Binomni model kamatnih stopa

Labaš, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Labaš

BINOMNI MODEL KAMATNIH STOPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se binomnim modelom kamatnih stopa koji predstavlja najjednostavniji model za razumijevanje teorije arbitraže te određivanje cijena različitih financijskih instrumenata. Model je izgrađen u diskretnom vremenu ali uz dovoljan broj koraka vrlo dobro aproksimira neprekidne modele.

Financijski instrumenti mogu biti osnovni ili izvedeni. Osnovni instrumenti su oni čija cijena ne ovisi ni o kojem drugom instrumentu na tržištu, na primjer obveznice. Suprotno tome, izvedeni financijski instrumenti (financijske izvedenice) su oni čija vrijednost ovisi o nekom drugom instrumentu. U tu skupinu pripadaju različite vrste ugovora, primjerice swap, forward i futures ugovori. Na cijene obje vrste instrumenata utječu promjene trenutnih kamatnih stopa na tržištu a njihov utjecaj opisan je binomnim modelom.

Rad započinjemo ponavljanjem osnovnih rezultata iz teorije vjerojatnosti i slučajnih procesa koji su nam neophodni za razumijevanje modela. Zatim navodimo glavne pretpostavke o prostoru na kojem izgrađujemo model. Prvo razrađujemo teoriju primjenjenu na beskuponske obveznice a onda je proširujemo i na financijske izvedenice. Cijelo vrijeme u obzir uzimamo pretpostavku o nearbitražnom tržištu te stoga razvijamo model uz korištenje martingalne mjere. Kao alternativni način računanja cijena izvedenica, uvodimo forward mjeru. Na samom kraju, naglasak stavljamo na forward i futures ugovore te definiramo glavne razlike između ta dva vrlo bitna oblika investicija na suvremenom tržištu.

Poglavlje 2

Ponavljanje

Da bismo lakše i detaljnije mogli razumijeti teoriju na kojoj se temelji naš model, moramo se prisjetiti nekih osnovnih matematičkih pojmova iz područja teorije vjerojatnosti i slučajnih procesa.

2.1 Mjera i teorija vjerojatnosti

Uzmimo odmah na početku da je Ω proizvoljan neprazan skup i sa $\mathcal{P}(\Omega)$ označimo njegov partitivni skup.

Definicija 2.1.1. *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω zove se σ-algebra skupova ako vrijedi:*
(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{F}$,
(iii) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija 2.1.2. *Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na skupu Ω. Tada kažemo da je uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor.*

Definicija 2.1.3. *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebra. Mjera je svaka funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ koja zadovoljava sljedeća dva svojstva:*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) Ako je $A_i, i \in \mathbb{N}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$, tada je

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Mjera je vjerojatnosna ako je $\mu(\Omega) = 1$.

Definicija 2.1.4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Vjerojatnost je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri svojstva:*
(i) Za sve $A \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(A) \geq 0$,
(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
(iii) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Definicija 2.1.5. *Uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *zove se vjerojatnosni prostor.*

Pomoću navedenih aksioma vjerojatnosti može se pokazati da vrijedi slijedećih nekoliko svojstava.

Teorem 2.1.6. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi:*
(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
(b) Za svaki niz $A_1, ..., A_n, n \in \mathbb{N}$ *po parovima disjunktnih događaja iz* $\mathcal{F}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

(c) Za $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi* $\mathbb{P}(A^{\complement}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
(d) Za $A, B \in \mathcal{F}, A \subseteq B$ *vrijedi* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$,
(e) Za $A, B \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

(f) Za $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Definicija 2.1.7. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor te* A *i* B *događaji iz* $\mathcal{F}$. *Kažemo da su* A *i* B *nezavisni ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Definicija 2.1.8. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $B \in \mathcal{F}$ *takav da je* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Uvjetna vjerojatnost događaja* A *uz dano* B *dana je formulom*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Budući da je uvjetna vjerojatnost također funkcija nad događajima iz σ-algebre $\mathcal{F}$, s vrijednostima na intervalu [0,1], ona zadovoljava svojstva analogna onima iz Teorema 2.1.6. Dakle, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.1.9. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $B \in \mathcal{F}$ *takav da je* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Tada vrijedi:*
(a) $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$,
(b) Za $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi* $\mathbb{P}(A^{\complement}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$,
(c) Za $A_1, A_2 \in \mathcal{F}, A_1 \subseteq A_2$ *vrijedi* $\mathbb{P}(A_1|B) \leq \mathbb{P}(A_2|B)$,
(d) Za $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B),$$

(e) Za $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B).$$

2.2 Slučajne varijable

Jedan od bitnijih pojmova koji će se pojavljivati tijekom cijelog rada su izmjerive funkcije pa ovaj odjeljak započinjemo njihovom definicijom.

Definicija 2.2.1. *Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ dva izmjeriva prostora. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$, tj. $(\forall A \in \mathcal{G})(f^{-1}(A) \in \mathcal{F})$.*

Fiksirajmo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ čije smo sastavnice već ranije objasnili. Označimo sa $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovu σ-algebru nad $\mathbb{R}$. To je σ-algebra čije elemente nazivamo Borelovim skupovima a generirana je familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. Borelovu σ-algebru na d-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$ označavamo s $\mathcal{B}_d$.

Definicija 2.2.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$. Slučajni vektor na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_d)$.*

Kako uz elementarne događaje prvenstveno vežemo pojam vjerojatnosti, tako za slučajne varijable najčešće izračunavamo njihovo očekivanje. U nastavku navodimo općenitu definiciju očekivanja slučajne varijable.

Definicija 2.2.3. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla. Kažemo da X ima matematičko očekivanje ako vrijedi*

$$\mathbb{E}|X| := \int_\Omega |X| d\mathbb{P} = \int_\Omega |X|(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty$$

Tada matematičko očekivanje od X definiramo kao

$$\mathbb{E}X := \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Drugim riječima, slučajna varijabla X ima očekivanje samo ako je integrabilna, i tada je očekivanje jednako upravo integralu od X u odnosu na mjeru $\mathbb{P}$. Jedno od osnovnih obilježja slučajnih varijabli jesu pripadne funkcije distribucije s kojima se i najčešće efektivno operira.

Definicija 2.2.4. *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vjerojatnost inducirana slučajnom varijablom X, odnosno distribucija od X, je funkcija $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \to [0, 1]$ definirana kao*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Funkcija distribucije slučajne varijable X je funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ za koju vrijedi $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Tada zapravo vrijedi slijedeći niz jednakosti

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in \langle -\infty, x]) = \mathbb{P}_X(\langle -\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Razlikujemo dvije temeljne vrste slučajnih varijabli, diskretne i neprekidne. Naš model razvijamo u diskretnom vremenu pa moramo pažnju usmjeriti na definicije koje vrijede na diskretnom vjerojatnosnom prostoru.

Definicija 2.2.5. *Slučajna varijabla X je diskretna ukoliko postoji konačan ili prebrojiv skup $D \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $\mathbb{P}_X(D) = \mathbb{P}(X \in D) = 1$.*

Dakle, diskretna slučajna varijabla X na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je određena skupom $D = \{a_1, a_2, ...\}$, $\mathbb{P}(X \in D) = 1$ i brojevima $p_i = \mathbb{P}(X = a_i) = \mathbb{P}_X(\{a_i\}), i = 1, 2, ...$ Tada njezinu razdiobu zapisujemo tablično kao

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Sada jednostavno možemo zaključiti da vrijedi

$$\mathbb{P}_X = \sum_i p_i \delta_{a_i},$$

gdje je $\delta_{a_i}(X) = \mathbf{1}_X(a_i)$. Primjenimo li prethodni rezultat na definiciju očekivanja slučajne varijable, dobivamo definiciju specifičnu za diskretnu slučajnu varijablu. Diskretna slučajna varijabla X ima očekivanje ako vrijedi

$$\mathbb{E}|X| = \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} |x| d\Big(\sum_i p_i \delta_{a_i}\Big) = \sum_i |a_i| p_i < \infty.$$

U tom slučaju očekivanje dobijemo kao

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X = \sum_i a_i p_i.$$

Sada kada smo definirali uvjetnu vjerojatnost i pojam očekivanja slučajne varijable, možemo pogledati kako bi izračunali očekivanje slučajne varijable uvjetno na događaj A ili očekivanje uvjetno na σ-podalgebru od $\mathcal{F}$.

Definicija 2.2.6. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla koja ima očekivanje i $A \in \mathcal{F}$ događaj pozitivne vjerojatnosti. Uvjetno očekivanje od X uz dano A definiramo kao*

$$\mathbb{E}[X|A] = \mathbb{E}_A X = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}_A.$$

Za uvjetno očekivanje iz prethodne definicije može se pokazati da vrijedi i formula

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]}{\mathbb{P}(A)}.$$

Definicija 2.2.7. *Neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$ generirana prebrojivom particijom $A_1, A_2, ...$ te neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla koja ima očekivanje. Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathcal{G}$ definiramo kao*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := \sum_i \mathbb{E}[X|A_i] \mathbf{1}_{A_i} = \sum_i \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i} X]}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}.$$

Drugim riječima, ako je $\omega \in A_i$, tada vrijedi $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[X|A_i]$.

Kasnije ćemo gore navedene definicije morati uskladiti s vjerojatnosnim prostorom prikladnim za naš model.

2.3 Slučajni procesi

U ovom odjeljku navodimo definiciju slučajnih procesa te uvodimo pojmove martingala, submartingala i supermartingala te neka od svojstava koja su karakteristična za takve procese.

Definicija 2.3.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i neka je za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ X_n slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$. Familija $X = (X_n : n \geq 0)$ naziva se slučajni proces s diskretnim vremenom.*

Razmišljajući o slučajnim procesima, često se pitamo o njihovim svojstvima adaptiranosti i predvidivosti. Kako bismo ta svojstva preciznije opisali, prvo definiramo pojam filtracije. Filtracija je rastući niz σ-algebri pomoću kojeg iz trenutka u trenutak koristimo sve veću količinu informacija prikupljenih u diskretnim trenucima. Matematički preciznije objašnjenje daje nam sljedeća definicija.

Definicija 2.3.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ za svaki $n \geq 0$ zove se filtracija.*

Definicija 2.3.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor.*
(a) Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ je adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ ako je za svaki $n \geq 0$ slučajna varijabla X_n izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_n$.
(b) Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 1)$ je predvidiv s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ ako je za svaki $n \geq 1$ slučajna varijabla X_n izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_{n-1}$.

Budući da smo naveli najvažnija moguća svojstva slučajnih procesa, sada možemo uvesti klasifikaciju s obzirom na to koliko procesi ta svojstva stvarno zadovoljavaju.

Definicija 2.3.4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ filtracija i $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces. Pretpostavimo da je X adaptiran s obzirom na $\mathcal{F}$ te da je $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ za sve $n \geq 0$.*
(a) X je martingal ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \quad g.s., \quad \forall n \geq .0$$

(b) X je supermartingal ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n \quad g.s., \quad \forall n \geq 0.$$

(c) X je submartingal ako vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \quad g.s., \quad \forall n \geq 0.$$

Možemo uočiti da je martingal vrsta slučajnog procesa koja ima konstantno očekivanje. U sljedećem teoremu navedena su još neka svojstva.

Teorem 2.3.5. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ integrabilni slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$.*
(a) Ako je X martingal, tada za sve $0 \leq m < n$ vrijedi

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m \quad g.s.$$

(b) Ako je X supermartingal, tada za sve $0 \leq m < n$ vrijedi

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \leq X_m \quad g.s.$$

Ovime završavamo poglavlje ponavljanja osnovnih rezultata koje ćemo primjenjivati kroz cijeli rad. Treće poglavlje započinjemo opisom matematičke okoline u kojoj ćemo razviti model te ga kasnije razraditi kroz razne primjere.

Poglavlje 3

Imovina ovisna o kamatnoj stopi

Kako bismo što bolje opisali svojstva binomnog modela kamatnih stopa, moramo svoje istraživanje ograničiti na specifične klase imovine, čija vrijednost ovisi o kamatnoj stopi. Proučavat ćemo različite vrste imovine s fiksnim prihodom. Najjednostavnija od njih je *beskuponska obveznica*. Takvu vrstu obveznice možemo definirati kao vrstu dužničkog vrijednosnog papira, kojim se izdavatelj obvezuje da će izvršiti samo jednu isplatu na određeni budući datum, tzv. datum dospijeća, i ta isplata će biti jednaka nominalnoj vrijednosti obveznice. Dakle, u trenucima prije dospijeća, vrijednost takve obveznice manja je od njezine nominalne vrijednosti. Stoga, prinos beskuponske obveznice na dan dospijeća definiramo kao konstantnu kamatnu stopu uz koju cijena plaćena u trenutku 0, dolazi na razinu nominalne vrijednosti u trenutku dospijeća. Prethodna činjenica navodi nas na zaključak da se beskuponska obveznica može formirati uz bilo koje vrijeme dospijeća tako da prilagodimo spomenutu konstantnu kamatu. Ovime dolazimo do mogućnosti ostvarivanja arbitraže. *Arbitražu* možemo definirati kao ulaganje u portfelj koji nas u početnom trenutku ne košta ništa a u kasnijim trenucima nije izložen riziku te nam u barem jednom ishodu donosi strogo pozitivan profit, tj. vjerojatnost da se ostvari profit veća je od 0. Kako bismo postigli da model ne dopušta arbitražu, za određivanje cijena imovine, uvest ćemo mjeru neutralnu na rizik.

3.1 Binomni model kamatnih stopa

Pretpostavimo da rizičnu imovinu modeliramo na sljedeći način: između dva uzastopna perioda, relativna promjena cijene je ili a ili b, gdje je $-1 < a < b$. Zato definiramo skup $\Omega_1 = \{a, b\}$ te označimo s $\widetilde{\mathbb{P}}_1$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$. Promjene možemo promatrati u N različitih trenutaka. Stoga za prostor elementarnih događaja Ω uzimamo Kartezijev produkt skupa $\{a, b\}$. Dakle,

$$\Omega = \Omega_1^N = \{a, b\}^N.$$

Uočimo da se Ω sastoji od N-torki $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N)$ gdje za $n = 1, 2, ..., N$, vrijedi ili $\omega_n = a$ ili $\omega_n = b$. Za vjerojatnost $\widetilde{\mathbb{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ uzimamo produktnu vjerojatnost

$\widetilde{\mathbb{P}}_1^N$. Dakle vrijedi $\widetilde{\mathbb{P}} = \widetilde{\mathbb{P}}_1^N$.

