

# Vrste mnogokuta

---

**Merkaš, Ana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:215141>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-03**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ana Merkaš

**VRSTE MNOGOKUTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc Maja Starčević

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Vrste trokuta</b>	<b>2</b>
1.1 Nožišni trokut . . . . .	4
1.2 Ortocentrični trokut . . . . .	8
1.3 Medijalni trokut . . . . .	10
1.4 Pseudopravokutni trokut . . . . .	12
1.5 Savršeni trokut . . . . .	19
1.6 Zlatni trokut . . . . .	27
<b>2 Vrste četverokuta</b>	<b>31</b>
2.1 Paralelogram . . . . .	31
2.2 Trapez . . . . .	37
2.3 Tetivni četverokut . . . . .	39
2.4 Tangencijalni četverokut . . . . .	54
<b>3 Ostali mnogokuti</b>	<b>58</b>
3.1 Peterokut . . . . .	58
3.2 Šesterokut . . . . .	59
<b>Bibliografija</b>	<b>62</b>

# Uvod

U osnovnoj školi učenici uče osnovnu podjelu mnogokuta prema broju vrhova. Ovisno o duljinama stranica, mnogokuti mogu biti pravilni ili nepravilni. Trokute možemo podijeliti prema veličini kutova na šiljastokutne, tupokutne i pravokutne, te prema veličini stranica na jednakostranične, jednakokračne i raznostranične.

Iako je trokut najjednostavniji geometrijski lik, njegova svojstva su neiscrpna. Postoje neki manje poznati trokuti, ali zbog svojih svojstava vrlo zanimljivi. U radu ćemo upoznati nožišni trokut čiji su vrhovi nožišta okomica spuštenih iz neke točke na pravce na kojima leže stranice danog trokuta. Vidjet ćemo specijalne slučajeve nožišnog trokuta poput ortocentričnog i medijalnog trokuta. Također ćemo upoznati pseudopravokutni trokut koji je po svojim svojstvima sličan pravokutnom trokutu.

Postoje trokuti čiji se opseg i površina podudaraju, a duljine stranica su im prirodni brojevi. Zbog svoje iznimnosti, takvi se trokuti nazivaju savršeni. U radu ćemo dokazati da ima samo pet nesukladnih savršenih trokuta. Također ćemo spomenuti zlatni trokut, odnosno jednakokračni trokut kojemu je omjer duljine kraka i osnovice jednak omjeru zlatnog reza. Zlatni rez se javlja i kod pravilnog peterokuta.

Još u nižim razredima osnovne škole učenici upoznaju pravokutnik i kvadrat, no tek kasnije saznaju da su to zapravo specijalne vrste paralelograma. U ovom radu ćemo dokazati neka svojstva paralelograma, te pokazati kako od paralelograma doći do romba, pravokutnika i kvadrata. Također ćemo spomenuti manje poznati tetivni i tangencijalni četverokut. Dokazat ćemo brojna njihova svojstva od kojih je najzanimljiviji Japanski teorem o tetivnim četverokutima. Na kraju ćemo vidjeti kakav je to Pascalov i Brianchonov šesterokut.

Upravo zbog toga što mnogokuti skrivaju tolike zanimljive činjenice, cilj ovog rada je istražiti svojstva raznih trokuta, četverokuta, peterokuta i šesterokuta.

Diplomski rad podijeljen je na tri poglavlja. U prvom poglavlju govori se o različitim vrstama trokuta posebnog imena. Drugo poglavlje govori o vrstama četverokuta, od dobro poznatih vrsta paralelograma, do manje poznatog tetivnog i tangencijalnog četverokuta. Posljednje poglavlje obuhvaća posebne vrste peterokuta i šesterokuta.

# Poglavlje 1

## Vrste trokuta

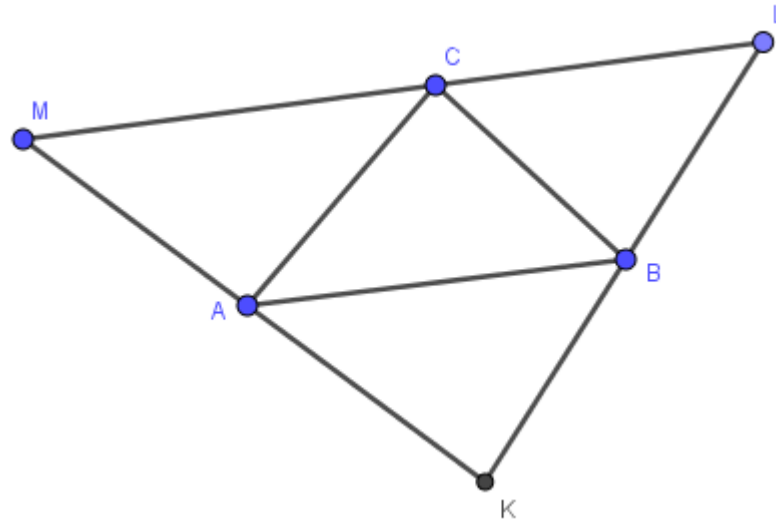
U ovom poglavlju promatrat ćemo različite trokute koji imaju neka posebna svojstva. Prije svega definirat ćemo pojam upisanog i opisanog trokuta nekom danom trokutu.

**Definicija 1.0.1.** *Trokut  $\triangle DEF$  čiji vrhovi pripadaju (različitim) pravcima na kojima leže stranice danog trokuta  $\triangle ABC$  naziva se **upisani trokut** trokutu  $\triangle ABC$ .*

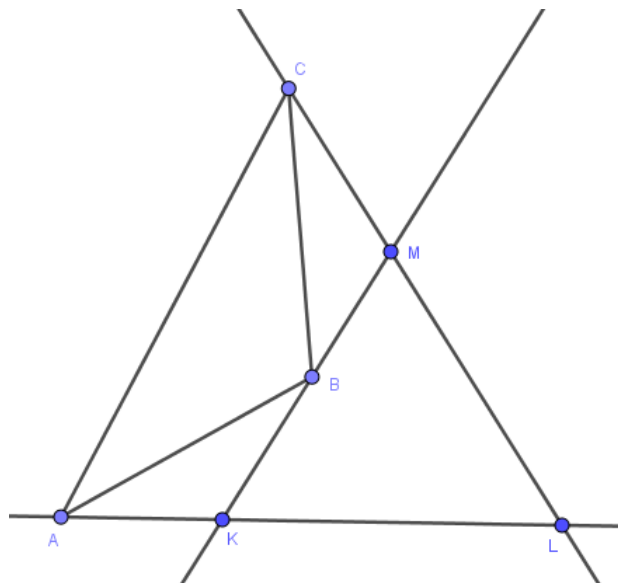
Klasični primjer upisanog trokuta nalazi se na slici 1.3, gdje se upisani trokut nalazi unutar danog trokuta. Međutim, upisani trokut se ne mora nužno nalaziti unutar danog trokuta. Na slici 1.4 vidimo da je po definiciji, trokut  $\triangle EFG$  upisan trokutu  $\triangle ABC$ , ali se on nalazi izvan danog trokuta  $\triangle ABC$ .

