Baricentričke koordinate 20 centara trokuta

Ćaćić, Željka

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:220389

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Željka Ćaćić

BARICENTRIČKE KOORDINATE 20 CENTARA TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Baricentričke koordinate **2**
1.1 Definicija i svojstva baricentričkih koordinata 2
1.2 Definicija centra trokuta i enciklopedija ETC 5

2 Klasični centri trokuta **8**
2.1 Središte trokutu upisane kružnice: $X(1) = O$ 8
2.2 Težište trokuta: $X(2) = T$ 9
2.3 Središte trokutu opisane kružnice: $X(3) = S$ 11
2.4 Ortocentar: $X(4) = H$ 15

3 Još neki poznati centri trokuta **17**
3.1 Gergonneova točka: $X(7) = G$ 17
3.2 Nagelova točka: $X(8)$ 22
3.3 Lemoineova točka: $X(6)$ 23
3.4 Središte kružnice devet točaka: $X(5) = O_9$ 25

4 Neki izvedeni centri trokuta **28**
4.1 Formula za baricentričke koordinate izvedene točke 28
4.2 Još 12 centara iz enciklopedije ETC 29

Bibliografija **34**

Uvod

Ovaj rad bavi se centrima trokuta, tj. karakterističnim točkama trokuta, od kojih su neki sasvim klasični, neki su relativno poznati, dok su neki prilično nepoznati.

Početak rada, tj. prvo poglavlje, posvećen je definiranju osnovnih pojmova i navođenju svojstava baricentričkih koordinata točaka trokuta, o kojima se govori kroz cijeli ovaj diplomski rad. Sve točke, odosno centri trokuta, birani su iz enciklopedije *ETC* [2], u kojoj su dosad navedene baricentričke koordinate za 10 682 različite točke trokuta. Zanimljiva je činjenica da, uz unutarnje točke trokuta, baricentričke koordinate možemo pridružiti i točkama izvan njega, kao i onima na njegovim stranicama.

Koristeći brojna svojstva trokuta, u radu se prikazuju baricentričke koordinate dvadeset centara trokuta, pri čemu se u drugom poglavlju polazi od četiri klasične karakteristične točke trokuta: središta trokutu opisane i upisane kružnice, težišta i ortocentra trokuta.

Nadalje, u trećem poglavlju se računaju baricentričke koordinate još nekih poznatih centara trokuta, kao što su primjerice Gergonneova točka i središte kružnice devet točaka. U tom dijelu se, pri dokazivanju, primjenjuju poznati Cevain i Van Aubelov teorem uz brojne ilustracije za lakše praćenje.

Posljednji dio diplomskog rada, tj. četvrto poglavlje, posvećen je centrima trokuta koji se mogu jednostavno izraziti pomoću klasičnih karakterističnih točaka trokuta. Sređivanje kompliciranih simboličkih izraza provodi se korištenjem računala, tj. programskog paketa *Mathematica* [1], a njihove se koordinate zapisuju pomoću duljina stranica a, b, c.

Sve slike u ovom diplomskom radu izrađene su programskim paketom *GeoGebra* [4].

Poglavlje 1

Baricentričke koordinate

1.1 Definicija i svojstva baricentričkih koordinata

Neka je u ravnini fiksiran trokut ABC. Baricentričke koordinate određuju položaj proizvoljne točke P u toj ravnini, ali relativno, obzirom na spomenuti trokut. Pretpostavimo da je u toj ravnini odabran koordinatni sustav s ishodištem O. Radijus vektor bilo koje točke P ćemo kratko pisati $\overrightarrow{r_P}$, tj. $\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{OP}$.

Definicija 1.1.1. *Kažemo da točka P u ravnini trokuta ABC ima* baricentričke koordinate $u : v : w$ *ako vrijedi $u, v, w \in \mathbb{R}$, $u + v + w \neq 0$ te*

$$\overrightarrow{r_P} = \frac{u\overrightarrow{r_A} + v\overrightarrow{r_B} + w\overrightarrow{r_C}}{u + v + w}. \tag{1.1}$$

Primijetimo da je posljednja vektorska jednakost ekvivalentna s dvije skalarne jednakosti dobivene izjednačavanjem koeficijenata vektora uz članove standardne baze:

$$x_P = \frac{ux_A + vx_B + wx_C}{u + v + w},$$

$$y_P = \frac{uy_A + vy_B + wy_C}{u + v + w},$$

pri čemu (x_P, y_P) označavaju Kartezijeve koordinate točke P obzirom na odabrani koordinatni sustav.

Primijetimo i da baricentričke koordinate nisu sasvim jedinstvene: ukoliko su $u : v : w$ baricentričke koordinate točke P, tada su to i $\lambda u : \lambda v : \lambda w$ za bilo koji $\lambda \neq 0$. Premda bismo mogli normalizirati tako da zahtijevamo $u + v + w = 1$, mi to ne činimo kako bismo zadržali veću fleksibilnost.

Teorem 1.1.2. *Baricentričke koordinate uvijek postoje, ne ovise o izboru koordinatnog sustava i jedinstvene su do na izbor skalarnog višekratnika.*

Dokaz. Definicijsku jednakost (1.1) možemo ekvivalentno zapisati

$$\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_C} = \frac{u}{u+v+w}(\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_C}) + \frac{v}{u+v+w}(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_C}),$$

odnosno

$$\overrightarrow{CP} = \frac{u}{u+v+w}\overrightarrow{CA} + \frac{v}{u+v+w}\overrightarrow{CB}.$$

Primijetimo da koordinatni sustav više ne igra nikakvu ulogu u posljednjoj jednakosti.

Vektori $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ su linearno nezavisni pa se svaki ravninski vektor može jednoznačno zapisati kao njihova linearna kombinacija. Posebno postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\overrightarrow{CP} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}.$$

Uspoređivanjem koeficijenata vidimo da su $u : v : w$ baricentričke koordinate točke P ako i samo ako vrijedi

$$\frac{u}{u+v+w} = \alpha, \quad \frac{v}{u+v+w} = \beta,$$

tj. ekvivalentno

$$\begin{cases} (\alpha - 1)u + \alpha v + \alpha w = 0, \\ \beta u + (\beta - 1)v + \beta w = 0. \end{cases}$$

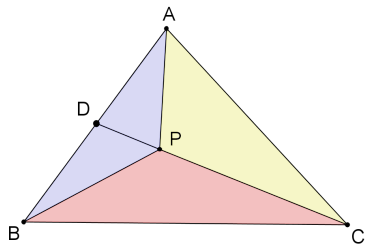
Direktnim uvrštavanjem vidimo da je $(u, v, w) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda(1 - \alpha - \beta))$ rješenje tog sustava linearnih jednadžbi za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Kako je tada $u + v + w = \lambda$, vidimo da za svaki $\lambda \neq 0$ dobijemo baricentričke koordinate točke P, čime smo pokazali egzistenciju. Primijetimo da matrica prethodnog sustava linearnih jednadžbi ima rang 2:

$$\begin{bmatrix} \alpha - 1 & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta - 1 & \beta \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je riječ o homogenom sustavu, zaključujemo da su $(u, v, w) = \lambda(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ zapravo sva rješenja. Odavde slijedi željena jedinstvenost baricentričkih koordinata do na skalarni višekratnik λ, tj.

$$u : v : w = \alpha : \beta : 1 - \alpha - \beta. \qquad \square$$

Ubuduće ćemo sa $\mathbf{P}$ označavati funkciju površine likova u ravnini.



Slika 1.1: Trokut iz dokaza teorema 1.1.3.

Teorem 1.1.3. *Ukoliko se točka P nalazi unutar trokuta ABC, tada su njene baricentričke koordinate $u : v : w$ dane sa $\mathbf{P}(PBC) : \mathbf{P}(PCA) : \mathbf{P}(PAB)$.*

Dokaz. Primijetimo da je $\mathbf{P}(PBC) + \mathbf{P}(PCA) + \mathbf{P}(PAB) = \mathbf{P}(ABC)$. Iz dokaza prethodnog teorema vidimo da je dovoljno provjeriti

$$\overrightarrow{CP} = \frac{\mathbf{P}(PBC)}{\mathbf{P}(ABC)}\overrightarrow{CA} + \frac{\mathbf{P}(PCA)}{\mathbf{P}(ABC)}\overrightarrow{CB} \tag{1.2}$$

Neka pravac CP siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Kako trokuti PCA i DCA imaju zajedničku visinu iz vrha A, njihove površine se odnose kao duljine baza, tj.