Neka je $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, ..., N\}$ filtracija na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ uz $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Definiramo *proces kamatne stope* kao predvidiv slučajni proces koji se sastoji od niza slučajnih varijabli

$$R_0, R_1, ..., R_{N-1}$$

pri čemu R_0 nije slučajan. Predvidivost u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$ znači da je slučajna varijabla R_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva za sve $n \geq 1$ te je R_0 $\mathcal{F}_0$-izmjeriva. U našem slučaju vrijedi da sve dostupne informacije u trenutku n čine one kamatne stope koje su vrijedile u nekim trenucima prije trenutka n, zajedno s kamatnom stopom koja vrijedi u trenutku n. Dakle, poznati su nam $R_0, R_1, ..., R_n$. Ovakvim razmatranjem uočavamo koja je razlika između investicije na novča-nom tržištu i investiranja u dionice. Investiranjem u dionice u trenutku n, mi ne znamo koliko će ta investicija vrijediti u trenutku $n + 1$, ali ako na novčanom tržištu uložimo 1 kunu u trenutku n, znamo da će ona vrijediti $1 + R_n$ u trenutku $n + 1$ jer tada znamo koja kamatna stopa će se primjenjivati na tržištu od trenutka n do trenutka $n + 1$. Prirodno je pretpostaviti da vrijedi $R_n > 0$ za svaki n i za svaku N-torku $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N)$.
Nadalje, definiramo *diskontirani proces kamatne stope*, koji također zadovoljava svojstvo predvidivosti, kao

$$D_n = \frac{1}{(1 + R_0)...(1 + R_{n-1})}, \quad n = 1, 2, ..., N; \quad D_0 = 1.$$

Označimo sada sa S_n cijenu neke imovine u trenutku n, za $n = 0, 1, ..., N$. Tada *diskontiranu vrijednost imovine* u trenutku n definiramo kao

$$\widetilde{S}_n = D_n S_n, \quad n = 0, 1, ..., N.$$

Sada imamo sve što nam je potrebno da bismo definirali ekvivalentnu martingalnu mjeru.

Definicija 3.1.1. *Vjerojatnosna mjera $\widetilde{\mathbb{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ je martingalna mjera ili mjera neutralna na rizik ako za sve diskontirane cijene $\widetilde{S}_n$, $n = 1, ..., N - 1$ vrijedi*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \widetilde{S}_n$$

Ekvivalentno, $\widetilde{\mathbb{P}}$ je martingalna mjera ako su diskontirane cijene financijskih imovina $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingali.
Posebno, objektivna vjerojatnost $\mathbb{P}$ (uz koju očekujemo veći povrat za investiciju većeg rizika) i vjerojatnost $\widetilde{\mathbb{P}}$ su ekvivalentne i pišemo $\widetilde{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P}$, ukoliko vrijedi $\widetilde{\mathbb{P}}[A] = 0$ ako i samo ako je $\mathbb{P}[A] = 0$.

Navodimo sljedeći teorem kako bismo opravdali uvođenje ekvivalentne martingalne mjere u naš model.

Teorem 3.1.2 (Fundamentalni teorem određivanja cijene imovine)**.** *Model tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Neka je X uplata primljena u trenutku m (X ovisi samo o $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$). Iz Definicije 3.1.1 slijedi formula za računanje cijene neutralne na rizik u trenutku 0:

$$S_{0,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[D_m X].$$

Dakle, jednaka je očekivanju neutralnom na rizik od diskonta uplate. Koristeći navedenu formulu, definiramo cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0, koja isplaćuje 1 u trenutku dospijeća m, kao

$$B_{0,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[D_m]. \tag{3.1}$$

Da bismo odredili koliki je prinos na takvu obveznicu, poistovjećujemo investiciju iznosa 1 u obveznicu dospijeća m s ukamaćivanjem 1 kune po konstantnoj kamatnoj stopi y_m, u vremenu od 0 do m. Takvom investicijom možemo kupiti $\frac{1}{B_{0,m}}$ obveznica te će nam u trenutku m biti isplaćen iznos $\frac{1}{B_{0,m}}$. Prema tome, vrijedi jednakost

$$\frac{1}{B_{0,m}} = (1 + y_m)^m,$$

odnosno, prinos na obveznicu iznosi

$$y_m = \left(\frac{1}{B_{0,m}}\right)^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Primjer 3.1.3. *Neka je* $N = 3$ *i neka je*
$\Omega = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$. *Pretpostavimo da su vjerojatnosti jednake*

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,a)\} = \frac{2}{9}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,b)\} = \frac{1}{9}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,a)\} = \frac{1}{12}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,b)\} = \frac{1}{12}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,a)\} = \frac{1}{6}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,b)\} = \frac{1}{12}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,a)\} = \frac{1}{8}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,b)\} = \frac{1}{8}.$$

Definiramo skupove svih mogućih kombinacija ishoda u prva dva koraka:

$$A_{aa} = \{\omega_1 = a, \omega_2 = a\} = \{(a,a,a),(a,a,b)\}$$

$$A_{ab} = \{\omega_1 = a, \omega_2 = b\} = \{(a,b,a),(a,b,b)\}$$

$$A_{ba} = \{\omega_1 = b, \omega_2 = a\} = \{(b,a,a),(b,a,b)\}$$

$$A_{bb} = \{\omega_1 = b, \omega_2 = b\} = \{(b,b,a),(b,b,b)\}.$$

Za njih vrijedi

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{aa}\} = \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,b)\} = \frac{1}{3},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ab}\} = \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,b)\} = \frac{1}{6},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ba}\} = \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,b)\} = \frac{1}{4},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{bb}\} = \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,b)\} = \frac{1}{4}.$$

Analogno definiramo i skupove

$$A_a = \{\omega_1 = a\} = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b)\}$$

$$A_b = \{\omega_1 = b\} = \{(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$$

za koje vrijedi

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_a\} = \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,b)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,b)\} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_b\} = \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,b)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,b)\} = \frac{1}{2}.$$

Možemo izračunati još i vjerojatnosti ishoda u trećem koraku, uvjetno na rezultate prva dva koraka. Koristimo činjenicu da ako u prva dva koraka imamo ishode aa tada znamo da je konačni ishod u skupu A_{aa}.

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = a | \omega_1 = a, \omega_2 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{aa}\}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = b | \omega_1 = a, \omega_2 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{aa}\}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = a | \omega_1 = a, \omega_2 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ab}\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = b | \omega_1 = a, \omega_2 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ab}\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = a | \omega_1 = b, \omega_2 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ba}\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = b | \omega_1 = b, \omega_2 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ba}\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = a | \omega_1 = b, \omega_2 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{bb}\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = b | \omega_1 = b, \omega_2 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{bb}\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Koristeći skupove koje smo definirali na početku primjera, možemo izračunati i vjerojatnosti ishoda u drugom koraku uvjetno na ishod prvog koraka. Na primjer, ako se cijena promijenila 3 puta i u prvom se koraku promijeni za a, tada znamo da je cjelokupni ishod u skupu A_a. Ako je i u drugom koraku promjena jednaka a, onda je cjelokupni ishod u skupu A_{aa}. Zato je vjerojatnost da je u drugom koraku promjena a, uz uvjet da je u prvom isto bila a, jednaka omjeru vjerojatnosti skupova A_{aa} i A_a. Analogno dobivamo i ostale.

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a|\omega_1 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{aa}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_a\}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b|\omega_1 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ab}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_a\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a|\omega_1 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ba}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_b\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b|\omega_1 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{bb}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_b\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Izračunate vjerojatnosti možemo prikazati pomoću binomnog stabla na slici 3.1. Pritom uvjetne vjerojatnosti predstavljaju prijelazne vjerojatnosti između čvorova stabla pa su zato ispisane na granama, dok su vjerojatnosti koje smo si početno zadali, ispisane na desnim krajevima stabla.

Da bi primjer bio potpun, računamo još vjerojatnosti ishoda drugog i trećeg koraka, uvjetno na ishod prvog koraka

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a, \omega_3 = a|\omega_1 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_a\}} = \frac{4}{9}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a, \omega_3 = b|\omega_1 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_a\}} = \frac{2}{9}$$

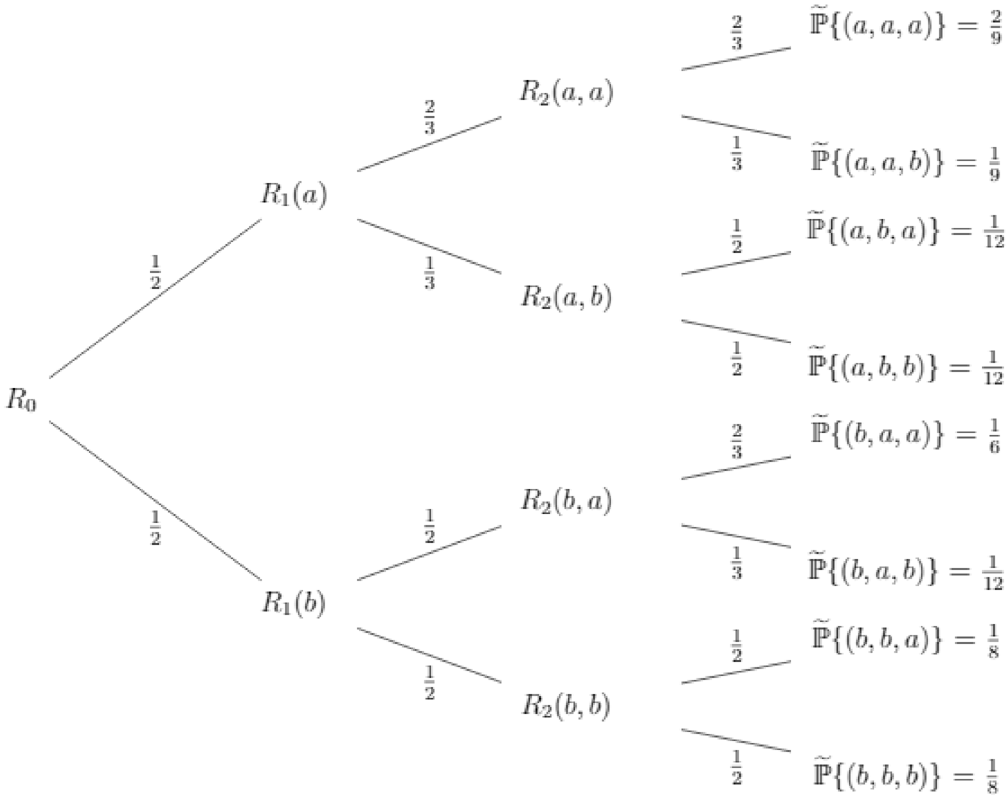
$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b, \omega_3 = a|\omega_1 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_a\}} = \frac{1}{6}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b, \omega_3 = b|\omega_1 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_a\}} = \frac{1}{6}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a, \omega_3 = a|\omega_1 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_b\}} = \frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a, \omega_3 = b|\omega_1 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_b\}} = \frac{1}{6}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b, \omega_3 = a|\omega_1 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_b\}} = \frac{1}{4}$$



Slika 3.1: Binomno stablo s pripadajućim vjerojatnostima

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b, \omega_3 = b | \omega_1 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_b\}} = \frac{1}{4}$$

Neka je sada $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla. Računamo njezino očekivanje uvjetno na prvi korak.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = a] &= X(a,a,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a, \omega_3 = a|\omega_1 = a\} \\
&\quad + X(a,a,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a, \omega_3 = b|\omega_1 = a\} \\
&\quad + X(a,b,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b, \omega_3 = a|\omega_1 = a\} \\
&\quad + X(a,b,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b, \omega_3 = b|\omega_1 = a\} \\
&= \frac{4}{9}X(a,a,a) + \frac{2}{9}X(a,a,b) + \frac{1}{6}X(a,b,a) + \frac{1}{6}X(a,b,b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = b] = X(b,a,a)&\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a, \omega_3 = a|\omega_1 = b\} \\
&+ X(b,a,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = a, \omega_3 = b|\omega_1 = b\} \\
&+ X(b,b,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b, \omega_3 = a|\omega_1 = b\} \\
&+ X(b,b,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2 = b, \omega_3 = b|\omega_1 = b\} \\
&= \frac{1}{3}X(b,a,a) + \frac{1}{6}X(b,a,b) + \frac{1}{4}X(b,b,a) + \frac{1}{4}X(b,b,b)
\end{aligned}$$

Možemo primjetiti da dobivamo slučajnu varijablu na Ω koja ovisi o ishodu prvog koraka. Slično možemo izračunati i očekivanje od X uvjetno na prva 2 koraka:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = a, \omega_2 = a] &= X(a,a,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = a|\omega_1 = a, \omega_2 = a\} \\
&\quad + X(a,a,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = b|\omega_1 = a, \omega_2 = a\} \\
&= \frac{2}{3}X(a,a,a) + \frac{1}{3}X(a,a,b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = a, \omega_2 = b] &= X(a,b,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = a|\omega_1 = a, \omega_2 = b\} \\
&\quad + X(a,b,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = b|\omega_1 = a, \omega_2 = b\} \\
&= \frac{1}{2}X(a,b,a) + \frac{1}{2}X(a,b,b) \\
\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = b, \omega_2 = a] &= X(b,a,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = a|\omega_1 = b, \omega_2 = a\} \\
&\quad + X(b,a,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = b|\omega_1 = b, \omega_2 = a\} \\
&= \frac{2}{3}X(b,a,a) + \frac{1}{3}X(b,a,b) \\
\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = b, \omega_2 = b] &= X(b,b,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = a|\omega_1 = b, \omega_2 = b\} \\
&\quad + X(b,b,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3 = b|\omega_1 = b, \omega_2 = b\} \\
&= \frac{1}{2}X(b,b,a) + \frac{1}{2}X(b,b,b)
\end{aligned}$$

Ovako definirano očekivanje je također slučajna varijabla na Ω a ovisi o prva dva koraka. Za kraj primjera, gornje izračune zato možemo jednostavnije interpretirati na sljedeći način

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = a] = \Big(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\Big)X(a,a) + \Big(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\Big)X(a,b) = \frac{2}{3}X(a,a) + \frac{1}{3}X(a,b)$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = b] = \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\Big)X(b,a) + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big)X(b,b) = \frac{1}{2}X(b,a) + \frac{1}{2}X(b,b)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = a, \omega_2 = a] = X(a,a), \quad \widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = a, \omega_2 = b] = X(a,b) \\
\widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = b, \omega_2 = a] = X(b,a), \quad \widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = b, \omega_2 = b] = X(b,b).
\end{aligned}$$

Formule iz prethodnog primjera možemo zapisati kao definiciju kojom ćemo se i kasnije koristiti. Definicija uvjetnog očekivanja koju ćemo navesti zapravo odgovara definiciji iz drugog poglavlja ali je prilagođena našem modelu.