**Definicija 1.0.2.** *Trokut  $\triangle KLM$  kojemu pravci na kojima leže stranice tog trokuta prolaze redom vrhovima  $A, B, C$  danog trokuta  $\triangle ABC$  naziva se **opisani trokut** trokutu  $\triangle ABC$ .*

Standardni primjer, gdje opisani trokut sadrži dani trokut, vidimo na slici 1.1. S druge strane, opisani trokut koji ne sadrži dani trokut nalazi se na slici 1.2.



Slika 1.1: Opisani trokut sadrži dani trokut

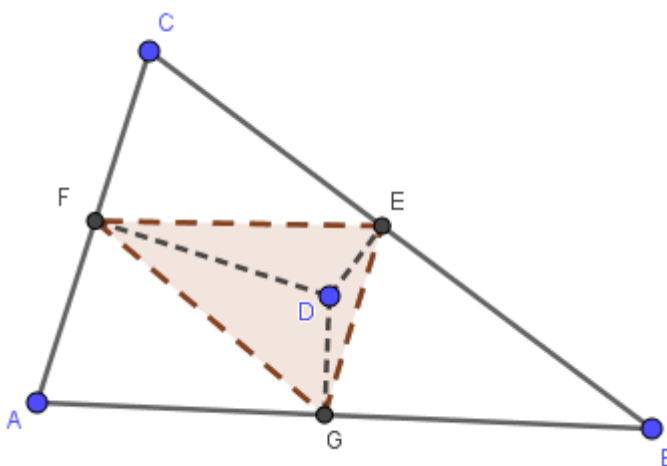


Slika 1.2: Opisani trokut ne sadrži dani trokut

## 1.1 Nožišni trokut

Prvi trokut koji promatramo ima svojstvo da su mu vrhovi nožišta okomica spuštenih iz neke točke na pravce koji sadrže stranice danog trokuta.

**Definicija 1.1.1.** *Trokut  $\triangle EFG$  čiji se vrhovi podudaraju s nožištima okomica spuštenih iz neke točke  $D$  na pravce koji sadrže stranice danog trokuta  $\triangle ABC$ , naziva se **nožišni** ili **pedalni trokut** pola  $D$  s obzirom na dani trokut  $\triangle ABC$ .*



Slika 1.3: Nožišni trokut s polom unutar danog trokuta

Pol trokuta može biti bilo koja točka ravnine unutar ili izvan danog trokuta. Svaki nožišni trokut je ujedno i upisani danom trokutu, no upisani trokut ne mora nužno biti i nožišni trokut.

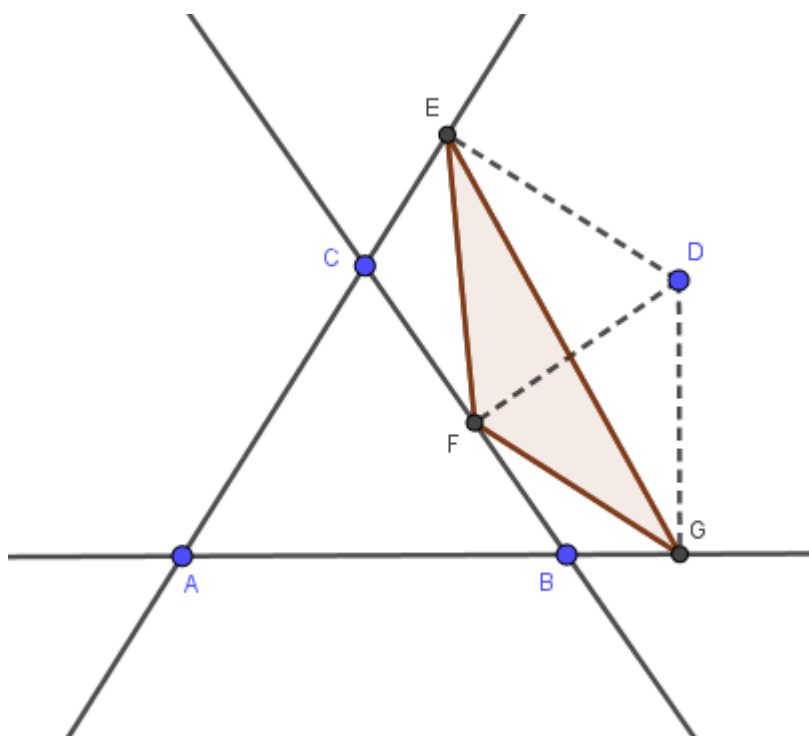
Sljedeći teorem govori o površini nožišnog trokuta.

**Teorem 1.1.2.** *Za površinu nožišnog trokuta  $\triangle EFG$  pola  $D$  s obzirom na dani trokut  $\triangle ABC$  vrijedi*

$$P_{EFG} = \frac{1}{2} |SD|^2 - R^2 | \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma,$$

gdje je  $S$  središte trokutu  $\triangle ABC$  opisane kružnice,  $R$  polumjer trokutu  $\triangle ABC$  opisane kružnice dok su  $\alpha, \beta, \gamma$  unutarnji kutovi trokuta  $\triangle ABC$  s vrhovima  $A, B$  i  $C$  redom.





Slika 1.4: Nožišni trokut s polom izvan danog trokuta

*Dokaz.* Dokaz će se provesti u slučaju šiljastokutnog trokuta  $\triangle ABC$  te u slučaju kad je pol  $D$  unutar tog trokuta. Za ostale slučajeve dokaz se provodi analogno uz manje modifikacije.

