

Ekstremalna svojstva paralelograma upisanih u elipsu

Križan, Marina

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:193324>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-15**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marina Križan

EKSTREMALNA SVOJSTVA
PARALELOGRAMA UPISANIH U
ELIPSU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

*Od srca se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Jurju Šiftaru na neizmjernom trudu i velikoj pomoći pri pisanju ovog rada, te svojoj obitelji i svim prijateljima na nesebičnoj ljubavi i podršci tijekom svih godina studiranja.
Gospodine, hvala!*

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	2
1 Neki rezultati o krivuljama drugog reda	3
2 Paralelogrami maksimalnog opsega upisani u elipsu	10
3 Fizikalno tumačenje problema	14
3.1 Omotaljka familije paraboličkih trajektorija za kosi hitac	15
3.2 Omotaljka familije eliptičkih trajektorija sa zajedničkim fokusima	18
4 Još neki dokazi i poopćenja teorema	22
5 Paralelogrami maksimalne površine upisani u elipsu	27
Bibliografija	32

Uvod

Sam naslov „Ekstremalna svojstva paralelograma upisanih u elipsu“ navodi nas na razmišljanje o poznatim svojstvima paralelograma i kakva bi mogla biti „ekstremalna“. Promatrajući skup svih paralelograma upisanih u elipsu, traže se oni koji imaju maksimalni opseg i maksimalnu površinu. Ovi problemi odavno su proučavani u geometriji i rezultati su dobro poznati, ali neka novija zapažanja i poopćenja potaknula su pojačano zanimanje i daljnja istraživanja na tu temu.

Glavni teorem o paralelogramima maksimalnog opsega upisanim u zadanu elipsu govori da su takvi paralelogrami karakterizirani svojstvom okomitosti tangenti na elipsu u susjednim vrhovima. Nadalje, svaka točka elipse je vrh točno jednog takvog paralelograma.

Francuski fizičar Jean-Marc Richard zapazio je ovo svojstvo u vezi s problemom iz balistike o određivanju „sigurnog područja“ za familiju trajektorija (putanja) hitaca, odnosno satelita čije je gibanje zadano fizikalnim uvjetima. U svom članku iz 2004. godine Richard je izložio niz primjera u kojima su trajektorije krivulje 2. reda, a njihova anvelopa (omotaljka) također je neka krivulja 2. reda koja razgraničava područje dosega hitaca, unutar omotaljke i „sigurno područje“, izvan nje. Richard je pojednostavio izvode omotaljki služeći se kombinacijom fizikalnih i geometrijskih argumenata.

Nedugo zatim pojavilo se još nekoliko radova u kojima su izneseni drukčiji pristupi i dokazi, izvedena neka poopćenja te ukazane veze s drugim područjima, primjerice matematičkom teorijom biljara. Tako su A. Connes i D. Zagier uz dva alternativna dokaza naveli i poopćenje u kojem po dva vrha paralelograma pripadaju različitim, ali konfokalnim elipsama. Rezultati N. Anghela daju poopćenje u smjeru karakterizacije klase centralnosimetričnih ovala kojima je ortoptička krivulja kružnica, što obuhvaća i elipsu, upravo preko svojstva takvih ovala da je svaka njihova točka vrh jedinstvenog paralelograma maksimalnog opsega upisanog u oval.

U radu su izloženi navedeni rezultati, s dokazima, skicama dokaza različitim pristupima i primjerima te su naznačene poveznice među izvorima u literaturi u kojima je proučavana

ta tematika. Ovi izvori sežu sve do klasičnih Ponceletovih rezultata iz prve polovice 19. stoljeća i njihove temeljite obrade u djelima M. Bergera potkraj 20. stoljeća.

Na kraju je, radi potpunosti, izloženo rješenje znatno lakšeg problema paralelograma maksimalne površine upisanih u danu elipsu, standardnom metodom transformiranja elipse u kružnicu pomoću perspektivne afinosti.

Poglavlje 1

Neki rezultati o krivuljama drugog reda

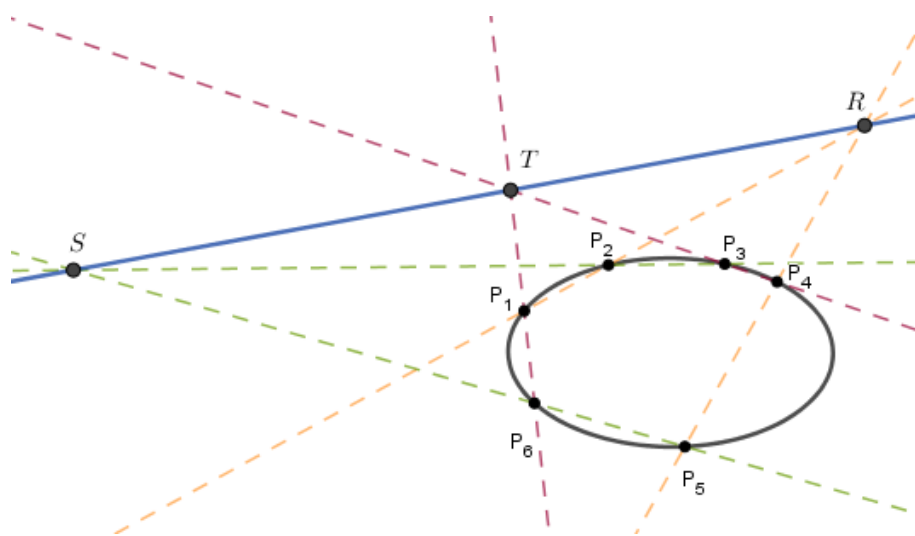
U ovom odjeljku ćemo navesti neke teoreme o elipsi i o krivuljama 2. reda općenito, koje ćemo primijeniti u daljnjim poglavljima. Najprije ćemo iskazati jedan od najvažnijih rezultata o krivuljama 2. reda, Pascalov teorem o šesterovrhu upisanom takvoj krivulji. Dokaz ovdje nećemo navesti jer za to bi trebalo više predznanja iz projektivne geometrije [3], no opisat ćemo kako se Pascalov teorem pojavljuje u posebnom slučaju koji nam je ovdje od interesa.

Teorem 1.0.1. Pascalov teorem

Neka je C nedegenerirana krivulja drugog reda u realnoj projektivnoj ravnini. Tada 6 točaka $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ pripada toj krivulji ako i samo ako su sjecišta pravaca P_1P_2 i P_4P_5 , P_2P_3 i P_5P_6 , P_3P_4 i P_6P_1 kolinearne točke.

U nešto drukčijoj formulaciji kaže se da je šesterovrh $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ upisan u krivulju drugog reda u realnoj projektivnoj ravnini ako i samo ako su sjecišta parova nasuprotnih stranica šesterovrha, kolinearne točke.

Pritom, nasuprotnim stranicama smatramo P_1P_2 i P_4P_5 , P_2P_3 i P_5P_6 te P_3P_4 i P_6P_1 . Općenito, n -terovrh u projektivnoj ravnini je skup od n točaka P_1, P_2, \dots, P_n tako da nije tri susjedne točke u tom (cikličkom) redoslijedu nisu kolinearne.



Slika 1.1: Šesterovrh upisan u krivulju drugog reda u realnoj projektivnoj ravnini

Pascalov teorem također vrijedi i u posebnom slučaju kada se dva uzastopna vrha podudaraju, onda umjesto spojnice tih vrhova uzimamo tangentu u točki podudaranja vrhova. Trebat će nam slučaj u kojem se podudaraju vrhovi P_1 i P_2 , te P_4 i P_5 tako da imamo 4 različita pravca kao stranice šesterovrha i to tangente u točkama P_1 i P_4 te pravce P_2P_3 i P_5P_6 .

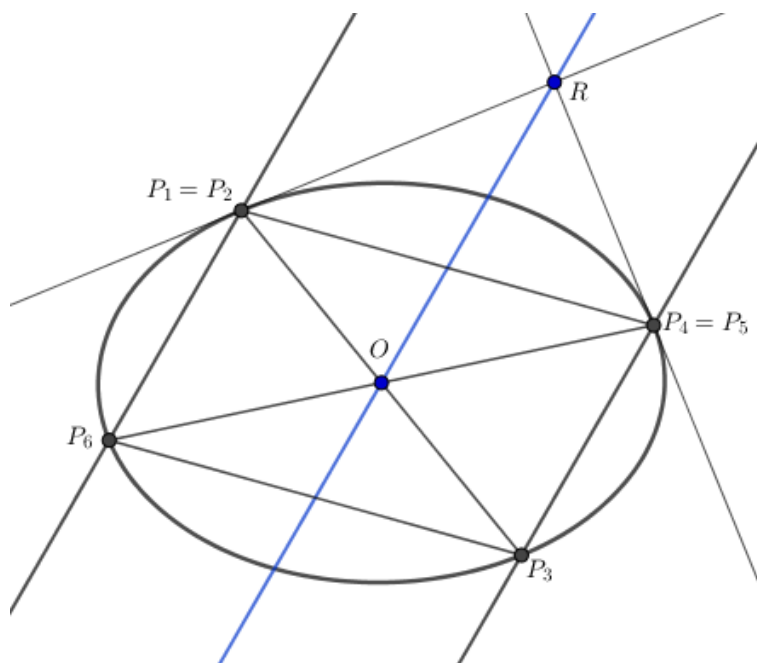
Realna projektivna ravnina može se tumačiti kao proširenje euklidske ravnine „beskonačno udaljenim“ točkama i jednim „beskonačno udaljenim“ pravcem. Svakoj klasi paralelnih pravaca, to jest, svakom smjeru u euklidskoj ravnini, pridružena je „nova“ točka („beskonačno udaljena“). Na ovaj način, paralelni pravci u euklidskoj ravnini imaju zajedničku točku (zajednički smjer). Osim toga, uvodimo novi pravac („beskonačno daleki“) na kojem su samo beskonačno daleke točke. Lako je vidjeti da ovakvo proširenje euklidske ravnine zadovoljava osnovne aksiome projektivne ravnine:

Bilo koje dvije različite točke spojene su točno jednim pravcem, a svaka dva različita pravca imaju zajedničku točku.

Na taj način sačuvano je svojstvo euklidske ravnine o jedinstvenosti pravca kroz dvije točke, ali je postignuto svojstvo da svaka dva različita pravca imaju zajedničku točku. Ta točka očito je jedinstvena, jer u protivnom postojala bi dva pravca kroz dvije različite točke. Pascalov teorem vrijedi u realnoj projektivnoj ravnini, pa ako postoje dvije nasuprotne stranice šesterovrha upisanog u krivulju drugog reda, koje su paralelne u euklidskoj ravnini, njihovo sjecište je beskonačno daleka točka. Ako su, primjerice, stranice P_3P_4 i P_6P_1 paralelne prema Pascalovom teoremu, pravac koji prolazi sjecištem P_1P_2 i P_4P_5 te sjecištem

P_2P_3 i P_5P_6 , mora imati smjer jednak smjeru pravaca P_3P_4 i P_6P_1 . Tako u euklidskoj ravni imamo u tom slučaju tri paralelna pravca.