$$\frac{\mathbf{P}(PCA)}{\mathbf{P}(DCA)} = \frac{|CP|}{|CD|}, \tag{1.3}$$

a sasvim analogno dobivamo

$$\frac{\mathbf{P}(PBC)}{\mathbf{P}(DBC)} = \frac{|CP|}{|CD|}. \tag{1.4}$$

Nadalje, trokuti ADC i ABC imaju zajedničku visinu iz vrha C, odakle slijedi

$$\frac{\mathbf{P}(ADC)}{\mathbf{P}(ABC)} = \frac{|AD|}{|AB|} \tag{1.5}$$

te slično

$$\frac{\mathbf{P}(DBC)}{\mathbf{P}(ABC)} = \frac{|BD|}{|AB|}. \tag{1.6}$$

Krenimo od vektora $\overrightarrow{CP}$ i raspišimo ga u bazi $\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CP} &= \frac{|CP|}{|CD|}\overrightarrow{CD} = \frac{|CP|}{|CD|}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) \\
&= \frac{|CP|}{|CD|}\overrightarrow{CA} + \frac{|CP|}{|CD|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{|CP|}{|CD|}\overrightarrow{CA} + \frac{|CP|}{|CD|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \\
&= \frac{|CP|}{|CD|}\Big(1 - \frac{|AD|}{|AB|}\Big)\overrightarrow{CA} + \frac{|CP|}{|CD|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|}\overrightarrow{CB} \\
&= \frac{|CP|}{|CD|} \cdot \frac{|BD|}{|AB|}\overrightarrow{CA} + \frac{|CP|}{|CD|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|}\overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

Ako redom iskoristimo (1.4), (1.6), (1.3), (1.5), dobit ćemo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CP} &= \frac{\mathbf{P}(PBC)}{\mathbf{P}(DBC)} \cdot \frac{\mathbf{P}(DBC)}{\mathbf{P}(ABC)}\overrightarrow{CA} + \frac{\mathbf{P}(PCA)}{\mathbf{P}(ADC)} \cdot \frac{\mathbf{P}(ADC)}{\mathbf{P}(ABC)}\overrightarrow{CB} \\
&= \frac{\mathbf{P}(PBC)}{\mathbf{P}(ABC)}\overrightarrow{CA} + \frac{\mathbf{P}(PCA)}{\mathbf{P}(ABC)}\overrightarrow{CB},
\end{aligned}$$

što je upravo željena jednakost (1.2). □

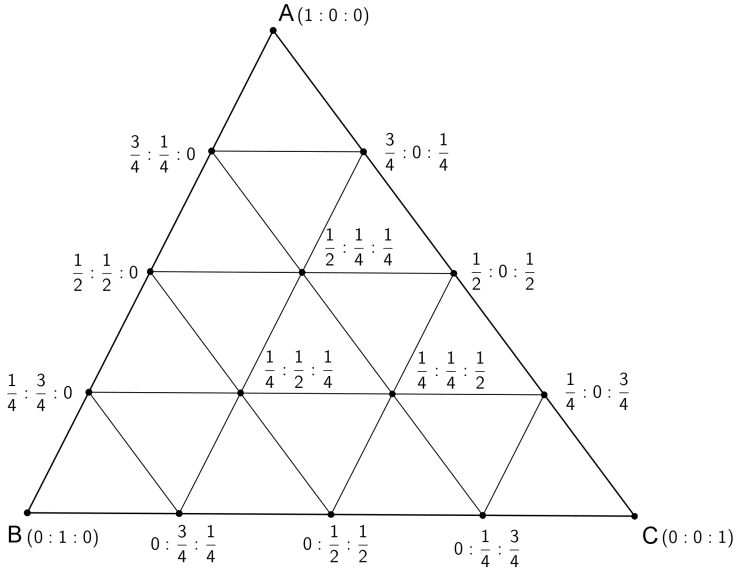
Napomenimo kako formula iz teorema 1.1.3 ostaje vrijediti i za točke P izvan trokuta ABC ako navedene trokute shvatimo kao orijentirane tako da im površine mogu biti i negativne. Ista napomena vrijedi i za točke na samom rubu trokuta ABC, kada neki od trokuta PBC, PCA, PAB postaju degenerirani pa im je površina jednaka 0.

Primjeri baricentričkih koordinata uz normalizaciju $u+v+w=1$ prikazani su na slici 1.2. Na toj slici je svaka od stranica podijeljena na četiri jednaka dijela te su svi ucrtani pravci paralelni s nekom od stranica.

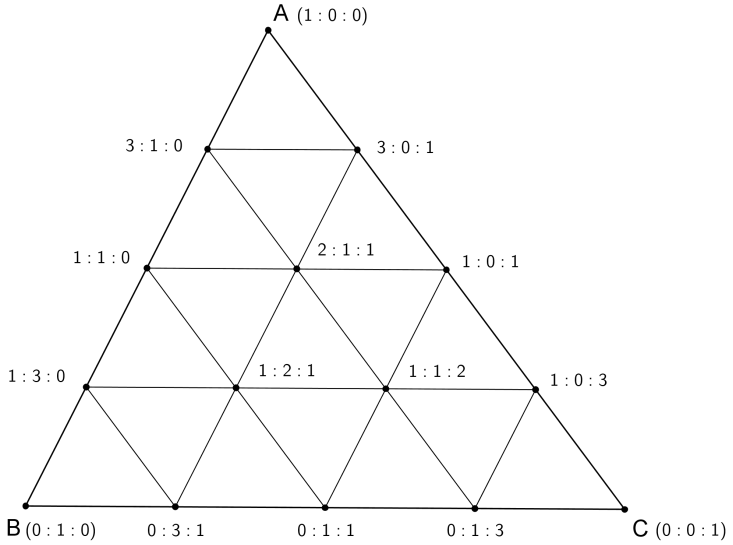
Primjeri baricentričkih koordinata bez normalizacije mogu se naći na slici 1.3. Naprosto smo baricentričke koordinate s prethodne slike pomnožili njihovim zajedničkim nazivnikom kako bismo dobili cjelobrojne vrijednosti, što je mnogo preglednije.

1.2 Definicija centra trokuta i enciklopedija ETC

U nastavku rada spominjat ćemo razne istaknute točke trokuta za koje ćemo računati baricentričke koordinate. Napomenimo da postoje i alternativne koordinate, tzv. *tri-*



Slika 1.2: Primjeri baricentričkih koordinata uz normalizaciju.



Slika 1.3: Primjeri baricentričkih koordinata bez normalizacije.

linearne koordinate $x : y : z$, koje se pretvaraju u baricentričke $u : v : w$ po formuli

$$u : v : w = ax : by : cz,$$

tj.

$$x : y : z = \frac{u}{a} : \frac{v}{b} : \frac{w}{c}.$$

Može se pokazati da se x, y, z zapravo odnose kao orijentirane udaljenosti točke od stranica trokuta, no nama to neće biti važno jer ćemo uvijek preferirati baricentričke koordinate.

Prirodno se postavlja pitanje koje svojstvo zahtijevati da bi točka bila na neki način istaknuta, tj. zanimljiva. U vezi toga definira se *centar trokuta* ili *karakteristična točka trokuta* kao točka čije su baricentričke koordinate dane s

$$f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b),$$

pri čemu su a, b, c duljine stranica trokuta, a $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je funkcija koja zadovoljava:

- $f(a, b, c) = f(a, c, b)$,
- $f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = f(a, b, c)$,

za neki $n \in \mathbb{R}$ i za svake $a, b, c > 0$ koji čine duljine stranica nekog trokuta.

Enciklopedija ETC [2] sistematizira dosad poznate centre trokuta i daje formule za njihove trilinearne, odnosno baricentričke koordinate te navodi (najčešće bez dokaza, ali s referencama) njihova brojna svojstva.

U vrijeme pisanja ovog rada ona sadrži 10682 centra, među kojima većina nema ime, već samo redni broj. Korisnost enciklopedije leži u činjenici da ona čak omogućava i numeričko pretraživanje svojih točaka. Ukoliko želimo identificirati točku trokuta s nekim važnim svojstvom, dovoljno je na desetak decimala izračunati njene trilinearne koordinate za specijalni trokut s duljinama stranica 6, 9 i 13.

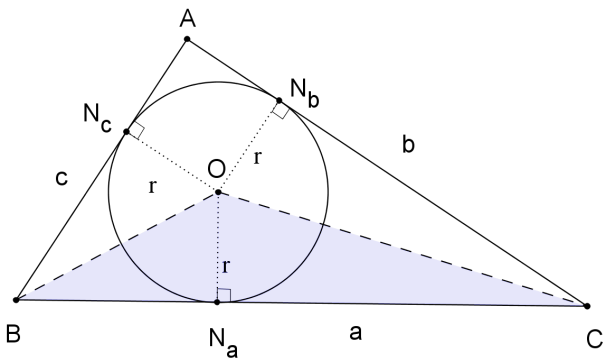
Poglavlje 2

Klasični centri trokuta

U nastavku računamo baricentričke koordinate za 4 klasične karakteristične točke trokuta:
$X(1)$ središte upisane kružnice $a : b : c$,
$X(2)$ težište $1 : 1 : 1$,
$X(3)$ središte opisane kružnice $\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma$,
$X(4)$ ortocentar $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma$.

2.1 Središte trokutu upisane kružnice: $X(1) = O$

Neka je u ravnini dan trokut ABC. Označimo s O središte njemu upisane kružnice, a s r njen radijus. Neka su N_a, N_b i N_c nožišta okomica iz središta kružnice redom na stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, čije duljine označavamo a, b i c (pogledati sliku 2.1).



Slika 2.1: Središte trokutu upisane kružnice.