Na slici 1.5 promotrimo četverokute  $DECF$ ,  $DFAG$  i  $DEBG$ . Primijetimo da su u svakom od njih dva nasuprotna kuta prava, odnosno vrhovi tih četverokuta su konciklične točke, tj. svakom od njih možemo opisati kružnicu. Po teoremu o obodnim kutevima imamo

$$\begin{aligned}\angle FED &= \angle FCD = \angle ACD, \\ \angle FGD &= \angle FAD = \angle CAD, \\ \angle EDG &= 180^\circ - \beta.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Za vanjski kut  $\angle EDB$  trokuta  $\triangle FDE$  vrijedi

$$\angle EDB = \angle DFE + \angle FED.\tag{1.2}$$

Također, za vanjski kut  $\angle BDG$  trokuta  $\triangle FDG$  vrijedi

$$\angle BDG = \angle DFG + \angle DGF.\tag{1.3}$$

Zbrajanjem (1.2) i (1.3) te sređivanjem, dobivamo

$$\angle EFG = \angle EDG - \angle FED - \angle FGD. \quad (1.4)$$

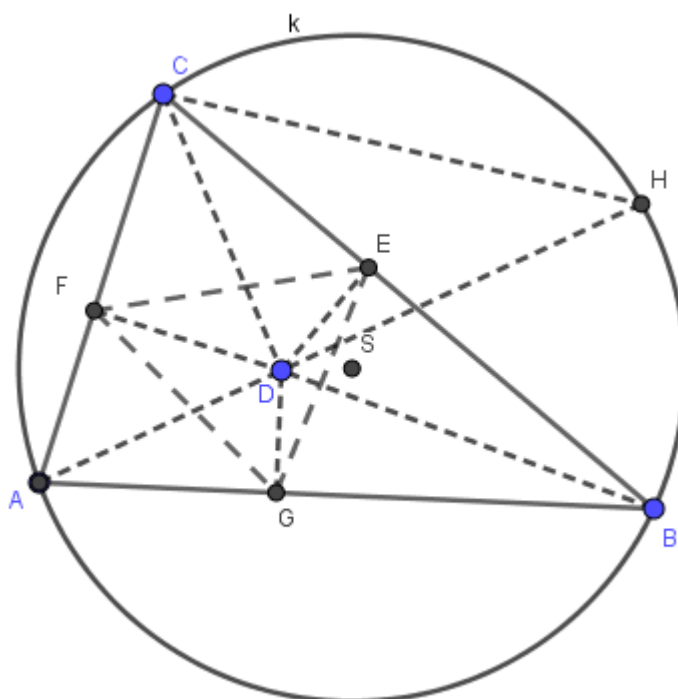
Uvrštavanjem (1.1) u (1.4) dobivamo da je unutarnji kut pri vrhu  $F$  nožišnjog trokuta  $\triangle EFG$  jednak

$$\angle EFG = 180^\circ - \beta - \angle ACD - \angle CAD. \quad (1.5)$$

Primijenimo teorem o zbroju unutarnjih kutova trokuta te teorem o vanjskom kutu trokuta  $\triangle ACD$  te dobivamo

$$\begin{aligned} \angle ADC &= 180^\circ - \angle ACD - \angle CAD, \\ \angle CDH &= \angle ACD + \angle CAD, \end{aligned} \quad (1.6)$$

pri čemu je  $H$  točka u kojoj pravac  $AD$  siječe opisanu kružnicu  $k$  danog trokuta  $\triangle ABC$  (Slika 1.5).



Slika 1.5: Nožišni trokut i kružnica opisana danom trokutu

Također, zbog jednakosti obodnih kutova nad lukom  $\widehat{CA}$ , vrijedi

$$\angle DHC = \angle AHC = \beta. \quad (1.7)$$

Nadalje imamo

$$\angle DCH = 180^\circ - \angle DHC - \angle CDH. \quad (1.8)$$

Ako uvrstimo (1.6) i (1.7) u (1.8), dobivamo

$$\angle DCH = 180^\circ - \beta - \angle ACD - \angle CAD. \quad (1.9)$$

Iz (1.5) i (1.9) vidimo da je

$$\angle EFG = \angle DCH.$$

Površina nožišnog trokuta  $\triangle EFG$  stoga iznosi

$$P_{EFG} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |FG| \sin \angle EFG, \quad (1.10)$$

odnosno

$$P_{EFG} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |FG| \sin \angle DCH. \quad (1.11)$$

Točke  $E, C, F, D$  leže na istoj kružnici kojoj je  $\overline{DC}$  promjer. Iz teorema o sinusima slijedi

$$|EF| = |DC| \sin \gamma. \quad (1.12)$$

Analogno se dobije

$$|FG| = |AD| \sin \alpha. \quad (1.13)$$

Primijenimo li poučak o sinusima na trokut  $\triangle DCH$ , dobivamo

$$|DC| \sin \angle DCH = |DH| \sin \beta. \quad (1.14)$$

Ako uvrstimo (1.12), (1.13) i (1.14) u (1.11), dobit ćemo

$$P_{EFG} = \frac{1}{2} \cdot |DA| \cdot |DH| \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Kako je  $|DA| \cdot |DH|$  potencija točke  $D$  s obzirom na opisanu kružnicu trokutu  $\triangle ABC$ , vrijedi

$$|DA| \cdot |DH| = ||SD|^2 - R^2|.$$

Pošto je površina trokuta uvijek pozitivan broj, uzimamo apsolutnu vrijednost potencije. Sada imamo

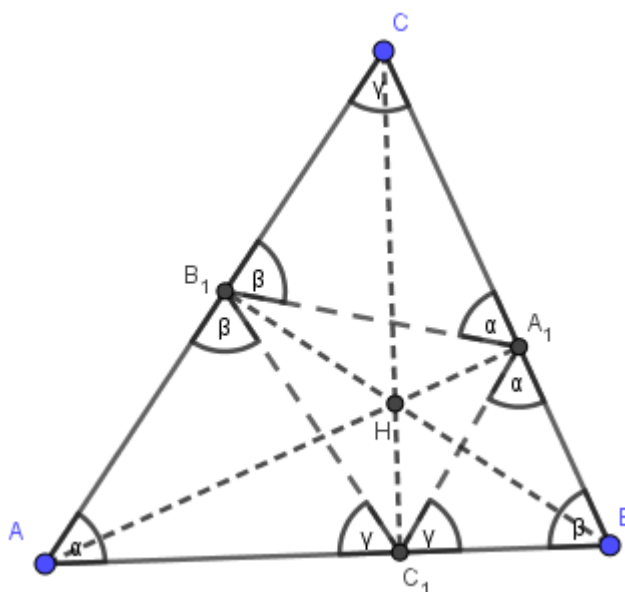
$$P_{EFG} = \frac{1}{2} ||SD|^2 - R^2| \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma, \quad (1.15)$$

što smo trebali i dokazati.  $\square$

## 1.2 Ortocentrični trokut

Specijalni slučaj nožišnog trokuta kod kojeg se pol poklapa s ortocentrom danog trokuta nazivamo ortocentrični trokut.