Na slici 1.2. ilustriran je poseban slučaj koji će nam biti važan. Krivulja drugog reda tada je elipsa sa središtem u točki O , a vrhovi $P_1 = P_2$ i P_3 , odnosno $P_4 = P_5$ i P_6 su centralno simetrične točke te elipse. Tetive elipse P_1P_6 i P_3P_4 tada su paralelne, a P_2P_3 i P_5P_6 sijeku se u točki O , dok se tangente u točkama P_1 i P_4 sijeku u točki R . Prema Pascalovom teoremu, točke O , R i sjecište pravaca P_1P_6 i P_3P_4 tada su kolinearne točke, a budući da su P_1P_6 i P_3P_4 paralelni, pravac OR mora imati jednak smjer (tj. zajedničku „beskonačno udaljenu“ točku) kao P_1P_6 i P_3P_4 . Dakle, P_1P_6 , P_3P_4 i OR su tri paralelna pravca.



Slika 1.2: Poseban slučaj Pascalovog teorema

Sljedeća dva teorema odnose se specifično na elipsu, kao posebnu krivulju 2. reda i dobro su poznati, no navest ćemo i dokaze budući da su važni za glavne rezultate u ovom radu.

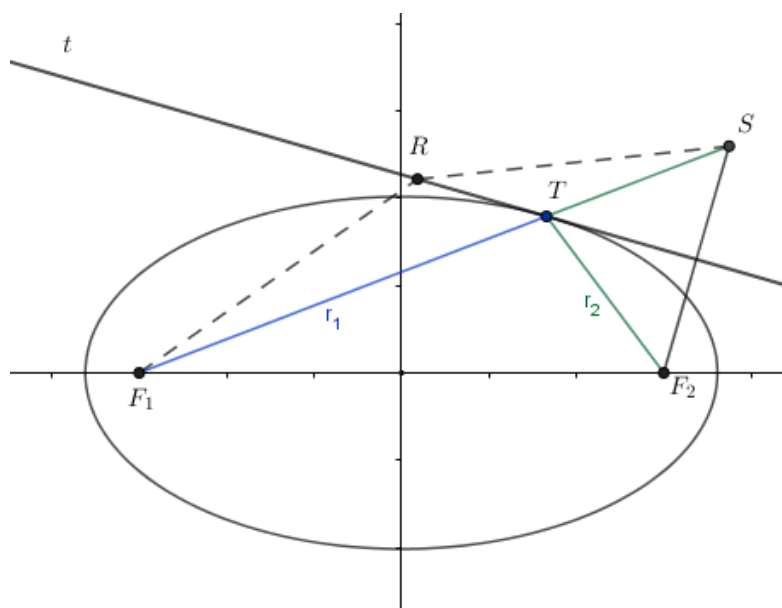
Teorem 1.0.2. Teorem o tangenti elipse u točki

Tangenta t u točki T elipse raspolavlja vanjski, a normala unutarnji kut što ga tvore dva radij-vektora točke T .

Dokaz. Radij-vektor $r_1 = \overline{F_1T}$ produljimo preko točke T . Neka je S točka na polupravcu F_1T tako da je $|ST| = |TF_2|$. Trokut F_2TS je jednakokračan s osnovicom F_2S . Uz to, vrijedi

$$|F_1S| = |F_1T| + |TS| = |F_1T| + |F_2T| = 2a.$$

Neka je pravac t simetrala dužine $\overline{F_2S}$, a time i simetrala kuta $\angle F_2TS$. Trebamo dokazati da je t ujedno i tangenta elipse. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji točka R na pravcu t koja je ujedno i točka elipse i koja je različita od T .



Slika 1.3: Tangenta na elipsu u točki

U trokutu $\triangle F_1RS$ vrijedi nejednakost trokuta

$$|F_1R| + |RS| > |F_1S|.$$

Budući da točka R leži na simetrali dužine $\overline{F_2S}$, vrijedi $|RS| = |F_2R|$. Sad gornja nejednakost prelazi u oblik

$$|F_1R| + |F_2R| > |F_1S| = 2a$$

što znači da točka R ne leži na elipsi, a to je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, pravac t je tangenta elipse, čime je tvrdnja dokazana.

□

Teorem 1.0.3. Teorem o ortoptičkoj kružnici elipse

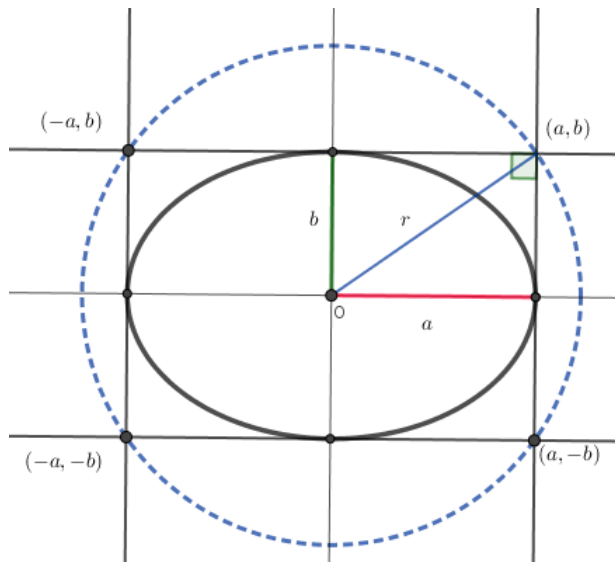
Neka je E elipsa s duljinama poluosi a i b . Tada se sjecišta međusobno okomitih tangenti elipse E nalaze na kružnici C polumjera $\sqrt{a^2 + b^2}$ sa središtem u središtu elipse. Obrnuto, tangente na elipsu E iz svake točke kružnice C međusobno su okomite.

Kružnica C naziva se ortoptička kružnica elipse. Kaže se da se iz svake točke te kružnice elipsa vidi pod pravim kutom.

Dokaz. Tvrdnja teorema očito ne ovisi o izboru koordinatnog sustava pa možemo izabrati Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem u središtu elipse, tako da se velika os elipse nalazi na x -osi, a mala os na y -osi koordinatnog sustava. Tada jednadžba elipse glasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Prvi slučaj je kada su tangente na elipsu E povučene u susjednim tjemenima elipse. Tada se tangente sijeku u jednoj od četiri točke $(\pm a, \pm b)$ koje leže na kružnici $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.



Slika 1.4: Tangente povučene na elipsu u susjednim tjemenima elipse

Posebno ćemo razmotriti drugi slučaj kada su tangente na elipsu E povučene u točki, različitoj od tjemena. Tražeći presjek pravac zadanog jednadžbom $y = kx + l$ i elipse

zadane svojom jednadžbom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dobivamo

$$x^2(b^2 + a^2k^2) + 2a^2klx + a^2(l^2 - b^2) = 0. \quad (1.1)$$

Ako je pravac tangenta elipse, diskriminanta gornje kvadratne jednadžbe jednaka je 0. Tada je

$$4a^4k^2l^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2l^2 - a^2b^2) = 0,$$

odakle dobivamo uvjet dodira pravca i elipse

$$l^2 = a^2k^2 + b^2,$$

odnosno

$$l = \pm \sqrt{k^2a^2 + b^2}. \quad (1.2)$$

Rješenje kvadratne jednadžbe (1.1) je $x = \frac{-2a^2kl}{2(b^2 + a^2k^2)}$, odnosno korištenjem uvjeta dodira pravca i elipse dobivamo elegantnije rješenje $x = \frac{-a^2k}{l}$, što je prva koordinata točke dodira. Drugu koordinatu možemo dobiti uvrštavanjem x koordinate u jednažbu pravca ili elipse, pa je $y = k \frac{(-a^2k)}{l} + l$, a nakon sređivanja $y = \frac{b^2}{l}$.

Označimo s (u, v) točku dodira pravca i elipse. Tada je $(u, v) = \left(\frac{-a^2k}{l}, \frac{b^2}{l}\right)$. Dakle, ako točka (u, v) nije tjeme elipse, tada tangenta u toj točki ima jednadžbu

$$y = \frac{-b^2u}{a^2v}x + \frac{b^2}{v}.$$

Ako tangenta sadrži točku (x_0, y_0) izvan elipse, tada vrijedi

$$y_0 = kx_0 \pm \sqrt{k^2a^2 + b^2}.$$

Rješavajući se kvadratnog korijena dobivamo

$$\begin{aligned} y_0 - kx_0 &= \pm \sqrt{k^2a^2 + b^2} \\ y_0^2 - 2y_0kx_0 + k^2x_0^2 &= k^2a^2 + b^2 \\ k^2(x_0^2 - a^2) - 2x_0y_0k + y_0^2 - b^2 &= 0 \end{aligned}$$

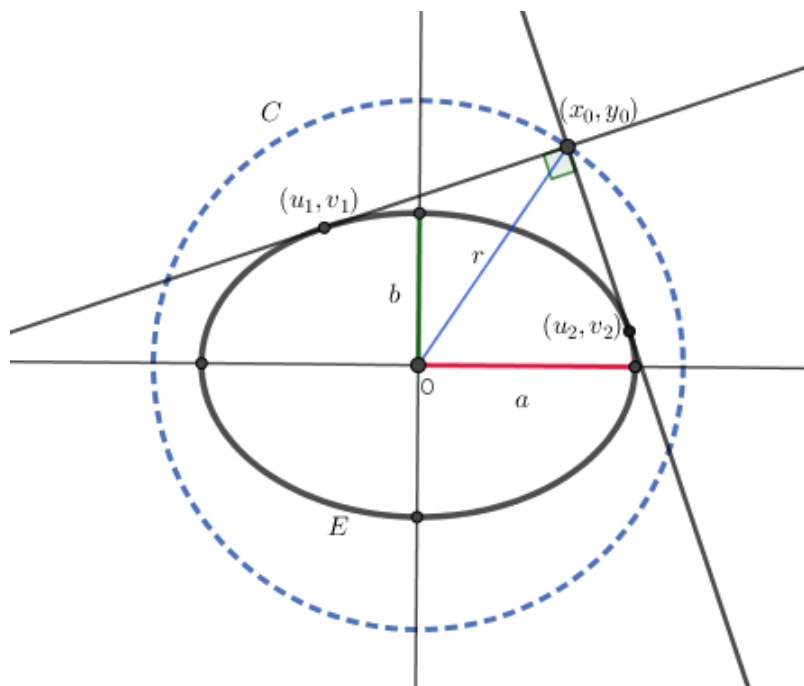
Rješenja ove gornje kvadratne jednadžbe su k_1 i k_2 i to će biti koeficijenti smjera tangenti na E koje prolaze točkom (x_0, y_0) izvan elipse E . Prema Vièteovim formulama je

$$k_1k_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2}.$$

Uvjet okomitosti tangenti koje nisu vertikalne glasi $k_1k_2 = -1$. Odatle dobivamo

$$-1 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} \Leftrightarrow a^2 - x_0^2 = y_0^2 - b^2 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

Dakle, svaka točka (x_0, y_0) izvan elipse E u kojoj su tangente na E okomite leži na kružnici C polumjera $\sqrt{a^2 + b^2}$ što smo i tvrdili. Time je dokazan drugi slučaj. \square



Slika 1.5: Tangente na elipsu E u točkama (u_1, v_1) , (u_2, v_2) koje se sijeku u (x_0, y_0)

Poglavlje 2

Paralelogrami maksimalnog opsega upisani u elipsu

U ovom poglavlju promatrat ćemo skup svih paralelograma upisanih u zadanu elipsu s duljinama poluosi a i b .

