal{P}(Y) \to [0,\infty]$ Carathéodoryjeva vanjska mjera pridružena mjeri μ, a K su τ-kompaktni podskupovi od A. Ako je μ mjera s vrijednostima u konveksnom konusu C na (Y,Σ) s kodomenom podataka $(W, W^\sharp, C)$, kažemo da je μ regularna iznutra s obzirom na τ ako su pozitivne mjere μ_λ regularne iznutra za svaki $\lambda \in C^*$.

(iii) Pozitivna Borelova mjera $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ je *Radonova* ako je konačna na kompaktnim skupovima i regularna iznutra. Kompleksna Borelova mjera ν je *kompleksna Radonova mjera* ako je totalna varijacija $|\nu|$ Radonova mjera.

(iv) Ako je μ mjera s vrijednostima u konveksnom konusu na $(X,\mathcal{B}(X))$ s kodomenom podataka $(W, W^\sharp, C)$, kažemo da je μ *Radonova mjera s vrijednostima u C* ako je μ_λ Radonova za svaki $\lambda \in C^*$.

Definicija 3.19 Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje između topoloških prostora X i Y te $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to C_\infty$ Borelova mjera na X s vrijednostima u C i kodomenom podataka

$(W, W^\sharp, C)$. Tada je mjera

$$f(\mu)|_{\mathcal{B}(Y)} \colon \mathcal{B}(Y) \to C_\infty, \quad f(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

Borelova mjera na Y i označavamo ju s $f(\mu)$.

Lema 3.20 *Neka je μ Radonova mjera s vrijednostima u C na topološkom prostoru X i $f \colon X \to Y$ neprekidna funkcija s X u topološki prostor Y. Ako je mjera $\nu := f(\mu)$ konačna na kompaktnim skupovima, tada je ν Radonova.*

Definicija 3.21 Neka je μ pozitivna Borelova mjera ili Borelova mjera s vrijednostima u C na topološkom prostoru X i Γ skup svih zatvorenih podskupova $A \subseteq X$ takvih da je $\mu(X \backslash A) = 0$. Ako je $\bigcap \Gamma \in \Gamma$, kažemo da mjera μ ima *nosač* i definiramo ga kao $\operatorname{supp}(\mu) := \bigcap \Gamma$.

Lema 3.22 *Neka je μ Borelova mjera s vrijednostima u C na topološkom prostoru X. Mjera μ ima nosač ako je zadovoljen jedan od sljedećih uvjeta:*

(a) *X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti*

(b) *μ je Radonova mjera s vrijednostima u C.*

Lema 3.23 *Neka je $f \colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje između topoloških prostora X i Y te μ Borelova mjera na X s vrijednostima u C. Neka je $\nu := f(\mu)$. Ako obje mjere μ i ν imaju nosač, tada je* $\operatorname{supp}(\nu) = \overline{f(\operatorname{supp}(\mu))}$.

Definicija 3.24 Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor, $Y \subseteq X$ i μ pozitivna, kompleksna ili mjera s vrijednostima u konveksnom konusu na X. Kažemo da je Y *thick* u X s obzirom na μ ako postoji mjera ν na (Y, Σ_Y) takva da je $i(\nu)|_\Sigma = \mu$ pri čemu je $i \colon Y \hookrightarrow X$ inkluzija i $\Sigma_Y := \{Y \cap A : A \in \Sigma\}$ (ekvivalentno, $\mu(A) = 0$ za sve $A \in \Sigma$ za koje je $A \cap Y = \emptyset$). Ako je μ pozitivna mjera na X ili mjera s vrijednostima u konveksnom konusu, kažemo da je μ *koncentrirana na* Y ako postoji skup $Z \in \Sigma$ takav da je $Z \subseteq Y$ i $\mu(X \setminus Z) = 0$. Ako je μ kompleksna mjera, kažemo da je μ koncentrirana na Y ako to vrijedi za totalnu varijaciju $|\mu|$.

Napomena 3.25 Neka je μ pozitivna, kompleksna ili mjera s vrijednostima u konveksnom konusu na izmjerivom prostoru (X, Σ). Ako su $Y_1, Y_2 \subseteq X$ *thick* u X s obzirom na μ, tada $Y_1 \cap Y_2$ ne mora biti *thick* u X s obzirom na μ, kao što pokazuje Primjer 3.95. Ipak, lako se provjeri da ako je Y_1 *thick* u X s obzirom na μ i μ je koncentrirana na Y_2, tada je $Y_1 \cap Y_2$ *thick* u X s obzirom na μ. Također, ako je μ koncentrirana na Y_1 i Y_2, tada je μ koncentrirana na $Y_1 \cap Y_2$.

Ako je μ Radonova mjera na topološkom prostoru (X, τ) i $Y \subseteq X$ je *thick* u X s obzirom na μ, tada mjera ν na Y takva da je $\mu = j(\nu)$, pri čemu je $j \colon Y \hookrightarrow X$ inkluzija, ne mora biti Radonova. Ako je međutim μ koncentrirana na Y, tada je ν Radonova mjera. $\diamondsuit$

3.2 Pozitivno definitne funkcije

Fokus ovog istraživanja su pozitivno definitne funkcije[2] na polugrupi s involucijom s vrijednostima u prostoru operatora $B(\mathcal{H})$. Pojam pozitivne definitnosti jedan je od temeljnih pojmova, ne samo u harmonijskoj analizi nego i šire i igra važnu ulogu u teoriji reprezentacije polugrupa, ali i u teoriji vjerojatnosti u kojoj se takve funkcije pojavljuju kao karakteristične funkcije mjera. Teorija povezana s pozitivno definitnim funkcijama primjenjuje se također u teoriji potencijala, fizici, numeričkoj i asimptotskoj analizi i kombinatorici. Sveprisutnost pozitivno definitnih funkcija naročito je vidljiva u [6] gdje je napravljeno opsežno istraživanje pozitivno i negativno definitnih funkcija (s vrijednostima u $\mathbb{C}$) i njihovih reprezentacija pomoću Fourierove i Laplaceove transformacije mjere. Definicije i osnovni rezultati koji se odnose na skalarne pozitivno definitne funkcije mogu se pronaći u [6], a za općenitiji slučaj u [19, 24, 15].

Definicija 3.26 *Polugrupa* $(S, \circ)$ neprazan je skup S zajedno s asocijativnom binarnom operacijom '$\circ$'. *Polugrupa s involucijom* $(S, \circ, *)$ jest polugrupa $(S, \circ)$ zajedno s preslikavanjem $*\colon S \to S$ koje nazivamo *involucijom*, a koje zadovoljava

(i) $(s \circ t)^* = t^* \circ s^*, \quad s, t \in S$

(ii) $(s^*)^* = s, \quad s \in S.$

Ako postoji element $e \in S$ za koji vrijedi $e \circ s = s \circ e = s$, $\forall\, s \in S$ onda kažemo da je e *neutralan element* za S[3]. Uočimo da ako postoji neutralan element e, tada vrijedi $S \circ S = S$ jer se svaki element $s \in S$ može zapisati kao $s = s \circ e$. U slučaju kada on ne postoji, vrijedi $S \circ S \subseteq S$. Polugrupa je *komutativna (Abelova)* ako je $s \circ t = t \circ s$ za sve $s, t \in S$. *Potpolugrupa* od S je podskup $T \subseteq S$ koji sadrži $s \circ t$ za svaki $s, t \in T$. Ako S ima involuciju '$*$', tada je $T \subseteq S$ $*$-*potpolugrupa* ako je T potpolugrupa i $t^* \in T$, $\forall\, t \in T$.

Primjer 3.27

(a) Svaka komutativna polugrupa $(S, +)$ jest polugrupa s involucijom ako se definira $x^* = x$, $\forall\, x \in S$ (*trivijalna involucija*). Ako je S konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V, tada na taj način S promatramo kao polugrupu s involucijom.

(b) Svaka $*$-algebra A multiplikativna je polugrupa s involucijom $(A, \cdot, *)$. Prostor operatora $B(\mathcal{H})$ je kompleksna $*$-algebra pa time i polugrupa s involucijom pri čemu je operacija na polugrupi kompozicija operatora, a involucija operacija adjungiranja.

$\diamondsuit$

[2]Zapravo se radi o pozitivno semidefinitnim funkcijama, ali se naziv pojednostavnjuje zbog česte upotrebe u tekstu.

[3]Neki autori pretpostavljaju postojanje neutralnog elementa u sklopu definicije polugrupe. Ovdje se to neće pretpostavljati, a u slučaju da postoji neutralan element, njegovo će postojanje biti naglašeno.

Definicija 3.28 Neka su $(S, \circ, *)$ i $(T, \circ, *)$ polugrupe s involucijom. *Homomorfizam polugrupa s involucijom* je preslikavanje $\varphi\colon S \to T$ za koje vrijedi

(i) $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b), \quad a, b \in S$

(ii) $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*, \quad a \in S.$

Bijektivni homomorfizam naziva se *izomorfizam.*

Uobičajeno je da se algebarske strukture reprezentiraju linearnim operatorima.

Definicija 3.29 Za polugrupu s involucijom S, $*$-*reprezentacija od* S je homomorfizam polugrupa s involucijom $\pi\colon S \to B(\mathcal{H})$[4]. *Hermitska reprezentacija* od S je homomorfizam polugrupa s involucijom $\pi\colon S \to B_0(\mathcal{H}^0)$ pri čemu je $B_0(\mathcal{H}^0)$ kao u Definiciji 2.46.

Definicija 3.30 Neka je X neprazan skup i $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor. Kažemo da je funkcija $K\colon X \times X \to B(\mathcal{H})$ *pozitivno definitna jezgra s vrijednostima u* $B(\mathcal{H})$ ako za sve $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ i $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left\langle K(x_j, x_k)v_k, v_j \right\rangle \geqslant 0.$$

Za polugrupu s involucijom S, funkciju $\phi\colon S \circ S \to B(\mathcal{H})$ za koju je

$$K_\phi\colon S \times S \to B(\mathcal{H}), \quad K_\phi(s,t) = \phi(s \circ t^*)$$

pozitivno definitna jezgra s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$, nazivamo *pozitivno definitnom funkcijom na* S *s vrijednostima u* $B(\mathcal{H})$. Funkcija $\phi\colon S \circ S \to \mathbb{C}$ je *pozitivno definitna* ako je preslikavanje $s \mapsto (z \mapsto \phi(s)z)$ sa $S \circ S$ u $B(\mathbb{C})$ pozitivno definitna funkcija s vrijednostima u $B(\mathbb{C})$.

Napomena 3.31 Uočimo da iz Definicije 3.30 slijedi da je $\phi\colon S \circ S \to B(\mathcal{H})$ pozitivno definitna ako vrijedi

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left\langle \phi(s_j \circ s_k^*)v_k, v_j \right\rangle \geqslant 0, \quad v_i \in \mathcal{H},$$

a skalarna funkcija $\phi\colon S \circ S \to \mathbb{C}$ pozitivno je definitna ako vrijedi

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{z_j} z_k \phi(s_j \circ s_k^*) \geqslant 0, \quad z_i \in \mathbb{C}. \qquad \diamondsuit$$

Primjer 3.32 Navedimo nekoliko primjera pozitivno definitnih jezgri $K\colon X \times X \to \mathbb{C}$.

1. Za proizvoljnu funkciju $f\colon X \to \mathbb{C}$ funkcija $K(x,y) \coloneqq f(x)\overline{f(y)}$ je pozitivno definitna jezgra.

[4] Ponegdje se u literaturi takva reprezentacija naziva još i *omeđenom reprezentacijom* pri čemu se "omeđenost" odnosi na operatore $\pi(s), s \in S$. Skup $\pi(S)$ nije nužno omeđen podskup od $B(\mathcal{H})$.

2. Ako je K pozitivno definitna jezgra, tada su to i $\mathrm{Re}K, \overline{K}$ i $|K|^2$.

3. Skalarni produkt na kompleksnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je pozitivno definitna jezgra.

4. Sljedeće funkcije su pozitivno definitne jezgre na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

   - $K(x,y) = \cos(x-y)$
   - $K(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$
   - $K(x,y) = (1 + |x-y|)^{-1}$
   - $K(x,y) = \exp(-1 + e^{-\sqrt{|x-y|}})$. ♢

Uz pozitivno definitne jezgre često se vežu takozvani RKHS prostori (*reproducing kernel Hilbert spaces*) te se može pokazati da postoji bijekcija između skupa jezgri i takvih prostora. Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor, X skup i $V \leqslant \mathcal{H}^X$ kompleksan Hilbertov prostor funkcija s X u $\mathcal{H}$. Neka su evaluacije

$$K_x \colon V \to \mathcal{H}, \quad f \mapsto f(x),$$

neprekidni linearni operatori za svaki $x \in X$. Tada možemo definirati funkciju

$$K \colon X \times X \to B(\mathcal{H}), \quad K(x,y) := K_x K_y^* \tag{3.1}$$

koju nazivamo *reproducirajućom jezgrom* Hilbertovog prostora V. Pritom je operator $K_y^* \colon \mathcal{H} \to V$ adjungirani operator operatora K_y. Uočimo da je reproducirajuća jezgra pozitivno definitna jezgra s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$. Obratno, za svaku pozitivno definitnu jezgru K može se konstruirati Hilbertov prostor $\mathcal{H}_K \leqslant \mathcal{H}^X$ sa skalarnim produktom $\langle\ ,\ \rangle_K$ koji sve evaluacije čini neprekidnima i u kojem vrijedi jednakost (3.1). Prostor $\mathcal{H}_K$ naziva se RKHS. Predhilbertov prostor $\mathcal{H}_K^0$ razapet je s

$$\mathcal{H}_K^0 := \mathrm{span}\{K_x^*.v : x \in X, v \in \mathcal{H}\}$$

i gust u $\mathcal{H}_K$ te vrijedi $K_x^*.v = K(\cdot, x).v$, za svaki $x \in X, v \in \mathcal{H}$. Dakle, postoji bijekcija između skupa pozitivno definitnih jezgri s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ i skupa RKHS prostora unutar $\mathcal{H}^X$:

$$K \leftrightarrow \left(\mathcal{H}_K, \langle\ ,\ \rangle_K\right).$$

Budući da je Hilbertov prostor $\mathcal{H}_K$ jedinstveno određen svojom reproducirajućom jezgrom K, možemo reći da je sva informacija o prostoru sadržana u samoj jezgri. Također, svojstva funkcija iz $\mathcal{H}_K$ često su povezana sa svojstvima od K.

Važnost koncepta hermitske reprezentacije proizlazi iz činjenice da svaka pozitivno definitna jezgra definirana na skupu na kojem djeluje neka polugrupa S i koja zadovoljava određenu invarijantnost s obzirom na S, inducira hermitsku reprezentaciju od S. Ta reprezentacija općenito ne mora biti omeđena, a u slučaju da je omeđena kažemo da je jezgra eksponencijalno omeđena. Formalni izvod i definicije slijede.

Neka je S polugrupa s involucijom koja *djeluje zdesna skupu* X, tj. definirana je operacija $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto x.s$ za koju vrijedi $x.(g \circ h) = (x.g).h$ za sve $g, h \in S$, $x \in X$. Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor, $K\colon X \times X \to B(\mathcal{H})$ pozitivno definitna jezgra s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ te $\mathcal{H}_K \leqslant \mathcal{H}^X$ pripadni RKHS. Za $s \in S$ i $f \in \mathcal{H}^X$ definiramo $f_s \in \mathcal{H}^X$ pomoću desne translacije $f_s(x) = f(x.s)$, $x \in X$. Sada možemo definirati linearnu reprezentaciju π:

$$\pi\colon S \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^X), \quad s \mapsto (f \mapsto f_s),$$

pri čemu je $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^X)$ skup svih homomorfizama s $\mathcal{H}^X$ u $\mathcal{H}^X$ (uočimo da je $\pi(s)$ linearan operator za svaki $s \in S$). Tada je $\mathcal{H}_K^0$ invarijantan na S ($\pi(s)h \in \mathcal{H}_K^0$ za $h \in \mathcal{H}_K^0$) ako i samo ako je K invarijantna jezgra, tj. ako vrijedi:

$$K(x.s, y) = K(x, y.s^*), \quad \forall\, x, y \in X, s \in S,$$

po [19, Propozicija II.4.3]. U tom slučaju može se definirati hermitska reprezentacija

$$\pi_K^0\colon S \to B_0(\mathcal{H}_K^0), \quad \pi_K^0(s) := \pi(s)|_{\mathcal{H}_K^0}^{\mathcal{H}_K^0}.$$

Definicija 3.33 Invarijantna jezgra K je *eksponencijalno omeđena* ako je $\pi_K^0(s)$ omeđen operator za svaki $s \in S$.

Ako je K eksponencijalno omeđena, s $\pi_K(s) := \overline{\pi_K^0(s)}$ (zatvarač operatora $\pi_K^0(s)$) definirana je $*$-reprezentacija od S, $\pi_K\colon S \to B(\mathcal{H}_K)$. Po [19, Propozicija II.4.9], $\mathcal{H}_K$ je invarijantan na operatore $\pi(s)$ i $\pi_K(s) = \pi(s)|_{\mathcal{H}_K}^{\mathcal{H}_K}$, $\forall\, s \in S$.

Za $X = S$ (djelovanje zdesna je operacija na polugrupi) i $K = K_\phi$ pri čemu je ϕ pozitivno definitna funkcija s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$, lako se provjeri da je K_ϕ S-invarijantna jezgra. Uvedimo oznake:

$$\mathcal{H}_\phi := \mathcal{H}_{K_\phi}, \quad \mathcal{H}_\phi^0 := \mathcal{H}_{K_\phi}^0, \quad \pi_\phi^0 := \pi_{K_\phi}^0$$

i u slučaju eksponencijalne omeđenosti $\pi_\phi := \pi_{K_\phi}$.

Definicija 3.34 Pozitivno definitna funkcija $\phi\colon S \to B(\mathcal{H})$ je *eksponencijalno omeđena* ako je pripadna jezgra K_ϕ eksponencijalno omeđena, tj. ako su operatori $\pi_\phi(s)\colon \mathcal{H}_\phi^0 \to \mathcal{H}_\phi^0$ omeđeni za svaki $s \in S$.

Definicija 3.35 Funkciju $\alpha\colon S \to [0, \infty\rangle$ definiranu na polugrupi s involucijom $(S, \circ, *)$ nazivamo *apsolutnom vrijednošću* ako vrijedi:

(i) $\alpha \not\equiv 0$

(ii) $\alpha(s^*) = \alpha(s), \quad s \in S$

(iii) $\alpha(s \circ t) \leqslant \alpha(s)\alpha(t), \quad s, t \in S.$

Napomena 3.36

(a) Ako je S polugrupa s neutralnim elementom e, tada je prvi uvjet ekvivalentan s $\alpha(e) \geqslant 1$.

(b) Uočimo da je konstantna funkcija $s \mapsto 1$ apsolutna vrijednost. Također vrijedi da ako su α, β apsolutne vrijednosti i $k > 0$, tada su $\alpha\beta, \max(\alpha, \beta), \alpha^k$ također apsolutne vrijednosti.

(c) Neka je S polugrupa s involucijom i $\pi\colon S \to B(\mathcal{H})$ $*$-reprezentacija od S. Lako se provjeri da je $\alpha_\pi\colon S \to [0, \infty\rangle$, $s \mapsto \|\pi(s)\|$ apsolutna vrijednost te je zbog $\alpha_\pi(s) = \|\pi(s)\|$, reprezentacija π α_π-omeđena. Stoga je svaka $*$-reprezentacija omeđena s obzirom na neku apsolutnu vrijednost α. Uglavnom će se promatrati $*$-reprezentacije koje su omeđene s obzirom na isti α. ♢

Definicija 3.37 Neka je S polugrupa s involucijom koja djeluje zdesna skupu X, K invarijantna pozitivno definitna jezgra na X s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ i $\alpha\colon S \to [0, \infty\rangle$ apsolutna vrijednost na S. Kažemo da je K *α-omeđena* ako je eksponencijalno omeđena i ako je pripadna $*$-reprezentacija $\pi_K\colon S \to B(\mathcal{H}_K)$ α-omeđena. Pozitivno definitna funkcija $\phi\colon S \circ S \to B(\mathcal{H})$ je *α-omeđena* ako je pripadna invarijantna pozitivno definitna jezgra K_ϕ α-omeđena.