Promotrimo trokut BCO. Primjenjujući formulu za površinu trokuta dobivamo da je ona jednaka

$$\mathbf{P}(BOC) = \frac{1}{2}|BC| \cdot |ON_a| = \frac{1}{2}ar.$$

Na analogan su način površine preostalih trokuta AOC i AOB jednake:

$$\mathbf{P}(AOC) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |ON_b| = \frac{1}{2}br$$

i

$$\mathbf{P}(AOB) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |ON_c| = \frac{1}{2}cr.$$

Nadalje primjenjujući teorem 1.1.3 slijedi da su baricentrične koordinate središta trokutu upisane kružnice dane s:

$$\frac{1}{2}ar : \frac{1}{2}br : \frac{1}{2}cr = a : b : c.$$

2.2 Težište trokuta: $X(2) = T$

Definicija 2.2.1. *Neka je u ravnini dan trokut ABC te neka su D, E i F redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta. Spojnicu nekog vrha trokuta s polovištem nasuprotne stranice nazivamo* težišnicom *tog trokuta. Dakle, postoje tri težišnice trokuta ABC koje se sijeku u jednoj točki T, koju nazivamo* težištem *trokuta.*

Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.2.2. *Težište T dijeli svaku težišnicu trokuta u omjeru $2 : 1$ računajući od vrha, tj. vrijedi*

$$|AT| : |TD| = |BT| : |TE| = |CT| : |TF| = 2 : 1.$$

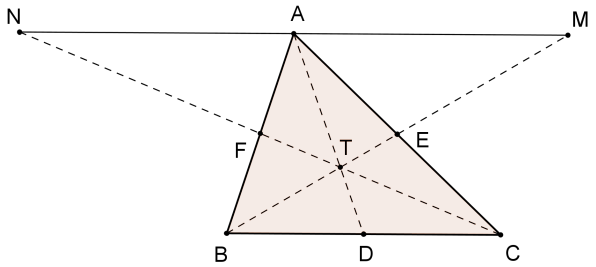
Dokaz. Vrhom A konstruiramo paralelu sa stranicom $\overline{BC}$ (kao na slici 2.2). Pravci na kojima leže težišnice $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ sijeku tu paralelu u točkama M i N.

Trokuti NAF i CBF kao i trokuti AME i CBE su slični pa vrijedi:

$$\frac{|NA|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|BF|} = 1$$

i

$$\frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|CE|} = 1.$$



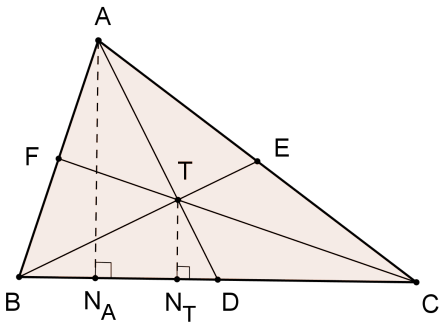
Slika 2.2: Težište trokuta.

Iz spomenutih sličnosti trokuta i dviju gornjih jednakosti slijedi

$$\frac{|AT|}{|TD|} = \frac{|MN|}{|BC|} = \frac{|MA|}{|BC|} + \frac{|AN|}{|BC|} = 1 + 1 = 2.$$

Analogno se pokazuje za preostale dvije težišnice. □

Nadalje, nožište okomice iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ označimo s N_A, a nožište okomice iz težišta T na stranicu $\overline{BC}$ označimo s N_T (kao na slici 2.3).



Slika 2.3: Težište trokuta i nožišta okomica.

Trokuti AN_AD i TN_TD su slični po K-K poučku o sličnosti trokuta (imaju jedan zajednički kut $\sphericalangle N_ADA = \sphericalangle N_TDT$, te su jednaki kutovi $\sphericalangle N_AAD$ i $\sphericalangle N_TTD$ uz transverzalu $\overline{AD}$ dvaju paralelnih pravaca AN_A i TN_T), pa primjenom teorema 2.2.2 vrijedi

$$\frac{|TN_T|}{|AN_A|} = \frac{|TD|}{|AD|} = \frac{1}{3}.$$

Tada je površina trokuta TBC jednaka:

$$\mathbf{P}(TBC) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |TN_T| = \frac{1}{2}a \cdot \frac{|AN_A|}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot |AN_A| = \frac{P}{3},$$

pri čemu P označava površinu cijelog trokuta ABC.

Analogno se pokazuje $\mathbf{P}(TCA) = \frac{P}{3}$ i $\mathbf{P}(TAB) = \frac{P}{3}$. Prema tome, primjenjujući teorem 1.1.3 zaključujemo da su baricentričke koordinate težišta:

$$\frac{P}{3} : \frac{P}{3} : \frac{P}{3} = 1 : 1 : 1.$$

2.3 Središte trokutu opisane kružnice: $X(3) = S$

Definicija 2.3.1. *Kružnicu koja prolazi vrhovima trokuta ABC zovemo opisanom kružnicom trokuta.*

Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC i α, β, γ redom veličine kutova nasuprot stranicama, a R polumjer trokutu opisane kružnice. Vrijedi sljedeći poučak o sinusima.

Teorem 2.3.2. *U svakom se trokutu duljine stranica odnose kao sinusi tim stranicama nasuprotnih kutova. Taj omjer jednak je promjeru kružnice opisane trokutu. Dakle, vrijedi*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Dokaz. Neka je promatrani trokut šiljastokutan (pogledati sliku 2.4) te neka je D nožište visine iz vrha C na suprotnu stranicu trokuta.

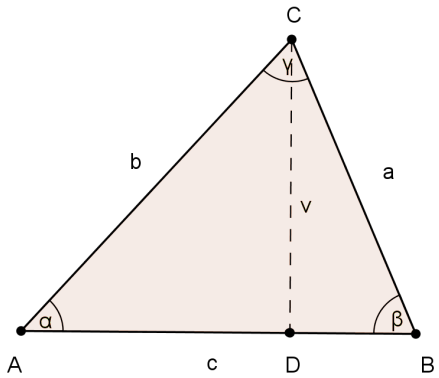
Uočimo dva pravokutna trokuta ADC i BDC koji imaju zajedničku stranicu $\overline{CD}$, odnosno visinu početnog trokuta ABC. Iz pravokutnog trokuta CDA izrazimo sinus kuta α:

$$\sin\alpha = \frac{v}{b}. \tag{2.1}$$

Iz pravokutnog trokuta CDB izrazimo sinus kuta β:

$$\sin\beta = \frac{v}{a} \tag{2.2}$$

Nadalje, izrazimo duljinu visine v iz izraza (2.1) i (2.2):



Slika 2.4: Šiljastokutan trokut ABC.

$$v = \sin\alpha \cdot b, \tag{2.3}$$

$$v = \sin\beta \cdot a. \tag{2.4}$$

Izjednačavanjem izraza (2.3) i (2.4) za visinu trokuta ABC slijedi:

$$\sin\alpha \cdot b = a \cdot \sin\beta. \tag{2.5}$$

Obzirom da je $0° < \alpha < 180°$, vrijedi $\sin\alpha > 0$ pa dijeljenjem izraza (2.5) sa $\sin\alpha$ slijedi:

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}, \tag{2.6}$$

što je ekvivalentno s

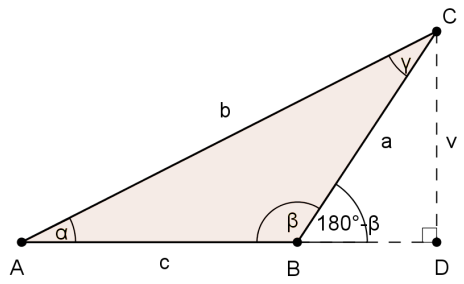
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Na analogan način, promatrajući pravokutne trokute određene preostalim visinama u trokutu ABC dobivamo

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

U slučaju da je trokut ABC tupokutan s tupin kutom $\sphericalangle ABC$, tada je prema slici 2.5 visina v izražena iz pravokutnog trokuta CDB jednaka

$$v = a \cdot \sin(180° - \beta),$$



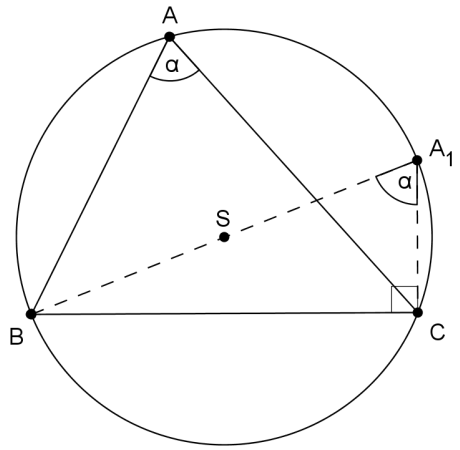
Slika 2.5: Tupokutan trokut ABC.

no, kako je $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$, opet dobivamo (2.6).