Cilj nam je odrediti maksimalni mogući opseg i pružiti geometrijsku karakterizaciju takvih paralelograma.

Najprije učimo da je svaki paralelogram koji je upisan u elipsu C centralnosimetričan, s centrom simetrije u središtu elipse. Jasno je da ako izaberemo bilo koja dva promjera elipse, recimo, $\overline{PP'}$ i $\overline{QQ'}$, četverokut $PQP'Q'$ bit će paralelogram jer mu se dijagonale PP' i QQ' sijeku u zajedničkom polovištu, a to je središte O elipse. S druge strane, ako promatramo sve tetive elipse paralelne s jednom tetivom \overline{PQ} kao stranicom paralelograma, njihova polovišta čine dijametar konjugiran dijametru smjera PQ . Samo tetiva koja je centralnosimetrična tetivi \overline{PQ} jednake je duljine kao \overline{PQ} .

Opseg paralelograma $PQP'Q'$ jednak je $2(d(P, Q) + d(P', Q))$. Ako točkama pridružimo radijvektore, imamo $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ'} = -\overrightarrow{OQ}$, pa je

$$d(P, Q) + d(P', Q) = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| + \|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\|,$$

budući da je $\|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\|$.

Dakle, opseg paralelograma izražen je kao funkcija dvije varijabilne točke elipse C .

Ako u Kartezijevom koordinatnom sustavu stavimo $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, tada je opseg jednak

$$2\left(\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| + \|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\|\right) = 2\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}\right).$$

Naravno, dovoljno je promatrati poluopseg, pa stavimo

$$f(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}.$$

Funkcija f je neprekidna na domeni $C \times C$, a to je zatvoren i omeđen, dakle kompaktan podskup euklidske ravnine \mathbb{R}^2 .

Stoga f poprima maksimalnu i minimalnu vrijednost na skupu $C \times C$. Naravno, nije teško odrediti neku gornju i donju među slike funkcije f u skupu \mathbb{R}^+ nenegativnih realnih brojeva. Donja međa nastupa kad se Q podudara s P , a onda je $f(P, Q) = d(P, P')$ što je duljina dijametra $\overline{PP'}$, a najmanji dijametar elipse je mala os, duljine b . Dakle, $\min f(P, Q) = 2b$ i to za paralelogram degeneriran u malu os elipse.

Budući da je najdulja tetiva elipse jednaka $2a$, očito jedna gornja međa poluopsega upisanog paralelograma iznosi $4a$. Ta ocjena je dosta gruba. Ako uzmemo paralelogram s vrhom u tjemenu, onda je paralelogram romb sa stranicom duljine $\sqrt{a^2 + b^2}$, poluopsega $2\sqrt{a^2 + b^2}$. (Ova vrijednost postiže maksimum za $a = b$ i to je $2\sqrt{2}a$).

Vidimo da traženi maksimalni poluopseg upisanog paralelograma ne može biti manji od $2\sqrt{a^2 + b^2}$, a pokazat će se da ima upravo tu vrijednost. Štoviše, pokazat će se da ne samo za tjemena, nego za bilo koju točku P elipse postoji točno jedan paralelogram s vrhom P čiji poluopseg ima tu maksimalnu vrijednost.

Teorem 2.0.1. (Glavni teorem)

Neka je C elipsa s poluosima duljine a i b . Tada je najveća vrijednost opsega paralelograma upisanog u elipsu C jednaka $4\sqrt{a^2 + b^2}$. Pri tome je za svaku točku P elipse C jednoznačno određen paralelogram maksimalnog opsega upisan u tu elipsu tako da mu je P jedan vrh.

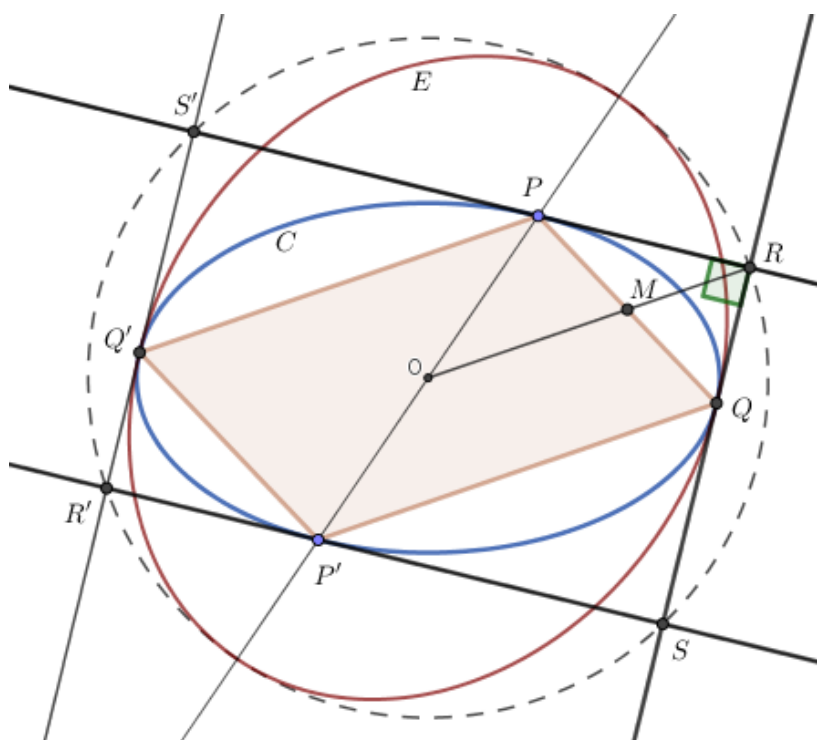
Nadalje, ako je $PQP'Q'$ paralelogram maksimalnog opsega upisan u elipsu C , pri čemu su $\overline{PP'}$ i $\overline{QQ'}$ promjeri elipse, onda su tangente u vrhovima P i Q međusobno okomite.

Dokaz. U uvodnom razmatranju obrazložili smo zašto postoji paralelogram maksimalnog opsega upisan u zadanu elipsu C . Znamo također da su suprotni vrhovi upisanog paralelograma simetrični s obzirom na središte elipse, točku O . Neka je $PQP'Q'$ jedan upisani paralelogram maksimalnog opsega. Označimo točke presjeka tangenti na elipsu C u P, Q, P', Q' sa R, S, R', S' redom.

Prema posebnom slučaju Pascalovog teorema koji je opisan u prvom poglavlju i ilustriran slikom 1.2., znamo da je $PQ' \parallel QP' \parallel OR$. Neka je M sjecište pravaca OR i PQ , tada je $OM \parallel P'Q$ i $|OM| = \frac{1}{2}|P'Q|$ jer je \overline{OM} srednjica trokuta $PP'Q$. Dakle, $|MP| = |MQ| = \frac{1}{2}|PQ|$.

Za dokaz teorema, važnom će se pokazati tvrdnja da su kutevi $\angle MQR$ i $\angle MRQ$ sukladni. Kad to pokažemo, onda je trokut MQR jednakokrčan jer vrijedi $|MQ| = |MR|$ i tada je

$$\overline{OR} = \overline{OM} + \overline{MR} = \frac{1}{2}\overline{QP'} + \overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{QP'} + \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{PQ} + \overline{QP'}).$$

Slika 2.1: Paralelogram $PQP'Q'$ maksimalnog opsega upisan u elipsu C

Ako je točka Q takva da je $\overline{PQ} + \overline{QP'}$ maksimalno za odabranu P (i njezinu dijametralnu P'), onda je $\overline{PQ} + \overline{QP'} = 2OR$.

Ključnim ostaje pokazati da je $\angle MQR = \angle MRQ$, odnosno $\angle MQR = \angle SQP'$.

Treba dakle, dokazati da je $\angle MQR = \angle MRQ$, odnosno da tangenta na C u točki Q čini jednake kutove s PQ i QP' . Ovo će biti istina ako se Q može shvatiti kao točka neke elipse E koja ima fokuse P i P' i tangentu u Q podudarnu tangenti u Q na elipsu C .

Kako bismo pokazali da takva elipsa E doista postoji, razmatramo familiju \mathcal{E} svih elipsi s fokusima P i P' . Po jedna elipsa iz \mathcal{E} zadana je svojom velikom osi $2w$, za svaki $w \in \mathbb{R}^+$ takav da je $2w > d(P, P')$. U familiji \mathcal{E} postoji elipsa koja prolazi točkama Q i Q' , jer za njezinu veliku os jednostavno uzmemo $d(Q, P) + d(Q, P')$, što je veće od $d(P, P')$. Označimo tu elipsu s E . Ona je očito maksimalna elipsa iz \mathcal{E} koja ima neprazan presjek s elipsom C jer u suprotnom bi postojala neka $X \in C \cap E$, $X \neq Q, Q'$ za koju bi bilo $d(X, P) + d(X, P') > d(Q, P) + d(Q, P')$.

Dakle, zajednička točka elipse C i maksimalne E iz familije, mora biti upravo točka Q (i njezin par Q').

Preostaje dokazati da se tangente na elipse E i C u točki Q podudaraju. Uzmimo da je t tangenta na E u točki Q . Pokažimo da nijedna točka pravca t , osim Q , ne pripada elipsi C . Znamo da za svaku točku $Y \in t$, $Y \neq Q$, prema Teoremu 1.0.2. vrijedi $d(Y, P) + d(Y, P') > d(Q, P) + d(Q, P')$. Točka Y zato ne može biti na C , jer bi bila vrh paralelograma $YPY'P'$ poluopsega većeg od maksimalnog. Zaključujemo da se tangenta na elipsu E podudara se s tangentom na elipsu C u zajedničkoj točki Q , pa konačno slijedi

$$\angle MQR = \angle MRQ. \quad (2.1)$$

Dakle, trokut MQR je jednakokračan i vrijedi

$$|MR| = |MQ|. \quad (2.2)$$

Kako već znamo da tangenta na elipsu E u točki Q zatvara jednake kutove s QP i QP' , te koristeći relaciju (2.1), slijedi da su kutovi $\angle MQR$ i $\angle SQP'$ sukladni.