Napomena 3.38 Ako je $\phi\colon S \circ S \to B(\mathcal{H})$ pozitivno definitna funkcija s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$, tada je (prema prethodnoj konstrukciji) pridruženi RKHS $\mathcal{H}_\phi$ dobiven kao upotpunjenje predhilbertovog prostora

$$\mathcal{H}_\phi^0 = \operatorname{span}\{\phi(\cdot \circ t^*).v,\, t \in S, v \in \mathcal{H}\} \leqslant \mathcal{H}^S.$$

Evaluacije

$$\phi_s\colon \mathcal{H}_\phi \to \mathcal{H},\;\; \phi_s(f) = f(s),\, f \in \mathcal{H}_\phi$$

su neprekidne za svaki $s \in S$ te vrijedi $\phi(s \circ t^*) = \phi_s\phi_t^*$ i $\phi_t^*.v = \phi(\cdot \circ t^*).v$ za sve $s, t \in S$ i $v \in \mathcal{H}$. Linearna reprezentacija je $\pi\colon S \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^S)$, $s \mapsto (f \mapsto f_s)$, pri čemu je $f_s(t) = f(t \circ s)$. Budući da je K_ϕ S-invarijantna jezgra, može se definirati $\pi_\phi^0(s) := \pi(s)|_{\mathcal{H}_\phi^0}^{\mathcal{H}_\phi^0}$. Po definiciji je ϕ α-omeđena ako je $\pi_\phi^0(s)$ omeđen operator $\forall\, s \in S$ i $*$-reprezentacija $\pi_\phi\colon S \to B(\mathcal{H}_\phi)$ dobivena zatvaranjem svih operatora $\pi_\phi^0(s)$, α-omeđena, tj. ako je $\|\pi_\phi(s)\| \leqslant \alpha(s)$, $\forall\, s \in S$. Budući da je tu definiciju α-omeđenosti teško provjeriti, potrebna je neka vrsta karakterizacije (u obliku nejednakosti) slična definiciji α-omeđenosti u specijalnom slučaju skalarnih funkcija.

Neka je najprije S komutativna, involutivna polugrupa s neutralnim elementom. Po [6] funkcija $f\colon S \to \mathbb{C}$ je α-omeđena ako postoji konstanta $C > 0$ tako da je $|f(s)| \leqslant C\alpha(s)$, $\forall\, s \in S$ te eksponencijalno omeđena ako je omeđena u odnosu na neki α. Za α-omeđenu *pozitivno definitnu* funkciju φ na S vrijedi da je $|\varphi(s)| \leqslant \varphi(e)\alpha(s)$, $\forall\, s \in S$.

Ako S ne sadrži neutralni element, tada se ta definicija može generalizirati kao u [21]. Pozitivno definitna funkcija $\varphi\colon S \to \mathbb{C}$ je α-omeđena ako postoji konstanta $C > 0$ tako da je

$$|\varphi(t^* \circ s \circ t)| \leqslant C\alpha(s)\varphi(t^* \circ t), \ \ \forall\, s, t \in S.$$

Ako je φ α-omeđena tada je $|\varphi(t^* \circ s \circ t)| \leqslant \alpha(s)\varphi(t^* \circ t)$, $\forall\, s, t \in S$. Nadalje, ako vrijedi $|\varphi(s)| \leqslant C\alpha(s)$, $s \in S$ tada je φ α-omeđena. Lako se vidi da ako su operatori $\pi^0_\varphi(s)$ omeđeni na $\mathcal{H}^0_\varphi$ za svaki $s \in S$ (ovdje je $\mathcal{H}^0_\varphi \leqslant \mathbb{C}^S$), tada je φ α-omeđena u odnosu na $\alpha(s) \coloneqq \|\pi^0_\varphi(s)\|$. Vrijedi i obrat pa postoji ekvivalencija između eksponencijalne omeđenosti i omeđenosti operatora $\pi^0_\varphi(s)$. ♢

Propozicija 3.39 *Neka je S involutivna polugrupa koja djeluje zdesna skupu X i $K\colon X \times X \to B(\mathcal{H})$ S-invarijantna pozitivno definitna jezgra. Vrijedi*

$$\left\|\pi^0_K(s)\right\|^2 = \sup\left\{\frac{\langle K(x.s, x.s).v, v\rangle}{\langle K(x, x).v, v\rangle} : x \in X, v \in \mathcal{H}, K^*_x.v \neq 0\right\}, \ \ \forall\, s \in S.$$

Za apsolutnu vrijednost α, K je α-omeđena ako i samo ako je

$$\langle K(x.s, x.s).v, v\rangle \leqslant \alpha(s)^2 \langle K(x, x).v, v\rangle, \ \ \forall\, s \in S, x \in X, v \in \mathcal{H}.$$

Napomena 3.40 Iz gornje propozicije možemo zaključiti da je pozitivno definitna funkcija $\phi\colon S \to B(\mathcal{H})$ α-omeđena ako i samo ako je

$$\langle \phi(t \circ s \circ s^* \circ t^*).v, v\rangle \leqslant \alpha(s)^2 \langle \phi(t \circ t^*).v, v\rangle, \ \ \forall\, s, t \in S, v \in \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

Ako S sadrži neutralni element, može se pokazati da je ovo ekvivalentno s:

$$\|\phi(s)\| \leqslant C\alpha(s), \ \ \forall\, s \in S \text{ i neki } C > 0.$$ ♢

Primjer 3.41 Neka je S konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V pri čemu je involucija identiteta, $* = \mathrm{id}_S$. Ako je ϕ pozitivno definitna funkcija na S s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$, tada iz

$$\left\langle K_\phi\left({}^s\!/\!_2, {}^s\!/\!_2\right) v, v\right\rangle \geqslant 0, \ \ \forall\, s \in S, v \in \mathcal{H},$$

možemo zaključiti da je $\phi(s) = K_\phi\left({}^s\!/\!_2, {}^s\!/\!_2\right) \in \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ za svaki $s \in S$. Po nejednakosti (3.2) ϕ je α-omeđena ako i samo ako vrijedi:

$$\langle \phi(s+t).v, v\rangle \leqslant \alpha(s/2)^2 \langle \phi(t).v, v\rangle, \ \ \forall\, s,t\in S, v\in\mathcal{H}.$$

Ako je ϕ skalarna pozitivno definitna funkcija na konusu S, tada je ϕ (realna) nenegativna funkcija jer je

$$\phi(s) = K_\phi\,(s/2, s/2) \geqslant 0, \ \ \forall\, s\in S.$$

Po (3.2) ϕ je α-omeđena ako i samo ako vrijedi $\phi(2s+2t)\leqslant \alpha(s)^2\phi(2t)$ ili ekvivalentno

$$\phi(s+t)\leqslant \alpha(s/2)^2\phi(t), \ \ \forall\, s,t\in S. \tag{3.3}$$

Posebno, iz (3.3) slijedi da je pozitivno definitna funkcija $\phi\colon S\to\mathbb{C}$ na konveksnom konusu S 1-omeđena ako i samo ako je

$$\phi(s+t)\leqslant\phi(t), \ \ \forall\, s,t\in S,$$

tj. ako je ϕ “padajuća” u svim smjerovima $s\in S$. $\diamondsuit$

Uočimo da je svaka $*$-reprezentacija restringirana na $S\circ S$ zapravo pozitivno definitna funkcija jer je za $s_i\in S\circ S\subseteq S$ i $v_i\in\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n}\left\langle\phi(s_j\circ s_k^*)v_k, v_j\right\rangle &= \sum_{j,k=1}^{n}\left\langle\pi(s_j)\pi(s_k)^*v_k, v_j\right\rangle = \sum_{j,k=1}^{n}\left\langle\pi(s_k)^*v_k, \pi(s_j)^*v_j\right\rangle\\ &=\left\|\sum_{j=1}^{n}\pi(s_j)^*v_j\right\|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Lema 3.42 *Ako je $\pi\colon S\to B(\mathcal{H})$ $*$-reprezentacija polugrupe s involucijom S, tada je $\phi:=\pi|_{S\circ S}$ eksponencijalno omeđena pozitivno definitna funkcija na S s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$. Neka je $\mathcal{H}_1:=\overline{\operatorname{span}\pi(S).\mathcal{H}}$ i $\mathcal{H}_0:=\mathcal{H}_1^\perp$; neka su π_1 i π_0 podreprezentacije na $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_0$, respektivno. Postoji neprekidna linearna surjekcija $\Phi\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\phi$ koja isprepliće reprezentacije π i π_ϕ, takva da je $\ker\Phi=\mathcal{H}_0$ i $\Phi|_{\mathcal{H}_1}$ izometrički izmorfizam koji povezuje π_1 i π_ϕ. Posebno, ako je α apsolutna vrijednost tada je π α-omeđena ako i samo ako je ϕ α-omeđena.*

Lako se pokaže da je $\mathcal{P}(S)$, skup pozitivno definitnih funkcija na involutivnoj polugrupi S (s vrijednostima u $\mathbb{C}$), konveksan konus koji je zatvoren u topologiji točkovne konvergencije na $\mathbb{C}^S$, dok α-omeđene funkcije iz $\mathcal{P}(S)$ čine (zatvoren) podkonus $\mathcal{P}^\alpha(S)$. Kao i u skalarnom slučaju, skup svih pozitivno definitnih funkcija na S s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$, u oznaci $\mathcal{P}(S,\mathcal{H})$, čini konveksan konus koji je zatvoren u slaboj operatorskoj topologiji na $B(\mathcal{H})$. Iz Propozicije 3.39 (karakterizacija α-omeđenosti) lako se pokaže da analogna tvrdnja vrijedi i za $\mathcal{P}^\alpha(S,\mathcal{H})$, skup svih α-omeđenih funkcija iz $\mathcal{P}(S,\mathcal{H})$.

Te tvrdnje formalno su iskazane u sljedećoj propoziciji. Radi skraćivanja zapisa, od sada nadalje koristit će se oznake $\mathcal{P}(S)$, $\mathcal{P}^\alpha(S)$, $\mathcal{P}(S,\mathcal{H})$ i $\mathcal{P}^\alpha(S,\mathcal{H})$.

Propozicija 3.43 *Neka je S involutivna polugrupa koja djeluje zdesna skupu X, $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor i α apsolutna vrijednost na S. Tada vrijedi:*

(a) *Za S-invarijantne pozitivno definitne jezgre na X s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ vrijedi da je konačna suma istih takvih i njihov umnožak s nenegativnim realnim brojem, ponovno pozitivno definitna jezgra na X s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$. Analogna tvrdnja vrijedi za α-omeđene S-invarijantne pozitivno definitne jezgre na X s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$.*

(b) *Neka je $(K_j)_{j\in J}$ hiperniz S-invarijantnih pozitivno definitnih jezgri $K_j\colon X\times X\to B(\mathcal{H})$ takav da za sve $x,y\in X$, hiperniz operatora $(K_j(x,y)_{j\in J})$ konvergira prema operatoru $K(x,y)\in B(\mathcal{H})$ u slaboj operatorskoj topologiji. Tada je $K\colon X\times X\to B(\mathcal{H})$ S-invarijantna pozitivno definitna jezgra na X i K je α-omeđena ako su sve jezgre $(K_j)_{j\in J}$ α-omeđene.*

(c) *Neka je $K\colon X\times X\to B(\mathcal{H})$ S-invarijantna pozitivno definitna jezgra na X i $A\in \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H})$ pozitivni operator s tragom. Definirajmo $K_A\colon X\times X\to\mathbb{C}$ s $K_A(x,y) \coloneqq \mathrm{tr}(K(x,y)A)$. Tada je K_A S-invarijantna pozitivno definitna jezgra i K je α-omeđena ako i samo ako su K_A α-omeđene za svaki A.*

(d) *Ako je ϕ α-omeđena pozitivno definitna funkcija na S s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ i T involutivna potpolugrupa od S tada je $\phi|_{T\circ T}$ $\alpha|_T$-omeđena pozitivno definitna funkcija na S s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$.*

U klasu pozitivno definitnih funkcija pripadaju i tzv. *polukarakteri* koji igraju važnu ulogu u prikazu pozitivno definitnih funkcija pomoću Laplaceove tranformacije. Napomenimo da se u literaturi pojavljuju oba pojma polukarakter i *karakter* pri čemu je uglavnom polukarakter općenitiji pojam, ali ne uvijek. Ponekad se ta dva pojma ne razlikuju u smislu da se koristi jedinstveni naziv karakter, kao što će biti u ovom radu.

Definicija 3.44 Neka je $(S,\circ,*)$ komutativna polugrupa s involucijom. *Karakter na S* je nenul[5] homomorfizam $\xi\colon S\to\mathbb{C}$ polugrupa S i $(\mathbb{C},\cdot,\bar{\ })$, tj. vrijedi:

(i) $\xi(s\circ t)=\xi(s)\xi(t),\ \ s,t\in S$

(ii) $\xi(s^*)=\overline{\xi(s)},\ \ s\in S.$

[5] Ako S ima neutralan element e, tada je $\xi\not\equiv 0$ ekvivalentno uvjetu $\xi(e)=1$.

Primijetimo da je svaki karakter restringiran na $S \circ S$ pozitivno definitna funkcija. Za $s_i \in S \circ S \subseteq S$ i $z_i \in \mathbb{C}$ imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} \overline{z_j} z_k \phi(s_j \circ s_k^*) &= \sum_{j,k=1}^{n} \overline{z_j} z_k\, \xi(s_j)\overline{\xi(s_k)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, \xi(s_j) \sum_{k=1}^{n} z_k\, \overline{\xi(s_k)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, \xi(s_j) \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{z_k}\, \xi(s_k)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, \xi(s_j) \overline{\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, \xi(s_j)} = \left| \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, \xi(s_j) \right|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Lema 3.45 *Ako je $\xi \colon S \to \mathbb{C}$ karakter na S, tada je $\phi := \xi|_{S \circ S}$ pozitivno definitna funkcija.*

Napomena 3.46 Uočimo da ako je involucija na polugrupi S identiteta, tj. $s^* = s$ tada vrijedi $\overline{\xi(s)} = \xi(s)$, odnosno karakter na S je realan. Nadalje, ako je S još i 2-djeljiva, tj. svaki element $s \in S$ može se zapisati kao $s = t \circ t$ za neki $t \in S$ tada je karakter na S nenegativan jer je

$$\xi(s) = \xi(t \circ t) = (\xi(t))^2 \geqslant 0.$$

Ti uvjeti očito su ispunjeni za S konveksan konus jer vrijedi $s = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s$. $\diamondsuit$

Napomena 3.47 Ako je S komutativna polugrupa s trivijalnom involucijom $s^* = s$ (npr. konveksan konus), tada je reprezentacija od S familija komutativnih skupova hermitskih operatora. Ako je reprezentacija još i *ireducibilna* ($\pi(S) \neq \{0\}$ i ne postoji S-invarijantan zatvoreni potprostor od $\mathcal{H}$ koji je različit od $\{0\}$ i $\mathcal{H}$), tada je po Schurovoj lemi ([19, Korolar II.2.9.]) reprezentacija jednodimenzionalna i odgovara realnim karakterima na S, $\xi \colon S \to (\mathbb{R}, \cdot)$. $\diamondsuit$

Definicija 3.48 Neka je S komutativna polugrupa s involucijom i $\alpha \colon S \to [0, \infty\rangle$ apsolutna vrijednost na S. Tada sa $\widehat{S}$ označavamo skup svih karaktera na S, a sa $\widehat{S}_\alpha$ skup svih α-omeđenih karaktera na S, tj. karaktera $\xi \colon S \to \mathbb{C}$ za koje je $|\xi(s)| \leqslant \alpha(s)$, $\forall\, s \in S$. Skupove $\widehat{S}$ i $\widehat{S}_\alpha$ snabdjet ćemo topologijom točkovne konvergencije, tj. naslijeđenom topologijom od produktne topologije na $\mathbb{C}^S$.

Prostor $\widehat{S}$ Hausdorffov je prostor. Štoviše, budući da je $\mathbb{C}^S$ potpuno regularan prostor[6] i $\widehat{S}$ njegov (zatvoren) podskup, tada je i $\widehat{S}$ potpuno regularan prostor.

Napomenimo i da je $\widehat{S}$ topološka polugrupa pri čemu je operacija na polugrupi množenje po točkama, preslikavanje $\xi \mapsto \overline{\xi}$ involucija i funkcija $\xi \equiv 1$ neutralni element. Polugrupa $(\widehat{S}, \cdot, ^-)$ zove se *dualna polugrupa* od S.

[6]Topološki prostor X je *potpuno regularan* ako za svaki zatvoreni podskup $C \subseteq X$ i svaku točku $x \in X \setminus C$ postoji neprekidna funkcija $f \colon X \to [0,1]$ takva da je $f(x) = 0$ i $f(C) = \{1\}$. Neki autori u definiciju uključuju i dodatni uvjet da je X T_1-prostor.

3.3 Integralna reprezentacija pozitivno definitnih funkcija

Nakon definiranja pozitivno definitnih funkcija i pojmova povezanih s njima, posvetimo se njihovoj integralnoj reprezentaciji.

Neka je $(S, \circ, *)$ komutativna polugrupa s involucijom i $\phi\colon S \circ S \to \mathbb{C}$ pozitivno definitna funkcija. Neka je Γ podskup skupa svih karaktera na S, $\Gamma \subseteq \widehat{S}$ sa σ-algebrom koja sve evaluacije $\hat{s}\colon \Gamma \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \xi(s)$ čini izmjerivima za sve $s \in S \circ S$. Integralna reprezentacija podrazumijeva pronalazak mjere μ (reprezentirajuće mjere) na Γ takve da je svaka evaluacija $\hat{s}$ μ-integrabilna i ϕ se može izraziti kao *generalizirana Laplaceova transformacija* mjere μ:

$$\phi(s) = \int_\Gamma \hat{s}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Gamma \xi(s)\,\mathrm{d}\mu(\xi), \quad s \in S \circ S.$$

Skup Γ će uglavnom biti snabdjeven topologijom točkovne konvergencije i u pravilu se traži Radonova reprezentirajuća mjera. Iako je temelj samog istraživanja apstraktni teorem koji daje integralnu reprezentaciju nedegenerirane, eksponencijalno omeđene pozitivno definitne funkcije, cilj je pronaći nužne i dovoljne uvjete koji omogućuju *pravu* Laplaceovu transformaciju u kojoj karakteri imaju eksponencijalni oblik. Razlog tomu je, kao što je već spomenuto u uvodu, činjenica da je skup $\widehat{S}$ golem i sadrži velik broj patologijskih slučajeva. Jasno je da će u vektorskom slučaju u kojem ϕ ima vrijednosti u $B(\mathcal{H})$, pripadna reprezentirajuća mjera imati vrijednosti u konveksnom konusu $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$. U tom se slučaju Γ može zamijeniti nekim homeomorfnim topološkim prostorom ili izomorfnim izmjerivim prostorom.