**Definicija 1.2.1.** *Trokut  $\triangle A_1B_1C_1$  kojemu su vrhovi nožišta visina danog trokuta  $\triangle ABC$  naziva se **ortocentrični trokut**.*



Slika 1.6: Ortocentrični trokut

**Teorem 1.2.2.** *Ortocentrični trokut  $\triangle A_1B_1C_1$  dijeli dani trokut na četiri trokuta. Osim trokuta  $\triangle A_1B_1C_1$ , to su još trokuti  $\triangle AB_1C_1$ ,  $\triangle A_1BC_1$  i  $\triangle A_1B_1C$ .*

*Trokuti  $\triangle AB_1C_1$ ,  $\triangle A_1BC_1$  i  $\triangle A_1B_1C$  su međusobno slični i slični su danom trokutu  $\triangle ABC$ .*

*Dokaz.* Neka su  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  unutarnji kutovi trokuta  $\triangle ABC$  s vrhovima  $A$ ,  $B$ ,  $C$  redom (slika 1.6). Dokaz ćemo provesti samo u slučaju šiljastokutnog trokuta.

Znamo da je kut između visine i pripadne stranice pravi, tj.

$$\angle BC_1C = \angle BB_1C = 90^\circ.$$

Dakle, točke  $C$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $B$  su konciklične, tj. leže na istoj kružnici. Primijetimo da vrijedi

$$\angle C_1B_1C = 180^\circ - \angle C_1BC. \quad (1.16)$$

Odavde slijedi da je

$$\angle AB_1C_1 = 180^\circ - \angle C_1B_1C = 180^\circ - (180^\circ - \angle C_1BC) = \beta, \quad (1.17)$$

odnosno

$$\angle AB_1C_1 = \angle ABC = \beta.$$

Analogno vrijedi

$$\begin{aligned} \angle AC_1B_1 &= \angle ACB = \gamma, \\ \angle BA_1C_1 &= \angle BAC = \alpha, \\ \angle BC_1A_1 &= \angle BCA = \gamma, \\ \angle CA_1B_1 &= \angle CAB = \alpha, \\ \angle CB_1A_1 &= \angle CBA = \beta. \end{aligned}$$

Kako trokuti  $\triangle AB_1C_1$ ,  $\triangle A_1BC_1$ ,  $\triangle A_1B_1C$  i  $\triangle ABC$  imaju kutove  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , slijedi da su navedeni trokuti slični po KK teoremu o sličnosti trokuta.  $\square$

**Teorem 1.2.3.** *Visine danog trokuta  $\triangle ABC$  su simetrale unutarnjih kutova njemu ortocentričnog trokuta  $\triangle A_1B_1C_1$ . Stranice danog trokuta  $\triangle ABC$  su simetrale vanjskih kutova ortocentričnog trokuta  $\triangle A_1B_1C_1$ .*

*Dokaz.* U dokazu prethodnog teorema zaključili smo da je

$$\angle C_1A_1B = \angle B_1A_1C = \alpha,$$

uz oznake kao na slici 1.7. Prema tome, unutarnji kut ortocentričnog trokuta jednak je

$$\angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - 2\alpha. \quad (1.18)$$

Pošto je dužina  $\overline{AA_1}$  visina na stranicu  $\overline{BC}$ , vrijedi da je

$$\angle AA_1C = \angle AA_1B = 90^\circ. \quad (1.19)$$

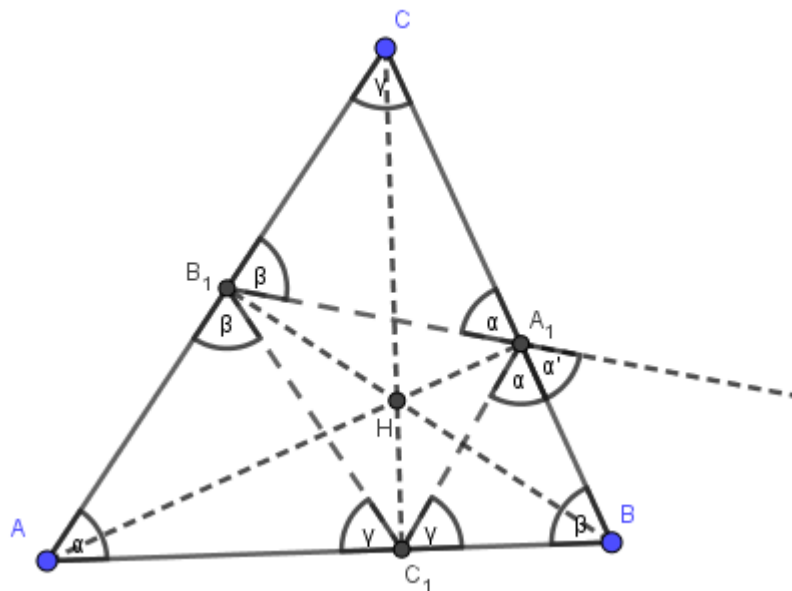
Sada imamo

$$\begin{aligned} \angle AA_1B_1 &= 90^\circ - \alpha, \\ \angle AA_1C_1 &= 90^\circ - \alpha. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dobili smo da visina dijeli unutarnji kut ortocentričnog trokuta na dva jednaka dijela veličine  $90^\circ - \alpha$ . Dakle, visina danog trokuta pripada simetrali unutarnjeg kuta ortocentričnog trokuta.