Promatrajući sljedeću sliku 2.6 vidimo da je $|BA_1| = 2R$ i kut $BA_1C = BAC = \alpha$ (obodni kutovi nad istim lukom), odakle odmah slijedi $|BC| = |BA_1|\sin\alpha$, tj. $a = 2R\sin\alpha$, čime smo dokazali početnu tvrdnju

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

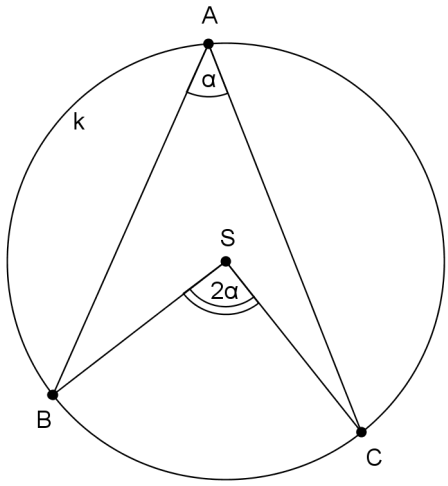
□



Slika 2.6: Obodni kutovi nad istim lukom.

Na kraju prethodnog dokaza koristili smo neke tvrdnje o obodnom kutu koje ćemo trebati i u nastavku.

Definicija 2.3.3. *Neka su dane tri različite točke A, B, C na kružnici k. S te tri točke je definiran konveksni kut $\sphericalangle BAC$. Sa $\widehat{BC}$ označimo onaj luk kružnice k s krajnjim točkama B i C koji leži unutar kuta $\sphericalangle BAC$ (pogledati sliku 2.7). Kut $\sphericalangle BAC$ zovemo obodnim kutom nad lukom $\widehat{BC}$. Kut $\sphericalangle BSC$ sa vrhom u središtu S kružnice k zovemo središnjim kutom nad lukom $\widehat{BC}$.*



Slika 2.7: Središnji i obodni kut.

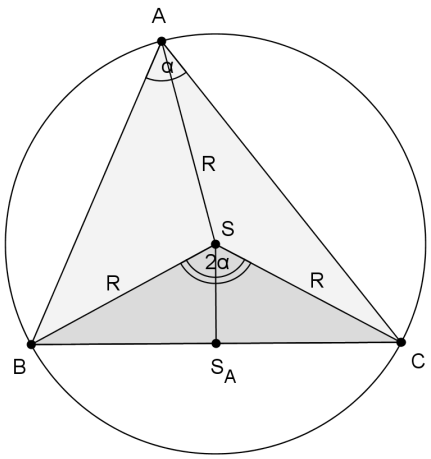
Teorem 2.3.4. *Središnji kut $\sphericalangle BSC$ je dvostruko veći od obodnog kuta $\sphericalangle BAC$ nad istim lukom $\widehat{BC}$ kružnice k, tj.*

$$\sphericalangle BSC = 2 \cdot \sphericalangle BAC.$$

Neka je u ravnini dan trokut ABC kojemu je opisana kružnica polumjera R sa središtem S (pogledati sliku 2.8). Tada je $|AS| = |BS| = |CS| = R$.

Kako je $|BS| = |CS| = R$, trokut BSC je jednakokračan te je prema teoremu 2.3.4 središnji kut $\sphericalangle BSC = 2\alpha$. Neka je S_A nožište okomice iz vrha S trokuta BSC. Dužina $\overline{SS_A}$ je također i simetrala kuta $\sphericalangle BSC$ kao i simetrala stranice $\overline{BC}$ trokuta BSC te dijeli trokut BSC na dva pravokutna trokuta. Vrijedi $|SS_A| = R\cos\alpha$, pa je površina trokuta BSC jednaka $\mathbf{P}(BSC) = \frac{1}{2}a \cdot |SS_A| = \frac{1}{2}a \cdot R\cos\alpha$. Primjenjujući teorem 2.3.2, duljinu a možemo zapisati kao $a = 2R\sin\alpha$ pa dobivamo

$$\mathbf{P}(BSC) = \frac{1}{2}a \cdot R\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\alpha \cdot R\cos\alpha = \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha.$$



Slika 2.8: Trokut i njemu opisana kružnica.

Nadalje, primjenjujući teorem 1.1.3 slijedi da su baricentričke koordinate središta trokutu opisane kružnice dane s:

$$\frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha : \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta : \frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

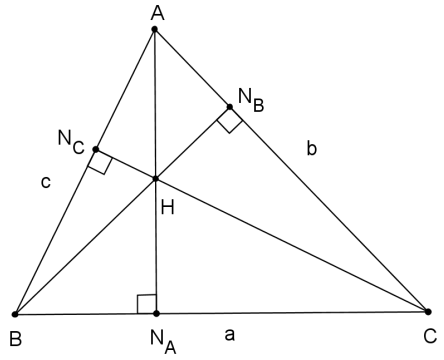
U gornjem izvodu smo implicitno pretpostavljali da je trokut ABC šiljastokutan. Ako je trokut pravokutan ili tupokutan, iste formule ostaju vrijediti. Npr. ako je $\alpha > 90°$, tada bismo površinu trokuta BCS trebali uzeti s negativnim predznakom, ali je takav i izraz $\sin 2\alpha$.

2.4 Ortocentar: $X(4) = H$

Definicija 2.4.1. *Okomice spuštene iz vrhova trokuta ABC na suprotne stranice zovemo* visinama *trokuta ABC. Označimo nožište visine iz vrha A s N_a, iz vrha B s N_b i iz vrha C s N_c. Sjecišta visina $\overline{AN_a}$, $\overline{BN_b}$ i $\overline{CN_c}$ zovemo* ortocentrom *trokuta i uobičajeno označavamo slovom H.*

Izrazimo duljinu dužine $\overline{HN_A}$ promatrajući prvo trokut HBN_A, a nakon toga ABN_A na slici 2.9. Vrijedi

$$|HN_A| = |BN_A| \operatorname{tg} 90° - \gamma = c \cdot \cos\beta \operatorname{ctg}\gamma = 2R \sin\gamma \cos\beta \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = 2R \cos\beta \cos\gamma. \tag{2.7}$$



Slika 2.9: Ortocentar trokuta.

Tada je površina trokuta HBC jednaka

$$\mathbf{P}(HBC) = \frac{1}{2}a \cdot 2R\cos\beta\cos\gamma = 2R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma. \tag{2.8}$$

Kako $\sin\alpha$ možemo zapisati kao $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$ slijedi da je površina trokuta HBC jednaka $\mathbf{P}(HBC) = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Na analogan način se dobivaju površine za preostala dva trokuta HCA i HAB: $\mathbf{P}(HCA) = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\beta$, te $\mathbf{P}(HAB) = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma$. Primjenjujući teorem 1.1.3 slijedi da su baricentričke koordinate ortocentra trokuta dane sa

$$\mathrm{tg}\,\alpha : \mathrm{tg}\,\beta : \mathrm{tg}\,\gamma.$$

Poglavlje 3

Još neki poznati centri trokuta

3.1 Gergonneova točka: $X(7) = G$

Sljedeći teorem će nam trebati više puta u ostatku rada. Njegov dokaz može se naći u [3].

Teorem 3.1.1. *[Cevain teorem] Neka točke A_1, B_1, C_1 leže na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ danog trokuta ABC. Nužan i dovoljan uvjet da se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki glasi*

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1. \tag{3.1}$$

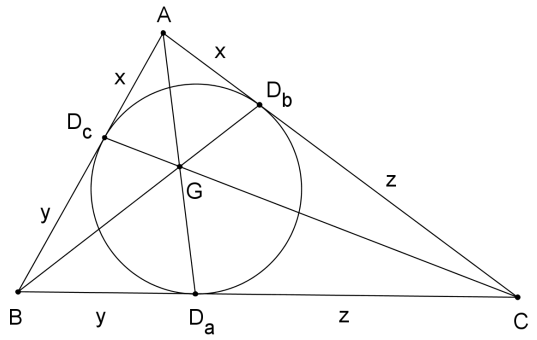
Teorem 3.1.2. *Pravci koji spajaju vrhove A, B, C danog trokuta ABC s diralištima D_a, D_b, D_c upisane kružnice sa suprotnim stranicama, sijeku se u točki koju zovemo* Gergonneovom točkom *(slika 3.1).*

Dokaz. Primjenjujući svojstvo tangente konstruirane na kružnicu iz neke točke izvan kružnice, vrijedi $|AD_c| = |AD_b| =: x$, $|BD_c| = |BD_a| =: y$, $|CD_a| = |CD_b| =: z$. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$\begin{cases} x + y = c, \\ y + z = a, \\ z + x = b. \end{cases}$$

Rješavajući prethodni sustav slijedi da je

$$x = \frac{b + c - a}{2} = s - a, \quad y = \frac{c + a - b}{2} = s - b, \quad z = \frac{a + b - c}{2} = s - c,$$



Slika 3.1: Gergonneova točka.

gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta. Nadalje, primjenjujući Cevain teorem 3.1.1 slijedi

$$\frac{|AD_c|}{|D_cB|} \cdot \frac{|BD_a|}{|D_aC|} \cdot \frac{|CD_b|}{|D_bA|} = \frac{|AD_c|}{|D_cB|} \cdot \frac{|D_cB|}{|D_aC|} \cdot \frac{|D_aC|}{|AD_c|} = \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} = 1. \quad (3.2)$$

Dakle, spomenuti pravci se doista sijeku u jednoj točki. □

Teorem 3.1.3. *[Van Aubelov teorem] Neka je dan trokut ABC i bilo koja trojka Cevainih pravaca AA_1, BB_1, CC_1 sa sjecištem R (kao na slici 3.2). Za točke A, R, A_1 vrijedi*

$$\frac{|AR|}{|A_1R|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|} + \frac{|AC_1|}{|C_1B|}. \quad (3.3)$$

Dokaz. Vrhom A konstruiramo paralelu sa stranicom $\overline{BC}$ (kao na slici 3.3). Pravci BB_1 i CC_1 sijeku tu paralelu u točkama M i N.