Definicija 3.49 $*$-reprezentacija $\pi\colon S \to B(\mathcal{H})$ je *nedegenerirana* ako je $\pi(S).\mathcal{H}$ *totalan* u $\mathcal{H}$ što znači da je $\mathrm{span}(\pi(S).\mathcal{H})$ gust u $\mathcal{H}$. Eksponencijalno omeđena pozitivno definitna funkcija $\phi\colon S \circ S \to \mathbb{C}$ na polugrupi s involucijom S je *nedegenerirana* ako je pripadna $*$-reprezentacija $\pi_\phi\colon S \to B(\mathcal{H}_\phi)$ nedegenerirana $*$- reprezentacija.

Ako je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor i $\phi\colon S \circ S \to B(\mathcal{H})$ eksponencijalno omeđena pozitivno definitna funkcija s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$, kažemo da je ϕ *nedegenerirana* ako je pozitivno definitna funkcija $\phi_A\colon S \circ S \to \mathbb{C}$, $\phi_A(s) = \mathrm{tr}(\phi(s)A)$ nedegenerirana, za svaki $A \in \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H})$ (ϕ_A je definiran kao u Propoziciji 3.43(c)).

Napomena 3.50 Ako je S involutivna polugrupa takva da je $S \circ S = S$ (npr. konveksan konus), može se pokazati da je $\mathrm{span}(\pi_\phi^0(S).\mathcal{H}_\phi^0) = \mathcal{H}_\phi^0$ za svaku pozitivno definitnu funkciju $\phi\colon S \circ S \to \mathbb{C}$. To implicira da je svaka eksponencijalno omeđena pozitivno definitna funkcija (skalarna ili vektorska) nedegenerirana. Posebno, svaka je $*$-reprezentacija na S nedegenerirana pozitivno definitna funkcija s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ (Lema 3.42) bez obzira na to je li nedegenerirana kao reprezentacija ili nije. $\diamondsuit$

Teorem 3.51 (Generalizirana Laplaceova transformacija, skalarni slučaj)

Neka je S komutativna polugrupa s involucijom i $\alpha\colon S \to [0, \infty\rangle$ apsolutna vrijednost na S. Za nedegeneriranu $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S)$ postoji jedinstvena Radonova mjera μ na $\widehat{S}_\alpha$ takva da je

$$\phi(s) = \int_{\widehat{S}_\alpha} \hat{s}\,\mathrm{d}\mu, \quad \forall\, s \in S \circ S.$$

Obratno, ako je μ Radonova mjera na $\widehat{S}_\alpha$ takva da je $\hat{s} \in L^2(\widehat{S}_\alpha, \mu)$, $\forall\, s \in S$, tada je

$$\phi(s) = \int_{\widehat{S}_\alpha} \hat{s}\,\mathrm{d}\mu, \quad s \in S \circ S$$

nedegenerirana α-omeđena pozitivno definitna funkcija na S.

Napomena 3.52 Prema Napomeni 3.50, ako je $S \circ S = S$, tada je $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S)$ nedegenerirana pa prethodni teorem daje integralnu reprezentaciju od $\phi(s)$ za svaki $s \in S$. ♢

Napomena 3.53 Dokaz Teorema 3.51 izveden je pomoću teorije za C^*-algebre (u suštini iz Stoneovog teorema) i može se pronaći u [19]. Međutim, taj je rezultat moguće izvesti iz teorije pozitivno definitnih funkcija te potom izvesti Stoneov teorem iz njega (napravljeno u [23]). Ako S ima neutralni element pa je posebno $S \circ S = S$ i svaka funkcija $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S)$ je nedegenerirana (prema prethodnoj napomeni), tada je tvrdnja teorema ekvivalentna Berg-Maserickovom teoremu 4.34 iz 1984. godine čiji se dokaz temelji na integralnoj verziji Krein-Milmanovog teorema bez uporabe tehnika za C^*-algebre. P. Ressel nekoliko je godina poslije u [22, Teorem 4], generalizirao Berg-Maserickov teorem na komutativne polugrupe s involucijom koje nemaju neutralni element. Njegova definicija α-omeđenosti razlikuje se od definicije dane ovdje, ali je pokazao da su te dvije definicije ekvivalentne pa taj rezultat obuhvaća tvrdnju Teorema 3.51. ♢

Skalarni slučaj relativno se lako može poopćiti na funkcije s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$.

Teorem 3.54 (Generalizirana Laplaceova transformacija, vektorski slučaj)

Neka je S komutativna polugrupa s involucijom i $\alpha\colon S \to [0, \infty\rangle$ apsolutna vrijednost na S. Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor i μ Radonova mjera s vrijednostima u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ *na $\widehat{S}_\alpha$ takva da za svaki $s \in S \circ S$ postoje integrali*

$$\phi_\mu(s) := \int_{\widehat{S}_\alpha} \hat{s}\,\mathrm{d}\mu.$$

Tada je $\phi_\mu\colon S \circ S \to B(\mathcal{H})$ nedegenerirana funkcija iz $\mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$. Obratno, ako je ϕ nedegenerirana funkcija iz $\mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$, tada postoji jedinstvena Radonova mjera $\mu_\phi := \mu$ s vrijednostima u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ *na $\widehat{S}_\alpha$ takva da je $\phi = \phi_\mu$.*

Laplaceova transformacija

Budući da je cilj iz generalizirane Laplaceove transformacije dobiti *pravu* (pod određenim uvjetima), uvedimo temeljne pojmove povezane s njom.

Definicija 3.55 Neka je V realan vektorski prostor i $z \in V_{\mathbb{C}}$. Definirajmo preslikavanje $e_z \colon V^* \to \mathbb{C}$ s $e_z(\lambda) = e^{\lambda_{\mathbb{C}}(z)}$. Topologija na algebarskom dualu V^* je slaba-$*$ topologija.

Definicija 3.56 Ako je V realan vektorski prostor i E vektorski potprostor od V^*, tada s $\Sigma(E)$ označavamo najmanju σ-algebru na E koja sve evaluacije $\mathrm{ev}_x \colon E \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \lambda(x)$ čini izmjerivima za svaki $x \in V$. Kažemo da je σ-algebra Σ na E *dopustiva* (*admissible*) ako je $\Sigma(E) \subseteq \Sigma$.

Lema 3.57 *Neka je V realan vektorski prostor i $\mathcal{B}(V^*)$ Borelova σ-algebra na V^*. Tada je $\mathcal{B}(V^*)$ dopustiva i $\Sigma(V^*) = \mathcal{B}(V^*)$ ako i samo ako je $\dim V \leqslant \aleph_0$. U posljednjem je slučaju svaka σ-konačna mjera μ na $(V^*, \mathcal{B}(V^*))$, koja je konačna na kompaktima, Radonova mjera.*

Definicija 3.58 Neka je V realan vektorski prostor, Σ dopustiva σ-algebra na V^* i μ mjera s vrijednostima u konveksnom konusu na (V^*, Σ) s kodomenom podataka $(W, W^\sharp, C)$. *Laplaceova transformacija mjere* μ je funkcija

$$\mathcal{L}(\mu) \colon V \to C_\infty, \quad x \mapsto \int_{V^*} e_x \, \mathrm{d}\mu = \int_{V^*} e^{\lambda(x)} \, \mathrm{d}\mu(\lambda).$$

Domenom od $\mathcal{L}(\mu)$ zovemo skup

$$\mathcal{D}(\mu) := \{x \in V : \mathcal{L}(\mu)(x) \in C\}$$

i kažemo da je mjera μ *dopustiva* ako je $\mathcal{D}(\mu) \neq \emptyset$. *Fourier-Laplaceova transformacija* mjere μ je funkcija

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mu) : \mathcal{D}(\mu) + iV \to W_{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \int_{V^*} e_z \, \mathrm{d}\mu = \int_{V^*} e^{\lambda_{\mathbb{C}}(z)} \, \mathrm{d}\mu(\lambda).$$

Izravno iz definicije integracije skalarnih funkcija vidimo da je

$$\mathcal{L}(\mu)(x)(\lambda) = \mathcal{L}(\mu_\lambda)(x), \ \forall\, x \in V, \lambda \in C^*$$

te da vrijedi $\mathcal{D}(\mu) = \bigcap_{\lambda \in C^*} \mathcal{D}(\mu_\lambda)$. Uočimo da iz konveksnosti eksponencijalne funkcije slijedi da je skup $\mathcal{D}(\mu)$ konveksan podskup od V.

Također primijetimo da je e_x Σ-izmjeriva funkcija za svaki $x \in V$ jer je kompozicija Borel izmjerive i Σ-izmjerive funkcije, $e_x = \exp \circ \mathrm{ev}_x$. Za $x \in \mathcal{D}(\mu)$, e_x je μ-integrabilna. U slučaju kompleksnog prostora, označimo s $\mathcal{L}^2_\mu(V^*)$ skup svih izmjerivih funkcija $f \colon V^* \to \mathbb{C}$ takvih da je $|f|^2$ μ-integrabilna. Tada je $e_z \in \mathcal{L}^2_\mu(V^*)$, za svaki $z \in \frac{1}{2}\mathcal{D}(\mu) + iV$.

Napomena 3.59 Laplaceova transformacija obično se definira kao $\mathcal{L}(\mu)(x) := \int_{V^*} e_{-x}\,\mathrm{d}\mu$, ali, ovisno o potrebi, minus se može i izostaviti. $\diamondsuit$

Napomena 3.60 Za $V = \mathbb{R}$, $(V^*, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i kodomenu podataka $(W, W^\sharp, C) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, [0, \infty\rangle)$ dobivamo dvostranu Laplaceovu transformaciju Borelove mjere na $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\,\mathrm{d}\mu(t). \qquad \diamondsuit$$

Napomena 3.61 Ako je Σ proizvoljna dopustiva σ-algebra na V^* i $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty]$ pozitivna mjera, tada je $\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}(\mu|_{\Sigma(V^*)})$. $\diamondsuit$

Sljedeći teorem pokazuje da se mnoga poznata svojstva Laplaceove transformacije pozitivne mjere na dualu konačno dimenzionalnih realnih vektorskih prostora mogu generalizirati na Laplaceovu transformaciju mjere s vrijednostima u konveksnom konusu na dualima beskonačno dimenzionalnih prostora.

Definicija 3.62 Neka je Ω konveksan skup u realnom vektorskom prostoru V i X topološki prostor. Kažemo da je funkcija $f\colon \Omega \to X$ *neprekidna na linijskim segmentima* ako je $f|_{[x,y]}$ neprekidna za svaki $x, y \in \Omega$, pri čemu je $[x, y] := \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$ snabdjeven topologijom koja je inducirana Hausdorffovom vektorskom topologijom na (bilo kojem) konačno dimenzionalnom potprostoru $V_0 \leqslant V$ za koji je $\{x, y\} \subseteq V_0$.

Sljedeći teorem dokazan je u [15], ali ga predstavljamo zajedno s dokazom kao prikaz tehničkog alata koji se često koristi.

Teorem 3.63 (Svojstva Laplaceove transformacije)

Neka je V realan vektorski prostor, Σ dopustiva σ-algebra na V^* i μ mjera s vrijednostima u konveksnom konusu na (V^*, Σ) s kodomenom podataka $(W, W^\sharp, C)$. Tada vrijedi:

(a) *Ako je mjera μ dopustiva, tada je μ σ-konačna.*

(b) *Za svaki potprostor $F \leqslant V$ vrijedi $\mathcal{L}(i^*(\mu)) = \mathcal{L}(\mu)|_F$ i $\tilde{\mathcal{L}}(i^*(\mu)) = \tilde{\mathcal{L}}(\mu)|_{\mathcal{D}(i^*(\mu))+iF}$ pri čemu je $i\colon F \to V$ inkluzija te $i^*(\mu)$ mjera na F^* definirana na dopustivoj σ-algebri $\Sigma^{i^*} := \{A \subseteq F^* : (i^*)^{-1}(A) \in \Sigma\}$.*

(c) *Ako je $(W, W^\sharp, C) = (\mathrm{Herm}(\mathcal{H}), \mathrm{Herm}_1(\mathcal{H}), \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H}))$, tada je $\phi := \tilde{\mathcal{L}}(\mu)|_{\mathcal{D}(\mu)+iV}$ pozitivno definitna funkcija na $\mathcal{D}(\mu) + iV$ s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ koja je ultraslabo neprekidna na linijskim segmentima.*

Dokaz.

(a) Ako je μ dopustiva, tada postoji neki $x_0 \in \mathcal{D}(\mu)$. Budući da je $e_{x_0} > 0$ po točkama i $\int e_{x_0}\,\mathrm{d}\mu \in C$, μ mora biti σ-konačna ([13, Propozicija 2.23]).

(b) Pokažimo najprije da je Σ^{i^*} dopustiva σ-algebra na F^*. Ako su ev_x^F i ev_x^V evaluacije na F^* i V^* (respektivno) u točki $x \in F$, tada je $\mathrm{ev}_x^F \circ i^* = \mathrm{ev}_x^V$ pri čemu je $i^* \colon V^* \to F^*$, $\lambda \mapsto \lambda|_F$ adjungirani operator. Slijedi da je i^* $\Sigma(V^*)$-$\Sigma(F^*)$ izmjeriv pa vrijedi da je $\Sigma(F^*) \subseteq \Sigma(V^*)^{i^*} \subseteq \Sigma^{i^*}$, tj. Σ^{i^*} je dopustiva. Sada nam teorem o integraciji s obzirom na (skalarnu) preslikanu mjeru daje

$$\int_{F^*} e_x^F \mathrm{d}(i^*\mu_\lambda) = \int_{F^*} (\exp \circ \mathrm{ev}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{F}}) \mathrm{d}(i^*\mu_\lambda) = \int_{F^*} (\exp \circ (\mathrm{ev}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{F}} \circ i^*))\, \mathrm{d}\mu_\lambda = \int_{F^*} e_x^V \,\mathrm{d}\mu_\lambda$$

iz čega slijedi $\mathcal{L}(i^*(\mu)) = \mathcal{L}(\mu)|_F$.

(c) Neka su $z_1, \dots, z_n \in \frac{1}{2}\mathcal{D}(\mu) + iV$ i $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{H}$. Pokažimo da je ϕ pozitivno definitna funkcija:

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} \left\langle \phi(z_j + \overline{z_k}).v_k, v_j \right\rangle &= \sum_{j,k=1}^{n} \left\langle \left(\int_{V^*} e_{z_j} e_{\bar{z}_k} \,\mathrm{d}\mu \right).v_k, v_j \right\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \left\langle P_{v_k,v_j}, \int_{V^*} e_{z_j} e_{\bar{z}_k} \,\mathrm{d}\mu \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{V^*} e_{z_j} e_{\bar{z}_k} P_{v_k,v_j} \,\mathrm{d}\mu = \int_{V^*} P_w \,\mathrm{d}\mu = \|w\|_2^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

U trećoj jednakosti koristi se Lema 3.17, u zadnjem izrazu označili smo $w \coloneqq \sum_{k=1}^n \mathrm{e}_{\bar{z}_k} v_k$, a norma je definirana kao na stranici 39. Pokažimo neprekidnost najprije za skalarnu mjeru μ i $\tilde{\mathcal{L}}(\mu)$. Neka su

$$\begin{aligned}&z_1 \coloneqq x + iy, \ \ z_2 \coloneqq p + iq, \ \ z_1, z_2 \in \mathcal{D}(\mu) + iV, \\ &h_t \coloneqq e_{tz_1 + (1-t)z_2},\ t \in [0,1]\,, \ \ f(t) \coloneqq \int h_t \,\mathrm{d}\mu = \tilde{\mathcal{L}}(\mu)(tz_1 + (1-t)z_2).\end{aligned}$$

Tada je $|h_t| = e_{tx+(1-t)p} \leqslant te_x + (1-t)e_p \leqslant e_x + e_p$, $\forall\, t$. Uzmimo niz $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $[0,1]$ koji konvergira prema $t \in [0,1]$. Tada $h_{t_n} \to h_t$ po točkama. Budući da je

$$\int |h_t| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int (e_x + e_p) \,\mathrm{d}\mu = \mathcal{L}\mu(x) + \mathcal{L}\mu(p) < \infty,$$

možemo iskoristiti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji pa imamo

$$f(t_n) = \int h_{t_n} \,\mathrm{d}\mu \to \int h_t \,\mathrm{d}\mu = f(t).$$

Slijedi da je $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \tilde{\mathcal{L}}(\mu)(tz_1 + (1-t)z_2)$ neprekidna funkcija, tj. $\tilde{\mathcal{L}}(\mu)\colon \mathcal{D}(\mu) + iV \to \mathbb{C}$ je neprekidna na linijskim segmentima. U vektorskom slučaju, kada je $\tilde{\mathcal{L}}(\mu)\colon \mathcal{D}(\mu) + iV \to W_{\mathbb{C}}$, vrijedi

$$\left\langle A, \tilde{\mathcal{L}}(\mu)(z) \right\rangle = \tilde{\mathcal{L}}(\mu_A)(z), \quad \forall\, A \in \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H}) \text{ i } z \in \mathcal{D}(\mu).$$

Slijedi da je $\tilde{\mathcal{L}}(\mu)$ ultraslabo neprekidna na linijskim segmentima.

■

Teoremi Nussbaumovog tipa

Nussbaumovi teoremi grupni je naziv za teoreme koji daju integralni prikaz pozitivno definitne funkcije u obliku Laplaceove transformacije. Iako se naš konveksan konus nalazi unutar Banachovog prostora sa strukturom rešetke, Nussbaumovi teoremi dobiveni su i u općenitijem slučaju u kojem konus pripada realnom vektorskom prostoru. Apstraktni teorem o integralnoj reprezentaciji temelj je za dokazivanje teorema Nussbaumovog tipa, a rezultati će ovisiti o pretpostavkama na funkciju i na strukturu samog konusa. Najjednostaviji mogući slučaj za razmatranje jest onaj u kojem je pozitivno definitna funkcija definirana na otvorenom konveksnom konusu jer su karakteri u tom slučaju strogo pozitivni pa se mogu prikazati u eksponencijalnom obliku. Pogledajmo kako se to vidi iz karakterizacije otvorenih konusa pomoću obraza.

Neka je $S \neq \emptyset$, $S \subseteq V$ generirajući konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V i $\xi\colon S \to \mathbb{R}$ karakter na S. Tada je $F \coloneqq \xi^{-1}(\mathbb{R}^+)$ obraz od S, $\mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty\rangle$. Ako S ne sadrži pravi obraz, tj. $F = S$ tada je $\xi > 0$ pa se može prikazati, uz neke blage uvjete na omeđenost, kao $\xi = e^{\lambda}|_S$ za neki λ, Lema 3.67. Prisjetimo se da upravo otvoreni konveksni konusi nemaju obraz po Propoziciji 2.40 (u najvećoj lokalno konveksnoj topologiji). U tom slučaju, postoji bijekcija između skupova C_α (dolje definiranog) i $\widehat{S}_\alpha$ pa iz generalizirane Laplaceove transformacije dobivamo pravu. To općenito nije istina za širu klasu konveksnih konusa sa nepraznim interiorom i zbog toga se zasebno promatra slučaj otvorenih konveksnih konusa. Nadalje, ako S ima pravi obraz (nije otvoren), tada je ili F pravi obraz ili postoji neki drugi pravi obraz $E \neq \emptyset$ pa možemo definirati $\xi_1 \coloneqq \xi \cdot 1_E$. To je karakter koji iščezava izvan E, na gustom skupu u S (Lema 2.38(f)) pa nije neprekidan u odnosu ni na jednu vektorsku topologiju na V, čak niti na linijskim segmentima. Takav karakter očito se ne može prikazati u eksponencijalnom obliku.