Promotrimo sada vanjske kutove ortocentričnog trokuta. Uz oznake kao na slici 1.7, imamo

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ - \angle B_1A_1C_1. \quad (1.21)$$



Slika 1.7: Teorem o unutarnjim i vanjskim kutovima ortocentričnog trokuta

Prema (1.18) i (1.21) dobivamo

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha), \quad (1.22)$$

odnosno  $\alpha = \alpha'$ . Time smo dokazali da stranica danog trokuta dijeli vanjski kut ortocentričnog trokuta na dva jednaka dijela.

Analogno se dokaže i za ostale kutove ortocentričnog trokuta. □

### 1.3 Medijalni trokut

Medijalni trokut je još jedan specijalni slučaj nožišnog trokuta kod kojega se pol poklapa sa središtem opisane kružnice danom trokutu.

**Definicija 1.3.1.** *Trokut  $\triangle EFG$  kojemu su vrhovi polovišta stranica danog trokuta  $\triangle ABC$  naziva se **medijalni** ili **polovišni trokut**.*

**Teorem 1.3.2.** *Medijalni trokut  $\triangle EFG$  dijeli dani trokut  $\triangle ABC$  na četiri trokuta:  $\triangle EFG$ ,  $\triangle AGF$ ,  $\triangle GBE$ ,  $\triangle FEC$ , koji su međusobno sukladni i slični su danom trokutu  $\triangle ABC$ .*

*Dokaz.* Kako su  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FG}$  i  $\overline{GE}$  srednjice trokuta  $\triangle ABC$ , vrijedi

$$\overline{EF} \parallel \overline{AB},$$

$$\begin{aligned}\overline{FG} &\parallel \overline{BC}, \\ \overline{EG} &\parallel \overline{AC}.\end{aligned}\tag{1.23}$$

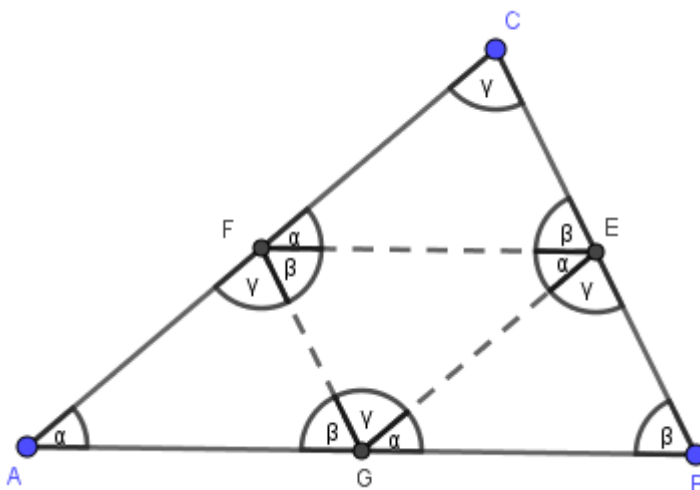
Također,

$$\begin{aligned}|EF| &= \frac{1}{2}|AB|, \\ |FG| &= \frac{1}{2}|BC|, \\ |EG| &= \frac{1}{2}|AC|,\end{aligned}\tag{1.24}$$

odnosno

$$\begin{aligned}|EF| &= |AG| = |GB|, \\ |FG| &= |BE| = |EC|, \\ |EG| &= |AF| = |FC|.\end{aligned}\tag{1.25}$$

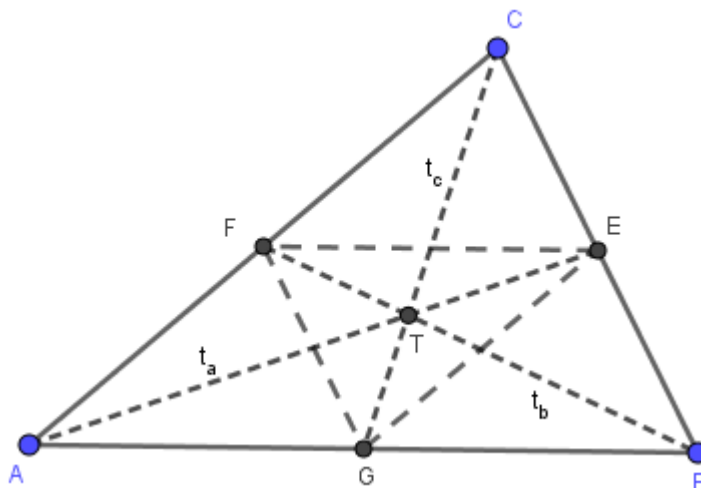
Odavde slijedi da su trokuti  $\triangle EFG$ ,  $\triangle AGF$ ,  $\triangle GBE$  i  $\triangle FEC$  sukladni po SSS teoremu o sukladnosti. To znači da imaju odgovarajuće kutove jednakih veličina, koji su također jednaki kutovima trokuta  $\triangle ABC$ . Dakle, trokuti  $\triangle EFG$ ,  $\triangle AGF$ ,  $\triangle GBE$  i  $\triangle FEC$  su slični trokutu  $\triangle ABC$  po KK teoremu o sličnosti.  $\square$



Slika 1.8: Medijalni trokut

**Teorem 1.3.3.** Medijalni trokut  $\triangle EFG$  je homotetičan početnom trokutu  $\triangle ABC$  s koeficijentom homotetije  $-\frac{1}{2}$  u odnosu na težište trokuta  $\triangle ABC$ .

*Dokaz.* Iz definicije medijalnog trokuta vidimo da su dužine  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  i  $\overline{CG}$  težišnice trokuta  $\triangle ABC$ . Teorem o težištu trokuta kaže da težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1 računajući od



Slika 1.9: Medijalni trokut je homotetičan početnom trokutu

vrha trokuta. Dakle, homotetija s centrom  $T$  i koeficijentom homotetije  $-\frac{1}{2}$  preslikava svaki vrh trokuta  $\triangle ABC$  u odgovarajući vrh trokuta  $\triangle EFG$  pa ujedno preslikava trokut  $\triangle ABC$  u  $\triangle EFG$ .  $\square$

## 1.4 Pseudopravokutni trokut

Prije nego što dođemo do pseudopravokutnog trokuta, prisjetimo se što vrijedi za pravokutni trokut.