Primijetimo da su sljedeći trokuti slični po K-K poučku o sličnosti trokuta

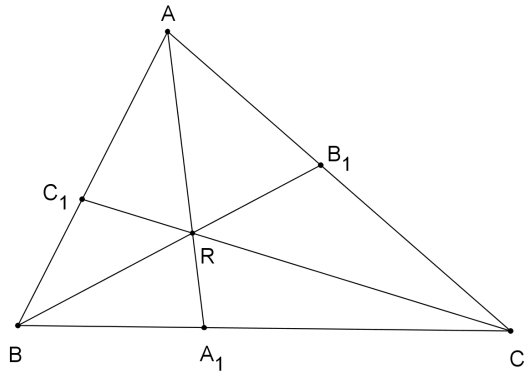
$$\triangle BCR \sim \triangle NMR,$$

$$\triangle BA_1R \sim \triangle NAR,$$

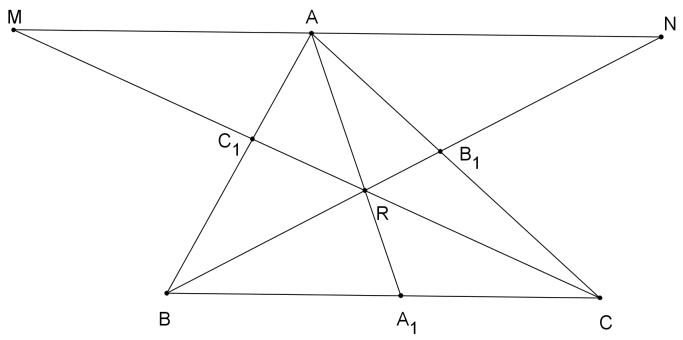
$$\triangle CA_1R \sim \triangle MAR.$$

Iz navedenih sličnosti slijedi

$$\frac{|AR|}{|A_1R|} = \frac{|AN|}{|BA_1|} = \frac{|MA|}{|A_1C|}.$$



Slika 3.2: Van Aubelov teorem.



Slika 3.3: Van Aubelov teorem - dokaz.

Nadalje, slijedi da je

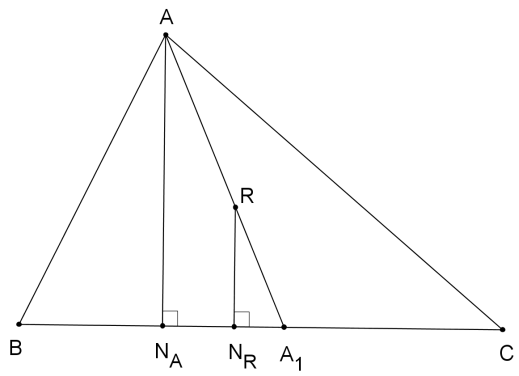
$$\frac{|AR|}{|A_1R|} = \frac{|MN|}{|BC|} = \frac{|MA|}{|BC|} + \frac{|AN|}{|BC|}, \tag{3.4}$$

a obzirom da su trokuti $\triangle AMC_1$ i $\triangle BCC_1$ slični, razlomak $\frac{|MA|}{|BC|}$ možemo zapisati kao $\frac{|MA|}{|BC|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$. Također, iz sličnosti trokuta $\triangle NAB_1$ i $\triangle BCB_1$ razlomak $\frac{|AN|}{|BC|}$ zapisujemo kao $\frac{|AN|}{|BC|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|}$. Uvrštavajući dobivene izraze u jednakost 3.4, dobivamo (3.3), što smo i htjeli dokazati. $\square$

Neka su $u : v : w$ baricentričke koordinate točke R. Vrijedi:

$$\frac{|AR|}{|RA_1|} = \frac{|AA_1| - |RA_1|}{|RA_1|} = \frac{|AA_1|}{|RA_1|} - 1. \tag{3.5}$$

Označimo nožište okomice iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ s N_A, a nožište okomice iz točke R na stranicu $\overline{BC}$ s N_R (kao na slici 3.4).



Slika 3.4: Sličnost trokuta.

Uočimo da je $\triangle AN_AA_1 \sim \triangle RN_RA_1$ po K-K poučku o sličnosti trokuta pa vrijedi $\frac{|AA_1|}{|RA_1|} = \frac{|AN_A|}{|RN_R|}$, čijim uvrštavanjem dobivamo

$$\frac{|AA_1|}{|RA_1|} - 1 = \frac{|AN_A|}{|RN_R|} - 1. \tag{3.6}$$

Dužina $\overline{AN_A}$ je visina trokuta $\triangle ABC$, a dužina $\overline{RN_R}$ visina trokuta $\triangle RBC$. Obzirom da se visine trokuta sa zajedničkom osnovicom odnose kao njihove površine, slijedi

$$\frac{|AN_A|}{|RN_R|} - 1 = \frac{\mathbf{P}(\triangle ABC)}{\mathbf{P}(\triangle RBC)} - 1 = \frac{1}{u} - 1 \tag{3.7}$$

ako je $u + v + w = 1$. Naime, primjenjujući teorem 1.1.3 baricentričke koordinate točke R su dane s

$$u : v : w = \mathbf{P}(RBC) : \mathbf{P}(RCA) : \mathbf{P}(RAB). \tag{3.8}$$

Prema tome vrijedi $\frac{u}{u+v+w} = \frac{\mathbf{P}(RBC)}{\mathbf{P}(ABC)}$, odnosno $u = \frac{\mathbf{P}(RBC)}{\mathbf{P}(ABC)}$ ako je $u + v + w = 1$. Analogno je $v = \frac{\mathbf{P}(RCA)}{\mathbf{P}(ABC)}$ i $w = \frac{\mathbf{P}(RAB)}{\mathbf{P}(ABC)}$ ako je $u + v + w = 1$.

U slučaju da je točka R baš Gergonneova točka, tada bi njene baricentričke koordinate bile sljedeće:

$$\frac{1}{u} - 1 = \frac{|AR|}{|RA_1|} = \frac{s-a}{s-b} + \frac{s-a}{s-c} = \frac{x}{y} + \frac{x}{z}, \tag{3.9}$$

što smo dobili primjenjujući Van Aubelov teorem 3.1.3. Nadalje, vrijedi

$$\frac{1}{u} = 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} = x\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big). \tag{3.10}$$

Tada je

$$u = \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big)^{-1}.$$

Na analogan način je

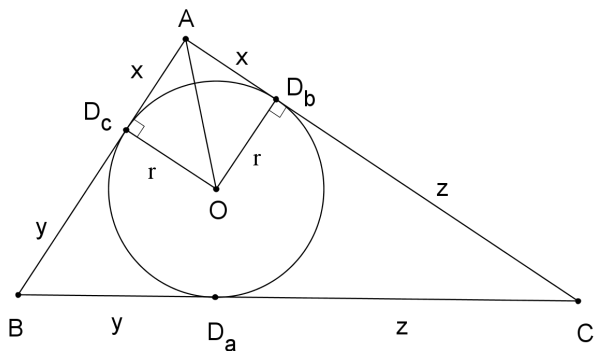
$$v = \frac{1}{y}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big)^{-1},$$

$$w = \frac{1}{z}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big)^{-1}.$$

Prema tome, baricentričke koordinate Gergoneove točke su dane s

$$u : v : w = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = \frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}.$$

Promotrimo trokut $\triangle AD_cO$ na slici 3.5.



Slika 3.5: Sukladnost trokuta.