Definicija 3.1.4. *Neka je* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *vjerojatnosna mjera na prostoru* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *takva da vrijedi* $\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1, ..., \omega_N) > 0$ *za svaki* $(\omega_1, ..., \omega_N)$ *iz* Ω *. Neka je* $(\bar{\omega}_1, ..., \bar{\omega}_N)$ *jedan takav ishod iz* Ω *i neka je* $1 \leq n \leq N-1$*. Tada definiramo*

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_{n+1} = \bar{\omega}_{n+1}, ..., \omega_N = \bar{\omega}_N | \omega_1 = \bar{\omega}_1, ..., \omega_n = \bar{\omega}_n\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{(\bar{\omega}_1, ..., \bar{\omega}_n, \bar{\omega}_{n+1}, ..., \bar{\omega}_N)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_1 = \bar{\omega}_1, ..., \omega_n = \bar{\omega}_n\}}.$$

Neka je nadalje X *slučajna varijabla na* Ω *i* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, ..., N\}$ *filtracija na* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$*. Definiramo uvjetno očekivanje od* X *s obzirom na informaciju dostupnu u trenutku* n *kao*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_n] = \widetilde{\mathbb{E}}[X|\omega_1 = \bar{\omega}_1, ..., \omega_n = \bar{\omega}_n] := \sum_{\bar{\omega}_{n+1}, ..., \bar{\omega}_N} & X(\bar{\omega}_1, ..., \bar{\omega}_n, \bar{\omega}_{n+1}, ..., \bar{\omega}_N) \\ \times \widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_{n+1} = \bar{\omega}_{n+1}, ..., \omega_N = \bar{\omega}_N & | \omega_1 = \bar{\omega}_1, ..., \omega_n = \bar{\omega}_n\}.\end{aligned}$$

Također uzimamo $\widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_N] = X$.

Ovako definirano uvjetno očekivanje zadovoljava nekoliko svojstava koja će nam koristiti kod razvoja našeg modela. U sljedećem teoremu navodimo neka od njih.

Teorem 3.1.5. *Neka su* X *i* Y *slučajne varijable na* Ω *i* $0 \leq n \leq N$*. Tada vrijedi:*
(i) Za sve konstante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[c_1 X + c_2 Y|\mathcal{F}_n] = c_1 \widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_n] + c_2 \widetilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}_n].$$

(ii) Ako je X $\mathcal{F}_n$*-izmjeriva, tada je*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[XY|\mathcal{F}_n] = X \widetilde{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{F}_n].$$

(iii) Za $0 \leq n \leq m \leq N$ *vrijedi*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_m]|\mathcal{F}_n] = \widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_n].$$

Posebno, $\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_m]] = \widetilde{\mathbb{E}}X$.

(iv) Ako X *ovisi samo o informacijama dostupnim između trenutaka* $n+1$ *i* N*, tada vrijedi*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_n] = \widetilde{\mathbb{E}}X.$$

(v) Neka je $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija. Tada je*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[\phi(X)|\mathcal{F}_n] \geq \phi(\widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_n]).$$

Sada kada smo definirali uvjetno očekivanje slučajne varijable, pogledajmo kako bismo mogli računati cijenu beskuponske obveznice. Ona nam predstavlja najjednostaviji oblik imovine pa će nam kao takva poslužiti za razvoj složenijih oblika.

Definicija 3.1.6. *Neka je* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *vjerojatnosna mjera na prostoru* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *i neka je* $\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1, ..., \omega_N) > 0$ *za svaki* $(\omega_1, ..., \omega_N)$ *iz* Ω *. Uzmimo kao i ranije da je* $R_0, R_1, ..., R_{N-1}$ *predvidiv proces kamatne stope i* $D_0, D_1, ..., D_N$ *diskontirani proces kamatne stope. Za* $0 \leq n \leq m \leq N$*, cijena beskuponske obveznice dospijeća* m *u trenutku* n *definirana je kao*

$$B_{n,m} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_m}{D_n}|\mathcal{F}_n\right].$$

Iz formule također možemo uočiti da za cijenu u trenutku dospijeća m vrijedi $B_{m,m} = 1$ a u trenutku 0, zbog $D_0 = 1$, imamo $B_{0,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[D_m]$. Treba napomenuti da prethodna definicija vrijedi za nominalnu vrijednost obveznice jednaku 1. Uzmemo li neku drugu nominalnu vrijednost i označimo ju s C, tada vrijedi

$$B_{n,m} = C\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_m}{D_n}|\mathcal{F}_n\right].$$

Napomena 3.1.7. *Pogledajmo što se događa s diskontiranom cijenom beskuponske obveznice.*

$$D_nB_{n,m} = D_n\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_m}{D_n}|\mathcal{F}_n\right] = D_n\frac{1}{D_n}\widetilde{\mathbb{E}}[D_m|\mathcal{F}_n] = \widetilde{\mathbb{E}}[D_m|\mathcal{F}_n].$$

Pritom smo u drugoj jednakosti iskoristili svojstvo iz Teorema 3.1.5 (ii). Posljednji rezultat nam zajedno sa svojstvom (iii) iz Teorema 3.1.5 daje zaključak da diskontirana cijena beskuponske obveznice zadovoljava martingalno svojstvo. Drugim riječima, za $0 \leq k \leq n \leq m$ *vrijedi*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_nB_{n,m}|\mathcal{F}_k] = \widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{\mathbb{E}}[D_m|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_k] = \widetilde{\mathbb{E}}[D_m|\mathcal{F}_k] = D_kB_{k,m}.$$

Dakle, u ovoj napomeni smo pokazali da je diskontirana cijena obveznice $\widetilde{\mathbb{P}}$*-martingal.*

Promotrimo sada investitora koji trguje beskuponskim obveznicama svih dospijeća. Zanima nas kako će se iz trenutka u trenutak kretati ukupna vrijednost imovine koju posjeduje. Za početak uvodimo pojam portfelja imovine takvog investitora u trenutku n. *Portfelj* je vektor $\Delta_n = (\Delta_{n,m}|n + 1 \leq m \leq N) \in \mathbb{R}^{N-n}$, gdje predvidiva slučajna varijabla $\Delta_{n,m}$ predstavlja broj beskuponskih obveznica dospijeća m koje investitor posjeduje između trenutaka n i $n+1$. U svakom trenutku dolazi do rebalansiranja portfelja, odnosno, postojeći portfelj zamijeni se novim. To možemo shvatiti kao posljedicu činjenice da će se obveznice, koje su npr. imale dospijeće u trenutku $n+1$, nalaziti u svakom portfelju prije trenutka $n+1$ ali u samom trenutku dospijeća doći će na naplatu te će se od tog trenutka nadalje pojavljivati u portfelju u obliku novca koji je vlasnik portfelja od njih zaradio ili morao platiti za njih. Svakom investitoru najbitnije je u svakom trenutku promatrati vrijednost svog portfelja, kako bi znao u kojem smjeru idu njegova ulaganja i bolje bi njima upravljao. U tu svrhu uvodimo oznaku X_n za vrijednost portfelja u trenutku n. Upravo zbog maloprije navedenog objašnjenja za rebalansiranje portfelja, pretpostavimo da nam je vrijednost portfelja u trenutku n poznata. Tada vrijednost X_{n+1} možemo dobiti pomoću X_n kao

$$X_{n+1} = \Delta_{n,n+1} + \sum_{m=n+2}^{N} \Delta_{n,m} B_{n+1,m} + (1+R_n)\Bigg(X_n - \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m}\Bigg).$$

Primjećujemo da nam prvi član desne strane označava broj obveznica u portfelju kojima zapravo trenutak u kojem se trenutno nalazimo predstavlja trenutak dospijeća. Budući da cijena beskuponske obveznice u trenutku dospijeća dolazi na njezinu nominalnu vrijednost, za koju smo pretpostavili da je jednaka 1, izbjegli smo pisanje člana $B_{n+1,n+1}$. Srednji član predstavlja vrijednost svih obveznica kojima je dospijeće u trenutku $n+2$ ili kasnije. Dobili smo ga množenjem količine obveznica koje imaju isti datum dospijeća s njihovom cijenom u trenutku $n+1$. Treći član smo dobili kao umnožak dvaju faktora. Pritom drugi faktor označava zarađeni novac investitora u trenutku n, koji je dobiven kao razlika ukupne vrijednosti portfelja u trenutku n i vrijednosti obveznica koje su ostale u portfelju i nakon rebalansiranja. Prvi faktor u umnošku je posljedica djelovanja kamate R_n na taj novac između vremena n i $n+1$.

Idući teorem ilustrira nam što će se dogoditi s diskontiranom vrijednošću portfelja.

Teorem 3.1.8. *Neka je $\Delta_n = (\Delta_{n,m} | n+1 \leq m \leq N)$ portfelj beskuponskih obveznica u trenutku n. Tada je diskontirana vrijednost portfelja $D_n X_n$ $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingal.*

Dokaz. Da bismo pokazali da je $D_n X_n$ $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingal, zapravo moramo dokazati da vrijedi jednakost

$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_{n+1} X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = D_n X_n.$$

Znamo da je D_{n+1} $\mathcal{F}_n$-izmjeriva slučajna varijabla pa koristeći svojstvo (ii) iz Teorema 3.1.5 dobijemo

$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_{n+1} X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = D_{n+1} \widetilde{\mathbb{E}}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

Dakle, zapravo treba dokazati da vrijedi $\widetilde{\mathbb{E}}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \frac{D_n}{D_{n+1}} X_n$.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \\
&\quad = \widetilde{\mathbb{E}}\Bigg[\Delta_{n,n+1} + \sum_{m=n+2}^{N} \Delta_{n,m} B_{n+1,m} + (1+R_n)\Bigg(X_n - \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m}\Bigg)\Bigg| \mathcal{F}_n\Bigg] \\
&\quad = \Delta_{n,n+1} + \sum_{m=n+2}^{N} \Delta_{n,m} \widetilde{\mathbb{E}}[B_{n+1,m} | \mathcal{F}_n] + (1+R_n)\Bigg(X_n - \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m}\Bigg) \\
&\quad = \Delta_{n,n+1} + \sum_{m=n+2}^{N} \frac{\Delta_{n,m}}{D_{n+1}} \widetilde{\mathbb{E}}[D_{n+1} B_{n+1,m} | \mathcal{F}_n] + \frac{D_n}{D_{n+1}}\Bigg(X_n - \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m}\Bigg) \\
&\quad = \Delta_{n,n+1} + \textstyle\sum_{m=n+2}^{N} \frac{\Delta_{n,m}}{D_{n+1}} D_n B_{n,m} + \frac{D_n}{D_{n+1}} X_n - \frac{D_n}{D_{n+1}} \sum_{m=n+1}^{N} \Delta_{n,m} B_{n,m}
\end{aligned}$$

$$= \Delta_{n,n+1} + \tfrac{D_n}{D_{n+1}} X_n - \tfrac{D_n}{D_{n+1}} \Delta_{n,n+1} B_{n,n+1}.$$

Prvu jednakost dobili smo primjenjujući uvjetno očekivanje na formulu vrijednosti portfelja u trenutku $n+1$. U drugoj jednakosti koristimo da je prvi član jednadžbe vrijednosti portfelja $\Delta_{n,n+1}$ predvidiva slučajna varijabla , a time i adaptirana, dakle $\mathcal{F}_n$-izmjeriva. Za drugi član iskoristili smo svojstvo (ii) Teorema 3.1.5, a za treći član činjenicu da su X_n i $B_{n,m}$ adaptirane slučajne varijable. Treća jednakost slijedi iz predvidivosti varijable D_{n+1}. Zatim smo iskoristili činjenicu da je diskontirana cijena beskuponske obveznice $D_n B_{n,m}$ martingal.
U posljednju jednakost još uvrstimo $B_{n,n+1} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_{n+1}}{D_n} | \mathcal{F}_n\right] = \frac{D_{n+1}}{D_n}$. Tada nam preostaje

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \frac{D_n}{D_{n+1}} X_n.$$

Dokazali smo da vrijedi martingalno svojstvo

$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_{n+1} X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = D_n X_n$$

pa zaključujemo da je diskontirana vrijednost portfelja $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingal. □

Napomena 3.1.9. *Budući da je proces diskontirane vrijednosti portfelja $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingal, očekivanje mu je konstantno. Pokazujemo uzastopno primjenjujući svojstvo (iii) Teorema 3.1.5 i činjenice da je $D_0 = 1$:*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_n X_n] = \widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{\mathbb{E}}[D_n X_n | \mathcal{F}_{n-1}]] = \widetilde{\mathbb{E}}[D_{n-1} X_{n-1}] = ... = \widetilde{\mathbb{E}}[D_0 X_0] = \widetilde{\mathbb{E}}[X_0] = X_0.$$

Već smo u samom uvodu napomenuli da model izgrađujemo upotrebom cijena neutralnih na rizik da bismo izbjegli mogućnost arbitraže. Provjerimo sada jesmo li takvim načinom uistinu isključili mogućnost arbitraže. Pretpostavimo da model dopušta arbitražu. To znači da u našem modelu postoji portfelj beskuponskih obveznica koji kreće od početne vrijednosti $X_0 = 0$, a u kasnijim vremenima vrijedi $X_n \geq 0$ i za neki od ishoda vrijedi $X_n > 0$. Tada ćemo dobiti $\widetilde{\mathbb{E}}[D_n X_n] > 0$, tj. $\widetilde{\mathbb{E}}[D_n X_n] > X_0$, što je u kontradikciji s prethodnom napomenom. Dakle, možemo potvrditi da definicija cijene beskuponske obveznice onemogućuje pronalazak arbitraže na tržištu.