**Propozicija 1.4.1.** *Neka je dan pravokutni trokut  $\triangle ABC$  s katetama duljina  $a$  i  $b$  te hipotenuzom duljine  $c$ . Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (1.26)$$

$$c = 2R, \quad (1.27)$$

$$a^2 + b^2 = 4R^2, \quad (1.28)$$

pri čemu je  $R$  polumjer trokutu opisane kružnice.



Tvrđnja (1.26) slijedi iz Pitagorinog poučka, a vrijedi i njezin obrat. Tvrđnja (1.27) govori da se središte pravokutnom trokutu opisane kružnice nalazi na polovištu hipotenuze tj.  $c = 2R$ . Dobivamo ju iz Talesovog teorema te također vrijedi obrat.

S druge strane, općenito ne vrijedi obrat tvrđnje (1.28), tj. ne možemo reći da ako vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$ , da je tada trokut pravokutan. Da bismo to opravdali, dovoljno je naći jedan trokut koji nije pravokutni, a za kojega vrijedi ova jednakost.

**Primjer 1.4.2.** Zadan je trokut  $\triangle ABC$  s kutovima  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ . Nasuprotne stranice trokuta imaju redom duljine  $a$ ,  $b$ ,  $c$  pri čemu je  $c = 5$ . Dokažimo da vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$ , gdje je  $R$  polumjer trokutu opisane kružnice.

*Dokaz.* Očito zadani trokut nije pravokutan. Po teoremu o sinusu vrijedi

$$2R = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10.$$

Dakle,  $R = 5$ .

Kako je  $a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$ , tada je

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} = 5.$$

Analogno,

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = 5\sqrt{3}.$$

Sada izračunamo  $a^2 + b^2 = 25 + 75 = 100$  te  $4R^2 = 4 \cdot 25 = 100$ . Prema tome, vrijedi jednakost  $a^2 + b^2 = 4R^2$ . Dakle, našli smo trokut koji nije pravokutan, a za kojega vrijedi jednakost (1.28).  $\square$

Znamo da za pravokutni trokut vrijedi da je zbroj mjera dvaju njegovih kutova jednak  $90^\circ$ . Primijetimo da je u primjeru 1.4.2.  $\beta - \alpha = 90^\circ$ , tj. razlika mjera dvaju kutova je  $90^\circ$ . Dolazimo do posebne vrste trokuta koji je naveden u sljedećoj definiciji.

**Definicija 1.4.3.** Trokut u kojem je razlika mjera dvaju kutova jednaka  $90^\circ$  naziva se *pseudopravokutni trokut*.

Neki poučci vezani uz pravokutni trokut vrijede i za pseudopravokutni trokut.

**Teorem 1.4.4 (Općeni Pitagorin poučak).** Zadan je trokut  $\triangle ABC$  takav da je  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ili  $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ , pri čemu su  $\alpha$  i  $\beta$  kutovi trokuta s vrhovima  $A$  i  $B$ , te su  $a$  i  $b$  duljine nasuprotnih stranica, a  $R$  polumjer trokutu opisane kružnice. Tada vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$ . Vrijedi i obrat te tvrđnje, odnosno ako je  $a^2 + b^2 = 4R^2$ , trokut  $\triangle ABC$  je ili pravokutan ili pseudopravokutan.

*Dokaz.* Ako je trokut  $\triangle ABC$  pravokutan, iz propozicije 1.4.1 znamo da vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$ . Dokažimo sada da ista jednakost vrijedi i za pseudopravokutni trokut.

Neka za kutove vrijedi  $\beta - \alpha = 90^\circ$ , tj.  $\beta = 90^\circ + \alpha$ , tada je

$$\sin \beta = \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha.$$

Prema poučku o sinusima imamo  $a = 2R \sin \alpha$ ,  $b = 2R \sin \beta = 2R \cos \alpha$ . Sada dobivamo

$$a^2 + b^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha = 4R^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4R^2.$$

Dakle,  $a^2 + b^2 = 4R^2$ . Tvrdnja se analogno dokazuje i ako je  $\alpha - \beta = 90^\circ$ .

Dokažimo sada obrat te tvrdnje. Ako vrijedi jednakost  $a^2 + b^2 = 4R^2$ , tada imamo niz ekvivalentnih jednakosti:

$$\begin{aligned} (2R \sin \alpha)^2 + (2R \sin \beta)^2 &= 4R^2, \\ 4R^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) &= 4R^2, \\ \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta &= 1, \\ \sin^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \beta, \\ \sin^2 \alpha &= \cos^2 \beta. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Pošto su  $\alpha$  i  $\beta$  kutovi trokuta, oni su iz intervala  $\langle 0, 180^\circ \rangle$ . To znači da je  $\sin \alpha > 0$ , a  $\cos \beta$  može biti i pozitivan i negativan. Zbog toga je  $\sin \alpha = |\cos \beta|$ . Imamo dva slučaja:

1. slučaj: Pretpostavimo da je  $0 < \beta < 90^\circ$ . Tada vrijedi  $\cos \beta > 0$ , odnosno  $|\cos \beta| = \cos \beta$ . Imamo  $\sin \alpha = \cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$ .

Odavde slijedi  $\alpha = 90^\circ - \beta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ili  $\alpha = 180^\circ - (90^\circ - \beta) + 2l\pi = 90^\circ + \beta + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . S obzirom da je  $\alpha \in \langle 0, 180^\circ \rangle$  i  $90^\circ - \beta \in \langle 0, 90^\circ \rangle$ ,  $k$  mora biti jednak 0. Nadalje, s obzirom da je  $\alpha \in \langle 0, 180^\circ \rangle$  i  $90^\circ + \beta \in \langle 90^\circ, 180^\circ \rangle$  i  $l$  mora biti jednak nuli. Dakle,  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ili  $\alpha - \beta = 90^\circ$ .

2. slučaj: Pretpostavimo da je  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ . Tada vrijedi  $\cos \beta < 0$ , odnosno  $|\cos \beta| = -\cos \beta$ .

Imamo  $\sin \alpha = -\cos \beta = \sin(\beta - 90^\circ)$ .