Jasno je da svaki neprazan, otvoren konveksan konus ima neprazan interior, pa je nakon otvorenih konusa prirodno promatrati širu klasu konusa s nepraznim interiorom. Pokazat će se da se i u tom slučaju dobivaju slični rezultati samo ne toliko izravno. Najšira klasa konusa koja se može promatrati nakon toga je klasa generirajućih konveksnih konusa. Takvi konusi dovoljno su "veliki" da razapinju cijeli prostor, ali mogu imati "zvjezdastu" strukturu u smislu da mogu imati prazan interior. Upravo ta struktura isključuje mogućnost da se uvijek može pronaći *Radonova* reprezentirajuća mjera, ali to ne znači da ne postoji nikakva reprezentirajuća mjera. Dakle, logično je promatrati tri klase konusa s obzirom na njihovu strukturu:

$$S \neq \emptyset,\ S \text{ otvoren} \Rightarrow \operatorname{Int} S \neq \emptyset \Rightarrow S - S = V.$$

Može se pokazati da je svaka eksponencijalno omeđena pozitivno definitna funkcija na konveksnom konusu koja se može prikazati kao Laplaceova transformacija, omeđena s obzirom na apsolutnu vrijednost koja je lokalno omeđena na zrakama što znači da nema smisla promatrati apsolutne vrijednosti koje to nisu. *Lokalna omeđenost* na S podrazumijeva da za svaku točku iz S postoji okolina te točke na kojoj je funkcija omeđena.

Definicija 3.64 Neka je V realan vektorski prostor i $S \subseteq V$ konveksan konus. Apsolutna vrijednost $\alpha \colon S \to [0, \infty\rangle$ je *tame* ako je lokalno omeđena na zrakama, tj. ako je za svaki $s \in S$ funkcija $\langle 0, \infty\rangle \to [0, \infty\rangle$, $r \mapsto \alpha(rs)$ lokalno omeđena.

Ako je S konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V i $\lambda \in V^*$ tada je očito $s \mapsto e^{\lambda(s)}$ karakter na S. Za apsolutnu vrijednost α na S definirajmo skup svih funkcionala iz V^* koji induciraju α-omeđene karaktere.

Definicija 3.65 Neka je S generirajući konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V i $\alpha \colon S \to [0, \infty\rangle$ *tame* apsolutna vrijednost na S. Definirajmo skup

$$C_\alpha := \{\lambda \in V^* : e^\lambda|_S \leqslant \alpha\} \subseteq V^*$$

koji ćemo snabdjeti slabom-$*$ topologijom.

Teoremi iz naredna tri odjeljka dokazani su u [15].

3.3.1 Nussbaumov teorem za otvorene konveksne konuse

Sljedeće leme ključne su za dokaz Nussbaumovog teorema za otvorene konveksne konuse i mogu se dokazati za strukture općenitije od konveksnih konusa, tzv. *konusne polugrupe*. Konusna polugrupa jest potpolugrupa od $(V, +)$ za koju vrijedi da za svaki $s \in S$ postoji $r_0 \geqslant 0$ takav da je $rs \in S$, $\forall\, r > r_0$. Očito je svaki konveksan konus konusna polugrupa. Uočimo da je uvjet na apsolutnu vrijednost u Lemi 3.67 ekvivalentan uvjetu lokalne omeđenosti na zrakama u slučaju konveksnih konusa.

Lema 3.66 *Neka je $S \subseteq [0, \infty\rangle$ konusna potpolugrupa od $\mathbb{R}$ s trivijalnom involucijom i $\operatorname{Int} S \neq \emptyset$. Ako je $\xi \colon S \to \mathbb{R}$ karakter na S, tada je ili $\xi = 1_{\{0\}}$ ili $\xi > 0$. Ako je $\xi > 0$ i ξ je lokalno omeđena funkcija, tada postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$\xi(s) = e^{xs}, \ \ \forall\, s \in S.$$

Lema 3.67 *Neka je V realan vektorski prostor, $S \subseteq V$ generirajuća konusna polugrupa s trivijalnom involucijom i $\xi \colon S \to \mathbb{C}$ α-omeđen karakter na S pri čemu je α apsolutna vrijednost na S sa svojstvom da je $\alpha|_{\mathbb{R}^+ s \cap S}$ lokalno omeđena za svaki $s \in S$. Ako je $\xi(S) \subseteq \mathbb{R}^+$, tada postoji jedinstveni linearni funkcional $\lambda \in V^*$ takav da je $\xi = e^\lambda|_S$.*

Lema 3.68 *Neka je S konusna polugrupa s nepraznim interiorom u realnom topološkom vektorskom prostoru V i $\xi \colon S \to (\mathbb{C}, \cdot)$ homomorfizam polugrupa. Ako postoji $s \in S$ takav da je $\xi(s) = 0$, tada je $\xi|_{S^\diamond} = 0$ pri čemu je $S^\diamond := S \cap (\langle 0, \infty\rangle \cdot \operatorname{Int} S)$.*

Uočimo da se prethodna lema može primijeniti na karaktere definirane na konveksnom konusu S s nepraznim interiorom i da je u tom slučaju $S^\diamond = \operatorname{Int} S$. Ako je S otvoren, tj. $S = \operatorname{Int} S$, tada je karakter strogo pozitivan.

Lema 3.69 *Neka je $S \neq \emptyset$ otvoren konveksan konus u realnom topološkom vektorskom prostoru V i α tame apsolutna vrijednost na S. Tada je*

$$\beta_\alpha \colon C_\alpha \to \widehat{S}_\alpha, \quad \lambda \mapsto e^\lambda|_S$$

homeomorfizam.

Teorem 3.70 (Nussbaumov teorem za otvorene konveksne konuse)

Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor, $S \neq \emptyset$ otvoren konveksan konus u realnom topološkom vektorskom prostoru V i α tame apsolutna vrijednost na S. Tada vrijedi:

(a) *Ako je μ Radonova mjera na V^* s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ takva da je $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq C_\alpha$ i $S \subseteq \mathcal{D}(\mu)$, tada je $\mathcal{L}(\mu)|_S \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$.*

(b) *Za svaku funkciju $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$ postoji jedinstvena Radonova mjera μ na V^* s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ takva da je $\phi = \mathcal{L}(\mu)|_S$ i vrijedi $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq C_\alpha$.*

Dokaz.

(a) Uočimo da je C_α zatvoren pa stoga izmjeriv skup u V^*. Ako definiramo $\nu := \beta_\alpha(\mu)$, tada je ν Radonova mjera s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ na $\widehat{S}_\alpha$ (Lema 3.20). Budući da vrijedi

$$\mathcal{L}(\mu)(s) = \int_{C_\alpha} e^{\lambda(s)} \, \mathrm{d}\mu(\lambda) = \int_{\widehat{S}_\alpha} \xi(s) \, \mathrm{d}\nu(\xi), \quad s \in S,$$

iz Teorema 3.54 slijedi da je $\mathcal{L}(\mu)|_S \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$.

(b) Neka je $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$. Po Teoremu 3.54, postoji Radonova mjera ν s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ na $\widehat{S}_\alpha$ takva da je $\int \hat{s} \, \mathrm{d}\nu = \phi(s)$, $\forall\, s \in S$ pri čemu je $\hat{s}(\xi) = \xi(s)$. Ako definiramo $\mu := j(\beta_\alpha^{-1}(\nu))$ za inkluziju $j \colon C_\alpha \to V^*$, tada je $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq C_\alpha$ i $\mathcal{L}(\mu)|_S = \phi$. Jedinstvenost slijedi iz činjenice da je $\operatorname{aff} S = V$.

∎

Sljedeći teorem pokazuje nam da lokalna omeđenost apsolutne vrijednosti α implicira neprekidnost funkcionala iz C_α. Također, u lokalno konveksnim prostorima V, funkcije iz $\mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$ neprekidne su u topologiji norme na $B(\mathcal{H})$.

Teorem 3.71 (Automatska neprekidnost)

Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor, $S \neq \emptyset$ otvoren konveksan konus u realnom topološkom vektorskom prostoru V i α lokalno omeđena apsolutna vrijednost na S. Tada je $C_\alpha \subseteq V'$ i vrijedi:

(a) *U lokalno konveksnom prostoru V svaka je α-omeđena $*$-reprezentacija $\pi\colon S \to (B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ neprekidna.*

(b) *U lokalno konveksnom prostoru V svaka je α-omeđena pozitivno definitna funkcija $\phi\colon S \to (B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ neprekidna.*

(c) *Ako postoji točka $s_0 \in S$ koja ima otvorenu konveksnu okolinu $U \subseteq S$ takvu da je $\alpha|_U$ omeđena, tada je svaka $*$-reprezentacija od S i svaka funkcija iz $\mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$ neprekidna (čak i ako V nije lokalno konveksan).*

(d) *Svaka 1-omeđena $*$-reprezentacija od S i svaka funkcija iz $\mathcal{P}^1(S, \mathcal{H})$ jest neprekidna.*

Još jedan kriterij za neprekidnost linearnih funkcionala iz dualnog konusa jest zatvorenost konusa u potpunom metrizabilnom topološkom vektorskom prostoru. Za dokaz vidjeti [20, Lema I.5.].

Lema 3.72 *Ako je S generirajući zatvoren konveksan konus u Banachovom prostoru, tada je $S^* \subseteq V'$.*

Napomena 3.73 Uočimo da je $C_1 = \{\lambda \in V^* : e^\lambda|_S \leqslant 1\} = -S^*$. Ako je $S \neq \emptyset$ otvoren konveksan konus u realnom topološkom vektorskom prostoru V, tada je po Teoremu 3.71 $C_1 = -S^* \subseteq V'$. ♢

Napomena 3.74 Budući da u Teoremu 3.71 pretpostavljamo da je apsolutna vrijednost lokalno omeđena, pogledajmo kako možemo konstruirati mnoštvo takvih apsolutnih vrijednosti. Neka je V realni topološki vektorski prostor i $S \neq \emptyset$ otvoren konveksan konus u V. Za $\emptyset \neq C \subseteq V^*$ definirajmo konveksan konus $B(C) := \{x \in V : \sup \langle C, x\rangle < \infty\}$. Tada za takav C i $S \subseteq B(C)$ možemo definirati:

$$\alpha_C\colon S \to \langle 0, \infty\rangle, \quad \alpha_C(s) := e^{\sup\langle C,s\rangle}.$$

Tako definirana α_C apsolutna je vrijednost na S jer za svaki $s, t \in S$ vrijedi

$$\alpha_C(s+t) = e^{\sup\langle C,s+t\rangle} \leqslant e^{\sup\langle C,s\rangle + \sup\langle C,t\rangle} = \alpha_C(s)\alpha_C(t)$$

i trivijalno je ispunjeno $\alpha_C(s^*) = \alpha_C(s)$. Ako je V lokalno konveksan prostor i U proizvoljna okolina nule u V, tada se *polar* skupa U definira kao

$$K = U^\circ := \{\lambda \in V' : \sup |\langle \lambda, x\rangle| \leqslant 1, x \in U\}.$$

Lako se pokaže da je K *ekvikontinuirana* familija funkcija u V', tj. za svaki $\varepsilon \geqslant 0$ postoji okolina nule W u V takva da je $|\lambda(W)| \leqslant \varepsilon$, za svaki $\lambda \in K$. Vrijedi da je $S \subseteq B(K)$ pa možemo definirati apsolutnu vrijednost α_K. Budući da je K ekvikontinuiran, α_K je lokalno omeđena. ♢

Primjer 3.75 Promotrimo otvoren konveksan konus $S = \mathbb{R}$ u $V = \mathbb{R}$. Po Teoremu 3.71 svaka pozitivno definitna funkcija na $\mathbb{R}$ koja je α-omeđena s obzirom na lokalno omeđen α, ima reprezentirajuću mjeru μ na $\mathbb{R}' \cong \mathbb{R}$ i μ ima kompaktan nosač. Promotrimo Gaussovu mjeru $\mathrm{d}\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}\lambda(x)$ na $\mathbb{R}$ pri čemu je λ Lebesgueova mjera. Tada je $\mathcal{D}(\gamma) = \mathbb{R}$ i $\phi := \mathcal{L}(\gamma)$ je pozitivno definitna funkcija na $S = \mathbb{R}$. Budući da je $\operatorname{supp}(\gamma) = \mathbb{R}$, ϕ ne može biti omeđena s obzirom na lokalno omeđenu apsolutnu vrijednost. To znači da vrijedi jedna od sljedeće dvije mogućnosti: ili je ϕ eksponencijalno omeđena, ali $\|\pi_\phi\|$ nije lokalno omeđena ili ϕ uopće nije eksponencijalno omeđena. Može se pokazati da ϕ nije eksponencijalno omeđena. Dokaz je opsežan i može se naći u [15]. $\diamondsuit$

3.3.2 Nussbaumov teorem za konveksne konuse s nepraznim interiorom

Već smo opazili da svaki $\lambda \in V^*$ inducira karakter na S putem preslikavanja $\lambda \mapsto e^\lambda|_S$ i taj karakter neprekidan je na linijskim segmentima. Može se pokazati da vrijedi i obrat tj. da je svaki karakter koji je neprekidan na linijskim segmentima, strogo pozitivan pa se može prikazati u eksponencijalnom obliku.

Definicija 3.76 Kažemo da je karakter *tame* ako je neprekidan na linijskim segmentima.

Definicija 3.77 Funkcija $\phi \in \mathcal{P}(S, \mathcal{H})$ je *tame* ako je ultraslabo neprekidna na linijskim segmentima i α-omeđena s obzirom na *tame* α.

Napomena 3.78 Neprekidnost funkcije $f \colon S \to B(\mathcal{H})$ na linijskim segmentima podrazumijeva neprekidnost funkcije $[0, 1] \to B(\mathcal{H})$, $t \mapsto f(tx + (1 - t)y)$, $\forall\, x, y \in S$. Primijetimo da je ultraslaba neprekidnost na linijskim segmentima ekvivalentna slaboj neprekidnosti na linijskim segmentima po Lemi 2.43. $\diamondsuit$

Lema 3.79 *Neka je S generirajući konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V. Preslikavanje*

$$\beta \colon V^* \to \widehat{S}, \;\; \lambda \to e^\lambda|_S$$

je topološko ulaganje (topologije na V^* i $\widehat{S}$ su slaba-$*$ topologija i topologija točkovne konvergencije, respektivno) i $\beta(V^*)$ je topološka polugrupa $\widehat{S}^t$ svih tame karaktera na S. Ako je α tame apsolutna vrijednost, tada je $\beta(C_\alpha) = \widehat{S}^t_\alpha := \widehat{S}^t \cap \widehat{S}_\alpha$ skup α-omeđenih, tame karaktera na S.

Propozicija 3.80 *Neka je S generirajući konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V. Interior od S u odnosu na najveću vektorsku topologiju na V jednak je interioru od S u odnosu na bilo koju vektorsku topologiju $\mathcal{T}$ za koju je $\operatorname{Int}_{\mathcal{T}} S \neq \emptyset$.*

Lema 3.81 *Neka je V realan topološki vektorski prostor, $S \subseteq V$ konveksan konus s nepraznim interiorom i α tame apsolutna vrijednost na S. Ako definiramo $R := \widehat{S}_\alpha \setminus \widehat{S}^t_\alpha$*

kao skup α-omeđenih karaktera koji nisu tame tada za svaki $\xi \in R$ vrijedi $\xi|_{\operatorname{Int} S} = 0$. Ako S nije otvoren i $\widehat{S}_\alpha \neq \emptyset$, tada je $R \neq \emptyset$.

Primjer 3.82 Uzmimo da je $V = \mathbb{R}, S := [0, \infty\rangle$ i $\alpha = 1$. S je konveksan konus u V i α je očito *tame* apsolutna vrijednost na S. Karakteristična funkcija $\xi := 1_{\{0\}}$ je 1-omeđen karakter koji nije neprekidan na linijskim segmentima (nije *tame*) i jedini je takav po Lemi 3.66. Stoga vrijedi $\widehat{S}_\alpha = \widehat{S}^t_\alpha \cup \{\xi\}$ (disjunktna unija) i primijetimo da ξ iščezava na $\operatorname{Int} S$.

Ako za S uzmemo otvoreni konus $S = \langle 0, \infty\rangle$ koji je također generirajući s nepraznim interiorom, tada je po Teoremu 3.71 svaka pozitivno definitna funkcija na S neprekidna pa je posebno svaki karakter na S neprekidan. Zaista, $\xi = 1_{\{0\}}$ nije karakter na S jer $0 \notin S$ te je u tom slučaju $R = \emptyset$. $\diamondsuit$

Kako bi se dokazao Nussbaumov teorem za konveksne konuse s nepraznim interiorom, ključan je sljedeći rezultat koji je zapravo u duhu rezultata koji su pokazali Berg, Christensen i Ressel za $S = [0, \infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ ([6, Propozicija 4.4.2.]). Vrijedi sljedeća tvrdnja: svaka omeđena pozitivno definitna funkcija $\phi\colon S \to \mathbb{R}$ može se napisati u obliku

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-as}\, \mathrm{d}\mu(a) + b\, 1_{\{0\}}(s), \quad s \geqslant 0,$$

pri čemu je μ konačna Radonova mjera na $[0, \infty\rangle$ i $b \geqslant 0$. Uočimo da je prvi izraz zapravo Laplaceova transformacija mjere μ, a drugi je karakter koji iščezava na interioru od S (i jedini neneprekidni karakter po Lemi 3.66). Ako je ϕ još i neprekidna, tada je ona jednaka samo prvom izrazu, tj. ϕ je Laplaceova transformacija mjere μ. Sljedeći teorem zapravo je poopćenje tog rezultata.

Teorem 3.83 (Teorem o dekompoziciji)

Neka je S konveksan konus s nepraznim interiorom u realnom topološkom vektorskom prostoru V, α tame apsolutna vrijednost i $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$. Tada se ϕ može napisati kao

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$$

pri čemu je ϕ_1 tame, $\phi_2|_{\operatorname{Int} S} = 0$ i $\phi_1 = \mathcal{L}(\mu)|_S$ za Radonovu mjeru μ na V^* s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ i nosačem u C_α. Funkcije ϕ_1 i ϕ_2 jedinstveno su određene.

Teorem 3.84 (Nussbaumov teorem za konveksne konuse s nepraznim interiorom)

Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor, S konveksan konus s nepraznim interiorom u realnom topološkom vektorskom prostoru V i α tame apsolutna vrijednost na S. Tada vrijedi:

(a) *Ako je μ Radonova mjera na V^* s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ takva da je $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq C_\alpha$ i $S \subseteq \mathcal{D}(\mu)$, tada je $\mathcal{L}(\mu)|_S \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$ i $\mathcal{L}(\mu)|_S$ je tame.*

(b) *Za svaku tame funkciju $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$ postoji jedinstvena Radonova mjera μ na V^* s vrijednostima u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ takva da je $\phi = \mathcal{L}(\mu)|_S$ i za nju vrijedi $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq C_\alpha$.*

Dokaz.

(a) Funkcija $\mathcal{L}(\mu)|_S$ je ultraslabo neprekidna na linijskim segmentima po Teoremu 3.63(c), a α-omeđenost dokazuje se kao u Teoremu 3.70.

(b) Egzistencija mjere slijedi iz Teorema 3.83, a jedinstvenost iz činjenice da je aff $S = V$.

■

Kao što je već spomenuto u uvodu Nussbaumov teorem za konveksne konuse s nepraznim interiorom dokazan je u nekim specijalnim slučajevima, npr. u [31] i [16]. Kao i u specijalnim slučajevima, svojevrsna "neprekidnost u nuli" dovoljna je za neprekidnost pozitivno definitne funkcije na linijskim segmentima (u ultraslaboj topologiji). Ekvivalencija između (a) i (c) u sljedećem teoremu posljedica je Teorema 3.84.