Suvremeno financijsko tržište karakterizira snažno jačanje konkurencije te česte fluktuacije kamatne stope i deviznih tečajeva pa zato investitori moraju pronaći način kako upravljati tim financijskim rizicima. Tako dolazi do pojave financijskih izvedenica. *Izvedenica* je financijski instrument čija vrijednost ovisi o vrijednosti neke druge imovine. Često se koristi u svrhu osiguranja zauzetih investicijskih pozicija i stabiliziranje cijena investicijskog portfelja u određenom vremenu.

Napomena 3.1.10. *Neka je $0 \leq n \leq m \leq N$. Formula cijene neutralne na rizik kaže da je cijena izvedenice u trenutku n, koja isplaćuje iznos V_m u trenutku m jednaka*

$$V_n = \frac{1}{D_n} \widetilde{\mathbb{E}}[D_m V_m | \mathcal{F}_n].$$

Pretpostavimo da je moguće konstruirati hedging portfelj koji će štititi kratku poziciju izvedenice (odnosno, on će osiguravati da u trenutku m ima vrijednost V_m, bez obzira na rizike s kojima će se susresti). Tada vrijednost izvedenice u trenutku n mora biti dana gornjom formulom. Zaključujemo da Teorem 3.1.8. opravdava gornju formulu ali ne garantira postojanje takvog portfelja.

Razmislimo što se zapravo događa ako u trenutku n ulažemo u beskuponske obveznice dospijeća $n+1$. Investiranjem 1 kune u trenutku n u obveznice dospijeća $n+1$, možemo kupiti $\frac{1}{B_{n,n+1}}$ beskuponskih obveznica dospijeća $n+1$ i ta investicija vrijedi $\frac{1}{B_{n,n+1}}$ u trenutku $n+1$. Međutim, primjetimo da nam vrijedi sljedeći niz jednakosti

$$\frac{1}{B_{n,n+1}} = \frac{1}{\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_{n+1}}{D_n}|\mathcal{F}_n\right]} = \frac{1}{\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{1+R_n}|\mathcal{F}_n\right]} = \frac{1}{\frac{1}{1+R_n}} = 1 + R_n.$$

U konačnici smo dobili iznos $1+R_n$, a znamo da je to iznos koji dobivamo ukamaćivanjem 1 kune između vremena n i $n+1$. Dakle, investicija u beskuponsku obveznicu dospijeća $n+1$ jednaka je investiciji na novčanom tržištu između trenutaka n i $n+1$.

Dosad smo proučavali beskuponske obveznice koje se isplaćuju jednokratno a sada ćemo proučiti što se događa kada imamo kuponske obveznice. *Kuponska obveznica* je dužnički vrijednosni papir kojim se izdavatelj obvezuje na višekratne kuponske isplate kamate u razdoblju prije dospijeća i jednokratnu isplatu glavnice u trenutku dospijeća. Matematički bismo to mogli bolje definirati na sljedeći način. Neka je $0 \le m \le N$. Kuponsku obveznicu možemo zamisliti kao niz konstantnih vrijednosti $C_0, C_1, ..., C_m$, gdje C_n za $n \le m-1$ predstavlja kupon koji izdavatelj mora isplatiti u trenutku n. Pritom je dopušteno da kuponska kamatna stopa bude 0 u nekom trenutku, tj. $C_n = 0$. C_m je isplata u trenutku m koja uključuje isplatu glavnice i kupona za trenutak m. Možemo primjetiti da je beskuponska obveznica zapravo pojednostavljeni oblik kuponske jer u tom slučaju vrijedi da su svi kuponi prije dospijeća jednaki 0, odnosno, $C_0 = C_1 = ... = C_{m-1} = 0$ i $C_m = 1$. S druge strane, kuponsku obveznicu možemo zamisliti kao sumu koja se sastoji od C_1 beskuponskih obveznica dospijeća 1, C_2 beskuponskih obveznica dospijeća 2, itd. do C_m beskuponskih obveznica dospijeća m. Tada za cijenu takve kuponske obveznice u trenutku 0 vrijedi

$$\sum_{k=0}^{m} C_k B_{0,k} = \sum_{k=0}^{m} C_k \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_k}{D_0}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=0}^{m} D_k C_k\right].$$

Analogno tome, u trenutku n, prije nego što dođe do isplate C_n i nakon što se isplati C_{n-1} za cijenu kuponske obveznice vrijedi

$$\sum_{k=n}^{m} C_k B_{n,k} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=n}^{m} \frac{D_k C_k}{D_n}|\mathcal{F}_n\right], \quad n = 0, 1, ..., m.$$

3.2 Primjena na izvedenice fiksnih prihoda

U ovom odlomku proučit ćemo primjenu binomnog modela kamatnih stopa na imovinu cijene S_n u trenutku n. Takvu imovinu interpretirat ćemo kao različite vrste ugovora, čije isplate ovise o kamatnoj stopi. Kao i dosad, koristit ćemo ekvivalentnu martingalnu mjeru koja nam osigurava da diskontirani proces cijene imovine bude martingal. Za početak uvodimo definiciju forward ugovora.

Definicija 3.2.1. *Forward ugovor je pristanak plaćanja specificirane cijene izvršenja K na dan dospijeća m, $0 \leq m \leq N$, za imovinu čija je cijena u trenutku m jednaka S_m. m-forward cijena te imovine u trenutku n, $0 \leq n \leq m$, je vrijednost K, uz koju je cijena forward ugovora jednaka nula u trenutku n.*

Forward ugovori su terminski ugovori pomoću kojih se dvije strane dogovaraju da će trgovati određenom imovinom na neki datum u budućnosti. Upotrebljavaju se za zaštitu od rizika, npr. rizika promjene kamatnih stopa na tržištu ili same promjene robe s kojom se trguje.

Teorem 3.2.2. *Neka je $S_0, S_1, ..., S_N$ proces cijena za neku imovinu i $B_{n,m}$ cijena beskuponske obveznice dospijeća m u trenutku n. Za $0 \leq n \leq m \leq N$ vrijedi da je m-forward cijena takve imovine u trenutku n jednaka*

$$\mathrm{For}_{n,m} = \frac{S_n}{B_{n,m}}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da u trenutku n želimo prodati forward ugovor dospijeća m i s cijenom izvršenja K (tj. pristajemo dobiti iznos $\mathrm{For}_{n,m}$ u zamjenu za iznos K). Pritom, neka je K takav da je cijena forward ugovora u trenutku n jednaka 0. Nadalje, pretpostavimo da u trenutku n držimo kratku poziciju za $\frac{S_n}{B_{n,m}}$ beskuponskih obveznica, od čega ostvarujemo prihod S_n te za taj iznos kupujemo jednu dionicu imovine. U trenutku m tu dionicu isporučujemo prema sporazumu iz forward ugovora te za to dobivamo iznos K. Nakon podmirivanja kratke pozicije u obveznicama, možemo biti ili u dobitku ili u gubitku za iznos $K - \frac{S_n}{B_{n,m}}$.
Ukoliko smo u dobitku, znači da smo pronašli arbitražu na tržištu. Inače, ako smo u gubitku, možemo u svakom koraku zauzeti suprotnu poziciju kako bismo pronašli arbitražu, tj. ostvarili pozitivan profit u iznosu $\frac{S_n}{B_{n,m}} - K$. Zaključujemo da je jedini način da se izbjegne arbitraža taj da vrijedi $K = \frac{S_n}{B_{n,m}}$, odnosno $\mathrm{For}_{n,m} = \frac{S_n}{B_{n,m}}$. □

U prethodnom dokazu smo zapravo konstruirali hedge (tj. zaštitu) za kratku poziciju forward ugovora. Kažemo da je ovakva vrsta hedga statična jer nema transakcija između trenutka n, kada hedge nastaje, i trenutka m, kada dolazi do dospijeća forward ugovora. Iz same definicije forward ugovora možemo zaljučiti da je njegova vrijednost u trenutku m jednaka $S_m - K$. Drugim riječima, vlasnik ugovora dobiva razliku između stvarne cijene na dan dospijeća m i cijene izvršenja K, koja se naziva forward premija, ako je razlika u cijeni pozitivna ili forward diskont, ukoliko je razlika u cijeni negativna. Budući da smo se uvjerili da je diskontirana cijena portfelja $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingal, za diskontiranu cijenu forward ugovora u trenutku n vrijedi

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}[D_m(S_m - K)|\mathcal{F}_n] &= \widetilde{\mathbb{E}}[D_m S_m|\mathcal{F}_n] - K\widetilde{\mathbb{E}}[D_m|\mathcal{F}_n] = D_n S_n - K D_n \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_m}{D_n}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= D_n(S_n - K B_{n,m}).\end{aligned}$$

Prema definiciji, da bi cijena u trenutku n bila 0, mora vrijediti $S_n - KB_{n,m} = 0$, tj. $K = \frac{S_n}{B_{n,m}}$, čime smo na još jedan način dokazali teorem.

Uz forward cijene imovine veže se i pojam forward kamatne stope.

Definicija 3.2.3. *Neka vrijedi $0 \leq n \leq m \leq N-1$. Za forward kamatnu stopu $F_{n,m}$ definiranu u trenutku n za investicije koje će biti provedene u trenutku m vrijedi*

$$F_{n,m} = \frac{B_{n,m}}{B_{n,m+1}} - 1.$$

Pretpostavimo da u trenutku n prodajemo beskuponsku obveznicu dospijeća m te na taj način ostvarujemo dohodak u iznosu $B_{n,m}$. Taj dohodak koristimo za kupnju $\frac{B_{n,m}}{B_{n,m+1}}$ beskuponskih obveznica dospijeća $m+1$. U trenutku m na naplatu nam dolazi obveznica koju smo prodali pa moramo isplatiti iznos vrijednosti 1 jer obveznica po dospijeću poprima svoju nominalnu vrijednost, a zatim u trenutku $m+1$ dobivamo iznos $\frac{B_{n,m}}{B_{n,m+1}}$ iz duge pozicije obveznice s dospijećem $m+1$. Možemo uočiti da je tok novca između trenutaka m i $m+1$ jednak kao da smo investirali na novčanom tržištu po kamatnoj stopi $F_{n,m}$ definiranoj u prethodnoj definiciji. Ovakvim postupanjem smo zapravo u trenutku n fiksirali kamatnu stopu koja će nam vrijediti u razdoblju od trenutka m do $m+1$.

Napomena 3.2.4. *Uočimo da vrijedi da je fiksirana stopa u trenutku m za investiranje u razdoblju od trenutka m do $m+1$ jednaka*

$$F_{m,m} = \frac{B_{m,m}}{B_{m,m+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{1+R_m}} - 1 = R_m.$$

Teorem 3.2.5. *Neka vrijedi $0 \leq n \leq m \leq N-1$. Nearbitražna cijena ugovora u trenutku n, koji isplaćuje iznos R_m u trenutku $m+1$, iznosi*

$$B_{n,m+1}F_{n,m} = B_{n,m} - B_{n,m+1}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da u trenutku n prodajemo ugovor koji će u trenutku $m+1$ isplatiti iznos R_m i da time ostvarujemo dohodak $B_{n,m} - B_{n,m+1}$. Zatim kupimo beskuponsku obveznicu dospijeća m i prodamo obveznicu dospijeća $m+1$. Primjetimo da tada posjedujemo portfelj koji se sastoji od kratke pozicije po forward ugovoru i po obveznici dospijeća $m+1$ te duge pozicije samo po obveznici dospijeća m. Takav portfelj nas ne košta ništa jer je suma novčanih tokova jednaka 0 (jer je $(B_{n,m} - B_{n,m+1} + B_{n,m+1}) - B_{n,m} = 0$).
U trenutku dospijeća m primamo dohodak iznosa 1 iz duge pozicije obveznice te ga odmah investiramo na novčanom tržištu po kamatnoj stopi R_m. Od te investicije u trenutku $m+1$ ostvarujemo prinos $1 + R_m$. Iznos 1 odmah koristimo za pokrivanje kratke pozicije u obveznici dospijeća $m+1$, a R_m za isplatu dospjelog ugovora.
Na ovaj način konstruirali smo hedge za kratku poziciju u forward ugovoru koji isplaćuje R_m u trenutku $m+1$. Uspostava takvog oblika zaštite koštala nas je $B_{n,m} - B_{n,m+1}$ pa zaključujemo da je to cijena ugovora.

□

Prema Teoremu 3.2.2. i Teoremu 3.2.5. forward cijena ugovora u trenutku n, koji isplaćuje R_m u trenutku $m+1$, je $F_{n,m}$. Pretpostavimo sada da u trenutku n prodajemo kamatni forward ugovor, dakle pristajemo platiti iznos R_m u trenutku $m+1$ u zamjenu za $F_{n,m}$. Time smo fiksirali kamatnu stopu $F_{n,m}$ u trenutku m na razinu R_m. Investiranjem 1 kune na novčanom tržištu u trenutku m, po varijabilnoj kamatnoj stopi, ostvarujemo prinos $1+R_m$ u trenutku $m+1$. Također, u istom vremenu moramo platiti R_m u zamjenu za $F_{n,m}$ zbog kratke pozicije u kamatnom forward ugovoru pa je naše krajnje stanje jednako $(1+R_m)-R_m+F_{n,m}=1+F_{n,m}$. Možemo zaključiti da je naša investicija jednaka investiciji 1 kune na novčanom tržištu između trenutaka m i $m+1$ po kamatnoj stopi $F_{n,m}$.