Slijedi da je  $\alpha = \beta - 90^\circ + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ili  $\alpha = 180^\circ - (\beta - 90^\circ) + 2l\pi = 270^\circ - \beta + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Zbog  $\alpha \in \langle 0, 180^\circ \rangle$  i  $\beta - 90^\circ \in \langle 0, 90^\circ \rangle$ ,  $k$  mora biti jednak 0. Zbog  $\alpha \in \langle 0, 180^\circ \rangle$  i  $270^\circ - \beta \in \langle 90^\circ, 180^\circ \rangle$  je  $l = 0$ . Međutim, tada je  $\beta - \alpha = 90^\circ$  ili je  $\alpha > 90^\circ$  i  $\beta > 90^\circ$  pa je  $\alpha + \beta > 180^\circ$ , što je nemoguće. Moguće je, dakle, samo  $\beta - \alpha = 90^\circ$ .

Dakle, ako za trokut vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$ , tada je  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ili  $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ .

Drugim riječima, trokut za koji vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$  je pravokutni ili pseudopravokutni.  $\square$

Pokažimo još jednu tvrdnju koja vrijedi za pravokutni i za pseudoppravokutni trokut.

**Teorem 1.4.5 (Euklidov poučak).** *Duljina visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta jednaka je geometrijskoj sredini duljina odsječaka što ih ta visina određuje na hipotenuzi.*

*Dokaz.* Neka je  $N$  nožište visine, duljine  $v$ , spuštene iz vrha  $C$  na hipotenuzu  $\overline{AB}$  pravokutnog trokuta  $\triangle ABC$ .

Prema teoremu o šiljastim kutovima s okomitim kracima, uz oznake kao na slici 1.10, imamo da je

$$\begin{aligned}\angle NCB &= \angle CAB = \alpha, \\ \angle ACN &= \angle ABC = \beta.\end{aligned}\tag{1.30}$$

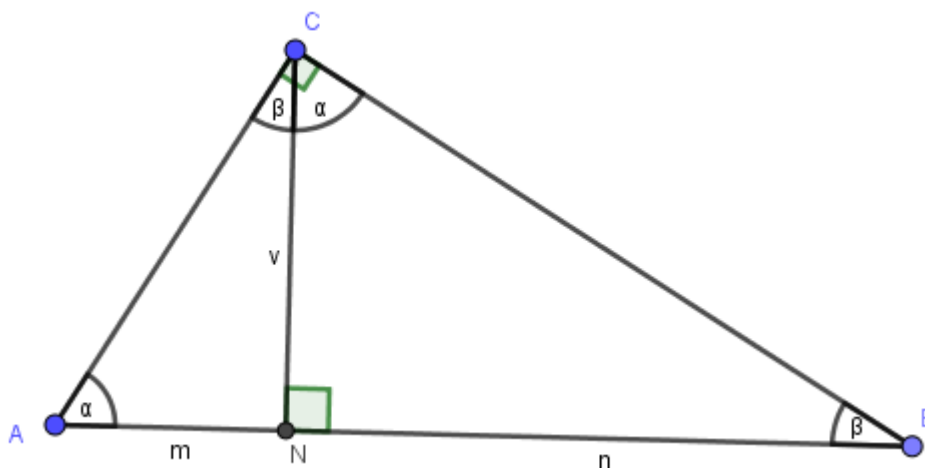
Oдавде slijedi da su trokuti  $\triangle ANC$  i  $\triangle CNB$  slični prema KK teoremu o sličnosti. Stoga vrijedi

$$\frac{|AN|}{|CN|} = \frac{|CN|}{|NB|},\tag{1.31}$$

odnosno

$$v = \sqrt{mn},\tag{1.32}$$

čime je tvrdnja dokazana.  $\square$



Slika 1.10: Euklidov poučak za pravokutni trokut

**Teorem 1.4.6.** *Ako je  $N$  nožište visine spuštene iz vrha  $C$  pseudopravokutnog trokuta  $\triangle ABC$  u kojem je  $|\alpha \pm \beta| = 90^\circ$ , tada vrijedi*

$$|CN| = \sqrt{|AN| \cdot |BN|}. \quad (1.33)$$

*Dokaz.* Promotrimo pseudopravokutni trokut  $\triangle ABC$  (slika 1.11). Neka je  $\alpha - \beta = 90^\circ$ . Označimo li  $\delta = \angle ACN$ , tada je prema poučku o vanjskom kutu trokuta, primijenjenom na trokutu  $\triangle ACN$ ,

$$\alpha = 90^\circ + \delta. \quad (1.34)$$

Odavde slijedi

$$\delta = \alpha - 90^\circ = \beta. \quad (1.35)$$

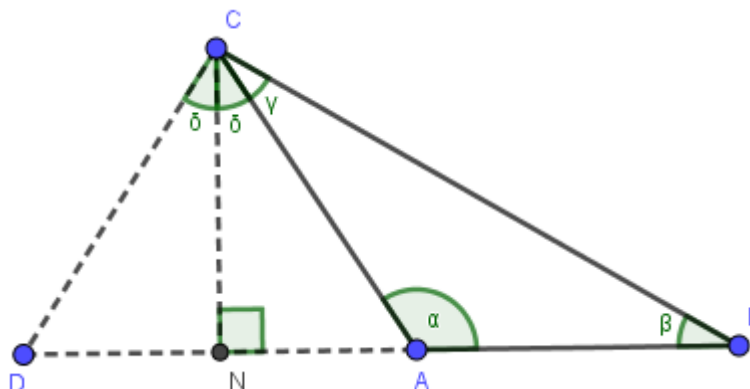
Neka je  $D$  točka na pravcu  $AB$  takva da je  $N$  polovište dužine  $\overline{AD}$ . Tada je trokut  $\triangle ACD$  jednakokratan pa je  $\angle NCD = \delta$ . Uzimajući u obzir da se  $\delta$  iz (1.35) može zapisati na dva načina, imamo

$$\angle BCD = \gamma + \delta + \delta = \gamma + \beta + \alpha - 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad (1.36)$$