Zbog relacije (2.1) i (2.2) vrijedi

$$\overline{PQ} + \overline{QP'} = 2\overline{OR}.$$

Promotrimo trokut PQR . Zbog (2.2) vrijedi da je $|MR| = |MQ| = |MP| = \frac{1}{2}|PQ|$, pa se točka R nalazi na kružnici polumjera $\frac{1}{2}|PQ|$. Prema Talesovom poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice, kut QRP nad promjerom \overline{PQ} je pravi kut. To znači da su tangente na C u točkama P i Q okomite, odakle vidimo da točka R pripada ortoptičkoj kružnici elipse C neovisno o izboru točke P . Tada prema Teoremu 1.0.3. slijedi da je $|OR| = \sqrt{a^2 + b^2}$, te ako znamo da je $2\overline{OR}$ poluopseg paralelograma $PQP'Q'$, dobivamo

$$2(\overline{PQ} + \overline{QP'}) = 4\overline{OR} = 4\sqrt{a^2 + b^2}$$

najveću vrijednost opsega paralelograma upisanog u elipsu C , što smo i tvrdili. \square

U dokazu teorema vidjeli smo da se tangente u susjednim vrhovima upisanog paralelograma maksimalnog opsega sijeku pod pravim kutom. To znači da se sjecište tih tangenti nalazi na ortoptičkoj kružnici elipse. Stoga vrijedi:

Korolar 2.0.2. *Dirališta tangenti na elipsu iz bilo koje točke njezine ortoptičke kružnice su dva vrha jednog paralelograma maksimalnog opsega upisanog u tu elipsu.*

Napomena

Teorem 2.0.1. često ćemo spominjati u daljnjem tekstu pa ćemo ga iz praktičnih razloga kratko nazivati Glavni teorem.

Poglavlje 3

Fizikalno tumačenje problema

Problem određivanja svih paralelograma maksimalnog opsega upisanih u zadanu elipsu pojavio se u zanimljivom fizikalnom kontekstu.

Francuski fizičar Jean-Marc Richard u svojem radu [4] istražio je, s posebnim naglaskom na geometrijski pristup, određivanje tzv. „sigurnog područja“ (safe domain) za familiju putanja (trajektorija) hitaca, odnosno satelita čije je gibanje zadano fizikalnim uvjetima. Sigurno područje je onaj dio ravnine, odnosno prostora, u kojem nijedna točka ne može biti pogođena hitcem, odnosno naći se na putu satelita.

U nizu primjera putanje su krivulje 2. reda (konike), odnosno njihovi dijelovi, a rub sigurnog područja je također dio neke konike. Takva „rubna krivulja“ je omotaljka ili anvelopa, dakle krivulja koja dira (tangira) svaku krivulju iz zadane familije trajektorija.

Richard je u različitim primjerima kombinirao fizikalne pretpostavke s matematičkim jednadžbama i geometrijskim zaključivanjem o maksimalnom doseg gibanja materijalnih točaka, koje predstavljaju promatrana tijela. Budući da se svojstva konika često mogu izraziti i dokazati elementarnom geometrijom te su poznata još iz antičke matematike, zaključci o opisu „sigurnog područja“ to jest anvelope familije krivulja mogu postati kraći i elegantniji od uobičajenih.

Započnimo s najjednostavnijim primjerom, budući da se odnosi na dobro poznati eksperiment i izračun iz klasične mehanike. To je kosi hitac.

Ovdje će konike biti parabole, kao što je poznato, ali ćemo navesti taj primjer budući da nam jasno prikazuje smisao „sigurnog područja“.

3.1 Omotaljka familije paraboličkih trajektorija za kosi hitac

Uzmimo da se kosi hitac ispaljuje iz ishodišta O Kartezijevog koordinatnog sustava u rav-
nini, s jednakom početnom brzinom v , pod varijabilnim kutem α s osi x , $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Za
krajnju vrijednost $\alpha = \frac{\pi}{2}$ to je vertikalni hitac. Uz zanemarivanje otpora zraka, trajektorije
su lukovi parabola s parametarskim jednadžbama

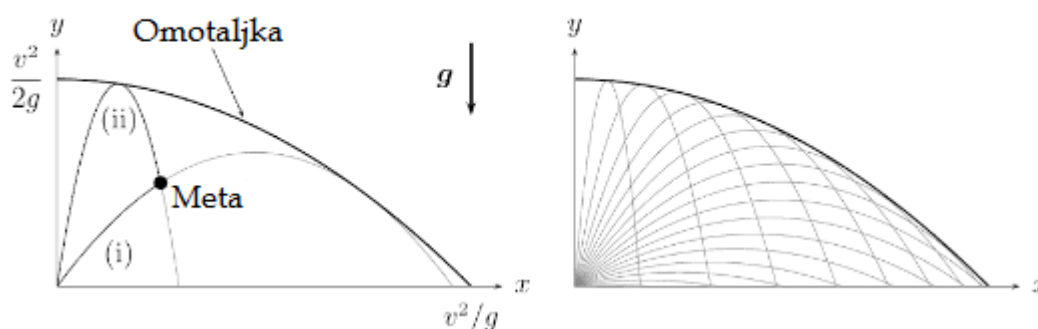
$$x(t) = v \cos \alpha t, y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v \sin \alpha t. \quad (3.1)$$

Eliminacijom parametra t (vrijeme) dobiva se jednadžba oblika

$$y = ax^2 + bx, \quad (3.2)$$

pri čemu je $a = -\frac{g}{2v^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $b = \operatorname{tg} \alpha$.

Točka $T(x, y)$ u 1. kvadrantu neće se nalaziti niti na jednoj paraboli iz familije nastale
variranjem kuta α ako pripadna kvadratna jednadžba nema rješenje u α za zadane x i y .
Dakle, diskriminanta treba biti negativna kako bi se točka T našla u „sigurnom području“.
Ta diskriminanta dat će zapravo jednadžbu anvelope (omotaljke) promatrane familije pa-
rabola, kao krivulje koja dira svaku parabolu iz familije, a i ta omotaljka bit će parabola
(odnosno luk parabole u 1. kvadrantu). Navedimo osnovne korake u računu.



Slika 3.1: Slika lijevo: postoje dvije različite moguće trajektorije koje prolaze točkom koja je ispod omotaljke. Slika desno: Sigurnosna parabola je omotaljka familije paraboličkih putanji dobivenih za sve moguće vrijednosti kuta α početne brzine u smjeru osi x [2]

Prelaskom na varijablu $\operatorname{tg} \alpha$, jednadžba $ax^2 + bx - y = 0$ transformira se u oblik

$$\frac{gx^2}{2v^2} \operatorname{tg}^2 \alpha + x \operatorname{tg} \alpha + y + \frac{gx^2}{2v^2} = 0, \quad (3.3)$$

a za njezinu diskriminantu, nakon sređivanja, vidi se da je negativna samo za $y > -\frac{cx^2}{2} + \frac{1}{4c}$, pri čemu je $c = \frac{g}{2v^2}$.

Dakle, tražena omotaljka je parabola

$$y = -\frac{cx^2}{2} + \frac{1}{4c}. \quad (3.4)$$

Međutim, Richard uočava pravilnost na kojoj temelji jednostavan geometrijski izvod jednadžbe kojom je određena omotaljka familije parabola. Naime, sve trajektorije, neovisno o kutu α , imaju zajedničku ravnalicu (direktrisu) r , a ujedno prolaze zajedničkom točkom O . Tražena omotaljka zatim se identificira kao parabola kojoj je žarište točka O , a njezina ravnalica r' paralelna je s ravnalicom r . Navest ćemo osnovne pojedinosti i ovog izračuna, a zatim Richardov geometrijski zaključak.

Svaka parabola s vertikalnom osi ima horizontalnu ravnalicu s jednadžbom $y = d$. Pokazat ćemo da d ne ovisi o α , izračunati d i žarište pojedine parabole kao $F\left(-\frac{b}{2a}, f\right)$. Iz uvjeta da je ishodište jednako udaljeno od ravnalice $y = d$ i od točke F dobiva se

$$d^2 = f^2 + \frac{b^2}{4a^2},$$

a kako je najviša točka parabole $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ polovište okomice iz F na ravnalicu, imamo

$$\frac{d+f}{2} = -\frac{b^2}{4a}.$$

Iz ovih jednadžbi pomoću $d^2 - f^2 = (d+f)(d-f)$ lako dobivamo $d-f$ pa onda $d = -\frac{b^2+1}{4a} = \frac{v^2}{2g}$, neovisno o α (zbog $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$).

Za F se dobivaju koordinate $\left(\frac{v^2}{2g} \sin 2\alpha, -\frac{v^2}{2g} \cos 2\alpha\right)$ pa je očito da žarišta svih parabola iz familije pripadaju kružnici polumjera $\frac{v^2}{2g}$ sa središtem u ishodištu. Za kut β koji dužina

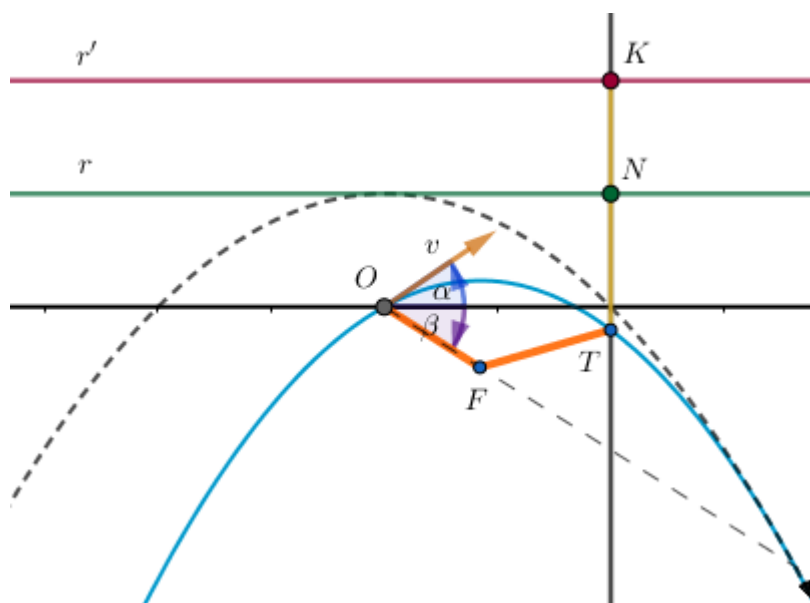
\overline{OF} zatvara s osi x imamo $\cos\beta = \sin 2\alpha$, $\sin\beta = -\cos 2\alpha$ pa je $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Sad uočimo pravac r' s jednadžbom $y = d + |OF|$, dakle pravac paralelan s ravnalicom r koji je od nje udaljen za $|OF|$.

Uzmimo da se točka T nalazi na paraboli sa žarištem F , iz promatrane familije. Onda je $|TO| \leq |TF| + |FO|$ (nejednakost trokuta), a $|TF| = |TN|$, gdje je N nožište okomice iz F na ravnalicu r (po definiciji parabole, svaka njezina točka jednako je udaljena od žarišta i ravnalice). Imamo

$$|TO| \leq |TF| + |FO| = |TN| + |NK| = |TK|,$$

gdje je s K označeno nožište okomice iz T na r' . Jednakost nastupa ako i samo ako su točke T , O i F kolinearne, a tada je T točka koja je jednako udaljena od O i od pravca r' . Takva točka pripada paraboli sa žarištem O i ravnalicom r' pa vidimo da je krivulja koja dodiruje sve parabole iz familije trajektorija upravo ta parabola. Naime, ako je $|TO| < |TK|$, onda je točka T unutar područja čije točke pripadaju trajektorijama, a za $|TO| > |TK|$ točka je u „sigurnom području“.