Definicija 3.2.6. *Neka vrijedi $1 \leq m \leq N$. m-periodični kamatni swap je ugovor s isplatama $S_1, ..., S_m$ u trenucima $1, ..., m$, za koje vrijedi*

$$S_n = K - R_{n-1}, \quad n = 1, ..., m.$$

Pritom je K konstantan. Kažemo da je m-periodična swap stopa SR_m vrijednost od K za koju je nearbitražna cijena kamatnog swap ugovora u trenutku 0 jednaka 0.

Ovakva vrsta ugovora najčešće služi za zaštitu od kamatnog rizika tako što omogućava zamjenu fiksne kamatne stope za promjenjivu, i obrnuto. Pretpostavimo da smo ugovorili kredit po fiksnoj kamatnoj stopi. Ukoliko ipak želimo otplaćivati kredit po varijabilnoj kamatnoj stopi, možemo postupiti na sljedeći način. Zauzimanjem duge pozicije u swap ugovoru osiguravamo si primanje konstantnih isplata K u svakom trenutku n (to je zapravo iznos dobiven od fiksne kamatne stope na glavnicu) te istovremeno plaćamo varijabilni iznos R_{n-1} koji nam označava varijabilnu kamatnu stopu na istu glavnicu. Dakle, zauzimanjem duge pozicije u swap ugovoru, otplatu po fiksnoj kamatnoj stopi možemo zamijeniti za otplatu po varijabilnoj kamatnoj stopi. Obrnuto, pretpostavimo da otplaćujemo kredit po varijabilnoj kamatnoj stopi. Tada možemo zauzeti kratku poziciju u swap ugovoru. Na taj način osiguravamo primanje promjenjivih isplata R_{n-1} u svakom trenutku n, dobivenih kao varijabilna kamatna stopa na glavnicu, u zamjenu za fiksna plaćanja iznosa K, koji predstavlja fiksnu kamatnu stopu na glavnicu.

Teorem 3.2.7. *Nearbitražna cijena m-periodičnog kamatnog swap ugovora u trenutku 0 jednaka je*

$$\mathrm{Swap}_m = \sum_{n=1}^{m} B_{0,n}(K - F_{0,n-1}) = K \sum_{n=1}^{m} B_{0,n} - (1 - B_{0,m}).$$

Posebno, m-periodična swap stopa je

$$SR_m = \frac{\sum_{n=1}^{m} B_{0,n} F_{0,n-1}}{\sum_{n=1}^{m} B_{0,n}} = \frac{1 - B_{0,m}}{\sum_{n=1}^{m} B_{0,n}}.$$

Dokaz. Iz definicije kamatnog swap ugovora slijedi da je njegova vrijednost jednaka sumi periodičnih isplata $S_1, ..., S_m$. Dakle, vrijedi

$$\text{Swap}_m = \sum_{n=1}^{m} S_n = \sum_{n=1}^{m} (K - R_{n-1}).$$

Znamo otprije da je nearbitražna cijena u trenutku 0 isplate koja u trenutku n vrijedi K jednaka $\widetilde{\mathbb{E}}[D_n K] = K B_{0,n}$. Iz Teorema 3.2.5. znamo da vrijedi da je nearbitražna vrijednost u trenutku 0 isplate koja vrijedi R_{n-1} u trenutku n jednaka $B_{0,n} F_{0,n-1}$. Uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
\text{Swap}_m &= \sum_{n=1}^{m} (K B_{0,n} - B_{0,n} F_{0,n-1}) = \sum_{n=1}^{m} B_{0,n} (K - F_{0,n-1}) \\
&= \sum_{n=1}^{m} B_{0,n} \left(K - \left(\frac{B_{0,n-1}}{B_{o,n}} - 1 \right) \right) = K \sum_{n=1}^{m} B_{0,n} - \sum_{n=1}^{m} (B_{0,n-1} - B_{0,n}) \\
&= K \sum_{n=1}^{m} B_{0,n} - (1 - B_{0,m}).
\end{aligned}$$

Primjetimo da smo u trećoj jednakosti koristili Definiciju 3.2.3. te smo time dokazali prvu tvrdnju teorema.
Stavimo li da je $\text{Swap}_m = 0$ te označimo $K = SR_m$ dobivamo drugu tvrdnju, tj. vrijedi

$$SR_m = \frac{1 - B_{0,m}}{\sum_{n=1}^{m} B_{0,n}}.$$

□

Kao nastavak prethodnog teorema, možemo pokazati da formula nearbitražne cijene m-periodičnog swap ugovora zadovoljava formulu cijene neutralne na rizik, tj. vrijedi

$$\text{Swap}_m = \sum_{n=1}^{m} S_n = \widetilde{\mathbb{E}} \left[\sum_{n=1}^{m} D_n S_n \right].$$

Kao i u prethodnom dokazu, krećemo od definicije kamatnog swap ugovora a zatim primjenimo definicije forward kamatne stope i cijene beskuponske obveznice pa dobijemo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Swap}_m &= \sum_{n=1}^{m} S_n = \sum_{n=1}^{m}(K - R_{n-1}) = \sum_{n=1}^{m} B_{0,n}(K - F_{0,n-1}) \\
&= \sum_{n=1}^{m}[KB_{0,n} - (B_{0,n-1} - B_{0,n})] \\
&= \sum_{n=1}^{m}[K\widetilde{\mathbb{E}}D_n - (\widetilde{\mathbb{E}}D_{n-1} - \widetilde{\mathbb{E}}D_n)] \\
&= \sum_{n=1}^{m}[K\widetilde{\mathbb{E}}D_n - (\widetilde{\mathbb{E}}[D_n(1 + R_{n-1})] - \widetilde{\mathbb{E}}D_n)] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=1}^{m} D_n(K - R_{n-1})\right] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=1}^{m} D_n S_n\right].
\end{aligned}$$

Dakle, nearbitražna cijena m-periodičnog swap ugovora je konzistentna s formulom cijene neutralne na rizik.
U nastavku poglavlja navodimo definicije cap i floor ugovora kojima postavljamo granice na gornju i donju vrijednost kamatnih stopa.

Definicija 3.2.8. *Neka vrijedi $1 \leq m \leq N$. m-periodični kamatni cap je ugovor s isplatama $C_1, ..., C_m$ u trenucima $1, ..., m$, za koje vrijedi*

$$C_n = (R_{n-1} - K)^+, \quad n = 1, ..., m.$$

Cijena neutralna na rizik m-periodičnog kamatnog cap ugovora jednaka je

$$\mathrm{Cap}_m = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=1}^{m} D_n(R_{n-1} - K)^+\right].$$

Ukoliko ugovor vrši samo jednu isplatu C_n u trenutku n, tada je riječ o kamatnom caplet ugovoru.

Definicija 3.2.9. *Neka vrijedi $1 \leq m \leq N$. m-periodični kamatni floor je ugovor s isplatama $F_1, ..., F_m$ u trenucima $1, ..., m$, za koje vrijedi*

$$F_n = (K - R_{n-1})^+, \quad n = 1, ..., m.$$

Cijena neutralna na rizik m-periodičnog kamatnog floor ugovora jednaka je

$$\mathrm{Floor}_m = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=1}^{m} D_n(K - R_{n-1})^+\right].$$

Ukoliko ugovor vrši samo jednu isplatu F_n u trenutku n, tada je riječ o kamatnom floorlet ugovoru.

Cap i floor ugovori mogu nas zaštititi od nepovoljnog kretanja kamatnih stopa prilikom otplate kredita ili kod različitih oblika investiranja. Zamislimo situaciju u kojoj plaćamo promjenjivu kamatnu stopu R_{n-1} na ratu kredita, u svakom trenutku n. U tom slučaju, porast kamatnih stopa za nas znači nepogodno kretanje stopa. Tada posjedovanje kamatnog cap ugovora jamči da kamatna stopa neće biti veća od K. U slučaju da kamatna stopa naraste preko K, mi plaćamo samo kamatu K a isplata po cap ugovoru otplaćuje prekoračenje preko K. Obrnuti proces bio bi da imamo investiciju koja nam isplaćuje varijabilnu kamatnu stopu R_{n-1} u trenutku n. Tada razmišljamo u suprotnom smjeru. U svakom trenutku željeli bismo dobiti što veću isplatu od kamatne stope na investiciju pa kupnjom kamatnog floor ugovora osiguravamo minimalnu kamatnu stopu iznosa K. Ukoliko kamatne stope padnu ispod iznosa K, floor ugovor nam isplaćuje razliku u stopama.
Proučimo li način na koji smo definirali isplate swap, cap i floor ugovora možemo primjetiti da vrijedi tzv. *cap-floor paritet* kojeg formuliramo kao

$$\mathrm{Swap}_m + \mathrm{Cap}_m = \mathrm{Floor}_m.$$

Naime, u svakom trenutku vrijedi da je vrijednost portfelja, koji se sastoji od swap i cap ugovora, jednaka vrijednosti portfelja koji sadrži samo floor ugovor, tj.

$$K - R_{n-1} + (R_{n-1} - K)^+ = (K - R_{n-1})^+.$$

Pretpostavimo da držimo dugu poziciju u floor ugovoru i kratku poziciju u cap ugovoru. To za nas znači da floor ima vrijednost $K - R_{n-1}$ u trenucima kada je $K \geq R_{n-1}$, a cap ima vrijednost $-(R_{n-1} - K) = K - R_{n-1}$ kada je $R_{n-1} \geq K$. Dakle, u oba slučaja je vrijednost portfelja jednaka $K - R_{n-1}$, što je jednako vrijednosti swap ugovora. Drugačije to možemo zapisati kao jednakost $\mathrm{Swap}_m = \mathrm{Floor}_m - \mathrm{Cap}_m$, koja je analogna cap-floor paritetu.

Primjer 3.2.10. *Neka je zadano, kao i u Primjeru 3.1.3,* $N = 3$ *i*
$\Omega = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$.
Uzmimo ponovno da su vjerojatnosti zadane kao

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,a)\} = \frac{2}{9}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,a,b)\} = \frac{1}{9}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,a)\} = \frac{1}{12}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(a,b,b)\} = \frac{1}{12}$$

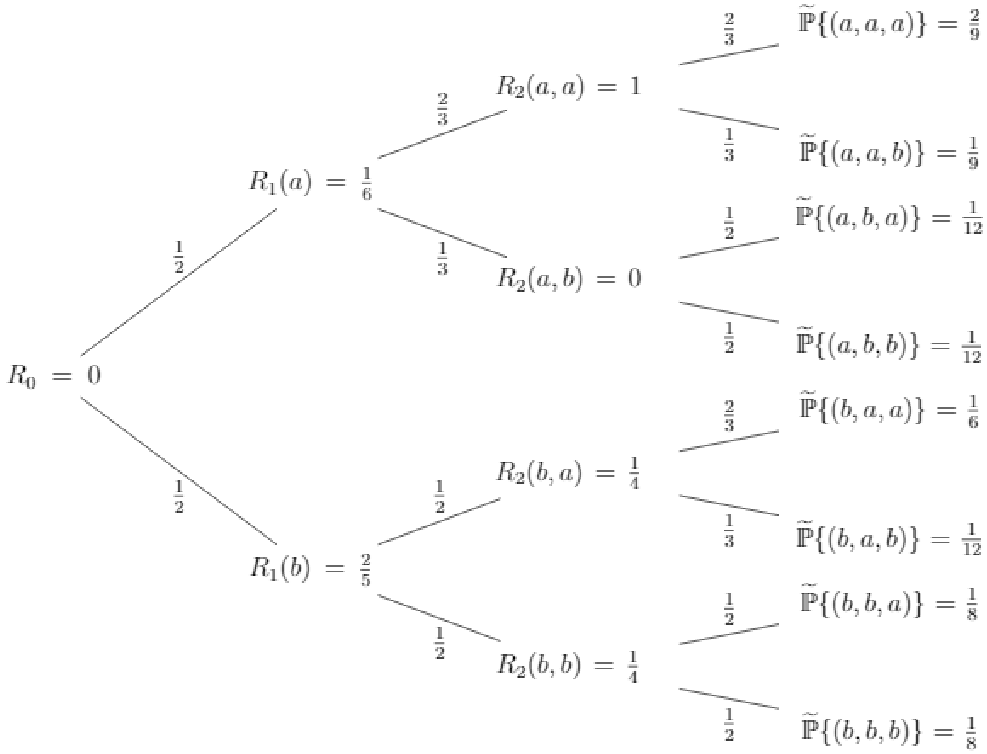
$$\widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,a)\} = \frac{1}{6}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,a,b)\} = \frac{1}{12}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,a)\} = \frac{1}{8}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\{(b,b,b)\} = \frac{1}{8}$$

te neka su nam kamatne stope dane u stablu na slici 3.2.