Već smo ranije zaključili da je $|AD_c| = |AD_b|$ i označili s x. Kako su D_c i D_b dirališta stranica trokuta s upisanom kružnicom, pri čemu je r polumjer trokutu upisane kružnice, a O njeno središte, vrijedi $|D_cO| = |D_bO| = r$ i $\sphericalangle AD_cO = \sphericalangle AD_bO = 90°$. Po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta, zaključujemo da je $\triangle AD_cO \cong \triangle AD_bO$ iz čega slijedi $\sphericalangle D_cAO = \sphericalangle D_bAO = \frac{\alpha}{2}$. Primjenjujući trigonometriju pravokutnog trokuta $\triangle AD_cO$ dobivamo da je $x = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ pa je onda $\frac{1}{x} = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Na analogan način dobivamo da je $\frac{1}{y} = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ te $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

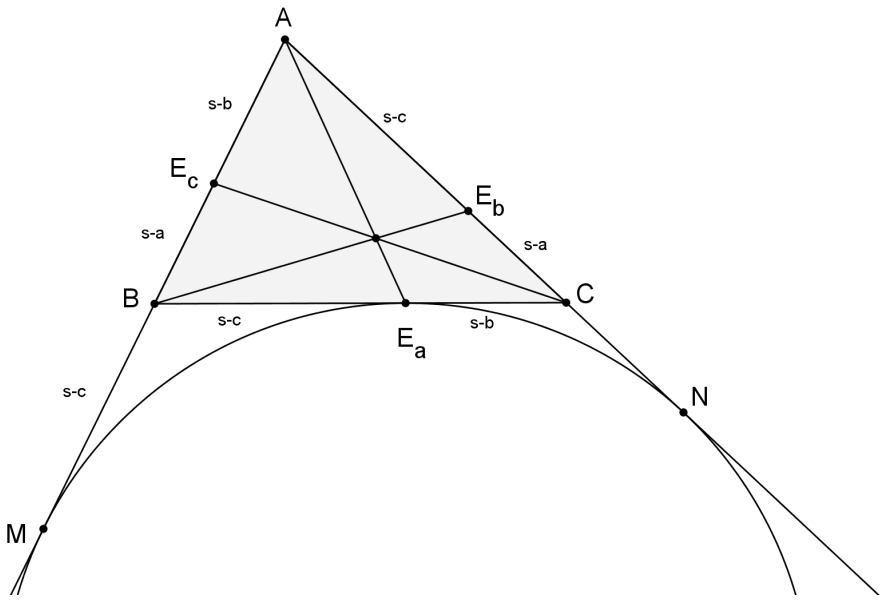
Prema tome, baricentričke koordinate Gergonneove točke su

$$u : v : w = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} : \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

3.2 Nagelova točka: $X(8)$

Teorem 3.2.1. *Neka je dan trokut ABC te neka je E_a diralište trokutu pripisane kružnice sa stranicom $\overline{BC}$, E_b diralište trokutu pripisane kružnice sa stranicom $\overline{AC}$ i E_c diralište trokutu pripisane kružnice sa stranicom $\overline{AB}$. Spojnice $\overline{AE_a}$, $\overline{BE_b}$ i $\overline{CE_c}$ sijeku se u jednoj točki koju nazivamo* Nagelovom točkom.

Dokaz. Dokažimo da se navedeni pravci sijeku u jednoj točki. Promatrajući sliku 3.6 uočimo da su pravci BE_a i BM tangente na pripisanu kružnicu iz točke B, pri čemu je točka M diralište trokutu pripisane kružnice s pravcom AB. Prema tome vrijedi $|BE_a| = |BM|$. Osim toga $|AM| = |AN|$ te $|AM| + |AN| = |AB| + |BE_a| + |E_aC| + |AC| = 2s$ pa je $|AM| = |AN| = s$, $|BE_a| = s - c$ i $|CE_a| = s - b$. Na analogan način vrijedi da je $|CE_b| = s - a$, $|AE_b| = s - c$, $|AE_c| = s - b$, $|BE_c| = s - a$.



Slika 3.6: Nagelova točka.

Primjenjujući Cevain teorem 3.1.1 iz

$$\frac{|AE_c|}{|E_cB|} \cdot \frac{|BE_a|}{|E_aC|} \cdot \frac{|CE_b|}{|E_bA|} = \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} = 1.$$

zaključujemo da se navedeni pravci sijeku u jednoj točki. □

Ranije smo dokazujući Van Aubelov teorem 3.1.3 zaključili da je $\frac{|AR|}{|RA_1|} = \frac{1}{u} - 1$, ako je $u + v + w = 1$, pri čemu su $u : v : w$ baricentričke koordinate točke R (koja je sjecište bilo koje trojke Cevainih pravaca). Prema tome je

$$\frac{1}{u} - 1 = \frac{s-b}{s-a} + \frac{s-c}{s-a}.$$

Nadalje slijedi

$$\frac{1}{u} = \frac{s-a+s-b+s-c}{s-a} = \frac{s}{s-a}$$

te konačno $u = \frac{s-a}{s}$. Na analogan način dobivamo $v = \frac{s-b}{s}$ te $w = \frac{s-c}{s}$.

Prema tome, baricentričke koordinate Nagelove točke su

$$u : v : w = (s-a) : (s-b) : (s-c).$$

Promatrajući trokut AD_cO na slici 3.5 te dokaz pri računanju baricentričkih koordinata Gergonneove točke, zaključujuemo da su baricentričke koordinate Nagelove točke

$$u : v : w = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} : \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

3.3 Lemoineova točka: $X(6)$

Definicija 3.3.1. Simedijana *je osnosimetrična slika težišnice obzirom na simetralu kuta (slika 3.7).*

Teorem 3.3.2. *Simedijane se sijeku u jednoj točki, koju nazivamo* Lemoineovom točkom.

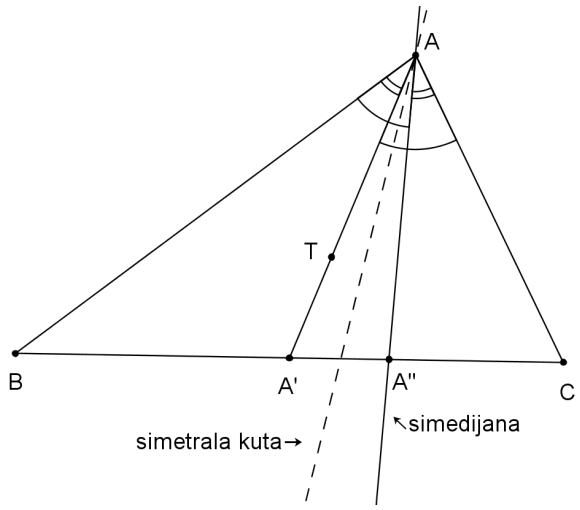
Dokaz. Da bismo dokazali ovaj teorem iskoristit ćemo Cevain teorem 3.1.1. Želimo dokazati da je

$$\frac{|BA''|}{|A''C|} \cdot \frac{|CB''|}{|B''A|} \cdot \frac{|AC''|}{|C''B|} = 1. \tag{3.11}$$

Promotrimo sliku 3.7. Vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{|BA''|}{|A''C|} &= \frac{\mathbf{P}(ABA'')}{\mathbf{P}(CAA'')} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot |AA''| \sin \sphericalangle BAA''}{\frac{1}{2}|AC| \cdot |AA''| \sin \sphericalangle CAA''} \\ &= \frac{|AB| \sin \sphericalangle BAA''}{|AC| \sin \sphericalangle CAA''} = \frac{c}{b} \frac{\sin \sphericalangle BAA''}{\sin \sphericalangle CAA''}.\end{aligned}$$

Na analogan način dobivamo



Slika 3.7: Simedijana.

$$\frac{|CB''|}{|B''A|} = \frac{a}{c}\frac{\sin \sphericalangle CBB''}{\sin \sphericalangle ABB''}, \tag{3.12}$$

$$\frac{|AC''|}{|C''B|} = \frac{b}{a}\frac{\sin \sphericalangle ACC''}{\sin \sphericalangle BCC''}. \tag{3.13}$$

Uvrštavajući dobiveno slijedi da je

$$\begin{aligned}
\frac{|BA''|}{|A''C|} \cdot \frac{|CB''|}{|B''A|} \cdot \frac{|AC''|}{|C''B|} &= \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BAA''}{\sin \sphericalangle CAA''} \cdot \frac{\sin \sphericalangle CBB''}{\sin \sphericalangle ABB''} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ACC''}{\sin \sphericalangle BCC''} \\
&= \frac{\sin \sphericalangle CAA'}{\sin \sphericalangle BAA'} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ABB'}{\sin \sphericalangle CBB'} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BCC'}{\sin \sphericalangle ACC'} \\
&= \text{analogan račun} \\
&= \frac{|CA'|}{|A'B|} \cdot \frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Dakle, navedeni se pravci sijeku u jednoj točki. □

Ranije smo dokazujući Van Aubelov teorem 3.1.3 zaključili da je $\frac{|AR|}{|RA_1|} = \frac{1}{u} - 1$, ako je $u + v + w = 1$, pri čemu su $u : v : w$ baricentričke koordinate točke R (koja je

sjecište bilo koje trojke Cevainih pravaca). Prema tome je

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}-1 &= \frac{|AC''|}{|C''B|}+\frac{|AB''|}{|B''C|}=\frac{\mathbf{P}(ACC'')}{\mathbf{P}(BCC'')}+\frac{\mathbf{P}(ABB'')}{\mathbf{P}(CBB'')}\\ &= \frac{\frac{1}{2}|CA|\cdot|CC''|\sin\sphericalangle ACC''}{\frac{1}{2}|CB|\cdot|CC''|\sin\sphericalangle BCC''}+\frac{\frac{1}{2}|BA|\cdot|BB''|\sin\sphericalangle ABB''}{\frac{1}{2}|BC|\cdot|BB''|\sin\sphericalangle CBB''}\\ &= \frac{b\sin\sphericalangle BCC'}{a\sin\sphericalangle ACC'}+\frac{c\sin\sphericalangle CBB'}{a\sin\sphericalangle ABB'}.\end{aligned}$$