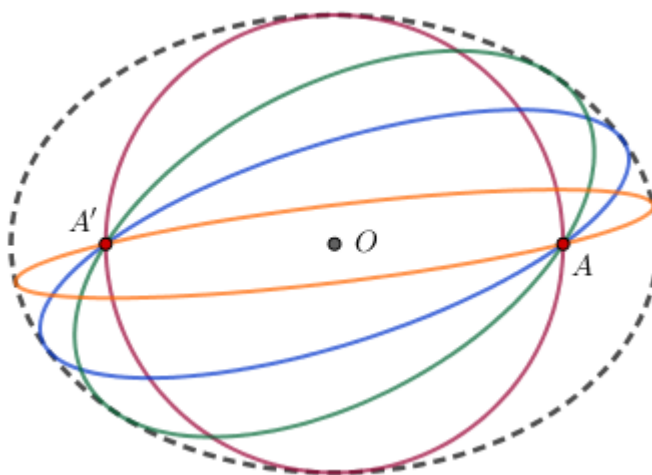


Slika 3.2: Geometrijska konstrukcija omotaljke

3.2 Omotaljka familije eliptičkih trajektorija sa zajedničkim fokusima

Nakon prethodnog primjera, Richard analizira još nekoliko složenijih slučajeva gibanja te geometrijskim zaključivanjem pojednostavljuje određivanje „sigurnog područja“: familija eliptičkih putanja s elipsom kao omotaljkom za Keplerovo ili Coulombovo gibanje, familija hiperboličkih putanja s paraboličkom omotaljkom za Rutherfordovo raspršenje itd.

Do teorema koji se formulacijom samo neznatno razlikuje od Glavnog teorema u ovom radu dolazi promatranjem gibanja materijalne točke u polju harmoničkog potencijala $\frac{kr^2}{2}$ centriranog u točki O .



Slika 3.3: Trajektorije u polju harmoničkog potencijala

Neka je m masa materijalne točke, a njezin početni položaj u točki A . Materijalna točka lansira se iz točke A početnom brzinom konstantnog iznosa v , pod varijabilnim kutom α , $0 \leq \alpha < 2\pi$. Odabere li se Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem O tako da A ima koordinate $(x_0, 0)$, jednadžbe gibanja izražene pomoću parametra t (vrijeme) glase

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + L_0 \cos \alpha \sin(\omega t), y(t) = L_0 \sin \alpha \sin(\omega t) \quad (3.5)$$

uz oznake $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $L_0 = \frac{v}{\omega}$.

Oдавде se lako dobiva jednadžba gibanja

$$\frac{(x - y \operatorname{ctg} \alpha)^2}{x_0^2} + \left(\frac{y}{L_0 \sin \alpha} \right)^2 = 1 \quad (3.6)$$

Točka $A(x_0, 0)$ i njoj simetrična $A'(-x_0, 0)$ očito pripadaju svakoj trajektoriji, neovisno o kutu α . Dalje se postupa analogno kao u (3.1.), s tim da se uzme varijabla $\text{ctg } \alpha$ u kojoj prethodna jednadžba postaje kvadratna:

$$y^2 \left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{L_0^2} \right) \text{ctg}^2 \alpha - \frac{2xy}{x_0^2} \text{ctg } \alpha + \left(\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{L_0^2} - 1 \right) = 0 \quad (3.7)$$

Izračunavanjem diskriminante dobiva se umnožak nenegativnog faktora $\frac{4y^2}{x_0^4 L_0^4}$ i izraza

$$-x_0^2 L_0^2 x^2 - x_0^4 y^2 - x_0^2 L_0^2 y^2 + x_0^4 L_0^2 + x_0^2 L_0^4. \quad (3.8)$$

Izjednačimo li taj izraz s 0, nakon sređivanja dobivamo jednadžbu

$$\frac{x^2}{x_0^2 + L_0^2} + \frac{y^2}{L_0^2} = 1 \quad (3.9)$$

dakle jednadžbu elipse sa središtem u ishodištu O i fokusima u točkama A i A' . Naime, kako su duljine poluosi jednake $\sqrt{x_0^2 + L_0^2}$ i L_0 , žarišna udaljenost upravo je x_0 . Vidimo da je „sigurno područje“ u ovom slučaju omeđeno tom elipsom. Točke A i A' pripadaju svim trajektorijama pa je dužina $\overline{AA'}$ zajednički promjer svih tih elipsi.

Nadalje, Richard izvodi jednadžbu omotaljke na drugi način, polazeći od činjenice da su sve trajektorije elipse sa zajedničkim točkama A i A' , ali i fizikalnog argumenta o jednakoj vrijednosti energije gibanja po svakoj trajektoriji. Ta vrijednost iznosi $E = \frac{k(x_0^2 + L_0^2)}{2}$, jer se varira samo kut smjera početne brzine. S druge strane, ako se elipsa izrazi jednadžbama $X = a \cos(\omega t)$, $Y = b \sin(\omega t)$ u sustavu osi izabranih duž osi pojedine elipse pa se izračuna energija u trenutku $t = 0$, za član potencijalne energije dobiva se $\frac{ka^2}{2}$, a za član kinetičke energije $\frac{m\omega^2 b^2}{2} = \frac{kb^2}{2}$. Dakle, $E = \frac{k(a^2 + b^2)}{2} = \frac{k(x_0^2 + L_0^2)}{2}$.

Stoga sve elipse imaju jednaki zbroj kvadrata poluosi i to $x_0^2 + L_0^2$.

Sad, ako je T točka koja prolazi bilo kojom trajektorijom, s duljinama poluosi a i b , onda je $|TA| + |TA'| \leq 2a \leq 2\sqrt{x_0^2 + L_0^2}$ pa imamo

$$|TA| + |TA'| \leq \sup(TA + TA') = 2\sqrt{x_0^2 + L_0^2}. \quad (3.10)$$

To znači da je područje točaka svih trajektorija unutar elipse C (i na samoj elipsi C) s

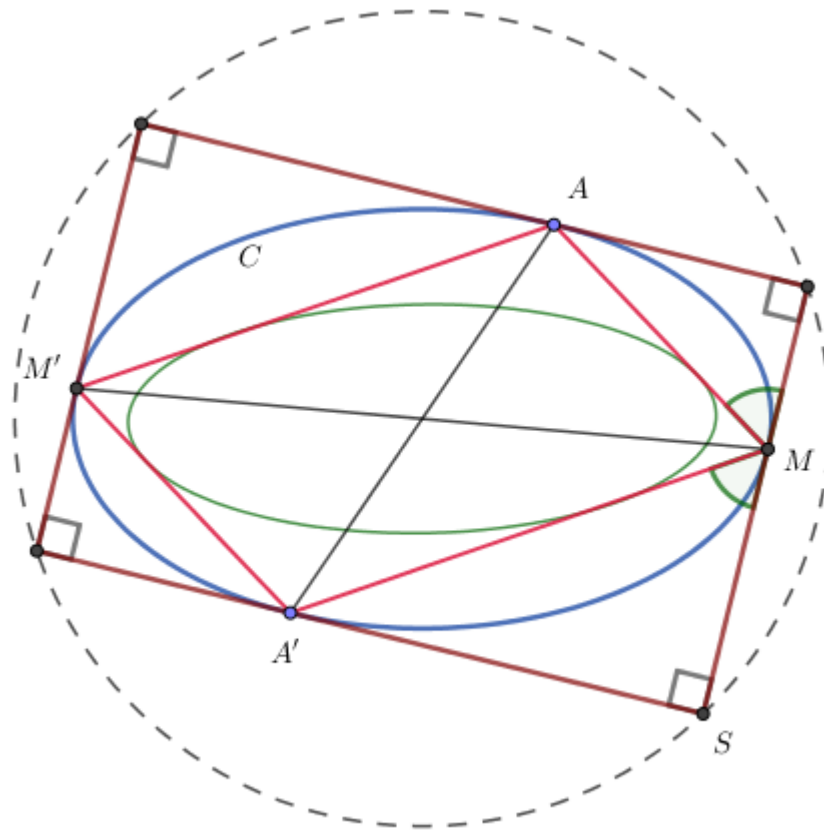
fokusima A, A' i velike osi duljine $2\sqrt{x_0^2 + L_0^2}$, a „sigurno područje“ izvan te elipse. No, uočimo da jednakost u (3.10) nije jasna sama po sebi, nego da je to posljedica Glavnog teorema. Upravo u svrhu zaključka kojim je pomoću (3.10) određena tražena omotaljka, Richard se zainteresirao za svojstvo elipse iskazano u tom teoremu. On navodi da taj rezultat nije baš široko poznat, a za dokaz se poziva na knjigu [6], gdje je to povezano s jednom posljedicom Ponceletovog teorema o familiji poligona koji su upisani jednoj konici, a opisani drugoj (tzv. Ponceletov porizam). O tome ćemo nešto više reći u Poglavlju 4.

Richard iskazuje teorem ovako: Ako su A i A' krajnje točke promjera zadane elipse, a M označava varijabilnu točku te elipse, onda maksimalna vrijednost zbroja udaljenosti $|MA| + |MA'|$ ne ovisi o izboru točke A te iznosi $2\sqrt{a^2 + b^2}$, pri čemu su a i b duljine poluosi elipse.

Zatim ističe bitne korake u razumijevanju ovog teorema, a mi ih možemo povezati s dokazom i zaključcima Glavnog teorema, osim što se nismo bavili svojstvom (5).

- (1) Maksimalna vrijednost $|TA| + |TA'|$ postiže se dvaput, uzmimo da su to točke označene s M i M' , i to tako da je $AMA'M'$ paralelogram.
- (2) Tangenta u točki M je simetrala kuta $\angle AMA'$.
- (3) Tangente u točkama A i M međusobno su okomite. Time je dobiven netrivialan rezultat da ako točka M daje maksimalnu vrijednost za $|MA| + |MA'|$, onda, obratno, A (ili A') daje maksimalnu vrijednost za $|AM| + |AM'|$.
- (4) Budući da tangente elipse C u točkama A, A', M i M' čine pravokutnik, vrhovi tog pravokutnika pripadaju ortoptičkoj krivulji elipse, a to je kružnica polumjera $\sqrt{a^2 + b^2}$.
- (5) Stranice paralelograma $AMA'M'$ diraju elipsu koja ima zajednička žarišta s elipsom C , a osi su joj duljine $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, odnosno $\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Uočimo da je kao (2) istaknuta činjenica koja se pokazala ključnom u dokazu Glavnog teorema, kako je izložen u Poglavlju 2. Richard navodi da se ta tvrdnja dokazuje pomoću varijacije 1. reda (dakle, netrivialno). I to ćemo još spomenuti u Poglavlju 4.