Za početak izračunajmo diskontirane stope D_1, D_2, D_3:

$$D_1 = \frac{1}{1+R_0} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

$$D_2(a) = \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1(a))} = \frac{1}{1 \cdot \frac{7}{6}} = \frac{6}{7},$$



Slika 3.2: Binomno stablo s pripadajućim vjerojatnostima i kamatnim stopama

$$
\begin{aligned}
D_2(b) &= \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1(b))} = \frac{1}{1 \cdot \frac{7}{5}} = \frac{5}{7}, \\
D_3(a,a) &= \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1(a))(1+R_2(a,a))} = \frac{1}{1 \cdot \frac{7}{6} \cdot 2} = \frac{3}{7}, \\
D_3(a,b) &= \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1(a))(1+R_2(a,b))} = \frac{1}{1 \cdot \frac{7}{6} \cdot 1} = \frac{6}{7}, \\
D_3(b,a) &= \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1(b))(1+R_2(b,a))} = \frac{1}{1 \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{4}{7}, \\
D_3(b,b) &= \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1(b))(1+R_2(b,b))} = \frac{1}{1 \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{4}{7}.
\end{aligned}
$$

U idućem koraku računamo cijene beskuponskih obveznica u trenutku 0. Pritom koristimo vjerojatnosti skupova $A_a, A_b, A_{aa}, A_{ab}, A_{ba}$ i A_{bb} koje smo izračunali u Primjeru 3.1.3. Također primjenjujemo i formulu za računanje cijene beskuponske obveznice iz Definicije 3.1.6. uz $D_0 = 1$.

$$
B_{0,1} = \widetilde{\mathbb{E}} D_1 = D_1(\widetilde{\mathbb{P}}(A_a) + \widetilde{\mathbb{P}}(A_b)) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1,
$$

$$
\begin{aligned}
B_{0,2} &= \widetilde{\mathbb{E}}D_2 = D_2(a)[\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{aa}\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ab}\}] + D_2(b)[\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ba}\} + \widetilde{\mathbb{P}}\{A_{bb}\}] \\
&= \frac{6}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{14}, \\
B_{0,3} &= \widetilde{\mathbb{E}}D_3 = D_3(a,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{aa}\} + D_3(a,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ab}\} \\
&\quad + D_3(b,a)\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ba}\} + D_3(b,b)\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{bb}\} \\
&= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{7}.
\end{aligned}
$$

Za računanje cijena beskuponskih obveznica u trenutku 1 koristimo još i uvjetne vjerojatnosti navedene u binomnom stablu. Odmah znamo da po formuli za cijenu beskuponske obveznice vrijedi $B_{1,1} = 1$.

$$
\begin{aligned}
B_{1,2}(a) &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_2}{D_1}|\omega_1 = a\right] = \frac{1}{D_1}\widetilde{\mathbb{E}}[D_2|\omega_1 = a] \\
&= D_2(a)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2 = a|\omega_1 = a) + D_2(a)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2 = b|\omega_1 = a) \\
&= \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{7},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{1,2}(b) &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_2}{D_1}|\omega_1 = b\right] = \frac{1}{D_1}\widetilde{\mathbb{E}}[D_2|\omega_1 = b] \\
&= D_2(b)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2 = a|\omega_1 = b) + D_2(b)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2 = b|\omega_1 = b) \\
&= \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{7}, \\
B_{1,3}(a) &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_3}{D_1}|\omega_1 = a\right] = \frac{1}{D_1}\widetilde{\mathbb{E}}[D_3|\omega_1 = a] \\
&= D_3(a,a)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2 = a|\omega_1 = a) + D_3(a,b)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2 = b|\omega_1 = a) \\
&= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{7}, \\
B_{1,3}(b) &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_3}{D_1}|\omega_1 = b\right] = \frac{1}{D_1}\widetilde{\mathbb{E}}[D_3|\omega_1 = b] \\
&= D_3(b,a)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2 = a|\omega_1 = b) + D_3(b,b)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_2 = b|\omega_1 = b) \\
&= \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{7}.
\end{aligned}
$$

Na sličan način možemo izračunati i cijene beskuponskih obveznica u trenutku 2. Pritom vrijedi $B_{2,2} = 1$. Koristimo još i činjenicu da je diskontirani proces kamatne stope predvidiv pa dobivamo sljedeće rezultate.

$$
B_{2,3}(a,a) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_3}{D_2}|\omega_1 = a, \omega_2 = a\right] = \frac{D_3(a,a)}{D_2(a)} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{1}{2},
$$

$$B_{2,3}(a,b) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_3}{D_2}|\omega_1 = a, \omega_2 = b\right] = \frac{D_3(a,b)}{D_2(a)} = \frac{6}{7}\cdot\frac{7}{6} = 1,$$

$$B_{2,3}(b,a) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_3}{D_2}|\omega_1 = b, \omega_2 = a\right] = \frac{D_3(b,a)}{D_2(b)} = \frac{4}{7}\cdot\frac{7}{5} = \frac{4}{5},$$

$$B_{2,3}(b,b) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_3}{D_2}|\omega_1 = b, \omega_2 = b\right] = \frac{D_3(b,b)}{D_2(b)} = \frac{4}{7}\cdot\frac{7}{5} = \frac{4}{5}.$$

Sada kada smo vidjeli kako primjeniti formulu za vrednovanje beskuponskih obveznica, možemo izračunati još i cijenu cap ugovora s periodom 3, uz cijenu dospijeća $K = \frac{1}{3}$. Koristimo vjerojatnosti skupova $A_{aa}, A_{ab}, A_{ba}, A_{bb}$. Za početak računamo cijene caplet ugovora u trenucima 1,2 i 3, od kojih se cap ugovor sastoji:

$$\text{Caplet}_1 = \widetilde{\mathbb{E}}[D_1(R_0 - K)^+] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[D_1\Big(R_0 - \tfrac{1}{3}\Big)^+\right] = 0,$$

$$\begin{aligned}
\text{Caplet}_2 &= \widetilde{\mathbb{E}}[D_2(R_1 - K)^+] \\
&= D_2(a)\left[\Big(R_1(a) - \frac{1}{3}\Big)^+\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{aa}\} + \Big(R_1(a) - \frac{1}{3}\Big)^+\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ab}\}\right] \\
&\quad + D_2(b)\left[\Big(R_1(b) - \frac{1}{3}\Big)^+\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ba}\} + \Big(R_1(b) - \frac{1}{3}\Big)^+\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{bb}\}\right] \\
&= \frac{6}{7}\cdot\Big(0\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{6}\Big) + \frac{5}{7}\cdot\Big(\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{42},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Caplet}_3 &= \widetilde{\mathbb{E}}[D_3(R_2 - K)^+] \\
&= D_3(a,a)\Big(R_2(a,a) - \frac{1}{3}\Big)^+\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{aa}\} + D_3(a,b)\Big(R_2(a,b) - \frac{1}{3}\Big)^+\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ab}\} \\
&\quad + D_3(b,a)\Big(R_2(b,a) - \frac{1}{3}\Big)^+\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{ba}\} + D_3(b,b)\Big(R_2(b,b) - \frac{1}{3}\Big)^+\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{bb}\} \\
&= \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6}{7}\cdot 0\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{7}\cdot 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{7}\cdot 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{21}.
\end{aligned}$$

Prema tome, cijena cap ugovora jednaka je sumi cijena caplet ugovora pa dobivamo

$$\text{Cap}_3 = 0 + \frac{1}{42} + \frac{2}{21} = \frac{5}{42}.$$

Poglavlje 4

Cijena izvedenica uz forward mjeru

U ovom poglavlju bavit ćemo se problemom na koji nailazimo prilikom određivanja cijene imovine. Neka V_m označava isplatu neke izvedenice ili obične vrijednosnice u trenutku m. Prema Napomeni 3.1.10. vrijedi slijedeća formula za cijenu ugovora u trenutku n, prije dospijeća m

$$V_n = \frac{1}{D_n}\widetilde{\mathbb{E}}[D_m V_m | \mathcal{F}_n].$$

Ovakav način vrednovanja ne predstavlja problem ako se radi o beskuponskoj obveznici jer je ona definirana pomoću kamatnih stopa koje vrijede i na novčanom tržištu ali bi mogla biti problem za vrednovanje izvedenica. Naime, da bismo izračunali cijenu po gornjoj formuli, moramo znati zajedničku uvjetnu distribuciju procesa D_m i V_m. Budući da nam to nije jednostavan zadatak, uvodimo pojam Radon-Nikodymove derivacije koja će nam poslužiti za zamjenu martingalne mjere forward mjerom što će nam olakšati rješavanje problema.

Radon-Nikodymova derivacija je zapravo slučajna varijabla koju ćemo definirati kao omjer dviju već spomenutih varijabli.

Definicija 4.0.1. *Neka je $1 \leq m \leq N$. Definiramo Radon-Nikodymovu derivaciju kao*

$$Z_{m,m} = \frac{D_m}{B_{0,m}}.$$

Tada pripadnu m-forward mjeru $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ definiramo kao

$$\widetilde{\mathbb{P}}^m(\omega) = Z_{m,m}(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Provjerimo sada da je ovako definirana mjera vjerojatnosna, odnosno da vrijedi $\widetilde{\mathbb{P}}^m(\Omega) = 1$:

$$\widetilde{\mathbb{P}}^m(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \widetilde{\mathbb{P}}^m(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} Z_{m,m}(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) = \widetilde{\mathbb{E}}Z_{m,m} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_m}{B_{0,m}}\right] = \frac{1}{B_{0,m}}\widetilde{\mathbb{E}}D_m = 1.$$

Dakle, forward mjera je vjerojatnosna mjera. U raspisu smo u zadnjoj jednakosti primjenili $B_{0,m} = \widetilde{\mathbb{E}}D_m$. Vrijedi još i tvrdnja da ukoliko je $\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) = 0$, onda je i $\widetilde{\mathbb{P}}^m(\omega) = 0$ pa kažemo da je $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ apsolutno neprekidna u odnosu na $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Napomena 4.0.2. *Ako je Y bilo koja slučajna varijabla na Ω, tada vrijedi sljedeća veza za njezina očekivanja s obzirom na vjerojatnosti $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ i $\widetilde{\mathbb{P}}$:*

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[Y] = \widetilde{\mathbb{E}}[ZY].$$

Jednakost se vrlo jednostavno može i dokazati:

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[Y] = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}^m(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\frac{\widetilde{\mathbb{P}}^m(\omega)}{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)Z(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) = \widetilde{\mathbb{E}}[ZY].$$

Nadalje, definiramo proces Radon-Nikodymove derivacije kao

$$Z_{n,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}|\mathcal{F}_n], \quad n = 0, 1, ..., m.$$

Za tako definiran slučajni proces vrijedi svojstvo analogno prethodnoj napomeni pa ga stoga navodimo u obliku sljedeće leme.

Lema 4.0.3. *Neka je $0 \leq m \leq N$ i neka je Y $\mathcal{F}_m$-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[Y] = \widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}Y].$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz sljedećeg niza jednakosti:

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[Y] = \widetilde{\mathbb{E}}[ZY] = \widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{\mathbb{E}}[ZY|\mathcal{F}_m]] = \widetilde{\mathbb{E}}[Y\widetilde{\mathbb{E}}[Z|\mathcal{F}_m]] = \widetilde{\mathbb{E}}[YZ_{m,m}].$$

Pritom smo u prvoj jednakosti koristili gornju napomenu, u drugoj i trećoj jednakosti svojstva navedena u Teoremu 3.1.5. a u četvrtoj definiciju slučajnog procesa Radon-Nikodymove derivacije. □

Također, vrijedi slično pravilo kada želimo izračunati uvjetno očekivanje $\mathcal{F}_m$-izmjerive slučajne varijable s obzirom na forward mjeru.

Lema 4.0.4. *Neka je $0 \leq n \leq m \leq N$ i neka je Y $\mathcal{F}_m$-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[Y|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{Z_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}Y|\mathcal{F}_n].$$

Dokaz. Možemo primjetiti da je desna strana jednakosti $\mathcal{F}_n$-izmjeriva slučajna varijabla. Potrebno je pokazati da za svaki $A \in \mathcal{F}_n$ vrijedi jednakost

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m\left[1_A\frac{1}{Z_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}Y|\mathcal{F}_n]\right] = \widetilde{\mathbb{E}}^m[1_A\widetilde{\mathbb{E}}^m[Y|\mathcal{F}_n]] = \widetilde{\mathbb{E}}^m[1_AY].$$

Primjenjujući Lemu 4.0.3. u prvoj i posljednjoj jednakosti sljedećeg raspisa, te svojstvo (iii) iz Teorema 3.1.5. u trećoj jednakosti, dobivamo tvrdnju:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}^m\left[1_A\frac{1}{Z_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}Y|\mathcal{F}_n]\right] &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[1_AZ_{n,m}\cdot\frac{1}{Z_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}Y|\mathcal{F}_n]\right]\\ &= \widetilde{\mathbb{E}}[1_A\widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}Y|\mathcal{F}_n]]\\ &= \widetilde{\mathbb{E}}[1_AZ_{m,m}Y]\\ &= \widetilde{\mathbb{E}}^m[1_AY].\end{aligned}$$

□

Budući da je V_m $\mathcal{F}_m$-izmjeriva slučajna varijabla, na nju možemo primjeniti navedene leme. Dakle, vrijedi $\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{Z_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}V_m|\mathcal{F}_n]$. U sljedećem teoremu donosimo zaključak ove teorije kojim rješavamo problem s početka poglavlja.

Teorem 4.0.5. *Neka je $1 \leq m \leq N$ i neka je V_m $\mathcal{F}_m$-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m] = \frac{1}{B_{0,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[D_m V_m].$$

Općenito, za $\mathcal{F}_m$-izmjerivu slučajnu varijablu V_m vrijedi

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{D_n B_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[D_m V_m|\mathcal{F}_n], \quad n = 0, 1, ..., m.$$

Dokaz. Za početak zapišimo proces Radon-Nikodymove derivacije na drugačiji način uzimajući u obzir Definiciju 3.1.6. te Napomenu 3.1.7.

$$Z_{n,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}|\mathcal{F}_n] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{D_m}{B_{0,m}}|\mathcal{F}_n\right] = \frac{\widetilde{\mathbb{E}}[D_m|\mathcal{F}_n]}{B_{0,m}} = \frac{D_n B_{n,m}}{B_{0,m}}.$$

S obzirom da je V_m $\mathcal{F}_m$-izmjeriva, možemo primjeniti prethodno navedene leme i uvrstiti rezultat iz prošlog koraka. Dakle, prema Lemi 4.0.3. imamo

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m] = \widetilde{\mathbb{E}}[V_m Z_{m,m}] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[V_m \frac{D_m}{B_{0,m}}\right] = \frac{1}{B_{0,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[D_m V_m].$$

Odnosno, za uvjetno očekivanje od V_m, prema Lemi 4.0.4. slijedi

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m|\mathcal{F}_n] &= \frac{1}{Z_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[V_m Z_{m,m}|\mathcal{F}_n] = \frac{B_{0,m}}{D_n B_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}\left[V_m \frac{D_m}{B_{0,m}}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \frac{1}{D_n B_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[D_m V_m|\mathcal{F}_n].\end{aligned}$$

Ovime smo dokazali i drugu jednakost teorema.