Teorem 3.85 *Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor, S konveksan konus s nepraznim interiorom u realnom topološkom vektorskom prostoru V i $0 \in S$. Neka je $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$ i α tame apsolutna vrijednost na S. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *ϕ je tame, tj. ϕ je ultraslabo neprekidna na linijskim segmentima.*

(b) *Postoji $s \in \mathrm{Int}\, S$ i niz $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva takav da $r_n \to 0, n \to \infty$ i $\phi(r_n s) \to \phi(0)$ u ultraslaboj topologiji.*

(c) *Postoji Radonova mjera μ na V^* s vrijednostima u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ i nosačem u C_α takva da je $\phi = \mathcal{L}(\mu)|_S$.*

Ako je α lokalno omeđena, tada je $C_\alpha \subseteq V'$ i prethodni uvjeti ekvivalentni su četvrtom uvjetu:

(d) *$\phi\colon S \to B(\mathcal{H})$ sekvencijalno je neprekidna ako $B(\mathcal{H})$ snabdijemo ultraslabom topologijom.*

Korolar 3.86 *Neka je $\mathcal{H}$ kompleksan Hilbertov prostor, S konveksan konus s nepraznim interiorom u metrizabilnom realnom topološkom vektorskom prostoru V, $0 \in S$ i α lokalno omeđena apsolutna vrijednost na S. Za $\phi \in \mathcal{P}^\alpha(S, \mathcal{H})$ sljedeći su uvjeti ekvivalentni:*

(a) *ϕ je ultraslabo neprekidna.*

(b) *Postoji $s \in \mathrm{Int}\, S$ i niz $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva takav da $r_n \to 0, n \to \infty$ i $\phi(r_n s) \to \phi(0)$ u ultraslaboj topologiji.*

(c) *Postoji Radonova mjera* μ *na* V^* *s vrijednostima u* $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ *i nosačem u* C_α *takva da je* $\phi = \mathcal{L}(\mu)|_S$.

U slučaju $\alpha = 1$ uvjet metrizabilnosti može se ispustiti, odnosno vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.87 *Neka je* $\mathcal{H}$ *kompleksan Hilbertov prostor,* S *konveksan konus s nepraznim interiorom u realnom topološkom vektorskom prostoru* V, $0 \in S$ *i* $\phi \in \mathcal{P}^1(S, \mathcal{H})$. *Tada je* $C_1 = -S^* \subseteq V'$ *i sljedeći uvjeti su ekvivalentni:*

(a) ϕ *je ultraslabo neprekidna.*

(b) *Postoji* $s \in \operatorname{Int} S$ *i niz* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pozitivnih realnih brojeva takav da* $r_n \to 0, n \to \infty$ *i* $\phi(r_n s) \to \phi(0)$ *u ultraslaboj topologiji.*

(c) *Postoji Radonova mjera* μ *na* V^* *s vrijednostima u* $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ *i nosačem u* $-S^*$ *takva da je* $\phi = \mathcal{L}(\mu)|_S$.

Ako je jedan od prethodnih uvjeta zadovoljen (pa i preostali), mjera μ *iz* (c) *jedinstveno je određena.*

Korolar 3.88 *Neka je* $\mathcal{H}$ *kompleksan Hilbertov prostor,* S *konveksan konus s nepraznim interiorom u realnom topološkom vektorskom prostoru* V, $0 \in S$ *i* $\phi \in \mathcal{P}^1(S, \mathcal{H})$. *Tada je*

$$\phi = \phi_1 + \phi_2,$$

pri čemu su ϕ_1 *i* ϕ_2 *jedinstveno određene funkcije iz* $\mathcal{P}^1(S, \mathcal{H})$ *za koje vrijedi da je* ϕ_1 *ultraslabo neprekidna i* $\phi_2|_{\operatorname{Int} S} = 0$.

3.3.3 Nussbaumov teorem za generirajuće konveksne konuse

Ako podignemo razinu općenitosti na generirajuće konveksne konuse, može se pokazati da ne postoji *Radonova* reprezentirajuća mjera na V^*, ali da postoji jedinstvena mjera na $(V^*, \Sigma(V^*))$ takva da je $\mathcal{L}(\mu)|_S = \phi$.

Definicija 3.89 Neka je V realni vektorski prostor, $Z \leqslant V^*$, Σ dopustiva σ-algebra na Z i μ mjera na (Z, Σ) s vrijednostima u konveksnom konusu i kodomenom podataka $(W, W^\sharp, C)$. Definirajmo skup $B_\mu \subseteq V$:

$$B_\mu := \{x \in V : \operatorname{ess\,sup}_\mu(e_{-x}) < \infty\}.$$

Teorem 3.90 *Neka je* S *generirajući konveksan konus u realnom vektorskom prostoru* V *i* $\mathcal{H}$ *kompleksan Hilbertov prostor. Tada za svaku tame* $\phi \in \mathcal{P}(S, \mathcal{H})$ *postoji jedinstvena mjera* μ *na* $(V^*, \Sigma(V^*))$ *s vrijednostima u* $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ *takva da je* $\phi = \mathcal{L}(\mu)|_S$. *Također vrijedi da je* $S \subseteq \mathcal{D}(\mu)$ *i* $S \subseteq -B_\mu$. *Obratno, za svaku mjeru* μ *na* $(V^*, \Sigma(V^*))$ *s vrijednostima u* $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ *za koju je* $S \subseteq \mathcal{D}(\mu)$ *i* $S \subseteq -B_\mu$, $\mathcal{L}(\mu)|_S$ *je tame funkcija iz* $\mathcal{P}(S, \mathcal{H})$.

Napomena 3.91 Ako se promatra općenitiji slučaj u kojem je $\phi\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$, $\Omega \subseteq V$ neprazan konveksan skup, može se dobiti sličan rezultat. Točnije, u tom je slučaju ekvivalentno:

- postoji mjera μ na $(V^*, \Sigma(V^*))$ s vrijednostima u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ takva da je $\mathcal{L}(\mu)|_\Omega = \phi$
- ϕ je ultraslabo neprekidna na linijskim segmentima i pozitivno definitna.

Jedinstvenost u prethodnom teoremu slijedi iz činjenice da za generirajuće konveksne konuse S vrijedi $\mathrm{aff}(S) = S - S = V$. ♢

Promotrimo primjer početnog prostora $V = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ koji čine apsolutno konvergentni realni nizovi i konveksnog konusa u njemu $S = \ell^1_+ := \{f \in \ell^1 : f \geqslant 0\}$. Konus S očito je zatvoren generirajući konveksni konus s praznim interiorom pa po Teoremu 3.90 svaka pozitivno definitna funkcija na S ima jedinstvenu reprezentirajuću mjeru na $(V^*, \Sigma(V^*))$ i to je najviše što se može dobiti. Kao što pokazuje sljedeća propozicija, ne postoji reprezentirajuća mjera na topološkom dualu $V' \cong \ell^\infty$. Uočimo da zbog Leme 3.72 (V je Banachov), vrijedi $S^* \subseteq V'$.

Propozicija 3.92 *Neprekidna, 1-omeđena pozitivno definitna funkcija*

$$\phi\colon (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \prod_{n\in\mathbb{N}} (1 + x_n)^{-1} \tag{3.4}$$

na ℓ^1_+ *nema reprezentirajuću mjeru na* $((\ell^1)', \Sigma((\ell^1)'))$.

Korolar 3.93 *Postoji neprekidna funkcija* $\phi \in \mathcal{P}^1(S, \mathcal{H})$ *na zatvorenom generirajućem konveksnom konusu* S *u Banachovom prostoru* V *za koju vrijedi:*

(a) ϕ *nema Radonovu reprezentirajuću mjeru na* $V^* \cong \widehat{S}^t$

(b) ϕ *nema reprezentirajuću mjeru na* $(\widehat{S}^t_1, \Sigma(\widehat{S}^t_1))$.

Napomena 3.94 Funkcija iz prethodnog korolara je funkcija definirana s (3.4). Prostor ℓ^1 specifičan je po tome što njegov dual ℓ^∞ nije separabilan. Kada bi bio separabilan tada bi zbog toga što pripada poljskim prostorima (separabilnim potpuno metrizabilnim topološkim prostorima), Borelova σ-algebra bila jednaka svakoj dopustivoj σ-algebri i svaka reprezentirajuća (Borelova) mjera bi automatski bila Radonova. S obzirom da ℓ^1 nije separabilan, može se dogoditi da postoji reprezentirajuća mjera na dopustivoj σ-algebri, ali ne i na Borelovoj. ♢

Primjer 3.95 Neka je $V = \ell^1$, $S = \ell^1_+$ i ϕ kao u Propoziciji 3.92. Po Nussbaumovom teoremu za generirajuće konveksne konuse, Teoremu 3.90, znamo da ϕ ima reprezentirajuću mjeru μ na $(V^*, \Sigma(V^*)) \cong (\widehat{S}^t, \Sigma(\widehat{S}^t))$, a s druge strane po Teoremu 3.51 postoji Radonova mjera ρ na $\widehat{S}_1$. Definirajmo $\nu := \rho|_{\Sigma(\widehat{S}_1)}$ i neka su $j_1\colon \widehat{S}^t \hookrightarrow \widehat{S}$ i $j_2\colon \widehat{S}_1 \hookrightarrow \widehat{S}$ inkluzije. Tada su $j_1(\mu)|_{\Sigma(\widehat{S})}$ i $j_2(\nu)|_{\Sigma(\widehat{S})}$ reprezentirajuće mjere za ϕ na $(\widehat{S}, \Sigma(\widehat{S}))$ i, budući da je S savršen (što je spomenuto u uvodu), mora biti $\omega := j_1(\mu)|_{\Sigma(\widehat{S})} = j_2(\nu)|_{\Sigma(\widehat{S})}$. Sada vidimo da su i $\widehat{S}^t$ i $\widehat{S}_1$ *thick* u $\widehat{S}$ s obzirom na ω (Definicija 3.24), ali $\widehat{S}_1^t = \widehat{S}^t \cap \widehat{S}_1$ nije *thick* u $\widehat{S}$ s obzirom na ω jer ϕ nema reprezentirajuću mjeru na $(\widehat{S}_1^t, \Sigma(\widehat{S}_1^t))$ prema prethodnom korolaru. ♢

Napomena 3.96 Pogledajmo koje pozitivno definitne funkcije imaju *konačne* reprezentirajuće mjere. U Primjeru 3.41 već smo napomenuli da je za pozitivno definitnu funkciju $\phi\colon S \to B(\mathcal{H})$ i konveksan konus S, $\phi(s) \in C = \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$, za svaki $s \in S$. Laplaceova transformacija definirana je tako da može poprimiti i "beskonačne" vrijednosti, točnije u kompaktifikaciji C_∞. Ako se ϕ može prikazati kao Laplaceova transformacija $\phi = \mathcal{L}(\mu)|_S$, tada je očito $S \subseteq \mathcal{D}(\mu) = \{x \in V : \mathcal{L}(\mu)(x) \in C\}$. Uočimo da ako je $0 \in S$, tada $\phi(0) = \mathcal{L}(\mu)(0) = \mu(V^*) \in C$, tj. mjera μ je konačna.

Ako S ne sadrži neutralan element, onda možemo definirati konveksan konus $S_0 := S \cup \{0\}$. Ako je μ konačna, $\mu(V^*) \in C$, tada je $0 \in \mathcal{D}(\mu)$ pa je $\mathcal{L}(\mu)|_{S_0}$ pozitivno definitna funkcija po Teoremu 3.63(c). Može se pokazati da u uvjetima Teorema 3.90 vrijedi i obrat te trdnje, odnosno da vrijedi sljedeći rezultat ([15, Propozicija 20.5]).

Neka je S generirajući konveksan konus u realnom vektorskom prostoru V i $\phi\colon S \to B(\mathcal{H})$ tame pozitivno definitna funkcija na S. Neka je μ jedinstvena mjera na $(V^*, \Sigma(V^*))$ s vrijednostima u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ takva da je $\phi = \mathcal{L}(\mu)|_S$. Mjera μ je konačna ako i samo ako se ϕ može proširiti do pozitivno definitne funkcije na $S_0 := S \cup \{0\}$. ♢

Poglavlje 4

BANACHOV PROSTOR SA STRUKTUROM REŠETKE

4.1 Osnovni pojmovi i primjeri

Uvedimo osnovne pojmove i definicije koji se odnose na parcijalno uređene Banachove prostore i vektorske rešetke (Rieszove prostore). Dokazi i detalji u vezi s ovom temom mogu se pronaći u [2, 3, 27].

Banachovi prostori čine izrazito veliku klasu prostora i mnogi važni primjeri Banachovih prostora dani su u prvom poglavlju. Kao što ćemo vidjeti, većina tih prostora ima i dodatnu strukturu uređaja, točnije, radi se o uređenim Banachovim prostorima. Realni vektorski prostor X je (parcijalno) *uređen vektorski prostor* ako postoji parcijalni uređaj na X koji je invarijantan na vektorske operacije. Preciznije, to znači da uređaj '$\leqslant$' zadovoljava svojstvo refleksivnosti, tranzitivnosti i antisimetričnosti te da $a \leqslant b$ implicira:

(i) $a + c \leqslant b + c$

(ii) $\lambda a \leqslant \lambda b$, za sve $a, b, c \in X$ i $\lambda \geqslant 0$.

S $x < y$ označava se da je $x \leqslant y$ i $x \neq y$, a $x \geqslant y$ ekvivalentno je s $y \leqslant x$. *Pozitivan konus* od X definira se kao $X_+ = \{x \in X : x \geqslant 0\}$.

Nadalje, kažemo da je X *vektorska rešetka (Rieszov prostor)* ako svaki par vektora ima supremum (time i infimum) u X s obzirom na uređaj. Uobičajene oznake za supremum i infimum su $x \vee y = \sup\{x, y\}$ i $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Za vektor $x \in X$ definiraju se *pozitivni* i *negativni dio* od x te *modul* od x kao:

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := -x \vee 0, \quad |x| := x \vee (-x),$$

iz čega slijedi da je $x = x^+ - x^-$ (pozitivni konus X_+ je generirajući) te je taj rastav jedinstven. Za modul od x vrijedi $|x| = x^+ + x^-$ i $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Za $Y \subseteq X$ kažemo da je *podrešetka od* X ako je $Y \neq \emptyset$ rešetka, tj. ako su za svaki $a, b \in Y$, $a \vee b$ i $a \wedge b$ također u Y.

Uređen Banachov prostor je Banachov prostor koji je ujedno i uređen vektorski prostor i pozitivni konus X_+ zatvoren je u topologiji norme.[1]

Banachov prostor sa strukturom rešetke, iz naslova ovog poglavlja, podrazumijevat će uređen Banachov prostor koji je ujedno i vektorska rešetka. Ako takav prostor zadovoljava i dodatno svojstvo kompatibilnosti modula i norme:

$$|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|, \ \ \forall\, x, y \in X, \tag{4.1}$$

tada taj prostor nazivamo *Banachovom rešetkom*. U Banachovim rešetkama pozitivni konus automatski je zatvoren. Naime, preslikavanja $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$ i $x \mapsto x \vee y$ uniformno su neprekidna u Banachovim rešetkama te je $X_+ = \{x \in X : x^- = 0\}$ zatvoren skup jer je inverzna slika zatvorenog skupa $\{0\}$.

Primijetimo da Banachovi prostori sa strukturom rešetke, koji će nam biti od najvećeg interesa, obuhvaćaju sve Banachove rešetke, ali su općenitiji od toga, u smislu da promatramo i prostore u kojima norma nije monotona, tj. nije nužno zadovoljen uvjet (4.1). Glavni razlog što promatramo upravo takve prostore je što njima pripadaju Soboljevi prostori $W^{1,p}(\Omega)$. Uskoro slijedi više detalja.

Spomenimo da se uređen vektorski prostor $(X, \leqslant)$ ponekad zadaje i pomoću (X, C) pri čemu je C usmjeren konveksan konus u X. Naime, usmjeren konveksan konus C u realnom vektorskom prostoru X inducira parcijalni uređaj '$\leqslant$' na način da je $x \leqslant y$ ako je $y - x \in C$ i taj uređaj zadovoljava svojstva uređenog vektorskog prostora. U tom uređaju C je pozitivni konus. Obratno, u uređenom vektorskom prostoru $(X, \leqslant)$ u kojem je uređaj invarijantan na vektorske operacije, podskup $C = \{x \in X : x \geqslant 0\}$ usmjeren je konveksan konus.

Pogledajmo primjere poznatih prostora i njihove strukture. Velik broj već spomenutih Banachovih prostora čine Banachove rešetke. Ako nije drugačije rečeno, na prostorima funkcija uređaj se definira po točkama u smislu da je $f \leqslant g$ ako je $f(x) \leqslant g(x)$ za svaki x iz domene.

Primjer 4.1

1. Najjednostavniji primjer Banachove rešetke jest skup $\mathbb{R}$ u kojem se norma i modul poklapaju pa je uvjet (4.1) trivijalno ispunjen.

2. Općenito, prostor $\mathbb{R}^n$ s Euklidskom normom jest Banachova rešetka pri čemu je

[1] Neki autori izostavljaju uvjet zatvorenosti pozitivnog konusa u ovoj definiciji.

$x \leqslant y$ ako je $x_i \leqslant y_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Operacije rešetke su:

$$x \vee y = (\max\{x_1, y_1\}, \ldots, \max\{x_n, y_n\}),$$
$$x \wedge y = (\min\{x_1, y_1\}, \ldots, \min\{x_n, y_n\}).$$

3. Za kompaktan topološki prostor K, skup $C(K)$ (s normom $\|\cdot\|_\infty$) neprekidnih realnih funkcija na K jest Banachova rešetka u kojoj se uređaj definira po točkama, a supremum i infimum s

$$\begin{aligned}(f \vee g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\},\\ (f \wedge g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

4. Prostor neprekidnih, omeđenih funkcija na topološkom prostoru X, $BC(X)$ (s normom $\|\cdot\|_\infty$) jest Banachova rešetka. Operacije rešetke definirane su kao u prethodnom primjeru.

5. Za proizvoljan neprazan skup X, prostor $B(X)$ (s normom $\|\cdot\|_\infty$) omeđenih realnih funkcija na X jest Banachova rešetka s operacijama kao u (4.2). Uočimo da je $C(K)$ podrešetka od $BC(X)$ ($K \subseteq X$), a $BC(X)$ podrešetka od $B(X)$.

6. Za LCH prostor X, prostor $C_0(X)$ (s normom $\|\cdot\|_\infty$) realnih neprekidnih funkcija koje iščezavaju u beskonačnosti jest Banachova rešetka s operacijama kao u (4.2).

7. Vektorski prostor c_0 svih realnih nizova koji konvergiraju u nulu s normom $\|x\|_\infty$ jest Banachova rešetka.

8. Prostori L^p (pa i prostori nizova ℓ^p) za $1 \leqslant p \leqslant \infty$ s pripadnim normama Banachove su rešetke s time da je $f \leqslant g$ ako je $f(x) \leqslant g(x)$ gotovo svuda, a operacije rešetke su kao u (4.2).

9. Prostor $M(X)$ svih konačnih realnih mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{M})$ s normom totalne varijacije jest Banachova rešetka. U $M(X)$ vrijedi da je $\mu \leqslant \nu$ ako je $\mu(A) \leqslant \nu(A)$ za svaki izmjerivi skup A, a supremum i infimum definiraju se kao:

$$(\mu \vee \nu)(A) = \sup\{\mu(B) + \nu(A \setminus B) : B \subset A, B \text{ izmjeriv}\},$$
$$(\mu \wedge \nu)(A) = \inf\{\mu(B) + \nu(A \setminus B) : B \subset A, B \text{ izmjeriv}\}.$$

10. Promotrimo prostor $C^k([0,1])$ svih diferencijabilnih funkcija na $[0,1]$ s neprekidnom derivacijom do reda k pri čemu je norma jednaka $\|f\| = \sum_{j=1}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty$ i uređaj se definira po točkama. $C^k([0,1])$ uređen je Banachov prostor s generirajućim pozitivnim konusom, ali nije vektorska rešetka pa ne može biti ni Banachova rešetka.