Slika 3.4:

Završno, Richard komentira kako se u pokušajima dokazivanja teorema pomoću diferencijalnog računa dobivaju nezgrapne jednačbe pa da se ova metoda, kombiniranjem fizike i elementarne geometrije, pokazuje kao jedna od najjednostavnijih. Sažetak je te metode da se krene od trajektorija (3.5), a zatim se izračuna omotaljka s jednačbom (3.9) u kojoj se lako prepoznaje elipsa s fokusima A i A' te glavnom osi duljine $2\sqrt{a^2 + b^2}$. Odatle slijedi da za točke T svake trajektorije vrijedi $|TA| + |TA'| \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}$, pri čemu se jednakost postiže kad trajektorija dodirne omotaljku.

Poglavlje 4

Još neki dokazi i poopćenja teorema

Nakon što smo u 2. poglavlju formulirali problem i izložili jedan dokaz Glavnog teorema, a u 3. poglavlju opisali njegovu fizikalno tumačenje, ovdje ćemo navesti još neke zanimljive činjenice o različitim pristupima problemu paralelograma maksimalnog opsega upisanih u elipsu te skicirati neka poopćenja koja su se pojavila u radovima srodne tematike.

Premda je osnovni rezultat zapravo poznat odavno (već smo spomenuli pozivanje na posljedicu jednog klasičnog Ponceletovog teorema), čini se kako je upravo članak [4] J. M. Richarda pobudio povećano zanimanje za ovu temu te potaknuo nekoliko daljnjih radova, poput onih A. Connesa i D. Zagiera [1] te N. Anghela [5]. Njihov je cilj bio da se problem istraži i drukčijim pristupom te poveže s nekim otprije poznatim ili pak još neotkrivenim matematičkim teoremima. Tako Connes i Zagier u uvodu svojeg članka navode da ih je s teoremom upoznao Jean-Pierre Bourguignon, istaknuti francuski matematičar u području diferencijalne geometrije, i to na temelju Richardovog članka, te da je postavio pitanje drukčijeg dokaza kakvim bi se dobio još bolji uvid u suštinu teorema. Ovi autori navode kako su, uz alternativne dokaze teorema, ukratko opisali i njegovu vezu s matematikom biljara, na što ih je naveo stručnjak za to područje, ruski matematičar Sergei Tabachnikov. Također, Connes i Zagier spominju, kao i Richard, dokaz Glavnog teorema u knjizi [6] velikog francuskog geometričara Marcela Bergera. U ovom kontekstu vrijedi uočiti da je upravo M. Berger bio voditelj doktorske disertacije J.-P. Bourguignona, a da je Alain Connes, koji se usputno pozabavio paralelogramima upisanim u elipsu, jedan od najvećih suvremenih matematičara, dobitnik Fieldsove medalje i autor rezultata koji povezuju duboke spoznaje iz teorijske fizike s naprednim matematičkim teorijama. Vidljivo je, dakle, kako je jedan lako razumljivi problem, odnosno teorem, zaintrigirao nekolicinu vrhunskih matematičara i fizičara, što ne može biti slučajno.

Vratimo se, međutim, na dokaz teorema iz 2. poglavlja, u kojem smo uglavnom slijedili pristup N. Anghela iz članka [5]. Glavni njegov cilj bio je poopćenje u smjeru karakterizacije klase krivulja koje imaju svojstvo da je svaka njihova točka vrh jedinstvenog paralelograma upisanog u tu krivulju i to svojstvom da je njihova ortoptička krivulja upravo kružnica. Umjesto elipse, Anghel promatra sve tzv. ovale s centrom, što znači glatke, strogo konveksne, centralno simetrične zatvorene ravninske krivulje (što, dakako, obuhvaća i elipsu) te dokazuje sljedeći teorem.

Teorem 4.0.1. (Teorem 1. [5])

Neka je C centralnosimetrični oval. Tada vrijedi da je svaka točka tog ovala vrh jednoznačno određenog paralelograma maksimalnog opsega upisanog u C ako i samo ako je ortoptička krivulja ovala C kružnica.

Ovaj teorem slijedi izravno iz Leme 2. u istom radu, koja glasi:

Neka je $ABCD$ paralelogram maksimalnog opsega među onima koji su upisani u dani centralnosimetrični oval C . Tada tangente ovala u vrhovima tog paralelograma čine jednake kutove sa stranicama paralelograma, redom (za „stol“ C , paralelogram je biljar perioda 4) i sijeku se međusobno u vrhovima pravokutnika $PQRS$, koncentričnog s ovalom C . Nadalje, opseg paralelograma $ABCD$ jednak je četverostrukom polumjeru kružnice opisane pravokutniku $PQRS$.

U dokazu Leme 2. Anghel koristi familiju elipsi sa žarištima A i C , što smo preuzeli za dokaz Teorema 2.0.1. Ta ideja dovodi do željenog rezultata i kad je riječ o centralnosimetričnom ovalu koji nije nužno baš elipsa, a Anghel pritom drukčije dokazuje paralelnost dviju stranica $ABCD$ sa spojnicom centra krivulje C i sjecišta tangenti u dva susjedna vrha. (U našoj varijanti dokaza imali smo paralelnost PQ' , QP' i OR pomoću Pascalovog teorema, kako je to argumentirano u [3], a jasno da Pascalov teorem nije primjenjiv ukoliko oval C nije krivulja 2. reda, to jest elipsa).

U svakom pristupu ključnom se pokazuje činjenica koju Richard navodi kao bitni korak (3) u svom komentaru Glavnog teorema: iz međusobne okomitosti tangenti u susjednim vrhovima upisanog paralelograma maksimalnog opsega slijedi da su ti vrhovi uzajamno pridruženi u smislu maksimalnosti, naime ako je M točka elipse koja maksimizira zbroj $|MA| + |MA'|$, onda A maksimizira zbroj $|AM| + |AM'|$. Ekvivalentno, u terminima pridruženih promjera elipse d i d' , kako se to označava u [1], involutorno je preslikavanje S koje promjeru d pridružuje promjer d' tako da opseg paralelograma s dijagonalama d i d' poprimi maksimalnu vrijednost, to jest $S^2(d) = d$.

U [1] se također naglašava da involutornost preslikavanja S proizlazi iz okomitosti tangenti u krajnjim točkama promjera d i $S(d)$, međutim u dokazu te okomitosti samo se kratko konstatira da su jednaki kutovi koje tangenta u krajnjoj točki promjera $S(d)$ čini sa stranicama paralelograma kojima je ta točka zajednički vrh. Richard je, naprotiv, istaknuo da se ta jednakost kutova (njegov bitan korak (2)) može dokazati pomoću varijacije 1. reda, a ni Anghel ne smatra to svojstvo očitim nego ga dokazuje na način naveden u dokazu Teorema 2.0.1. Ipak, Connes i Zagier ukazuju u svojoj 2. primjedbi iza dokaza Leme, da Berger u [6] okomitost tangenti izvodi projektivnom redukcijom elipse na kružnicu (jedna od uobičajenih metoda, u ovom radu doći će do izražaja u Poglavlju 5). Naime, pokazuje se da smjerovi promjera paralelograma upisanog elipsi čine par harmonički pridružen paru smjerova tangenti u krajnjim točkama promjera.

Ovaj pristup je vrlo elegantan, ali bismo za njega trebali dosta predznanja iz projektivne geometrije (relacija harmoniteta invarijanta je projektivne transformacije, a okomitost pravaca definira se kao njihova harmonička pridruženost s obzirom na tzv. par izotropnih pravaca). Uz takvo predznanje može se kod Bergera u odjeljku 17.4.2. pod naslovom „Kružnica kao konika“ vidjeti primjena na ortoptičku kružnicu u točki 17.4.2.3.

Dio članka [1] odnosi se na poopćenje Glavnog teorema u kojem promjeri d i d' mogu pripadati različitim, ali konfokalnim elipsama (elipsama sa zajedničkim fokusima). Rezultat je zapravo isti, da za svaku točku P elipse E postoji jedinstvena točka P' , odnosno centralnosimetrični par točaka P' i $-P'$ na njoj konfokalnoj elipsi E' tako da opseg paralelograma čije su dijagonale P i $-P$, odnosno P' i $-P'$ bude maksimalan.

Navedimo samo glavne korake računa, uz nešto promijenjene oznake u odnosu na [1].

Neka su konfokalne elipse smještene u Kartezijev koordinatni sustav na standardni način, tako da im jednadžbe glase

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ i } \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

Uvjet konfokalnosti glasi $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$, odakle možemo pisati $a^2 + b'^2 = a'^2 + b^2 = K$. Pokazuje se da poluopseg paralelograma zadanog točkama $P = (x, y)$ na jednoj i $P' = (x', y')$ na drugoj elipsi nije veći od $2\sqrt{K}$, pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako vrijedi

$$\frac{xx'}{(aa')^2} + \frac{yy'}{(bb')^2} = 0, \quad (4.1)$$

što je zapravo uvjet okomitosti tangenti u točkama P i P' na odgovarajuće elipse, jer taj uvjet glasi $\left(-\frac{b^2 x}{a^2 y}\right)\left(-\frac{b'^2 x'}{a'^2 y'}\right) = -1$.

Izravnim računom, uz pretpostavku da je ispunjen uvjet okomitosti, dobiva se da su udaljenosti P i P' , odnosno P i $-P'$ jednake, redom, $\sqrt{K}\left(1 - (a^2 - b^2)\frac{xx'}{(aa')^2}\right)$ i

$\sqrt{K} \left(1 + (a^2 - b^2) \frac{xx'}{(aa')^2} \right)$ pa je njihov zbroj upravo $2\sqrt{K}$.

(U [1] nedostaje faktor $a^2 - b^2$ u navedenim udaljenostima, jer očito je uvedeno normiranje $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 = 1$, bez gubitka općenitosti, samo što to nije izričito napisano). Daljnje zaključivanje nije lagano, jer se diferencijalnim računom pokazuje da je točka P stacionarna za funkciju koja joj pridružuje poluopseg paralelograma zadanog s P i P' ako je ispunjen uvjet okomitosti. Tada je $2\sqrt{K}$ ekstremna vrijednost poluopsega, a očito je to maksimum.

Ilustrirat ćemo prethodni rezultat numeričkim primjerom, ali za samo jednu elipsu.

Primjer 4.0.2.

Uzmimo elipsu $x^2 + 4y^2 = 1$. Tu je $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$.

Relacija (4.1) za okomitost tangenti u točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) glasi: $x_1x_2 + 16y_1y_2 = 0$.

Izaberimo točku $P_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$ i izračunajmo koordinate točke P_2 (bit će dva rješenja).

Iz okomitosti: $\frac{1}{2}x_2 + 4\sqrt{3}y_2 = 0$, zatim $\frac{x_2^2}{4} = 48y_2^2 = 12(1 - x_2^2)$.

Nadalje, $49\frac{x_2^2}{4} = 12$ i odavde $x_2 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$y_2 = \left(-\frac{1}{8}\sqrt{3} \right) \left(\pm \frac{4\sqrt{3}}{7} \right)$ pa se to svodi na $y_2 = -\frac{1}{14}, +\frac{1}{14}$.

Dakle, za P_2 imamo rješenja $\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}, -\frac{1}{14} \right)$ i $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{7}, \frac{1}{14} \right)$.