□

Uočimo da nam prethodni teorem uvelike olakšava račun jer je lakše izračunati uvjetnu distribuciju od V_m s obzirom na m-forward mjeru nego zajedničku uvjetnu distribuciju varijabli D_m i V_m s obzirom na martingalnu mjeru. Izraz $\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m|\mathcal{F}_n]$ možemo još malo jednostavnije zapisati primjenom Napomene 3.1.10:

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m|\mathcal{F}_n] = \frac{1}{D_n B_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}[D_m V_m|\mathcal{F}_n] = \frac{V_n}{B_{n,m}}.$$

Iz posljednje jednakosti opažamo da je uvjetno očekivanje cijene izvedenice u trenutku m, s obzirom na m-forward mjeru, jednako cijeni izvedenice u trenutku n koja isplaćuje V_m u trenutku m, izraženoj u jedinicama beskuponskih obveznica dospijeća

m. Upravo iz razloga što denominiramo u jedinicama beskuponskih obveznica dospijeća m, najviše smisla ima primjenjivati forward mjeru na izvedenice s isplatom u trenutku m. Možemo primjetiti da je konačni rezultat zapravo forward cijena izvedenice definirana u Teoremu 3.2.2. Sukladno tome zaključujemo da je tako definirana cijena imovine $\widetilde{\mathbb{P}}^m$-martingal. Dakle, za $0 \leq n \leq m$ vrijedi

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m \left[\frac{V_{n+1}}{B_{n+1,m}} | \mathcal{F}_n \right] = \widetilde{\mathbb{E}}^m [\widetilde{\mathbb{E}}^m [V_m | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] = \widetilde{\mathbb{E}}^m [V_m | \mathcal{F}_n] = \frac{V_n}{B_{n,m}}.$$

U nastavku navodimo primjer u kojem primjenjujemo forward mjeru. Nadovezujemo se na izračunate podatke primjera iz Poglavlja 3.

Primjer 4.0.6. *Zadatak nam je izračunati cijenu 3-periodičnog cap ugovora uz $K = \frac{1}{3}$, koristeći forward mjeru, te rezultat usporediti s rezultatom dobivenim u Primjeru 3.2.10.*

Za početak moramo izračunati forward vjerojatnosti $\widetilde{\mathbb{P}}^3(\omega)$, ali da bismo to mogli prvo moramo izračunati Radon-Nikodymovu derivaciju prema Definiciji 4.0.1. Budući da vrijedi formula $Z_{m,m} = \frac{D_m}{B_{0,m}}$ i da je slučajna varijabla D_m $\mathcal{F}_{m-1}$-izmjeriva te je $B_{0,m}$ $\mathcal{F}_0$-izmjeriva, slijedi da je onda i $Z_{m,m}$ $\mathcal{F}_{m-1}$-izmjeriva. Dakle, $Z_{3,3}$ će ovisiti samo o prva dva koraka. Dobivamo sljedeće rezultate:

$$Z_{3,3}(a,a) = \frac{D_3(a,a)}{B_{0,3}} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{4}, \quad Z_{3,3}(a,b) = \frac{D_3(a,b)}{B_{0,3}} = \frac{\frac{6}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{2},$$

$$Z_{3,3}(b,a) = \frac{D_3(b,a)}{B_{0,3}} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{4}{7}} = 1, \quad Z_{3,3}(b,b) = \frac{D_3(b,b)}{B_{0,3}} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{4}{7}} = 1.$$

Sada imamo sve potrebno za računanje forward mjere prema formuli $\widetilde{\mathbb{P}}^m(\omega) = \widetilde{\mathbb{P}}(\omega) \cdot Z_{m,m}(\omega)$.

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3(a,a,a) = \widetilde{\mathbb{P}}(a,a,a) \cdot Z_{3,3}(a,a) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3(a,a,b) = \widetilde{\mathbb{P}}(a,a,b) \cdot Z_{3,3}(a,a) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{12},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3(a,b,a) = \widetilde{\mathbb{P}}(a,b,a) \cdot Z_{3,3}(a,b) = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3(a,b,b) = \widetilde{\mathbb{P}}(a,b,b) \cdot Z_{3,3}(a,b) = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3(b,a,a) = \widetilde{\mathbb{P}}(b,a,a) \cdot Z_{3,3}(b,a) = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3(b,a,b) = \widetilde{\mathbb{P}}(b,a,b) \cdot Z_{3,3}(b,a) = \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{1}{12},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3(b,b,a) = \widetilde{\mathbb{P}}(b,b,a) \cdot Z_{3,3}(b,b) = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3(b,b,b) = \widetilde{\mathbb{P}}(b,b,b)\cdot Z_{3,3}(b,b) = \frac{1}{8}\cdot 1 = \frac{1}{8}.$$

Idući korak nam je računanje uvjetnih vjerojatnosti. To možemo napraviti na jednak način kao i u ranijim primjerima pa prvo računamo sljedeće vjerojatnosti:

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{aa}\} = \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,a,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,a,b)\} = \frac{1}{4},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ab}\} = \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,b,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,b,b)\} = \frac{1}{4},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ba}\} = \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,a,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,a,b)\} = \frac{1}{4},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{bb}\} = \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,b,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,b,b)\} = \frac{1}{4},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{a}\} = \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,a,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,a,b)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,b,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,b,b)\} = \frac{1}{2},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{b}\} = \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,a,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,a,b)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,b,a)\} + \widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,b,b)\} = \frac{1}{2}.$$

Sada možemo prijeći na računanje uvjetnih forward vjerojatnosti:

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_3 = a|\omega_1 = a, \omega_2 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,a,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{aa}\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_3 = b|\omega_1 = a, \omega_2 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,a,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{aa}\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_3 = a|\omega_1 = a, \omega_2 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,b,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ab}\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_3 = b|\omega_1 = a, \omega_2 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{(a,b,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ab}\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_3 = a|\omega_1 = b, \omega_2 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,a,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ba}\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_3 = b|\omega_1 = b, \omega_2 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,a,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ba}\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_3 = a|\omega_1 = b, \omega_2 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,b,a)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{bb}\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_3 = b|\omega_1 = b, \omega_2 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{(b,b,b)\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{bb}\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

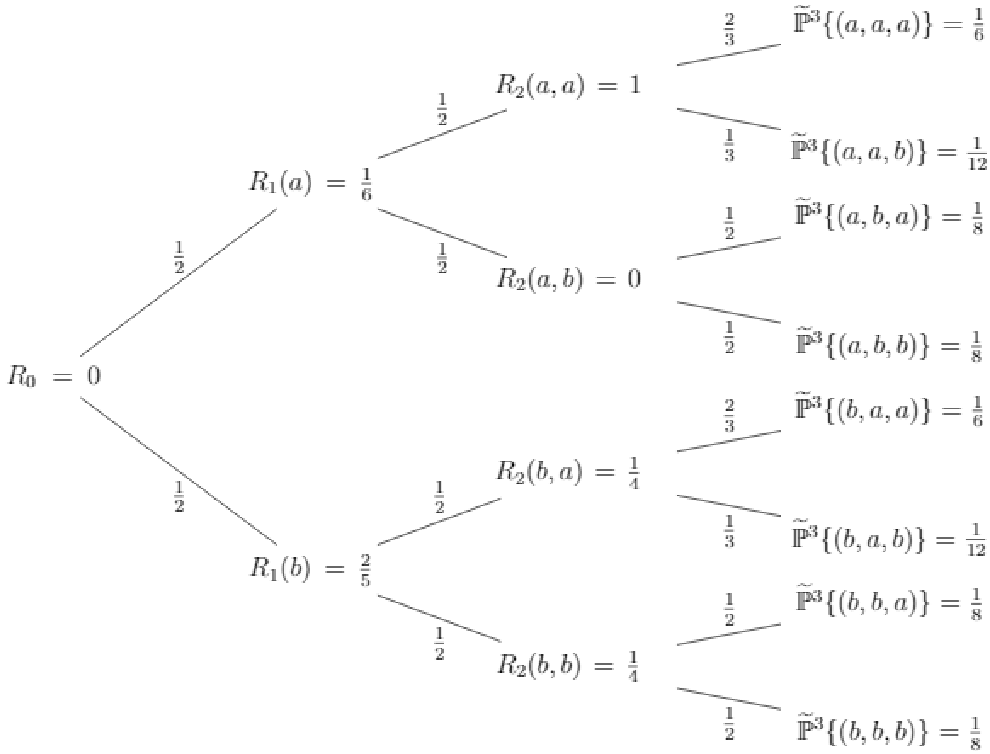
$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_2 = a|\omega_1 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{aa}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{a}\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_2 = b|\omega_1 = a\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ab}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_a\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_2 = a|\omega_1 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ba}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_b\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_2 = b|\omega_1 = b\} = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{bb}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_b\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Zapravo smo izračunali prijelazne vjerojatnosti između čvorova binomnog stabla pa dobivamo prikaz sa slike:



Slika 4.1: Binomno stablo s pripadajućim vjerojatnostima

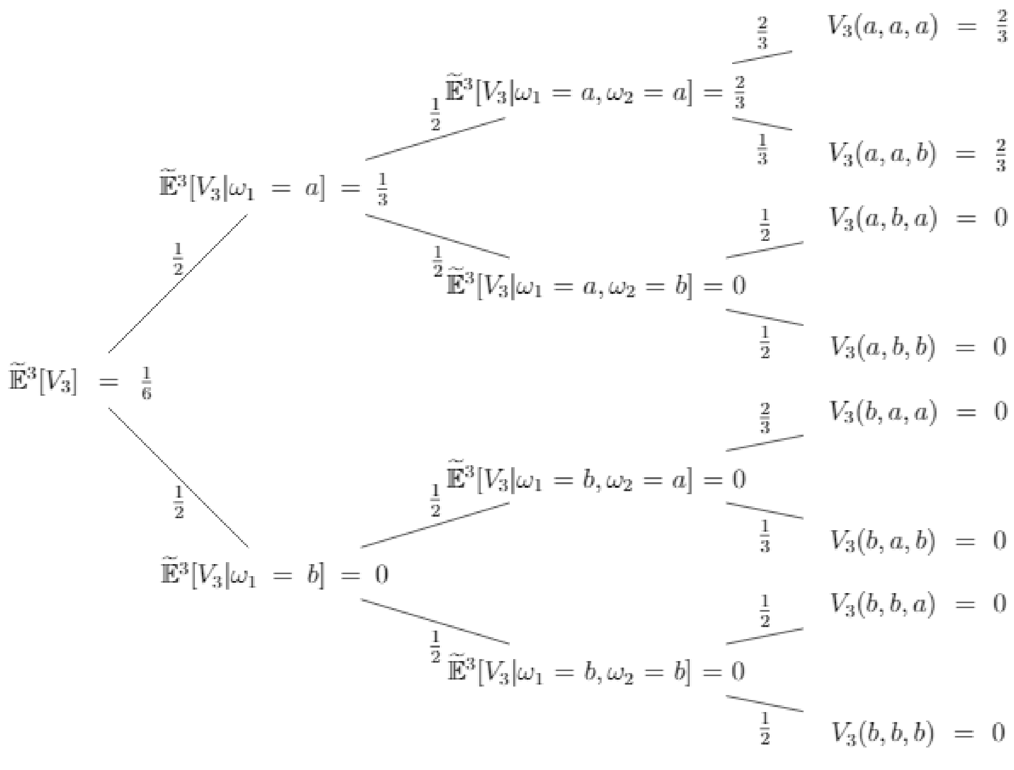
Izvedenica koja nas zanima je 3-periodični kamatni cap ugovor, odnosno caplet ugovori koji vrše isplate u trenucima $n = 1, 2, 3$, stoga vrijedi $V_3 = (R_2 - \frac{1}{3})^+$. Kao što smo naveli na početku primjera, V_m je $\mathcal{F}_{m-1}$-izmjeriva, pa zato V_3 ovisi samo o ishodima u prva dva koraka. Stoga vrijedi

$$V_3(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \omega_1 = a, \omega_2 = a \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te je $\widetilde{\mathbb{E}}^3[V_3|\mathcal{F}_2] = V_3$. Nadalje, primjenjujući izračunate uvjetne vjerojatnosti dobijemo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}^3[V_3|\omega_1 = a] &= V_3(a,a)\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_2 = a|\omega_1 = a\} + V_3(a,b)\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_2 = b|\omega_1 = a\} \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \\
\widetilde{\mathbb{E}}^3[V_3|\omega_1 = b] &= V_3(b,a)\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_2 = a|\omega_1 = b\} + V_3(b,b)\widetilde{\mathbb{P}}^3\{\omega_2 = b|\omega_1 = b\} = 0, \\
\widetilde{\mathbb{E}}^3[V_3] &= V_3(a,a)\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{aa}\} + V_3(a,b)\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ab}\} + V_3(b,a)\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{ba}\} + V_3(b,b)\widetilde{\mathbb{P}}^3\{A_{bb}\} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Izračunato možemo prikazati kroz binomno stablo. Pritom će se izračunata očekivanja nalaziti u čvorovima stabla i svaki iznos u čvoru možemo dobiti kao težinski prosjek sljedeća dva čvora. Težinama smatramo uvjetne vjerojatnosti $\widetilde{\mathbb{P}}^3$ koje su prikazane na granama stabla.



Slika 4.2: Binomno stablo s pripadajućim vjerojatnostima

Nama je zapravo bitno V_0, tj. cijena u trenutku 0 caplet ugovora koji vrši isplatu u trenutku 3. Sada to možemo jednostavno izračunati koristeći formulu $\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m|\mathcal{F}_n] = \frac{V_n}{B_{n,m}}$, uz $n = 0$. Dakle,

$$V_0 = B_{0,3}\widetilde{\mathbb{E}}^3[V_3] = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{21}.$$

Dobili smo isti rezultat kao i u Primjeru 3.2.10. kada smo računali pomoću martingalne mjere.

Poglavlje 5

Futures ugovori

U ovom poglavlju promotrit ćemo vrstu ugovora koja je vrlo slična forward ugovoru iz odjeljka 3.2. Radi se o futures ugovorima, koji su zapravo nastali kao odgovor na kritike nedostataka forward ugovora. Futures ugovor je standardizirani ugovor o kupnji ili prodaji predmetne imovine na unaprijed određen datum dospijeća, po unaprijed određenoj cijeni. Radi se o vrsti ugovora koja vlasnika obvezuje na njegovo provođenje, a trgovina se odvija na uređenim tržištima, posredništvom brokera. Navodimo dva najbitnija problema kod forward ugovora koji nam potvrđuju da je futures bolji izbor.