Kao primjer uzmimo funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = -x$. Supremum od $\{f, g\}$ očito nije diferencijabilna funkcija.

11. Soboljevi prostori $W^{m,p}(\Omega)$ uređeni su Banachovi prostori s 'gotovo svuda' uređajem naslijeđenim iz $L^p(\Omega)$ prostora. Pozitivni konus zatvoren je u (m, p)-normi jer za niz (f_n) iz $W^{m,p}(\Omega)_+$ takav da $f_n \to f$ u $W^{m,p}(\Omega)$ vrijedi $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ pa zbog zatvorenosti pozitivnog konusa u L^p mora biti $f \geqslant 0$.

    Može se pokazati da su za $m = 1$ Soboljevi prostori vektorske rešetke. Ipak, prostori $W^{1,p}(\Omega)$ nisu Banachove rešetke jer norma nije monotona. Kao primjer uzmimo $f \in W^{1,1}([0,1])$ definiranu s $f(x) = x$, $x \in [0,1]$. Tada je $0 \leqslant f \leqslant \mathbb{1}$, ali $\|f\| > \|\mathbb{1}\|$ pri čemu je $\mathbb{1}$ oznaka za konstantnu funkciju $x \mapsto 1$, $\forall\, x \in [0,1]$.

12. Sve C^*-algebre uređeni su Banachovi prostori (kompleksni), ali ne zadovoljavaju svojstvo vektorske rešetke u smislu da ne postoje supremum i infimum unutar samog prostora. Fundamentalni primjer C^*-algebre, $B(\mathcal{H})$, nije vektorska rešetka čim je $\dim H > 1$ jer bilo koja dva neusporediva hermitska operatora nemaju supremum.

    Razmatrat ćemo samo *realne* Banachove prostore sa strukturom rešetke. $\diamondsuit$

U vektorskim rešetkama umjesto zatvorenosti na supremum i infimum dovoljno je provjeriti jedan od sljedećih uvjeta.

Lema 4.2 *U uređenom vektorskom prostoru X ekvivalentno je:*

(a) $x \vee y$ *postoji,* $\forall\, x, y \in X$

(b) $x \wedge y$ *postoji,* $\forall\, x, y \in X$

(c) x^+ *postoji,* $\forall\, x \in X$

(d) x^- *postoji,* $\forall\, x \in X$

(e) $|x|$ *postoji,* $\forall\, x \in X$.

Ekvivalencije iz prethodne leme lako se provjere pomoću neke od sljedećih jednakosti.

Lema 4.3 *Za x, y iz vektorske rešetke X vrijede sljedeće jednakosti:*

(a) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ *i* $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$

(b) $x + y = x \vee y + x \wedge y$

(c) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *i* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Napomena 4.4 Sve jednakosti i nejednakosti koje su istinite za realne brojeve, istinite su i za vektorske rešetke. $\diamondsuit$

Napomenimo da sve vektorske rešetke zadovoljavaju *Rieszovo svojstvo dekompozicije* koje kaže da ako za y vrijedi $|y| \leqslant |\sum_{i=1}^n x_i|$, tada postoje $y_1, \ldots, y_n$ takvi da je $y = \sum_{i=1}^n y_i$ i $|y_i| \leqslant |x_i|$ za svaki i.

Lema 4.5 *Uređen vektorski prostor X zadovoljava Rieszovo svojstvo dekompozicije ako i samo ako za svaki $x, y \in X_+$ vrijedi*

$$[0, x] + [0, y] = [0, x + y]\,.$$

4.2 Interior pozitivnog konusa

Kao što se u normiranim prostorima neprekidnost, omeđenost i konvergencija definiraju s obzirom na normu, tako se u uređenim prostorima ti pojmovi definiraju s obzirom na uređaj (*order*). Budući da u Banachovim prostorima sa strukturom rešetke raspolažemo s topološkom strukturom i strukturom koju zadaje uređaj, logično je zapitati se u kakvom su međusobnom odnosu te dvije strukture. Na primjer, možemo govoriti o omeđenosti s obzirom na normu i s obzirom na uređaj, ali ne možemo općenito pretpostaviti da je skup omeđen po normi također i uređajno omeđen ili obratno.

Kao što smo vidjeli pozitivni konus igra ključnu ulogu kad govorimo o uređenim prostorima. Iz trećeg je poglavlja jasno da interior pozitivnog konusa također igra važnu ulogu u reprezentaciji pozitivno definitne funkcije pomoću Laplaceove transformacije. Ako je interior neprazan, tada postoji Radonova reprezentirajuća mjera na podskupu duala (Teorem 3.84) dok je u slučaju praznog interiora najviše što možemo dobiti reprezentirajuća mjera (ne nužno Radonova) na dualu prostora (Korolar 3.93), ali ne i na njegovom podskupu. Iz tog razloga važno je karakterizirati točke interiora pozitivnog konveksnog konusa.

Uvedimo osnovne definicije koje se odnose na omeđenost u uređenim vektorskim prostorima. Podskup $A \subseteq X$ uređenog vektorskog prostora X *uređajno* je *omeđen* ako postoje $u, v \in X$ takvi da je $u \leqslant a \leqslant v, \forall\, a \in A$, tj. ako je A omeđen odozgo i odozdo. *Uređajni interval* svaki je skup oblika $[x, y] = \{z : x \leqslant z \leqslant y\}$. Ako su x i y neusporedivi, tada je $[x, y] = \emptyset$. Uočimo da je skup uređajno omeđen ako i samo ako se nalazi unutar nekog uređajnog intervala. Ako je X uređen Banachov prostor, tada zbog $[a, b] = (a + X_+) \cap (b - X_+)$ vrijedi da je uređajni interval zatvoren skup. U Banachovim rešetkama uređajna omeđenost i omeđenost po normi ekvivalentni su pojmovi.

Uočimo da u prostoru $C(K)$ vrijedi $\sup\{|f(x)| : x \in K\} \leqslant c$ ako i samo ako je $-\mathbb{1}c \leqslant f \leqslant \mathbb{1}c$ što dovodi do definicije uređajne jedinice.

Definicija 4.6 Neka je X uređen (realan) vektorski prostor. Tada je $u \in X_+$ *uređajna jedinica* (*order unit*) ako za svaki $x \in X$ postoji $\lambda > 0$ tako da vrijedi $x \leqslant \lambda u$.

Uočimo da jedinica nije jedinstvena zato što za svaku jedinicu u vrijedi da je $u + X_+$ i λu za $\lambda > 0$ ponovno jedinica. Također, ako je X vektorska rešetka, onda možemo pisati $|x| \leqslant \lambda u$ i te su dvije definicije ekvivalentne.

Lema 4.7 *Neka je X uređen Banachov prostor, $u \in X_+$ i $B_0 := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ jedinična kugla u X. Ekvivalentno je:*

(a) *u je jedinica*

(b) $u \in \operatorname{Int} X_+$

(c) $\lambda B_0 \subseteq [-u, u]$ *za neki* $\lambda > 0$.

Korolar 4.8 *Ako uređen Banachov prostor X nema jedinicu, tada je* $\operatorname{Int} X_+ = \emptyset$.

Uočimo da svojstvo (c) zapravo znači da je uređajni interval $[-u, u]$ okolina nule, odnosno da je $\operatorname{Int} X_+ \neq \emptyset$ ako i samo ako je svaki interval omeđen po normi uređajno omeđen.

Lako se vidi da Banachove rešetke L^∞ i $C(K)$ imaju za jedinicu konstantnu funkciju $\mathbb{1}$. Istu uređajnu jedinicu dijeli i prostor $C^k([a, b])$, a u $B(\mathcal{H})$ je to operator identiteta. U prostoru beskonačnih nizova ℓ^∞ jedinica je svaki niz (u_n) za koji je $\inf\limits_{i \in \mathbb{N}} \{u_i\} > 0$. Prostori ℓ^p i L^p za $1 \leqslant p < \infty$ kao i c_0 te $M(X)$ nemaju jedinicu.

Uočimo da za $f, g \in C(K)_+$ vrijedi

$$\|f \vee g\| = \max_{x \in K} |(f \vee g)(x)| = \max_{x \in K} (\max\{f(x), g(x)\}) = \max\{\|f\|, \|g\|\},$$

dok je za $f, g \in L^1(\mu)_+$

$$\|f + g\| = \int |f + g| \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu = \|f\| + \|g\|.$$

Te činjenice motiviraju sljedeću definiciju.

Definicija 4.9

(i) Banachova rešetka X je *AM-prostor* ako za $x, y \geqslant 0$ vrijedi $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

(ii) Banachova rešetka X je *AL-prostor* ako za $x, y \geqslant 0$ vrijedi $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

AM-prostori zapravo su apstraktna verzija $C(K)$ prostora dok su AL-prostori apstraktna verzija L^1 prostora. Može se pokazati da je Banachova rešetka AL-prostor (AM-prostor) ako i samo ako je njezin dual AM-prostor (AL-prostor). Jedinica na Banachovoj rešetki inducira normu

$$\|x\|_u := \inf\{\lambda > 0 : |x| \leqslant \lambda u\}$$

koja je ekvivalentna normi na prostoru te je zatvorena jedinična kugla u normi $\|\cdot\|_u$ jednaka uređajnom intervalu $[-u, u]$. *AM-prostor s jedinicom* Banachova je rešetka s jedinicom u i normom $\|\cdot\|_u$. Dual AL-prostora upravo je AM-prostor s jedinicom. Tako su $C(K)$ i $L^\infty(\mu)$ AM-prostori s jedinicom dok su $L_1(\mu)$ i $M(X)$ AL-prostori. Zanimljivo je da vrijedi i svojevrstan obrat. Točnije, svaki AM-prostor s jedinicom izometrički je izomorfan (u smislu uređaja) s $C(K)$ za neki kompaktan Hausdorffov prostor K koji je jedinstven do na homeomorfizam. Svaki AL-prostor izometrički je izomorfan s L^1. Taj rezultat može se poopćiti i na prostore koji nisu nužno Banachove rešetke, točnije na Banachove prostore sa strukturom rešetke $(B, B_+, \|\cdot\|)$ u kojima pozitivni konus ima neprazan interior (potpoglavlje 4.4). U tom je slučaju B topološki uređajno izomorfan s $(C(K), C(K)_+, \|\cdot\|_\infty)$ za neki kompaktan Hausdorffov prostor K. Detalji se mogu pronaći u [7].

Prirodno se postavlja pitanje uređajne jedinice u AL-prostorima. Može se pokazati da samo konačno dimenzionalni AL-prostori imaju jedinicu ([2, Korolar 9.39]) iz čega slijedi Korolar 4.10.

Korolar 4.10 *Pozitivni konus u beskonačno dimenzionalnim AL-prostorima ima prazan interior.*

Budući da nas zanima šira klasa prostora od Banachovih rešetki, promotrimo primjer Soboljevih prostora $W^{m,p}(\Omega)$ koji su uređeni Banachovi prostori za sve m, p. Dokazi sljedećih nekoliko tvrdnji mogu se pronaći u [14].

Poznato je da je $W^{m,p}(\Omega)$ kao Banachov prostor izomorfan s $L^p\,[(0,1)]$, $1 < p < \infty$ (pod nekim blagim uvjetima), ali struktura s obzirom na uređaj uvelike se razlikuje od one u $L^p(\Omega)$. Postavlja se pitanje koji Soboljevi prostori imaju jedinicu. Budući da L^∞ ima za jedinicu konstantnu funkciju $\mathbb{1}$ i $\mathbb{1} \in W^{m,\infty}(\Omega) \leqslant L^\infty$, $\mathbb{1}$ je jedinica i za $W^{m,\infty}(\Omega)$.

Pretpostavimo sada da je $1 \leqslant p < \infty$ takav da je $p > \frac{n}{m}$ ili $p = \frac{n}{m} = 1$ i Ω regularna domena. Po klasičnom Soboljevom teoremu o ulaganju (Teorem 2.21), u tom slučaju postoji $C > 0$ takav da je $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_{m,p}$, $\forall\, f \in W^{m,p}(\Omega)$. Slijedi da je jedinična kugla u $W^{m,p}(\Omega)$ sadržana u $[-C\mathbb{1}, C\mathbb{1}]$ pa je po Lemi 4.7, $\mathbb{1}$ jedinica u $W^{m,p}(\Omega)$ pod zadanim uvjetima.

Korolar 4.11 *Za $1 \leqslant p < \infty$ takav da je $p > \frac{n}{m}$ ili $p = \frac{n}{m} = 1$ i Ω regularna domena, Soboljevi prostori $W^{m,p}(\Omega)$ imaju jedinicu.*

Promotrimo sada slučaj kada je $m = 1$. Prostor $W^{1,p}(\Omega)$ podrešetka je od $L^p(\Omega)$.

Lema 4.12 *Ako je $f \in W^{1,p}(\Omega)$, tada su f^+, f^- i $|f|$ također u $W^{1,p}(\Omega)$ i vrijedi:*

$$\frac{\partial f^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}, & f > 0 \\ 0, & f \leqslant 0 \end{cases}, \frac{\partial f^-}{\partial x_i} = \begin{cases} 0, & f \geqslant 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}, & f < 0 \end{cases}, \frac{\partial |f|}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_i}, & f < 0 \end{cases}$$

za svaki $i = 1, \ldots, n$ (jednakosti su g. s.).

Teorem 4.13 *Soboljevi prostori $W^{1,p}(\Omega)$ su Banachovi prostori sa strukturom rešetke i operacije na rešetki su neprekidne.*

Budući da su jedini Soboljevi prostori koji su ujedno i vektorske rešetke prostori $W^{1,p}(\Omega)$, zanima nas imaju li oni jedinicu, odnosno je li interior pozitivnog konusa u tom prostoru prazan. U slučaju $p > n$ već smo pokazali da postoji jedinica, dok se za $p < n$ može pokazati da pozitivni konus ima prazan interior.

Lema 4.14 *Za $p < n$ vrijedi $\mathrm{Int}(W^{1,p}(\Omega)_+) = \emptyset$.*

Iskažimo još nekoliko rezultata koji se odnose na konveksne konuse u Banachovom prostoru.

Propozicija 4.15 *Neka je C zatvoren, usmjeren konveksan konus u Banachovom prostoru X. Ekvivalentno je:*

(a) *C je generirajući*

(b) *za $B_0 := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ konveksan skup $B_0 \cap C - B_0 \cap C$ okolina je nule, tj. postoji $\alpha > 0$ takav da je $\alpha B_0 \subseteq B_0 \cap C - B_0 \cap C$*

(c) *za proizvoljne okoline nule U i V skup $U \cap C - V \cap C$ okolina je nule*

(d) *postoji konstanta $k > 0$ takva da za svaki $x \in X$ postoje $x_1, x_2 \in C$ takvi da vrijedi*

$$x = x_1 - x_2, \quad \|x_1\| \leqslant k\|x\|, \quad \|x_2\| \leqslant k\|x\|.$$

Vidjeli smo da u Banachovim prostorima sa strukturom rešetke (i općenito u uređenim Banachovim prostorima) ne možemo očekivati da su uređajni intervali omeđeni po normi. Najbolji primjer takvih prostora Soboljevi su prostori $W^{1,p}(\Omega)$ na kojima smo već pokazali tu tvrdnju, Primjer 4.1(11). Svojstvo da je svaki uređajni interval omeđen po normi može se karakterizirati na različite načine.

Definicija 4.16 Kažemo da je norma u uređenom Banachovom prostoru X *monotona* ako vrijedi

$$0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|.$$

Definicija 4.17 U uređenom vektorskom prostoru kažemo da je skup A *uređajno konveksan* ako za svaki $x, y \in A$ vrijedi $[x, y] \in A$.

Definicija 4.18 Konveksan konus C u uređenom Banachovom prostoru X je *normalan* ako postoji baza okolina nule koja se sastoji od uređajno konveksnih skupova (uređaj je induciran s C).

Napomena 4.19 Prethodna definicija vrijedi za općenite topološke vektorske prostore X. Pojam normalnosti prvi je uveo M. G. Krein i to u Banachovim prostorima. Izvorna definicija glasi: C je normalan ako postoji $\delta > 0$ takav da za $x, y \in C$ za koje je $\|x\| = \|y\| = 1$ vrijedi $\|x+y\| > \delta$. Može se reći da je normalnost pozitivnog konusa na neki način komplementarna s postojanjem jedinice. Kao što je postojanje jedinice ekvivalentno s tim da je svaki interval omeđen po normi, uređajno omeđen (Lema 4.7), tako je normalnost ekvivalentna s time da je svaki uređajni interval omeđen po normi. $\diamondsuit$

Propozicija 4.20 *U uređenom Banachovom prostoru X ekvivalentno je:*

(a) *pozitivni konus X_+ je normalan*

(b) *postoji ekvivalentna norma na X koja je monotona*

(c) *postoji konstanta $M > 0$ takva da iz $0 \leqslant x \leqslant y$ slijedi $\|x\| \leqslant M\|y\|$*

(d) *postoji konstanta $M > 0$ takva da iz $a \leqslant x \leqslant b$ slijedi $\|x\| \leqslant M \max\{\|a\|, \|b\|\}$, tj. svaki uređajni interval omeđen je po normi*

(e) *skup $(B_0 + X_+) \cap (B_0 - X_+)$ omeđen je po normi.*

Uočimo da je npr. svojstvo (d) ispunjeno za pozitivni konus $C(K)_+$ pa su time ispunjena i sva ostala svojstva. Općenito, tvrdnje iz Propozicije 4.20 vrijede za sve vektorske rešetke koje zadovoljavaju svojstvo (4.1), tzv. *normirane vektorske rešetke.*

Korolar 4.21 *Pozitivni konus u normiranoj vektorskoj rešetki je zatvoren, normalan i generirajući.*

Primjer 4.22 Definirajmo tzv. *ice cream cone* u beskonačno dimenzionalnom normiranom prostoru X. Ako je $f \in X'$ norme jedan i $0 < \varepsilon < 1$, tada je *ice cream cone* s parametrima f i ε:

$$K_{f,\varepsilon} := \{x \in X : f(x) \geqslant \varepsilon\|x\|\}.$$

Time je definirana klasa konusa koja ima sljedeća svojstva: svaki $K_{f,\varepsilon}$ je zatvoren, normalan i ima neprazan interior pa je prema tome i generirajući. $\diamondsuit$

4.3 Dualnost

Neka je $(B, B_+, \|\cdot\|)$ Banachov prostor sa strukturom rešetke. Kažemo da je linearni funkcional na B, $f : B \to \mathbb{R}$ *pozitivan* ako je $f(x) \geqslant 0$ za svaki $x \in B_+$. Uočimo da iz Leme 3.72 slijedi da je svaki pozitivni linearni funkcional na B automatski neprekidan.

S B' označavat ćemo topološki dual od B; prostor svih neprekidnih, linearnih funkcionala na B. To je uređen Banachov prostor s normom operatora u kojem je uređaj induciran dualnim konusom od B_+:

$$B'_+ := \{f \in B' : f(x) \geqslant 0, \forall\, x \in B_+\}.$$

Prema tome, B'_+ je pozitivni konus u B' koji se sastoji upravo od pozitivnih linearnih funkcionala. Uočimo da što je pozitivni konus B_+ veći, to je dualni konus B'_+ manji. Po Napomeni 3.2 dualni pozitivni konus zatvoren je u slaboj-$*$ topologiji na B'. Zbog zatvorenosti od B_+ slijedi da je

$$(B'_+)' = \{x \in B : f(x) \geqslant 0, \forall\, f \in B'_+\} = B_+.$$

Budući da je B_+ generirajući konus u B, prirodno se nameće pitanje je li B'_+ generirajući za B', tj. može li se svaki neprekidni linearni funkcional napisati kao razlika dvaju pozitivnih linearnih funkcionala. Tim problemom bavio se T. Andô u [4].