Nadalje, ako $\mathbf{P}$ označava površinu cijelog trokuta ABC,

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}-1 &= \frac{b\cdot\frac{2\mathbf{P}(BCC')}{a|CC'|}}{a\cdot\frac{2\mathbf{P}(CAC')}{2b|CC'|}}+\frac{c\cdot\frac{2\mathbf{P}(BCB')}{a|BB'|}}{a\cdot\frac{2\mathbf{P}(ABB')}{c|BB'|}}\\ &= \frac{\frac{b}{a}\cdot\frac{2\mathbf{P}}{3}}{\frac{a}{b}\cdot\frac{2\mathbf{P}}{3}}+\frac{\frac{c}{a}\cdot\frac{2\mathbf{P}}{3}}{\frac{a}{c}\cdot\frac{2\mathbf{P}}{3}}\\ &= \frac{\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}}+\frac{\frac{c}{a}}{\frac{a}{c}}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

Prema tome, slijedi $\frac{1}{u}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}$ te je $u=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Analogno dobivamo $v=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$ i $w=\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$. Dakle, baricentričke koordinate Lemoineove točke su

$$u:v:w=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}:\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}:\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=a^2:b^2:c^2. \tag{3.14}$$

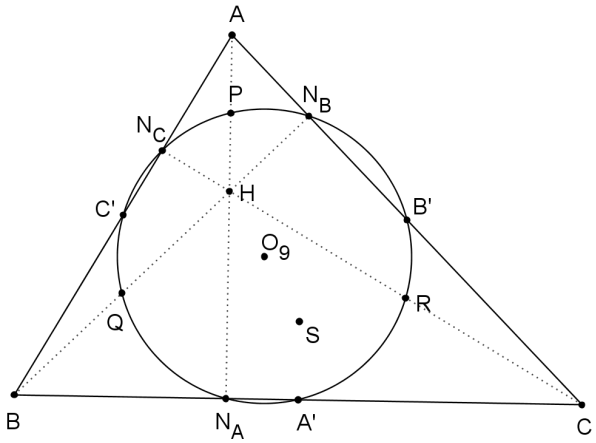
3.4 Središte kružnice devet točaka: $X(5)=O_9$

Definicija 3.4.1. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Neka su N_A, N_B, i N_C nožišta visina, A', B' i C' polovišta stranica te P, Q i R redom polovišta dužina $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ gdje je H ortocentar trokuta. Navedenih devet točaka leži na jednoj kružnici koju nazivamo* kružnicom devet točaka *(slika 3.8).*

Dokaz koncikličnosti navedenih 9 točaka može se naći u [3].

Teorem 3.4.2. *Središte kružnice devet točaka O_9 je polovište dužine $\overline{HS}$, gdje je H ortocentar, a S središte opisane kružnice danog trokuta $\triangle ABC$.*

Dokaz. Promotrimo sliku 3.8. Uočimo da homotetija sa središtem H i koeficijentom $\frac{1}{2}$ preslikava točke $A\longmapsto P$, $B\longmapsto Q$ i $C\longmapsto R$. Dakle, opisana kružnica trokutu



Slika 3.8: Kružnica devet točaka.

$\triangle ABC$ tom se homotetijom preslikava u kružnicu devet točaka, pa se i središte trokutu opisane kružnice O preslikava u središte kružnice devet točaka O_9. Prema tome, slijedi da je $|HO_9| = \frac{1}{2}|HS|$, tj. središte kružnice devet točaka O_9 je polovište dužine $\overline{HS}$. $\square$

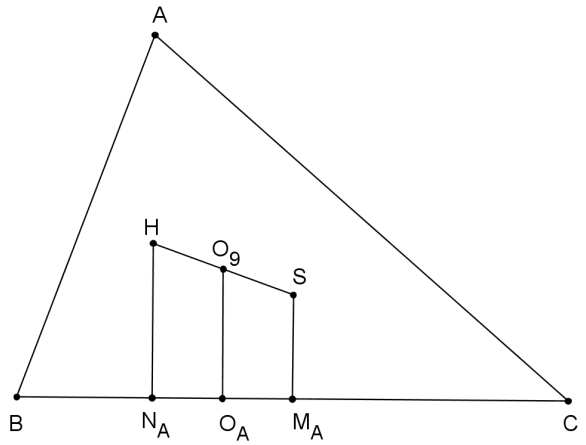
Prilikom računanja baricentričkih koordinata ortocentra H trokuta dobili smo da je $|HN_A| = 2R\cos\beta\cos\gamma$, a pri računanju baricentričkih koordinata središta trokutu opisane kružnice S dobili smo da je $|SM_A| = R\cos\alpha$, pri čemu je M_A nožište okomice iz središta trokutu opisane kružnice na stranicu a. Označimo s O_A nožište okomice iz središta kružnice devet točaka na stranicu a (slika 3.9).

Uočimo da je dužina $|O_9O_A|$ srednjica trapeza HN_AM_AS. Dakle, vrijedi

$$|O_9O_A| = \frac{1}{2}|HN_A| + \frac{1}{2}|SM_A| = \frac{1}{2}R(2\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha).$$

Obzirom da je $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$ i $\cos(180^\circ - (\beta+\gamma)) = -\cos(\beta+\gamma)$ te primjenjujući adicijsku formulu za kosinus slijedi

$$\begin{aligned}
|O_9O_A| = &= \frac{1}{2}R(2\cos\beta\cos\gamma - \cos(\beta+\gamma)) \\
&= \frac{1}{2}R(2\cos\beta\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) \\
&= \frac{1}{2}R(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) \\
&= \frac{1}{2}R\cos(\beta-\gamma).
\end{aligned}$$



Slika 3.9: Nožišta okomica.

Prema tome, slijedi da je površina trokuta BCO_9 jednaka:

$$\mathbf{P}(BCO_9) = \frac{1}{2}a|O_9O| = \frac{1}{4}Ra\cos(\beta - \gamma). \tag{3.15}$$

Analogno slijedi $\mathbf{P}(CAO_9) = \frac{1}{4}Rb\cos(\gamma - \alpha)$ te $\mathbf{P}(BCO_9) = \frac{1}{4}Rc\cos(\alpha - \beta)$. Dakle, središte kružnice devet točaka ima sljedeće baricentričke koordinate

$$a\cos(\beta - \gamma) : b\cos(\gamma - \alpha) : c\cos(\alpha - \beta).$$

Poglavlje 4

Neki izvedeni centri trokuta

4.1 Formula za baricentričke koordinate izvedene točke

Neka točke $X(i)$ s baricentričkim koordinatama $u_i : v_i : w_i$ i $X(j)$ s baricentričkim koordinatama $u_j : v_j : w_j$ određuju dužinu $\overline{X(i)X(j)}$. Pretpostavimo da točka $X(k)$ dijeli dužinu $\overline{X(i)X(j)}$ u omjeru $(1-\lambda) : \lambda$, pri čemu je λ realan broj, što kratko možemo pisati

$$X(k) = (1-\lambda)X(i) + \lambda X(j),$$

tj. preciznije,

$$\overrightarrow{r_{X(k)}} = (1-\lambda)\overrightarrow{r_{X(i)}} + \lambda\overrightarrow{r_{X(j)}}.$$

Teorem 4.1.1. *Baricentričke koordinate točke $X(k)$, $u_k : v_k : w_k$, dane su sa:*

$$u_k = (1-\lambda)\frac{u_i}{u_i+v_i+w_i} + \lambda\frac{u_j}{u_j+v_j+w_j},$$

$$v_k = (1-\lambda)\frac{v_i}{u_i+v_i+w_i} + \lambda\frac{v_j}{u_j+v_j+w_j},$$

$$w_k = (1-\lambda)\frac{w_i}{u_i+v_i+w_i} + \lambda\frac{w_j}{u_j+v_j+w_j}.$$

Dokaz. Zapisano vektorski, vrijedi:

$$\overrightarrow{r_{X(i)}} = \frac{u_i\overrightarrow{r_A} + v_i\overrightarrow{r_B} + w_i\overrightarrow{r_C}}{u_i+v_i+w_i},$$

$$\overrightarrow{r_{X(j)}} = \frac{u_j\overrightarrow{r_A} + v_j\overrightarrow{r_B} + w_j\overrightarrow{r_C}}{u_j + v_j + w_j}.$$

Prema tome, slijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_{X(k)}} = &\Big((1-\lambda)\frac{u_i}{u_i+v_i+w_i} + \lambda\frac{u_j}{u_j+v_j+w_j}\Big)\overrightarrow{r_A}\\ &+\Big((1-\lambda)\frac{v_i}{u_i+v_i+w_i} + \lambda\frac{v_j}{u_j+v_j+w_j}\Big)\overrightarrow{r_B}\\ &+\Big((1-\lambda)\frac{w_i}{u_i+v_i+w_i} + \lambda\frac{w_j}{u_j+v_j+w_j}\Big)\overrightarrow{r_C}.\end{aligned}$$

Uočimo da se koeficijenti uz $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_B}$, $\overrightarrow{r_C}$ odnose upravo kao $u_k : v_k : w_k$. □

4.2 Još 12 centara iz enciklopedije ETC

U ovom odjeljku odabrat ćemo 12 centara iz enciklopedije *ETC* koji se mogu jednostavno izraziti pomoću klasičnih karakterističnih točaka $X(1)$–$X(4)$, tako da na njih možemo primijeniti formule za baricentričke koordinate iz prethodnog odjeljka. Izraze za njihove koordinate zapisat ćemo pomoću duljina stranica a, b, c u obliku

$$f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b),$$

pri čemu je f funkcija iz definicije centra trokuta. Sređivanje kompliciranih simboličkih izraza provest ćemo korištenjem računala.