Za ovu elipsu dobivena formula daje $d(P_1, P_2) = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{3}{4}x_1x_2 \right)$.

Posebno, za $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ imamo $d(P_1, P_2) = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{14} \right)$.

To je po izvedenoj formuli, a izravno za euklidsku udaljenost dobivamo

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{7} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{14} \right)^2}.$$

Računom se provjeri da su dobivene vrijednosti jednake, dakle formula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} x_1x_2 \right)$$
 u ovom primjeru daje točan rezultat.

U ovom sažetom pregledu rezultata povezanih s Glavnim teoremom vrijedno je naglasiti povezanost s teorijom biljara u elipsi, što je bilo samo usputno spomenuto u iskazu Anghelove Leme 2. U završnom odjeljku [1] detaljnije se komentira ta veza, uključujući važno zapažanje da se Glavni teorem može izvesti iz osnovnog rezultata te teorije, tzv. potpune integrabilnosti sustava, pri čemu se upućuje na literaturu S. Tabachnikova. Pregled ćemo zaokružiti ponovnim pozivanjem na Bergerovu „Geometriju“.

U odjeljku 17.6.5. u [6] razmatraju se upravo poligoni maksimalnog opsega upisani u elipsu, uz naglašavanje „povratka Ponceletu“, budući da je u 16.6. pod naslovom „Veliki Ponceletov teorem“ detaljno analiziran glasoviti rezultat koji, najkraće rečeno, govori da ako za dvije zadane konike postoji n -terokut koji je upisan jednoj, a opisan drugoj, onda postoji beskonačno mnogo takvih n -terokuta.

Navedimo teorem pod točkom 17.6.6.2. u [6]:

Neka je C elipsa i $n \geq 3$ cijeli broj. Među konveksnim poligonima s n različitih vrhova upisanim u C postoje neki poligoni maksimalnog opsega. Točnije, postoji beskonačno mnogo takvih poligona s maksimalnim opsegom, a jedan vrh može se po volji izabrati na C . Nadalje, stranice svih takvih n -terokuta maksimalnog opsega tangente su jedne elipse C' , konfokalne sa C . (Dakako, pojedina C' ovisi o vrijednosti n , ali ne ovisi o izboru n -terokuta maksimalnog opsega upisanog u C).

U dokazu ovog teorema, pod točkom 17.6.6.2., primjenjuje se formula prve varijacije, a to Richard spominje kao mogući način dokaza koraka (2) u svojem radu, i to u biti za istu svrhu. Formula prve varijacije i nekoliko njezinih primjena predmet su odjeljka 9.10. u prvoj knjizi Bergerove „Geometrije“. Spomenimo na kraju zadatak 17.9.6. koji glasi: Pokažite da postoji beskonačno mnogo pravokutnika koji su opisani zadanoj elipsi C i upisani njezinoj ortoptičkoj kružnici.

Uska veza s Glavnim teoremom je očita, jer takvi su pravokutnici kod nas određeni tangentama u vrhovima paralelograma maksimalnog opsega.

Poglavlje 5

Paralelogrami maksimalne površine upisani u elipsu

Problem određivanja paralelograma maksimalne površine upisanih u elipsu pokazuje se znatno lakšim od prethodno razmatranog problema maksimalnog opsega. Naime, za ovu svrhu povoljno je iskoristiti činjenice da se elipsa može prikazati kao slika kružnice u perspektivnoj afinosti te da je za svako afino preslikavanje konstantan omjer površina nekog podskupa ravnine i njegove slike u tom afinom preslikavanju. Drukčije rečeno, omjer površina je invarijanta svakog afinog preslikavanja. Pomoću navedenih svojstava, za svako povezat ćemo paralelogram maksimalne površine upisan u zadanu elipsu s površinom kvadrata kao paralelograma maksimalne površine upisanog u kružnicu koja se primjenom perspektivne afinosti preslikava u tu elipsu. Također ćemo opisati familiju paralelograma upisanih u elipsu koje imaju površinu neke zadane vrijednosti, manje od maksimalne. Navedimo najprije nekoliko poznatih činjenica iz elementarne i afine geometrije [10] za koje ćemo navesti dokaz ili skicu dokaza.

Propozicija 5.0.1. *Svaki paralelogram upisan u kružnicu je pravokutnik. Među pravokutnicima upisanim u kružnicu polumjera r , najveću površinu ima kvadrat i ta površina iznosi $2r^2$.*

Dokaz. Budući da su u paralelogramu kutovi uz suprotne vrhove jednaki, a u tetivnom četverokutu zbroj suprotnih kutova je puni kut, u tetivnom paralelogramu svi kutovi moraju biti pravi. Dakle, paralelogram upisan u kružnicu je pravokutnik, a njegove dijagonale su, po Talesovom poučku, promjeri te kružnice. Površina tog pravokutnika jednaka je dvostrukoj površini pravokutnog trokuta kojem je hipotenuza promjer, dakle umnošku $2rv$, pri čemu je r polumjer kružnice, a v duljina visine iz vrha pravog kuta nad promjerom. Visina je očito najdulja kad je jednaka polumjeru, dakle kad je vrh pravog kuta na simetrali

ovog promjera. Ta površina je onda $2r \cdot r = 2r^2$.

□

Propozicija 5.0.2. *Neka je zadana perspektivna afinost za koju je smjer afinosti okomit na os, a koeficijent afinosti $\frac{|A'S|}{|AS|} = k$, pri čemu je A' slika točke A , a S je sjecište pravca AA' s osi. Tada se kružnica polumjera r u toj perspektivnoj afinosti preslikava u elipsu s duljinama poluosi r u smjeru osi afinosti i kr u smjeru zrake afinosti (okomito na os).*

Dokaz. Izaberemo li Kartezijev koordinatni sustav tako da os perspektivne afinosti bude os y , a zrake afinosti imaju smjer osi x , jednadžbe afinosti glase $x' = kx$, $y' = y$ pa se kružnica s jednadžbom $x^2 + y^2 = r^2$ preslikava u elipsu $\left(\frac{x'}{k}\right)^2 + (y')^2 = r^2$, odnosno $\left(\frac{x'}{kr}\right)^2 + \left(\frac{y'}{r}\right)^2 = 1$ s poluosima duljine kr i r .

□

Propozicija 5.0.3. *Neka je zadano afino preslikavanje f ravnine te neka su S_1 i S_2 dva podskupa ravnine čije su površine $P(S_1)$ i $P(S_2)$. Tada za površine $P(S'_1)$ i $P(S'_2)$, pri čemu je $S'_1 = f(S_1)$ i $S'_2 = f(S_2)$, vrijedi*

$$\frac{P(S_1)}{P(S_2)} = \frac{P(S'_1)}{P(S'_2)}. \quad (5.1)$$

Dakle, afino preslikavanje čuva omjer površina. Možemo pisati i ovako

$$\frac{P(S'_1)}{P(S_1)} = \frac{P(S'_2)}{P(S_2)}.$$

Općenito, ovo svojstvo može se dokazati na temelju činjenice da se primjenom afinog preslikavanja s jednadžbama $x' = ax + by + e$, $y' = cx + dy + f$, jedinični kvadrat preslikava u paralelogram površine $|\vec{u} \times \vec{v}|$ pri čemu je $\vec{u} = a\vec{i} + c\vec{j}$, $\vec{v} = b\vec{i} + d\vec{j}$, tako da je $|\vec{u} \times \vec{v}| = |ad - bc|$. Tako je determinanta matrice afinog preslikavanja faktor jednak $\frac{P(S')}{P(S)}$ za podskup S i njegovu sliku.

Ova činjenica dostatna je za dokaz da se afnim preslikavanjem ne mijenja omjer površina dvaju poligona (jer se poligoni mogu rastaviti u trokute), dok se za površinu kruga ili površinu omeđenu elipsom odgovarajući zaključak može izvesti primjenom limesa na prikladne nizove poligona.

Za prije opisanu perspektivnu afinost ovaj koeficijent jednak je k .

Sad ćemo navedene činjenice primijeniti na kružnicu polumjera r i perspektivnu afinost f s koeficijentom $k = \frac{a}{b}$, kojom se kružnica preslika u elipsu s duljinama poluosi $a = kr$ i $b = r$.

Znamo da je površina kruga polumjera r jednaka $r^2\pi$, a površina omeđena elipsom s poluosima a, b jednaka je $ab\pi$. U ovom slučaju ta površina iznosi $kr^2\pi$. Površina bilo kojeg kvadrata upisanog u kružnicu iznosi $2r^2$.

Prisjetimo se pojma i osnovnih svojstava konjugiranih dijametara (promjera) elipse. Svaka tetiva elipse koja prolazi njezinim središtem naziva se dijametar elipse. Znamo da se polovišta svih tetiva koje su paralelne jednom dijametru nalaze na drugom dijametru, a vrijedi i obrnuto. Tako po dva dijametra elipse čine parove konjugiranih dijametara. Tangente u krajnjim točkama dijametra paralelne su njegovom konjugiranom dijametru. Posebno, za kružnicu konjugirani su međusobno okomiti dijometri.

Kako se pri afinom preslikavanju čuva svojstvo paralelnosti i svojstvo polovišta, konjugirani dijometri elipse preslikavaju se u konjugirane dijemetre njezine slike. Posebno, kod perspektivne afinosti kojom se kružnica preslikava u elipsu ili obrnuto, međusobno okomiti promjeri kružnice preslikavaju se u konjugirane promjere elipse, a svaki par konjugiranih promjera elipse slika je nekog para okomitih promjera kružnice. Ovo svojstvo ćemo primijeniti u daljnjim zaključcima.

Zbog (5.1), slike bilo kojih dvaju kvadrata u ovoj afinosti, a to su dva paralelograma upisana u elipsu, čije dijagonale su konjugirani promjeri elipse (jer su to slike međusobno okomitih promjera kružnice), jednake su površine.

Ako je npr. $ABCD$ kvadrat čije su stranice paralelne sa zrakom odnosno osi afinosti (ujedno paralelne s osima elipse), slika tog kvadrata je pravokutnik $A'B'C'D'$ površine

$$k \cdot P(ABCD) = \frac{a}{r} \cdot 2r^2 = 2ar = 2ab.$$

Primijenimo li (5.1) na omjer površina kruga i upisanog kvadrata, imamo

$$\frac{r^2\pi}{2r^2} = \frac{\pi}{2} = \frac{kr^2\pi}{2ar} = \frac{\frac{a}{r}r^2\pi}{2ar} = \frac{ar\pi}{2ar},$$

jer je $ar\pi$ površina omeđena elipsom.