Teorem 4.23 *Neka je B Banachov prostor sa strukturom rešetke. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *B_+ je normalan*

(b) $B' = B'_+ - B'_+$

(c) *B' je vektorska rešetka.*

Ako je zadovoljen neki od tih uvjeta, tada na B' postoji ekvivalentna norma sa svojstvom (4.1)*, tj. B' je Banachova rešetka.*

Napomena 4.24 Za ekvivalenciju tvrdnji (a) i (b) dovoljno je pretpostaviti da je B uređen Banachov prostor i B_+ generirajući. Ako takav prostor još dodatno zadovoljava Rieszovo svojstvo dekompozicije, tada postoji ekvivalencija između (a) i (c) i vrijedi zadnja tvrdnja ([3, Korolar 2.49, Zadatak 17]). Banachov prostor sa strukturom rešetke očito zadovoljava sve te uvjete pa su sve tri tvrdnje ekvivalentne, međutim, treba naglasiti da postoje Banachovi prostori koji zadovoljavaju Rieszovo svojstvo dekompozicije, a nisu vektorske rešetke, tj. prostori koji zadovoljavaju uvjete teorema, a općenitiji su od naših. Primjeri takvih prostora mogu se pronaći u [3]. $\diamondsuit$

Kao što smo već spomenuli osim topološke omeđenosti postoji i omeđenost s obzirom na uređaj. Linearni fukcional f na uređenom vektorskom prostoru X *uređajno* je *omeđen* ako je $f([x, y])$ omeđen podskup u $\mathbb{R}$ za svaki uređajni interval $[x, y]$. Ako je f pozitivni linearni funkcional, tada iz $x-y \geqslant 0$ slijedi $f(x-y) \geqslant 0$, odnosno $x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$ pa je svaki pozitivni linearni funkcional monoton i uređajno omeđen. To znači da je u našem prostoru svaki pozitivni linearni funkcional omeđen po normi (neprekidan) i uređajno omeđen. Skup svih uređajno omeđenih linearnih funkcionala na X vektorski je prostor koji se označava s $X^\sim$ i naziva *uređajni dual* od X. Riesz je pokazao da je uređajni dual vektorske rešetke ponovno vektorska rešetka s uređajem $f \leqslant g$ ako $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall\, x \in X_+$. Spomenimo da je vektorska rešetka *uređajno potpuna* ako svaki neprazan skup koji je uređajno omeđen odozgo ima supremum (ekvivalentno, ako svaki neprazan skup koji je uređajno omeđen odozdo ima infimum).

Teorem 4.25 (F. Riesz)

Uređajni dual $B^\sim$ vektorske rešetke B je uređajno potpuna vektorska rešetka. Operacije rešetke dane su s:

$$(f \vee g)(x) := \sup\{f(y) + g(z) : y, z \in B_+, y + z = x\}$$
$$(f \wedge g)(x) := \inf\{f(y) + g(z) : y, z \in B_+, y + z = x\},$$

$\forall\, f, g \in B^\sim$, $x \in B_+$. *Posebno, za $f \in B^\sim$ i $x \in B_+$ imamo:*

(a) $f^+(x) = \sup\{f(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}$

(b) $f^-(x) = \sup\{-f(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\} = -\inf\{f(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}$

(c) $|f|(x) = \sup\{f(y) : |y| \leqslant x\} = \sup\{|f(y)| : |y| \leqslant x\}$

(d) $|f(x)| \leqslant |f|(|x|)$.

Korolar 4.26 *Linearni funkcional na vektorskoj rešetki uređajno je omeđen ako i samo ako se može napisati kao razlika dvaju pozitivnih linearnih funkcionala.*

Neka je B uređen Banachov prostor. Promotrimo odnos uređajnog duala $B^\sim$ i duala po normi B'. Rezultati pokazuju da su najvažniji čimbenici u tom odnosu:

- normalnost pozitivnog konusa
- postojanje jedinice
- kompatibilnost modula i norme, tj, uvjet (4.1))
- Rieszovo svojstvo dekompozicije
- potpunost prostora s obzirom na normu (Banachov prostor).

Ako B ima jedinicu ili ekvivalentno $\operatorname{Int} B_+ \neq \emptyset$, tada je po Lemi 4.7 svaki $f \in B^\sim$ omeđen na okolini nule $[-u, u]$ pa je f neprekidan. Dakle, u tom slučaju je $B^\sim \leqslant B'$. Nadalje, normalnost pozitivnog konusa B_+ implicira $B' \leqslant B^\sim$ po Propoziciji 4.20. Ako B zadovoljava Rieszovo svojstvo dekompozicije i B_+ je generirajući, tada vrijedi da je $B^\sim \leqslant B'$ i $B^\sim = B'_+ - B'_+$ ([3, Korolar 2.50]).

Ako je B normirana vektorska rešetka (nema potpunosti, ali je zadovoljen uvjet (4.1)), tada je $B' \leqslant B^\sim$ i B' je uređajno potpuna Banachova rešetka. U Banachovim je rešetkama $B' = B^\sim$.

Korolar 4.27 *Neka je B Banachov prostor sa strukturom rešetke. Tada vrijedi:*

(a) $B^{\sim} = B'_+ - B'_+$

(b) $B^{\sim} \leqslant B'$

(c) B' *zadovoljava Rieszovo svojstvo dekompozicije.*

Primjer 4.28 Pokažimo da zatvoren i generirajući konveksan konus u Banachovom prostoru sa strukturom rešetke nije nužno normalan. Neka je $X = W^{1,2}([0,1]) = H^1([0,1])$ Soboljev prostor funkcija iz $L^2([0,1])$ čija je slaba derivacija također u $L^2([0,1])$. Norma na X je tada

$$\|f\|_{1,2} = \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2\right)^{1/2} = \left(\int_{[0,1]} f^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_{[0,1]} (f')^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}.$$

Neka je X_+ pozitivni konus u X. Pokazali smo da je X_+ zatvoren i zato što je X vektorska rešetka, X_+ je generirajući.

Pretpostavimo da je X_+ normalan, tj. da postoji konstanta $M > 0$ takva da iz $0 \leqslant f \leqslant g$ slijedi $\|f\|_{1,2} \leqslant M\|g\|_{1,2}$ (Propozicija 4.20). Definirajmo funkcije $f_n \in X_+$ s $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$. Očito vrijedi $0 \leqslant f_n \leqslant \mathbb{1}$ za svaki n pa slijedi da je $\|f_n\|_{1,2} \leqslant M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Sada uočimo:

$$\|f_n\|_{1,2} = \left(\frac{n^2}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)^{1/2} \leqslant M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

što dovodi do kontradikcije. $\diamondsuit$

4.4 Nussbaumov teorem

U ovom potpoglavlju dokazat ćemo Nussbaumov teorem u sklopu Banachovih prostora sa strukturom rešetke. Po uzoru na [15] koncentrirat ćemo se na pozitivno definitne funkcije s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ koje su definirane na pozitivnom konusu koji promatramo kao polugrupu s involucijom $* = \mathrm{id}_S$ i operacijom zbrajanja. Okruženje konveksnog konusa je Banachov prostor sa strukturom rešetke koji je definiran u potpoglavlju 4.1. Prisjetimo se najvažnijih oznaka.

Neka je $(B, B_+, \|\cdot\|)$ Banachov prostor sa strukturom rešetke, B' topološki dual prostora B te B_+ pozitivni konus u B. Neka je Σ σ-algebra na B' takva da $\Sigma \supseteq \Sigma(B')$ (dopustiva) i μ mjera s vrijednostima u konveksnom konusu $C = \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ na (B', Σ) s kodomenom podataka $(W, W^\sharp, C) = (\mathrm{Herm}(\mathcal{H}), \mathrm{Herm}_1(\mathcal{H}), \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H}))$. Budući da poistovjećujemo prostore $\mathrm{Herm}_1(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Herm}(\mathcal{H})'$, dualni konus od C je $C^* = \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H})$. Kao i prije s C_∞ označavamo topološku kompaktifikaciju od C koja predstavlja "beskonačne" vrijednosti koje mjera μ može poprimiti.

Preslikavanje $e_x\colon B' \to \mathbb{R}$ definira se kao $e_x(\lambda) = e^{\lambda(x)}$. Slično kao prije definiramo Laplaceovu transformaciju mjere μ:

$$\mathcal{L}(\mu)\colon B \to C_\infty, \quad x \mapsto \int_{B'} e_x \, \mathrm{d}\mu = \int_{B'} e^{\lambda(x)} \, \mathrm{d}\mu(\lambda),$$

ali ovaj put integriramo po skupu *neprekidnih* linearnih funkcionala. Domena od $\mathcal{L}(\mu)$ jest skup $\mathcal{D}(\mu) := \{x \in B : \mathcal{L}(\mu)(x) \in C\}$.

Također ćemo se ograničiti samo na prostore B koji imaju uređajnu jedinicu ili ekvivalentno $\operatorname{Int} B_+ \neq \emptyset$ (Lema 4.7). Kao što pokazuje Propozicija 3.92, u slučaju praznog interiora postoji neprekidna i omeđena pozitivno definitna funkcija (na prostoru ℓ^1 koji zadovoljava sve naše uvjete) koja nema reprezentirajuću mjeru koncentriranu na topološkom dualu već samo na algebarskom i ta mjera nije nužno Radonova. Banachovi prostori B s jedinicom uvijek će imati Radonovu reprezentirajuću mjeru koja "živi" na topološkom dualu B'.

Treba napomenuti i da će reprezentirajuća mjera s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ uvijek biti konačna jer promatramo pozitivno definitne funkcije definirane na pozitivnom konusu B_+, posebno i u nuli (Napomena 3.96).

Budući da u našem okruženju promatramo topološki dual umjesto algebarskog, često ćemo umjesto neprekidnosti na linijskim segmentima imati pravu neprekidnost.

Lema 4.29 *Laplaceova transformacija $\mathcal{L}(\mu)$ mjere s vrijednostima u $\operatorname{Herm}^+(\mathcal{H})$ je pozitivno definitna funkcija s vrijednostima u $B(\mathcal{H})$ koja je za konačnu mjeru μ ultraslabo neprekidna.*

Dokaz. Pozitivna definitnost dokazuje se kao u Teoremu 3.63(c). Za dokaz neprekidnosti uzmimo niz (x_n) iz B koji konvergira prema x, $\|x_n - x\| \to 0$. Kao u Napomeni 3.7 za $A \in \operatorname{Herm}_1^+(\mathcal{H})$ definirajmo pozitivnu mjeru μ_A s $\mu_A(B) := \mu(B)(A)$, $B \in \Sigma$. Budući da je ultraslaba topologija zapravo topologija konvergencije po točkama s obzirom na identifikaciju $\operatorname{Herm}_1(\mathcal{H}) \cong \operatorname{Herm}(\mathcal{H})'$, dovoljno je pokazati da $\mathcal{L}(\mu_A)(x_n) \to \mathcal{L}(\mu_A)(x)$, za svaki $A \in \operatorname{Herm}_1^+(\mathcal{H})$.

Neka je $A \in \operatorname{Herm}_1^+(\mathcal{H})$. Za pozitivnu mjeru μ_A očito vrijedi $\mu_A(B') = \mu(B')(A) < \infty$. Za $\lambda \in B'$, e^λ je neprekidna funkcija pa slijedi da $e_{x_n} \to e_x$ po točkama. S obzirom na to da je svaki neprekidni linearni funkcional λ lokalno omeđena funkcija, oko točke x postoji okolina U na kojoj je λ omeđena pa vrijedi $e^\lambda|_U \leqslant c$ za neki $c > 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je niz $(x_n) \in U$ pa je $\int e_{x_n} \, \mathrm{d}\mu_A \leqslant c\mu_A(B') < \infty$. Po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi:

$$\int_{B'} e_{x_n} \, \mathrm{d}\mu_A \to \int_{B'} e_x \, \mathrm{d}\mu_A, \ \ \forall A \in \operatorname{Herm}_1^+(\mathcal{H}),$$

čime je pokazano da je Laplaceova transformacija neprekidna funkcija u ultraslaboj topologiji na $B(\mathcal{H})$. ∎

U drugom poglavlju pokazano je da se pozitivno definitna funkcija može prikazati kao generalizirana Laplaceova transformacija ako je eksponencijalno omeđena (Teorem 3.54), a za obrat Leme 4.29, tj. za pravu Laplaceovu transformaciju treba dodatno postaviti i određene uvjete na neprekidnost. Budući da je 1-omeđenost (odnosno omeđenost) poprilično restriktivan uvjet, promatrat ćemo općenitije, α-omeđene pozitivno definitne funkcije kod kojih je α barem lokalno omeđena apsolutna vrijednost. Razlog za to leži u činjenici što su u slučaju lokalno omeđenih apsolutnih vrijednosti α, linearni funkcionali koji induciraju α-omeđene karaktere eksponencijalnog oblika neprekidni pa je prirodno promatrati mjere koje su definirane na B' umjesto na cijelom algebarskom dualu B^*.

Svaki karakter definiran na konveksnom konusu $S \subseteq B$ zapravo je ne-nul funkcija $\xi\colon S \to [0, \infty\rangle$ za koju vrijedi $\xi(s+t) = \xi(s)\xi(t)$. Budući da promatramo konveksan konus $S = B_+$ koji sadrži neutralan element 0, mora još i vrijediti $\xi(0) = 1$. Kao i prije, označimo s C_α skup linearnih funkcionala koji induciraju α-omeđene karaktere:

$$C_\alpha \coloneqq \{\lambda \in B^* : e^{\lambda(x)} \leqslant \alpha(x), \forall\, x \in B_+\},$$

pri čemu je C_α snabdjeven slabom-$*$ topologijom i α lokalno omeđena apsolutna vrijednost. Uočimo da je skup C_α zatvoren podskup od B^*, a u dokazu leme koja slijedi vidjet ćemo da vrijedi $C_\alpha \subseteq B'$. Dakle, C_α se sastoji od neprekidnih linearnih funkcionala λ takvih da je $\lambda(x) \leqslant \ln(\alpha(x))$ za svaki $x \in B_+$.

Lema 4.30 *Neka je $\xi\colon B_+ \to [0,\infty\rangle$ karakter na B_+, $\operatorname{Int} B_+ \neq \emptyset$ i α lokalno omeđena apsolutna vrijednost na B_+. Karakter ξ je neprekidan ako i samo ako je $\xi > 0$ i α-omeđen. U tom slučaju postoji $\lambda \in B'$ takav da je $\xi(x) = e^{\lambda(x)}$, $x \in B_+$.*

Dokaz. Neka je ξ neprekidan karakter na B_+. Pokažimo da je $\xi > 0$.

Pretpostavimo da je $x_0 \geqslant 0$ nultočka od ξ i neka je $x \in \operatorname{Int} B_+$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $z \coloneqq nx - x_0 \geqslant 0$ i vrijedi $\xi(nx) = \xi(x)^n = \xi(z)\xi(x_0) = 0$, tj. $\xi(x) = 0$. Dakle, kada bi ξ imao nultočku na B_+, tada bi vrijedilo $\xi|_{\operatorname{Int} B_+} = 0$ te bi zbog neprekidnosti ξ bio nula na cijelom B_+ što je kontradikcija s definicijom karaktera. Dakle, mora biti $\xi > 0$.

Budući da je karakter nenegativna submultiplikativna funkcija, svaki je karakter na B_+ ujedno i apsolutna vrijednost na B_+. Zbog neprekidnosti ξ je lokalno omeđen pa možemo staviti $\alpha \coloneqq \xi$. Po Lemi 3.67 tada je $\xi(s) = e^{\lambda(s)}$ za neki $\lambda \in B^*$, a zbog toga što je ξ neprekidan, mora biti $\lambda \in B'$.

Obratno, neka je $\xi > 0$ i α-omeđen. Po istoj lemi vrijedi da je $\xi(s) = e^{\lambda(s)}$ za neki $\lambda \in B^*$. Zbog $\xi \leqslant \alpha$ vrijedi da je $\lambda \in C_\alpha$. To znači da je $\lambda(x) \leqslant \ln(\alpha(x))$ pa je λ lokalno omeđena na B_+. Budući da je $0 \in B_+$, postoji okolina nule U takva da je λ omeđena na $U \cap B_+$. Iz toga slijedi da je λ omeđena i na $(U \cap B_+) - (U \cap B_+)$, a to je okolina nule po Lemi 4.15. Dakle, u slučaju lokalno omeđenih α vrijedi $C_\alpha \subseteq B'$. Pokazali smo da je $\xi(s) = e^{\lambda(s)}$ za neki $\lambda \in B'$, dakle ξ je neprekidan. ∎

Napomena 4.31 Iz dokaza je jasno da se umjesto uvjeta $\xi > 0$ može pisati $\xi(u) > 0$ za neku uređajnu jedinicu u, tj. da su ti uvjeti ekvivalentni. $\diamondsuit$

Sada je jasno da postoji bijekcija između skupa neprekidnih karaktera i linearnih funkcionala iz B'.

Korolar 4.32 *Neka je $\widehat{B}_+$ topološka polugrupa karaktera na B_+ s topologijom točkovne konvergencije i označimo s $\widehat{B}_+^c$ potpolugrupu neprekidnih karaktera na B_+. Neka je topologija na B' slaba-$*$ topologija. Preslikavanje $\beta\colon B' \to \widehat{B}_+^c$, $\lambda \mapsto \exp \circ \lambda|_{B_+}$ jest homeomorfizam. Skup karaktera na B_+ koji nisu neprekidni $\widehat{B}_+ \setminus \widehat{B}_+^c$ jest neprazan.*

Dokaz. Neprekidan funkcional $\lambda \in B'$ očito inducira neprekidan karakter $\xi = \exp \circ \lambda|_{B_+}$. Obratno, svaki neprekidan karakter ima taj oblik po prethodnoj lemi pa je uspostavljena bijekcija između B' i $\widehat{B}_+^c$. Uočimo da je svaki $\lambda \in B'$ definiran svojim djelovanjem na generirajućem konusu B_+ jer je $\lambda(x) = \lambda(x^+) - \lambda(x^-)$ pa je slaba-$*$ topologija na B' najmanja topologija koja evaluacije u elementima iz B_+ čini neprekidnima. Topologija na $\widehat{B}_+^c$ relativna je topologija s obzirom na topologiju točkovne konvergencije na $\widehat{B}_+$ te su te dvije topologije jednake.

Pozitivni konus B_+ sadrži neutralan element 0 pa možemo definirati karakter $\xi \coloneqq 1_{\{0\}}$ koji ima prekid u nuli. $\blacksquare$

Napomena 4.33 Iz prethodnog korolara slijedi da je $\beta(C_\alpha)$ skup α-omeđenih neprekidnih karaktera na B_+, u oznaci $(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}$. Uočimo da je svaki α-omeđeni karakter (za lokalno omeđen α) na B_+ koji je neprekidan na linijskim segmentima, neprekidan. Budući da je iz Leme 3.79 $(\widehat{B}_+)^{\alpha,t} \sim C_\alpha \subseteq B'$, za svaki $\xi \in (\widehat{B}_+)^{\alpha,t}$ postoji $\lambda \in B'$ takav da je $\xi = e^\lambda$ na B_+ i ξ je očito neprekidan. Dakle, imamo homeomorfizam prostora:

$$(\widehat{B}_+)^{\alpha,t} = (\widehat{B}_+)^{\alpha,c} \sim C_\alpha \subseteq B'.$$

Za $\alpha \equiv 1$ je $C_1 = \{\lambda \in B^* : e^{\lambda(x)} \leqslant 1, \forall\, x \in B_+\} = -(B'_+)$, a neprekidnost tih funkcionala slijedi posebno i iz Leme 3.72. U tom slučaju je

$$(\widehat{B}_+)^{1,t} = (\widehat{B}_+)^{1,c} \sim C_1 = -(B'_+) \subseteq B^\sim \subseteq B'. \qquad \diamondsuit$$

Teoremi Nussbaumovog tipa uvijek se temelje na generaliziranoj Laplaceovoj transformaciji. Glöckner je izveo inačicu takvog teorema prilagođenu njegovim dosta općenitim uvjetima. Izveo ga je pomoću rezultata iz teorije C^*-algebri. Mi se možemo osloniti na poznati Berg-Maserickov teorem koji je objavljen još 1984. godine u [5], a izveden je iz integralne verzije Krein-Milmanovog teorema. Teorem je dokazan za komutativne polugrupe s involucijom $(S, \circ, *)$ koje imaju neutralni element. $M_+(\widehat{S})$ označava skup nenegativnih Borelovih mjera na $\widehat{S}$; skupu svih karaktera na S.