1. Forward ugovor dospijeća m ima različitu cijenu ovisno o početnom datumu te zbog toga tržište mora ponuditi velik broj ugovora s dospijećem m i različitim početnim datumom da bi bilo učinkovito. S druge strane, cijena futures ugovora povezana je samo s datumom dospijeća. Dakle, cijena futures ugovora s dospijećem m jednaka je u svakom trenutku prije datuma dospijeća.

2. Cijena forward ugovora na početni datum je jednaka 0 ali kasnije raste ili pada ovisno o cijeni osnovne imovine uz koju se veže. Prema ovom kriteriju, futures ugovori nose manji rizik zbog tzv. *označavanja tržišta (marking to market)*. Naime, broker otvara maržni račun za klijenta na kojem klijent polaže novac kao garanciju za likvidnost brokera. Svakodnevno se prati da li je investicija ostvarila dnevni dobitak ili gubitak te se taj iznos dodaje ili oduzima s maržnog računa. Ukoliko iznos na računu nije dovoljan, klijent dobiva poziv da nadoplati novac ili zatvori ugovor. Ovakav način trgovanja zahtjeva od klijenata da svakodnevno podmiruju svoja dugovanja prema ostalim sudionicima na tržištu pa je samim time ulaganje manje rizično jer su dugovanja manja.

U nastavku navodimo matematički precizniju definiciju futures ugovora.

Definicija 5.0.1. *Neka je* $S_0, S_1, ..., S_N$ *proces cijena za neku imovinu. Za* $0 \leq m \leq N$ *definiramo proces m-futures cijena* $\mathrm{Fut}_{n,m}, n = 0, 1, ..., m$ *kao adaptirani slučajni proces za kojeg vrijedi:*
(i) $\mathrm{Fut}_{m,m} = S_m$,
(ii) Za $0 \leq n \leq m - 1$ *vrijednost neutralna na rizik u trenutku* n *ugovora s*

isplatama $\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m}$ *u trenutku* $k+1$ *jednaka je 0 za* $k = n, ..., m-1$, *tj. vrijedi*

$$\frac{1}{D_n}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=n}^{m-1} D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m})|\mathcal{F}_n\right] = 0.$$

Možemo primijetiti da nam uvjet (ii) iz definicije govori da je vrijednost futures ugovora u početnom trenutku jednaka 0. Stoga, samo zauzimanje duge ili kratke pozicije ne košta ništa, već samo moramo otvoriti maržni račun. Štoviše, uvjet (ii) vrijedi u svim trenucima od 0 do $m-1$ pa je vrijednost ugovora u svim tim trenucima jednaka 0. Upravo zbog tog svojstva, investitora zatvaranje pozicije (tj. prodaja ugovora) ni u kojem trenutku ne košta ništa. U trenutku zatvaranja pozicije prestaju periodična plaćanja te prestaje vrijediti dogovor o prodaji imovine u trenutku dospijeća.

Investitor koji u trenutku n zauzme dugu poziciju u futures ugovoru dospijeća m pristaje preko maržnog računa primati isplate iznosa $\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m}$ u svakom trenutku $k+1$ za $k = n, ..., m-1$ te u trenutku dospijeća m otkupljuje predmetnu imovinu po njezinoj tržišnoj cijeni S_m. Međutim, kao što smo već spomenuli, bilo koja od isplata može biti negativna, što znači da investitor zapravo taj iznos gubi. Suprotno opisanoj situaciji, investitor koji u trenutku n zauzima short poziciju, pristaje plaćati iznose $\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m}$ u svakom trenutku $k+1$ za $k = n, ..., m-1$ te u trenutku dospijeća m mora isporučiti predmetnu imovinu po njezinoj tržišnoj cijeni S_m.
Pogledajmo sada tok novca za investitora koji drži dugu poziciju. Dakle, prvo prima isplate između trenutaka n i $m-1$ a zatim u trenutku m plaća S_m za otkup imovine:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m-1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m}) - S_m = \mathrm{Fut}_{m,m} - \mathrm{Fut}_{n,m} - S_m &= S_m - \mathrm{Fut}_{n,m} - S_m \\ &= -\mathrm{Fut}_{n,m}.\end{aligned}$$

Možemo uočiti da je investitor zapravo platio iznos $\mathrm{Fut}_{n,m}$ za kupnju imovine. Drugim riječima, u trenutku n je zaključana cijena za kupnju imovine u trenutku m. Jednako, samo sa suprotnim predznacima bilo bi i u slučaju kratke pozicije. Za cijenu $\mathrm{Fut}_{n,m}$ vrijedi slijedeći teorem.

Teorem 5.0.2. *Neka vrijedi* $0 \leq m \leq N$. *Tada je slučajni proces zadan kao*

$$\mathrm{Fut}_{n,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_n], \quad n = 0, 1, ..., m$$

jedinstven te zadovoljava uvjete Definicije 5.0.1.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da su zadovoljena svojstva (i) i (ii) iz definicije. Vrijedi $\mathrm{Fut}_{m,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_m] = S_m$ što dokazuje svojstvo (i). Za svojstvo (ii) treba pokazati da za $k = n, ..., m-1$ vrijedi

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=n}^{m-1} D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m})|\mathcal{F}_n\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=n}^{m-1} D_{k+1}(\widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_{k+1}] - \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_k])|\mathcal{F}_n\right]$$
$$= 0.$$

Odnosno, dovoljno je pokazati da je uvjetno očekivanje svakog pribrojnika u gornjoj sumi jednako 0:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}\Big[D_{k+1}\Big(\widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_{k+1}] - \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_k]\Big)|\mathcal{F}_n\Big] = \\
&\qquad = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\widetilde{\mathbb{E}}\Big[D_{k+1}\Big(\widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_{k+1}] - \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_k]\Big)|\mathcal{F}_k\Big]|\mathcal{F}_n\Big] \\
&\qquad = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\Big(D_{k+1}\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_{k+1}]|\mathcal{F}_k\Big] - \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_k]\Big)|\mathcal{F}_n\Big] \\
&\qquad = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\Big(D_{k+1}(\widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_k] - \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_k])\Big)|\mathcal{F}_n\Big] \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Primjetimo da smo u prvoj i trećoj jednakosti koristili svojstvo (iii) Teorema 3.1.5 a u drugoj jednakosti činjenicu da je D_{k+1} $\mathcal{F}_k$- izmjeriva slučajna varijabla.
Sada pokazujemo da je ovako definiran slučajni proces jedini koji zadovoljava navedena svojstva. Prema Definiciji 5.0.1 vrijedi

$$\sum_{k=n}^{m-1} \widetilde{\mathbb{E}}[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m})|\mathcal{F}_n] = 0, \quad n = 0, 1, ..., m-1.$$

Od gornje sume oduzmimo jednako konstruiranu sumu za $n = 0, 1, ..., m-2$ i primjenimo supstituciju $n+1$ za n. Dobivamo

$$0 = \sum_{k=n}^{m-1} \widetilde{\mathbb{E}}[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m})|\mathcal{F}_n] - \sum_{k=n+1}^{m-1} \widetilde{\mathbb{E}}[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m})|\mathcal{F}_{n+1}].$$

Primjenom uvjetnog očekivanja s obzirom na $\mathcal{F}_n$ na gornju jednakost, te zatim Teorema 3.1.5 (iii) slijedi

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=n}^{m-1} \widetilde{\mathbb{E}}[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m})|\mathcal{F}_n] - \sum_{k=n+1}^{m-1} \widetilde{\mathbb{E}}[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m} - \mathrm{Fut}_{k,m})|\mathcal{F}_n] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}[D_{n+1}(\mathrm{Fut}_{n+1,m} - \mathrm{Fut}_{n,m})|\mathcal{F}_n].
\end{aligned}$$

Budući da su slučajne varijable D_{n+1} i $\mathrm{Fut}_{n,m}$ obje $\mathcal{F}_n$-izmjerive, posljednju jednakost možemo pisati kao

$$D_{n+1}\widetilde{\mathbb{E}}([\mathrm{Fut}_{n+1,m}|\mathcal{F}_n] - \mathrm{Fut}_{n,m}) = 0$$

odnosno, za $n = 0, 1, ..., m-1$ dobivamo

$$\mathrm{Fut}_{n,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[\mathrm{Fut}_{n+1,m}|\mathcal{F}_n] = \widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_n].$$

Iz prve jednakosti također primjećujemo da je ovako definirani slučajni proces $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingal. Martingalno svojstvo će vrijediti ako i samo ako je $\mathrm{Fut}_{n,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[S_m|\mathcal{F}_n]$. Za $n = m$ već znamo da vrijedi $\mathrm{Fut}_{m,m} = S_m$, što opet zadovoljava gornje svojstvo. Dakle, proces definiran u iskazu teorema je jedinstveni proces koji zadovoljava uvjete Definicije 5.0.1. □

Budući da se forward i futures ugovori temelje na cijeni predmetne imovine te na vrijednostima kamatnih stopa na tržištu, odnos njihovih cijena se mijenja u skladu s odnosom između cijene imovine i kamata. Upravo to svojstvo nam opisuje sljedeći korolar.

Korolar 5.0.3. *Neka je $0 \leq m \leq N$. Jednakost $\mathrm{For}_{0,m} = \mathrm{Fut}_{0,m}$ vrijedi ako i samo ako su slučajne varijable D_m i S_m nezavisne, odnosno ako i samo ako je kamatna stopa konstantna.*

Dokaz. Ukoliko su varijable D_m i S_m nezavisne, za njihova očekivanja vrijedi $\widetilde{\mathbb{E}}[D_m S_m] = \widetilde{\mathbb{E}}[D_m] \cdot \widetilde{\mathbb{E}}[S_m]$. Već smo pokazali da su forward i futures cijene dane kao:

$$\mathrm{For}_{0,m} = \frac{S_0}{B_{0,m}} = \frac{S_0}{\widetilde{\mathbb{E}}[D_m]} = \frac{\widetilde{\mathbb{E}}[D_m S_m]}{\widetilde{\mathbb{E}}[D_m]},$$

$$\mathrm{Fut}_{0,m} = \widetilde{\mathbb{E}}[S_m].$$

Primjećujemo da su ta dva izraza jednaka ako i samo ako su D_m i S_m nezavisne. □

Nastavno na korolar, nameće se zaključak za slučaj negativne koreliranosti varijabli D_m i S_m. Takva situacija se pojavljuje kada je rast cijena imovine praćen porastom kamatnih stopa (što znači smanjenje diskontnih stopa). U tom slučaju vrijedi $\widetilde{\mathbb{E}}[D_m S_m] < \widetilde{\mathbb{E}}[D_m] \cdot \widetilde{\mathbb{E}}[S_m]$, a onda i $\mathrm{For}_{0,m} < \mathrm{Fut}_{0,m}$. Stoga, zaključujemo da je bolje držati dugu poziciju u futures ugovoru nego u forward ugovoru. Naime, iz futures ugovora redovito primamo periodičke isplate koje zatim možemo odmah investirati dok vrijede povoljne visoke kamatne stope. S druge strane, forward ugovor ne vrši nikakve isplate prije samog dospijeća. Kao posljedica ove prednosti futures ugovora slijedi da je njegova početna cijena nešto viša od cijene forward ugovora.

Literatura

[1] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[2] S. E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance I, The Binomial Asset Pricing Model, Springer, 2003.

[3] Z. Vondraček, Financijsko modeliranje I (skripta), 2008. (https://web.math.pmf.unizg.hr/vondra/1fm16-predavanja.html)

[4] Z. Vondraček, Slučajni procesi (skripta), 2010. (https://web.math.pmf.unizg.hr/vondra/sp17-predavanja.html)

Sažetak

U ovom radu proučili smo binomni model za vrednovanje financijske imovine ovisne o kamatnim stopama. Početni dio rada čini razmatranje teorije o beskuponskim obveznicama jer su nam one potrebne za definiranje cijena ostalih vrsta ugovora. Već na samom početku uvodimo i pojam ekvivalentne martingalne mjere kako bismo osigurali da model ne podržava mogućnost arbitraže. Na taj način za sve vrste imovine izvodimo cijene neutralne na rizik te dolazimo do teorema koji dokazuje da su svi procesi, koji opisuju diskontirane vrijednosti portfelja, zapravo martingali. Upravo taj teorem čini temelje za nastavak razvoja modela. U ostatku rada uspoređujemo različite vrste ugovora i njihove cijene (swap, cap, floor, forward i futures) te zaključke demonstriramo kroz primjere. Definiramo još i tzv. forward mjeru koja nam olakšava računanje cijena izvedenica

Summary

This paper presents the binomial model which is useful for evaluating prices of interest rate depending assets. We started with a discussion about zero-coupon bonds because they are necessary for pricing of the other asset classes. At the very beginning, equivalent martingale measure is introduced in order to avoid the arbitrage. According to this assumption, we developed risk-neutral prices for all asset classes and stated the theorem which claims that all discounted portfolio processes are martingales. This result is the basis for the rest of the thesis. Also, different types of contracts (swap, cap, floor, forward and futures) and their prices were compared and demonstrated through the examples. Furthermore, we introduced a forward measure which makes the pricing of derivative securities pretty simpler in regards to martingale measure.

Životopis

Rođena sam 11. svibnja 1992. godine u Zagrebu. Osnovnu školu pohađala sam u Gornjoj Stubici, a zatim sam upisala opću gimnaziju u Srednjoj školi Sesvete. Nakon položenih ispita Državne mature, upisala sam studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2015. godine završila sam preddiplomski sveučilišni studij nastavničkog smjera. Nakon nekoliko odslušanih predavanja o primjeni matematike u različitim područjima života i gospodarstva, razvila sam interes za primjenu matematike u ekonomiji. Sukladno tome, upisala sam diplomski studij Financijske i poslovne matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.