Prisjetimo se da su baricentričke koordinate središta upisane kružnice $X(1)$ dane sa

$$a : b : c,$$

a težišta $X(2)$ sa

$$1 : 1 : 1.$$

Također smo bili izveli koordinate središta opisane kružnice $X(3)$ kao

$$\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma,$$

a korištenjem formule za sinus dvostrukog kuta, sinusovim i kosinusovim poučkom te računom

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a}{R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{2abcR}$$

možemo ih transformirati u

$$a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2).$$

Isto tako, izvedene koordinate ortocentra $X(4)$,

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma,$$

možemo pomoću računa

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)}$$

transformirati u

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}.$$

U programskom paketu *Mathematica* [1] izvodimo sljedeći programski kod, koji implementira formulu iz prethodnog odjeljka. Liste `x1`, `x2`, `x3`, `x4` sadrže baricentričke koordinate četiriju klasičnih točaka. Funkcija `koordinate` na ulazu prima baricentričke koordinate `xi`, `xj` točaka $X(i)$, $X(j)$ i parametar λ (tj. `lambda`). Računaju se baricentričke koordinate točke $X(k)$ formalno definirane kao $(1-\lambda)X(i)+\lambda X(j)$. One su potom svedene na zajednički nazivnik funkcijom `Together` te pomnožene s tim zajedničkim nazivnikom. Na kraju je korištena naredba `Simplify` za pojednostavljivanje izraza. Funkcija `koordinate` izbacuje prvu baricentričku koordinatu $u = f(a,b,c)$ točke $X(k)$.

```
x1 = {a, b, c};
x2 = {1, 1, 1};
x3 = {a^2(b^2+c^2-a^2), b^2(c^2+a^2-b^2), c^2(a^2+b^2-c^2)};
x4 = {(b^2+c^2-a^2)^(-1), (c^2+a^2-b^2)^(-1), (a^2+b^2-c^2)^(-1)};
koordinate[xi_, xj_, lambda_] := (
  izraz = Together[ ((1-lambda)xi)/(xi[[1]]+xi[[2]]+xi[[3]])
                   +(lambda xj)/(xj[[1]]+xj[[2]]+xj[[3]]) ];
  nazivnik = Denominator[izraz[[1]]];
  Simplify[nazivnik izraz[[1]]]
  );
```

Slijede izrazi za baricentričke koordinate koje program daje za 12 pogodno odabranih centara iz enciklopedije *ETC*.

$X(20)$ = De Longchampsova točka = centralno simetrična slika ortocentra obzirom na središte opisane kružnice

Formalni zapis: $2X(3) + (-1)X(4) = X(20)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x3, x4, -1]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := 3a^4 - \left(b^2 - c^2\right)^2 - 2a^2\left(b^2 + c^2\right).$$

$X(40)$ = Bevanova točka = centralno simetrična slika središta upisane kružnice obzirom na središte opisane kružnice

Formalni zapis: $(-1)X(1) + 2X(3) = X(40)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x1, x3, 2]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := a\left(a^3 + a^2(b + c) - (b - c)^2(b + c) - a(b + c)^2\right).$$

$X(376)$ = centralno simetrična slika težišta obzirom na središte opisane kružnice = centralno simetrična slika ortocentra obzirom na težište

Formalni zapis: $(-1)X(2) + 2X(3) = 2X(2) + (-1)X(4) = X(376)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x2, x3, 2]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := 5a^4 - \left(b^2 - c^2\right)^2 - 4a^2\left(b^2 + c^2\right).$$

$X(381)$ = polovište spojnice težišta i ortocentra

Formalni zapis: $\frac{1}{2}X(2) + \frac{1}{2}X(4) = X(381)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x2, x4, 1/2]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := -a^4 + 2(b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2).$$

$X(382)$ = centralno simetrična slika središta opisane kružnice obzirom na ortocentar

Formalni zapis: $(-1)X(3) + 2X(4) = X(382)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x3, x4, 2]`.

Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := -3a^4 + 2\left(b^2 - c^2\right)^2 + a^2\left(b^2 + c^2\right).$$

$X(549)$ = polovište spojnice težišta i središta opisane kružnice

Formalni zapis: $\frac{1}{2}X(2) + \frac{1}{2}X(3) = X(549)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x2, x3, 1/2]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := 4a^4 + \left(b^2 - c^2\right)^2 - 5a^2\left(b^2 + c^2\right).$$

$X(551)$ = polovište spojnice središta upisane kružnice i težišta

Formalni zapis: $\frac{1}{2}X(1) + \frac{1}{2}X(2) = X(551)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x1, x2, 1/2]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := 4a + b + c.$$

$X(944)$ = Hofstadterova trapezoidna točka = centralno simetrična slika ortocentra obzirom na središte upisane kružnice

Formalni zapis: $2X(1) + (-1)X(4) = X(944)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x1, x4, -1]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := 3a^4 - 2a^2(b - c)^2 - 2a^3(b + c) + 2a(b - c)^2(b + c) - \left(b^2 - c^2\right)^2.$$

$X(946)$ = polovište spojnice središta upisane kružnice i ortocentra

Formalni zapis: $\frac{1}{2}X(1) + \frac{1}{2}X(4) = X(946)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x1, x4, 1/2]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := -a^2(b - c)^2 - a^3(b + c) + a(b - c)^2(b + c) + \left(b^2 - c^2\right)^2.$$

$X(1385)$ = polovište spojnice središta upisane kružnice i središta opisane kružnice

Formalni zapis: $\frac{1}{2}X(1) + \frac{1}{2}X(3) = X(1385)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x1, x3, 1/2]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := a\left(2a^3 - a^2(b + c) + (b - c)^2(b + c) - 2a\left(b^2 - bc + c^2\right)\right).$$

$X(1482)$ = centralno simetrična slika središta opisane kružnice obzirom na središte upisane kružnice

Formalni zapis: $2X(1) + (-1)X(3) = X(1482)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x1, x3, -1]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := a\left(a^3 - 2a^2(b + c) + 2(b - c)^2(b + c) - a\left(b^2 - 4bc + c^2\right)\right).$$

$X(1699)$ = točka koja spojnicu središta upisane kružnice i ortocentra dijeli u omjeru $2 : 1$

Formalni zapis: $\frac{1}{3}X(1) + \frac{2}{3}X(4) = X(1699)$.
Program se poziva sa: `koordinate[x1, x4, 2/3]`.
Baricentričke koordinate su: $u : v : w = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, pri čemu je

$$f(a, b, c) := -a^3 - a(b - c)^2 + 2(b - c)^2(b + c).$$

Posebno možemo primijetiti da su baricentričke koordinate svih gornjih 12 centara trokuta polinomi u varijablama a, b, c. Takve centre zovemo *polinomijalni centri trokuta*.

Bibliografija

[1] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Ver. 9.0, Champaign, IL, 2012.

[2] C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*, dostupno na http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html, (studeni 2016.).

[3] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[4] Programski paket *GeoGebra*, dostupno na https://www.geogebra.org, (studeni 2016.).

Sažetak

U ovom su radu izvedene baricentričke koordinate 20 centara trokuta koji se nalaze u enciklopediji ETC [2], krenuvši od klasičnih karakterističnih točaka trokuta do nekih manje poznatih.

Baricentričke koordinate određuju položaj proizvoljne točke u ravnini obzirom na trokut, a kako bi se one izračunale, korišteni su brojni teoremi i poučci o trokutu, od jednostavnijih, kao što su poučci o sličnosti i sukladnosti trokuta, pa do složenijih i manje poznatih poput primjerice Van Aubelovog teorema. Također, rad sadrži brojne slike za lakše praćenje dokaza, koje su sve izrađene programskim paketom GeoGebra [4].

Summary

In this thesis, barycentric coordinates of 20 triangle centers from the encyclopedia ETC [2] are calculated, starting with the classical centers, and ending up with some less known ones.

Barycentric coordinates determine the position of an arbitrary point in the plane with respect to the triangle, and in order to calculate them, numerous theorems and claims about a triangle were used, from the simple ones, like the theorems about congruence and similarity, to the more complex ones, like Van Aubel's theorem. Moreover, the thesis contains numerous illustrations intended to aid reading of the proofs, which were all drawn using the program package GeoGebra [4].

Životopis

Rođena sam 26. listopada 1992. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole Dr. Jure Turića upisala sam Opću gimnaziju u Gospiću. Preddiplomski sveučilišni studij matematike (nastavničkog smjera), na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, upisala sam 2010. godine te završila 2013. Obrazovanje nastavljam 2014. godine upisom diplomskog studija matematike (nastavničkog smjera), također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.