Teorem 4.34 (Berg i Maserick)

Ako je $\phi \colon S \to \mathbb{C}$ pozitivno definitna i α-omeđena funkcija, tada postoji jedinstvena Radonova mjera $\mu \in M_+(\widehat{S})$ takva da vrijedi

$$\phi(s) = \int_{\widehat{S}} \xi(s) \, \mathrm{d}\mu(\xi), \quad \forall\, s \in S.$$

Nadalje, mjera μ koncentrirana je na kompaktnom skupu $\widehat{S}_\alpha$, α-omeđenih karaktera na S.

Propozicija 4.35 *Neka je B Banachov prostor sa strukturom rešetke i uređajnom jedinicom te α lokalno omeđena apsolutna vrijednost na B_+. Neka je $\phi \colon B_+ \to \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ α-omeđena pozitivno definitna funkcija. Tada je ϕ ultraslabo neprekidna ako i samo ako postoji uređajna jedinica* u *i niz pozitivnih realnih brojeva (r_n) koji konvergira k nuli tako da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(r_n u) = \phi(0)$ u ultraslaboj topologiji* (uvjet$(*)$).

Dokaz. Ako je ϕ neprekidna na B_+ tada je neprekidna i na zraci kroz $u \in \mathrm{Int}\, B_+$, tj. zadovoljava uvjet $(*)$. Pokažimo da vrijedi i drugi smjer.

Neka je u uređajna jedinica i (r_n) niz pozitivnih realnih brojeva koji konvergira k nuli tako da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(r_n u) = \phi(0)$ u ultraslaboj topologiji. Neka je (x_n) niz u B_+ i $x_n \to x$. Tada $\phi(x_n) \to \phi(x)$ ultraslabo ako i samo ako $\phi_A(x_n) \to \phi_A(x)$ za svaki $A \in \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H})$ pri čemu je $\phi_A(x) = \mathrm{tr}(A\phi(x))$. Prema tome, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\mathcal{H} = \mathbb{C}$.

Po Berg-Maserickovom teoremu postoji jedinstveno određena pozitivna Radonova mjera μ na $\widehat{B}_+$ tako da vrijedi $\phi(r_n u) = \int_{(\widehat{B}_+)^\alpha} \xi(r_n u) \, \mathrm{d}\mu(\xi)$. Skup $(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}$ je Borel izmjeriv jer po Napomeni 4.31 vrijedi $(\widehat{B}_+)^{\alpha,c} = \{\xi \in (\widehat{B}_+)^\alpha : \xi(u) > 0\}$. To je otvoren skup pa stoga i Borel izmjeriv. Zapišimo ϕ na sljedeći način:

$$\phi(r_n u) = \int_{(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(r_n u) \, \mathrm{d}\mu(\xi) + \int_{(\widehat{B}_+)^\alpha \setminus (\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(r_n u) \, \mathrm{d}\mu(\xi).$$

Budući da je $(\widehat{B}_+)^\alpha \setminus (\widehat{B}_+)^{\alpha,c} = (\widehat{B}_+)^\alpha \setminus (\widehat{B}_+)^{\alpha,t}$ i $r_n u \in \mathrm{Int}\, B_+$, po Lemi 3.81 drugi integral ima vrijednost nula jer se integrira po karakterima koji nisu neprekidni na linijskim segmentima. Sada imamo:

$$\phi(r_n u) = \int_{(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(r_n u) \, \mathrm{d}\mu(\xi).$$

Ako pustimo $n \to \infty$, slijedi da je

$$\phi(0) = \lim_{n\to\infty} \int_{(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(r_n u) \, \mathrm{d}\mu(\xi).$$

Budući da je $\xi \in \widehat{B}_+^{\alpha,c}$ α-omeđen s obzirom na lokalno omeđen α, ξ je lokalno omeđen karakter pa možemo pretpostaviti da je $\xi(r_n u) \leqslant c$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neki $c > 0$. Zbog neprekidnosti vrijedi $\xi(r_n u) \to \xi(0) = 1$. Po teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi

$$\phi(0) = \mu((\widehat{B}_+)^{\alpha,c}).$$

S druge strane, $\phi(0) = \int_{(\widehat{B}_+)^\alpha} \xi(0)\,\mathrm{d}\mu(\xi) = \mu((\widehat{B}_+)^\alpha)$, iz čega slijedi da je $\mu((\widehat{B}_+)^\alpha \setminus (\widehat{B}_+^{\alpha,c})) = 0$, tj. vrijedi $\phi(x) = \int_{(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(x)\,\mathrm{d}\mu(\xi)$. Za $\|x_n - x\| \to 0$ sada vrijedi

$$\phi(x_n) = \int_{(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(x_n)\,\mathrm{d}\mu(\xi) \to \int_{(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(x)\,\mathrm{d}\mu(\xi) = \phi(x).$$

■

U uvjetima kao iz prethodnih rezultata izvedimo Nussbaumov teorem za vektorske pozitivno definitne funkcije. Uočimo da će reprezentirajuća mjera biti koncentrirana na znatno manjem skupu nego što je to slučaj u apstraktnoj integralnoj reprezentaciji što daje određeni smisao ovom pristupu.

Teorem 4.36 *Neka je B Banachov prostor sa strukturom rešetke i uređajnom jedinicom te α lokalno omeđena apsolutna vrijednost na B_+. Za svaku α-omeđenu pozitivno definitnu funkciju $\phi\colon B_+ \to \mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ koja zadovoljava uvjet $(*)$ postoji jedinstvena Radonova mjera μ na B' s vrijednostima u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ i nosačem u C_α tako da vrijedi:*

$$\phi(x) = \int_{B'} e^{\lambda(x)}\,\mathrm{d}\mu(\lambda), \quad \forall\, x \in B_+.$$

Dokaz. Definirajmo niz funkcija $\phi_A\colon B_+ \to [0,\infty\rangle$ s $\phi_\alpha(x) \coloneqq \mathrm{tr}(A\phi(x))$, $A \in \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H})$. Po Propoziciji 3.43 (ϕ_A) niz je α-omeđenih pozitivno definitnih funkcija pa iz Berg-Maserickovog teorema za svaki $A \in \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H})$ postoji jedinstvena pozitivna Radonova mjera ν_A na $\widehat{B}_+$ takva da vrijedi

$$\phi_A(x) = \int_{(\widehat{B}_+)^\alpha} \xi(x)\,\mathrm{d}\nu_A(\xi), \quad \forall\, x \in B_+.$$

Mjera ν_A ovisi aditivno o A jer je

$$\begin{aligned}\int \widehat{x}\,\mathrm{d}\nu_{A+B} &= \phi_{A+B}(x) = \mathrm{tr}((A+B)\phi(x)) = \mathrm{tr}(A\phi(x)) + \mathrm{tr}(B\phi(x))\\ &= \phi_A(x) + \phi_B(x) = \int \widehat{x}\,\mathrm{d}\nu_A + \int \widehat{x}\,\mathrm{d}\nu_B = \int \widehat{x}\mathrm{d}(\nu_A + \nu_B),\end{aligned}$$

odakle slijedi $\nu_{A+B} = \nu_A + \nu_B$. To pokazuje da je preslikavanje $A \mapsto \nu_A$ homomorfizam monoida, pa postoji jedinstvena mjera ν s vrijednostima u $\mathrm{Herm}^+(\mathcal{H})$ takva da je $\nu(E)(A) = \nu_A(E)$ za svaki $A \in \mathrm{Herm}_1^+(\mathcal{H})$ i $E \in \mathcal{B}(\widehat{B}_+)$ (Napomena 3.7). Mjera ν po definiciji je Radonova. Sada imamo da je $\phi_A(x) = \int \widehat{x}\,\mathrm{d}\nu_A = \left(\int \widehat{x}\,\mathrm{d}\nu\right)(A)$ pri čemu je $\hat{x}$

evaluacija na skupu karaktera u točki x. Otuda je

$$\phi(x) = \int_{(\widehat{B}_+)^\alpha} \xi(x)\,\mathrm{d}\nu(\xi).$$

Kao i u dokazu prethodne propozicije zapišimo funkciju ϕ kao:

$$\phi(x) = \int_{(\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(x)\,\mathrm{d}\nu(\xi) + \int_{(\widehat{B}_+)^\alpha \setminus (\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(x)\,\mathrm{d}\nu(\xi), \quad x \in B_+.$$

Neka je β_α homeomorfizam prostora $(\widehat{B}_+)^{\alpha,c} \sim C_\alpha$ iz Napomene 4.33, tj. $\beta_\alpha \colon C_\alpha \to (\widehat{B}_+)^{\alpha,c}$, $\lambda \mapsto e^\lambda|_{B_+}$ i definirajmo $\mu \coloneqq \beta^{-1}(\nu)$. Tada je μ Radonova mjera na B' (Lema 3.20) s nosačem u C_α odakle slijedi da za svaki $x \in B_+$:

$$\phi(x) = \int_{C_\alpha} e^{\lambda(x)}\,\mathrm{d}\mu(\xi) + \int_{(\widehat{B}_+)^\alpha \setminus (\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(x)\,\mathrm{d}\nu(\xi) = \mathcal{L}(\mu)(x) + \int_{(\widehat{B}_+)^\alpha \setminus (\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(x)\,\mathrm{d}\nu(\xi).$$

Iz prethodne propozicije, ϕ je ultraslabo neprekidna što znači da je funkcija

$$\int_{(\widehat{B}_+)^\alpha \setminus (\widehat{B}_+)^{\alpha,c}} \xi(x)\,\mathrm{d}\nu(\xi) = \phi(x) - \mathcal{L}(\mu)(x)$$

ultraslabo neprekidna, a zato što taj integral iščezava na $\operatorname{Int} B_+$ (Lema 3.81), mora biti nula na cijelom B_+. Iz toga slijedi da je $\phi(x) = \mathcal{L}(\mu)(x)$ za svaki $x \in B_+$. ∎

Bibliografija

[1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Pure and applied mathematics. Academic Press, 1975.

[2] C. D. Aliprantis i K. C. Border. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide.* Springer, 2007.

[3] C. D. Aliprantis i R. Tourky. *Cones and Duality.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2007.

[4] T. Andô. "On fundamental properties of a Banach space with a cone." *Pacific J. Math.* 12.4 (1962), str. 1163–1169.

[5] C. Berg i P. H. Maserick. "Exponentially bounded positive definite functions". *Illinois J. Math.* 28.1 (1984), str. 162–179.

[6] C. Berg, J. P. R. Christensen i P. Ressel. *Harmonic Analysis on Semigroups: Theory of Positive Definite and Related Functions.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1984.

[7] O. Bratteli i P. E. T. Jørgensen. *Positive Semigroups of Operators, and Applications.* Springer Netherlands, 2012.

[8] D. L. Cohn. *Measure Theory: Second Edition.* Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Springer New York, 2013.

[9] R. Coleman. *Calculus on Normed Vector Spaces.* Universitext. Springer, 2012.

[10] J. Dattorro. *Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry.* Meboo Publishing, 2005.

[11] E. Dettweiler. "The Laplace transform of measures on the cone of a vector lattice." *Mathematica Scandinavica* 45.0 (1979), str. 311–333.

[12] J. Diestel i J. J. Uhl. *Vector Measures.* Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1977.

[13] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013.

[14] H. E. Gessesse i V. G. Troitsky. “Invariant Subspaces of Positive Quasinilpotent Operators on Ordered Banach Spaces”. *Positivity* 12.2 (2008), str. 193–208.

[15] H. Glöckner. *Positive Definite Functions on Infinite-dimensional Convex Cones*. Sv. 166. Memoirs of the American Mathematical Society 789. American Mathematical Society, 2003.

[16] J. Hoffmann-Jørgensen i P. Ressel. “On completely monotone functions on $C_+(X)$”. *Mathematica Scandinavica* 40.0 (1977), str. 79–93.

[17] K. Horvatić. *Linearna Algebra I, II i III.* PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Hrvatsko matematičko društvo, 1995.

[18] K.-S. Lau. “Infinite Dimensional Polytopes.” *Mathematica Scandinavica* 32.0 (1973), str. 193–213.

[19] K.-H. Neeb. *Holomorphy and Convexity in Lie Theory.* De Gruyter expositions in mathematics. W. de Gruyter, 2000.

[20] K.-H. Neeb. “Operator-valued positive definite kernels on tubes”. *Monatshefte für Mathematik* 126.2 (1998), str. 125–160.

[21] K.-H. Neeb. “Representations of involutive semigroups”. English. *Semigroup Forum* 48.1 (1994), str. 197–218.

[22] P. Ressel. “Integral representations on convex semigroups.” *Mathematica Scandinavica* 61.1 (1987), str. 93–111.

[23] P. Ressel i W. J. Ricker. “Semigroup representations, positive definite functions and abelian C^*-algebras”. *Proceedings of the AMS* 126.10 (1998), str. 2949–2955.

[24] P. Ressel i W. J. Ricker. “Vector-valued positive definite functions, the Berg-Maserick theorem, and applications”. *Mathematica Scandinavica* 90.2 (2002), str. 289–319.

[25] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Convex Analysis. Princeton University Press, 1997.

[26] W. Rudin. *Functional Analysis.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[27] H. H. Schaefer. *Banach Lattices and Positive Operators.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[28] R. L. Schilling, R. Song i Z. Vondraček. *Bernstein Functions: Theory and Applications.* De Gruyter studies in mathematics. W. de Gruyter, 2010.

[29] B. Simon. *Convexity: An Analytic Viewpoint.* Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2011.

[30] H. Šikić. “Nonlinear perturbations of positive semigroups”. *Semigroup Forum* 48.1 (1994), str. 273–302.

[31] H. Šikić. "Positive definite functions on separable function spaces". *Glasnik Matematički* 31 (1996), str. 151–158.

[32] W. P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1989.

SAŽETAK

Ključne riječi: pozitivno definitna funkcija; integralna reprezentacija; Laplaceova transformacija; reprezentirajuća mjera; Nussbaumov teorem; konveksan konus; karakter; α-omeđenost; apsolutna vrijednost; ultraslaba operatorska topologija; neprekidnost na linijskim segmentima; uređen Banachov prostor; vektorska rešetka.

Glavni problem ovog istraživanja karakterizacija je pozitivno definitnih funkcija pomoću Laplaceove transformacije mjere. Iako su se tim problemom bavili matematičari već početkom 20. stoljeća, rezultati su bili primjenjivi samo u vrlo specijalnim slučajevima. Postupnom generalizacijom počele su se promatrati pozitivno definitne funkcije definirane na polugrupi s involucijom čije vrijednosti pripadaju prostoru $B(\mathcal{H})$; prostoru omeđenih linearnih operatora na kompleksnom prostoru $\mathcal{H}$. U tom slučaju reprezentirajuća mjera ima vrijednosti u pozitivnom konusu hermitskih operatora i definira se kao prirodna generalizacija klasične pozitivne mjere s vrijednostima u konveksnom konusu nenegativnih brojeva kojoj se dopuštaju beskonačne vrijednosti u kompaktifikaciji tog konusa.

Cilj istraživanja bio je izvesti teorem Nussbaumovog tipa u tom općenitom slučaju pri čemu se za domenu pozitivno definitne funkcije promatrao pozitivni konus u Banachovom prostoru koji je vektorska rešetka, ali nije nužno Banachova rešetka. Takvi prostori obuhvaćaju i klasu Soboljevih prostora $W^{1,p}(\Omega)$. Ispitivali su se uvjeti na početni prostor, konveksan konus te samu funkciju koji bi omogućili integralni prikaz pomoću Laplaceove transformacije mjere koja je definirana na dualu početnog prostora. Kao temelj koristio se Berg-Maserickov teorem koji karakterizira α-omeđene pozitivno definitne funkcije pomoću generalizirane Laplaceove transformacije. U okruženju Banachovih prostora sa strukturom rešetke koji imaju uređajnu jedinicu izvedena je integralna reprezentacija takvih funkcija za lokalno omeđene apsolutne vrijednosti i pokazano je da je mjera Radonova i koncentrirana na podskupu topološkog duala.

SUMMARY

Keywords: positive definite function; integral representation; Laplace transform; representing measure; Nussbaum theorem; convex cone; character; α-boundedness; absolute value; ultraweak operator topology; continuity on line segments; ordered Banach space; vector lattice.

The main task of this research is the characterization of positive definite functions using Laplace transform of a measure. Although matematicians dealt with this problem at the beginning of the 20th century, early results were applicable only in very special cases. Gradually, $B(\mathcal{H})$-valued positive definite functions were observed, i.e. functions with values in the space of bounded linear operators on a complex Hilbert space $\mathcal{H}$ defined on a semigroup with involution. In this case representing measure has values in the positive cone of hermitian operators and is defined as a natural generalization of a classic positive measure with values in a convex cone of nonnegative numbers which is allowed infinite values in a compactification of the cone.

The purpose of this research was to establish Nussbaum type theorem in this more general case where domain of the function was a positive cone in a Banach space that is also a vector lattice, but not necessarily a Banach lattice. Those type of spaces also include Sobolev spaces $W^{1,p}(\Omega)$. Conditions on the initial space, convex cone and the very function were examined that enable an integral representation using the Laplace transform of a measure which is defined on the dual of the initial space. The basis was the Berg-Maserick theorem which characterizes α-bounded positive definite functions via generalized Laplace transform. In a setting of lattice-structured Banach spaces with order unit, integral representation of those type of functions was derived where absolute value is a locally bounded function. It was shown that representing measure is Radon and concentrated on a subset of the topological dual.

ŽIVOTOPIS

Diana Rupčić rođena je 22. studenog 1984. godine u Zagrebu. Osnovnu školu i matematičku V. gimnaziju završila je u Zagrebu gdje je 2003. godine upisala Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek. Diplomirala je u srpnju 2008. godine na smjeru financijska i poslovna matematika s diplomskim radom na temu problema optimizacije portfelja, pod vodstvom prof. dr. sc. Hrvoja Šikića.

Akademske godine 2008./2009. upisuje doktorski studij matematike pri Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Od svibnja 2009. do svibnja 2015. godine zaposlena je na Fakultetu prometnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu gdje je u suradničkom zvanju asistenta iz područja prirodnih znanosti, polje matematika, zadužena za izvođenje auditornih vježbi iz matematičkih i statističkih kolegija.

Tijekom 2014. godine sudjeluje na dvama razvojnim projektima Fakulteta prometnih znanosti, kao članica projektnog tima i organizacijskog odbora. Službena je recenzentica znanstvenog časopisa *PROMET-Traffic&Transportation*.

Koautorica je sveučilišnog udžbenika *Matematika 2-odabrana poglavlja za primjenu u prometu* u izdanju Fakulteta prometnih znanosti, 2015. godine.