Zaključujemo da među svim paralelogramima upisanim u elipsu najveću površinu imaju oni koji su perspektivno affine slike kvadrata upisanih u kružnicu. Naime, ako je S bilo koji paralelogram upisan u elipsu, a S_0 paralelogram čije su dijagonale konjugirani promjeri, onda je

$$\frac{P(S)}{P(S_0)} = \frac{P(f^{-1}(S))}{P(f^{-1}(S_0))},$$

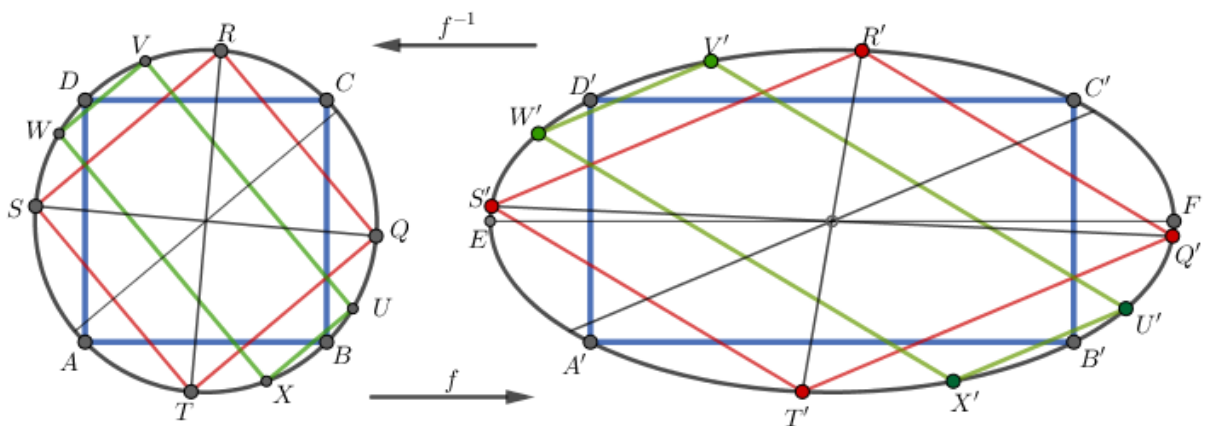
$f^{-1}(S_0)$ je kvadrat, a $f^{-1}(S)$ neki pravokutnik upisan u kružnicu, pa je $P(f^{-1}(S)) < P(f^{-1}(S_0))$, ako S nije kvadrat.

Na slici 5.1 je S paralelogram $U'V'W'X'$, $f^{-1}(S)$ je pravokutnik $UVWX$, a $QRST$ je kvadrat čije su stranice paralelne stranicama $UVWX$. Slika kvadrata $QRST$ je paralelogram $Q'R'S'T'$ čije su dijagonale konjugirani promjeri elipse. Time je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 5.0.4. *Maksimalna površina paralelograma upisanih u elipsu s poluosima a i b iznosi $2ab$. Tu maksimalnu površinu imaju oni i samo oni paralelogrami čije dijagonale su konjugirani promjeri elipse.*

Primijetimo da se kod izbora perspektivne afinosti mogao izabrati drukčiji koeficijent. Naime, da smo krenuli od elipse s poluosima a i b pa primijenili afinost f^{-1} u smjeru velike osi, koja elipsu preslikava u kružnicu polumjera b , onda bi koeficijent afinosti bio $k = \frac{b}{a}$, površina kvadrata upisanog kružnici iznosi tada $2b^2$, a površina paralelograma koji se preslikavaju u kvadrate iznosi

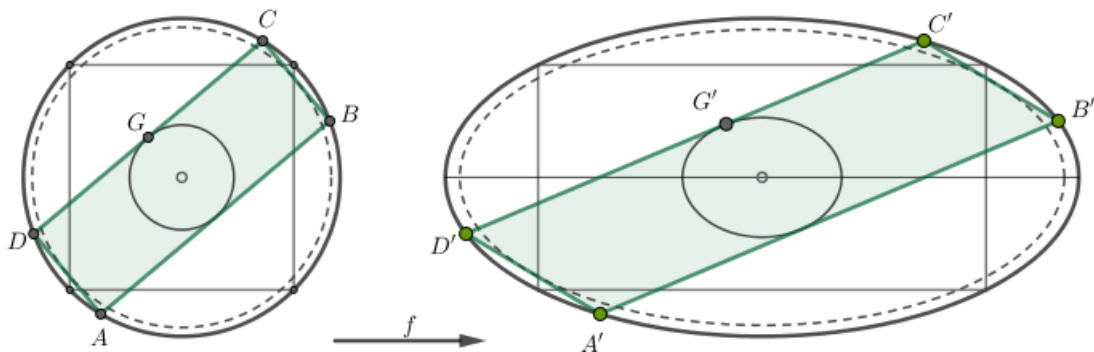
$$\frac{2b^2}{\frac{b}{a}} = 2ab.$$



Slika 5.1: Preslikavanje kružnice perspektivnom afinosti f u elipsu

Promotrimo sada paralelograme upisane u elipsu koji imaju površinu $P < 2ab$.

Već smo pokazali da među svim paralelogramima upisanim u elipsu najveću površinu imaju oni koji su perspektivno afine slike kvadrata upisanih u kružnicu i ta površina iznosi $2ab$. Kako bi perspektivno afina slika pravokutnika bio paralelogram zadane površine P , površina pravokutnika mora biti jednaka $\frac{bP}{a}$ tj. $\frac{rP}{a}$. Iz dokaza Propozicije 5.0.1. znamo da onda vrijedi $2rv = \frac{rP}{a}$, pri čemu je v duljina okomice iz vrha paralelograma na dijagonalu, a to je promjer kružnice.



Slika 5.2: Paralelogram zadane površine upisan u elipsu

Imamo $v = \frac{P}{2a}$. Izaberemo li neki promjer kružnice, vrijednost v određuje 4 točke na kružnici čija udaljenost od promjera iznosi v i to su vrhovi jednog od traženih pravokutnika. Lako se vidi da su udaljenosti središta kružnice od stranica pravokutnika konstantne, označimo ih s r_1 i r_2 , jer ovise samo o v . To znači da jedan par stranica pravokutnika dira kružnicu polumjera r_1 , a drugi par stranica kružnicu polumjera r_2 , pri čemu su obje kružnice koncentrične s početnom kružnicom koja je perspektivno afina slika elipse. Rotacijom bilo kojeg pravokutnika $ABCD$ određenog na taj način oko središta kružnica dobivaju se svi pravokutnici zadane površine. Njihove perspektivno afine slike su paralelogrami $A'B'C'D'$ koji su opisani dvjema elipsama, koncentričnima sa zadanom elipsom.

Bibliografija

- [1] A. Connes, D.Zagier, *A property of parallelograms inscribed in ellipses*, The American Mathematical Monthly 114 (10) (2007) 909-914
- [2] D.Guéry-Odelin, T. Lahaye, *Classical Mechanics Illustrated by Modern Physics*, Paul Sabatier University, France 2010.
- [3] D.Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb 1984.
- [4] J.-M.Richard, *Safe domain and elementary geometry*, European Journal of Physics, European Physical Society 25 (2004) 835-844.
- [5] N. Anghel, *A Maximal Parallelogram Characterization of Ovals Having Circles as Orthoptic Curves*, Forum Geometricorum 10 (2010) 21-25.
- [6] M. Berger, *Géométrie*, vol.2, Nathan, Paris, 1990.
- [7] *Orthoptic of an ellipse*, dostupno na:
https://en.wikipedia.org/wiki/Orthoptic_geometry (kolovoz 2018.)
- [8] *Parallelograms inscribed in Ellipse*, dostupno na:
<http://users.math.uoc.gr/pamfilos/eGallery/problems/ParaInscribedEllipse.html> (rujan 2018.)
- [9] *Parallelograms inscribed in Ellipse -2*, dostupno na:
<http://users.math.uoc.gr/pamfilos/eGallery/problems/ParaInscribedEllipse2.html> (rujan 2018.)
- [10] S. Varošanec, *Nacrtna geometrija*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, PMF–Matematički odsjek, dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/materijali/uvod.pdf> (rujan 2018.)

Sažetak

Među mnogobrojnim svojstvima paralelograma upisanih u elipsu, u ovom radu su istaknuta dva koja su povezana s maksimalnim opsegom i maksimalnom površinom paralelograma.

Koristeći neke elementarne činjenice o krivuljama drugog reda iz affine i projektivne geometrije, dokazan je Glavni teorem koji kaže da su paralelogrami maksimalnog opsega upisani u elipsu karakterizirani svojstvom da su tangente elipse u susjednim vrhovima paralelograma međusobno okomite, te da je svaka točka elipse vrh točno jednog takvog paralelograma.

U radu je opisano i fizikalno tumačenje problema određivanja svih paralelograma maksimalnog opsega upisanih u zadanu elipsu koji je Jean-Marc Richard povezo s problemom iz balistike o određivanju „sigurnog područja“ za familiju putanja hitaca, odnosno satelita.

Nadalje, izloženi su još neki alternativni dokazi i poopćenja Glavnog teorema koje su naveli A. Connes i D. Zagier. Opisani su i rezultati N. Anghela čiji je glavni cilj bio poopćenje u smjeru karakterizacije klase krivulja kojima je ortoptička krivulja kružnica. Pozivanjem na nekoliko stavaka iz Bergerove „Geometrije“ zaokružen je pregled prethodno izloženih rezultata te je istaknuta veza s klasičnim Ponceletovim teoremom o poligonima upisanim u jednoj, a opisanima drugoj zadanoj krivulji 2. reda.

Na kraju rada je izloženo rješenje problema u vezi određivanja paralelograma maksimalne površine upisanih u elipsu koristeći činjenicu da se elipsa može prikazati kao slika kružnice u perspektivnoj afinosti te da je omjer površina invarijanta svakog afinog preslikavanja.

Summary

Among the many properties of parallelograms inscribed in the ellipse, here are presented two of these which are related to the maximal perimeter and maximal area of the parallelogram.

Using some elementary facts about curves of the second order from affine and projective geometry, the Main Theorem is proven, asserting that parallelograms of maximal perimeter, inscribed in an ellipse, are characterized by the fact that the tangents of ellipse at adjacent vertices of the parallelogram are mutually perpendicular. Moreover, each point of the ellipse is a vertex of exactly one such parallelogram.

A physical interpretation of the problem of determining all parallelograms of maximal perimeter inscribed in a given ellipse is also described in this paper. Jean-Marc Richard associated this problem to a problem from ballistics, namely determining the "safe domain" for the family of trajectories of projectiles or satellites.

Furthermore, some alternative proofs and generalizations of the Main Theorem are presented, as stated by A. Connes and D. Zagier. Some related results of N. Anghel are described as well, his main goal being a characterization of a larger class of curves whose orthoptic curve is a circle. By referring to several items from M. Berger's "Geometry", a review of previously presented results is completed, indicating also a link to the classic Poncelet theorem on polygons inscribed in one given conic and circumscribed about another given conic. In the final chapter, a solution to the problem of determining parallelograms with maximal area inscribed in an ellipse is presented, using a representation of the ellipse as the image of a circle in perspective affinity and the affine invariance of the ratio of areas.

Životopis

Rođena sam 14.7.1991. godine u Vinkovcima. Završila sam „Ekonomsku i trgovačku školu Ivana Domca Vinkovci“ 2010. godine, smjer ekonomist. Iste godine sam upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički, na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2016. sam upisala diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.