Slijedi da je  $\triangle BCD$  pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu  $C$ , a dužina  $\overline{CN}$  je visina tog trokuta. Zbog toga možemo na taj trokut primijeniti Euklidov poučak pa imamo

$$|CN| = \sqrt{|DN| \cdot |BN|} = \sqrt{|AN| \cdot |BN|},$$

čime je tvrdnja dokazana. □



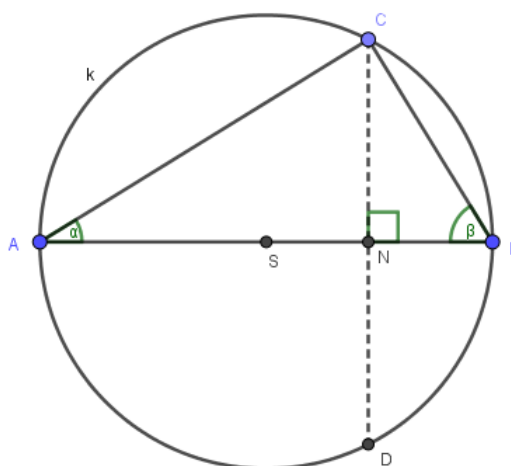
Slika 1.11: Pseudopravokutni trokut

Dokažimo sada obrat poučka:

**Teorem 1.4.7.** *Ako je  $N$  nožište visine trokuta  $\triangle ABC$  spuštene iz vrha  $C$  te  $|CN| = \sqrt{|AN| \cdot |BN|}$ , tada je trokut  $\triangle ABC$  pravokutan ili pseudopravokutan.*

*Dokaz.* Ovisno o kutovima  $\alpha$  i  $\beta$ , razlikujemo dva slučaja.

1. slučaj: Pretpostavimo da su  $\alpha$  i  $\beta$  šiljasti kutovi (Slika 1.12).



Slika 1.12: Obrat poučka za šiljaste kutove

Točka  $N$  nalazi se na dužini  $\overline{AB}$ . Pravac  $CN$  siječe trokutu opisanu kružnicu  $k$  u točki  $D$ . Potencija točke  $N$  s obzirom na kružnicu  $k$  je  $|CN| \cdot |DN| = |AN| \cdot |BN|$ .

Pretpostavili smo da je  $|CN|^2 = |AN| \cdot |BN|$ , pa sada imamo  $|CN|^2 = |CN| \cdot |DN|$ , odnosno  $|CN| = |DN|$ . Osim toga,  $\overline{CD} \perp \overline{BN}$ , što znači da  $\overline{AB}$  pripada simetrali dužine  $\overline{CD}$ . Zbog toga se središte kružnice  $k$  nalazi na dužini  $\overline{AB}$ . Po Talesovom poučku slijedi da je trokut  $\triangle ABC$  pravokutan s pravim kutom pri vrhu  $C$ .

2. slučaj: Pretpostavimo da je  $\alpha$  ili  $\beta$  tupi kut (Slika 1.13).

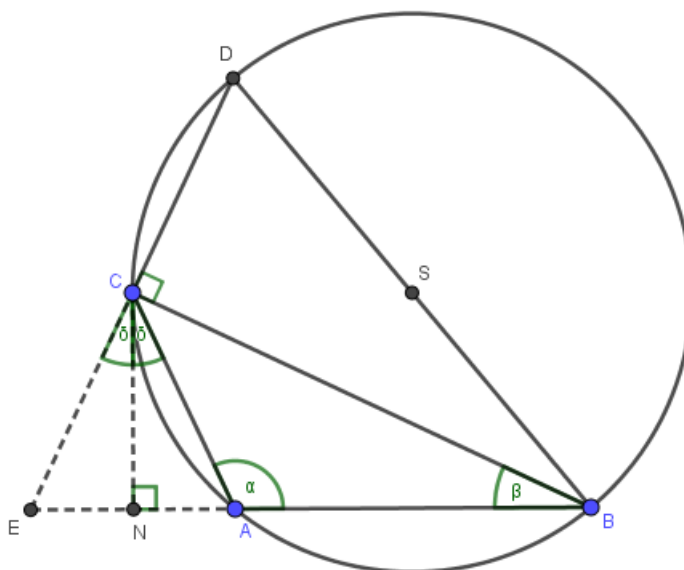
Bez smanjenja općenitosti, neka je  $\alpha$  tupi kut, kružnica  $k$  je opisana trokutu  $\triangle ABC$ , a  $\overline{BD}$  je promjer kružnice.

Po Talesovom teoremu slijedi da je  $\angle DCB$  pravi kut. Pravci  $AB$  i  $CD$  sijeku se u točki  $E$ . Trokut  $\triangle EBC$  je pravokutan pa po Euklidovom poučku vrijedi

$$|CN|^2 = |EN| \cdot |NB|. \quad (1.37)$$

Zbog pretpostavke  $|CN| = \sqrt{|AN| \cdot |BN|}$  imamo da je  $|EN| = |AN|$ , što znači da je  $\triangle ACE$  jednakokračan pa je

$$\angle CEA = \angle EAC = 180^\circ - \alpha. \quad (1.38)$$



Slika 1.13: Obrat poučka za tupi kut

Pošto je  $\angle BCE = 90^\circ$ , slijedi da je

$$\angle EBC + \angle BEC = 90^\circ, \quad (1.39)$$

tj.

$$\beta + 180^\circ - \alpha = 90^\circ, \quad (1.40)$$

odnosno  $\alpha - \beta = 90^\circ$ . Iz toga zaključujemo da je trokut pseudopravokutan.

Kada bismo pretpostavili da je  $\beta$  tupi kut, na analogan način bismo dobili da je  $\beta - \alpha = 90^\circ$ . Zaključujemo da je u svim slučajevima  $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ , čime je obrat poučka dokazan.  $\square$

U sljedećoj tvrdnji, koja se odnosi na pravokutni i pseudopravokutni trokut, upoznat ćemo trokute pod nazivom pridruženi Pitagorini trokuti.

**Teorem 1.4.8.** Zadan je pravokutni trokut  $\triangle ABC$  s hipotenuzom  $\overline{AB}$  takav da vrijedi  $|BC| = a$  i  $|AC| = b$ ,  $a \neq b$  te za kut  $\alpha$  nasuprot  $\overline{BC}$  vrijedi  $\alpha < 45^\circ$ . Tada postoji pseudopravokutni trokut  $\triangle ACD$  kojemu je  $|CD| = a$ ,  $|AC| = b$  i kut nasuprot  $\overline{DC}$  jednak je  $\alpha$ .

Trokute  $\triangle ABC$  i  $\triangle ACD$  nazivamo **pridruženi Pitagorini trokuti** kojima su polumjeri opisanih kružnica jednakih duljina  $R$  te za oba trokuta vrijedi

$$a^2 + b^2 = 4R^2. \quad (1.41)$$

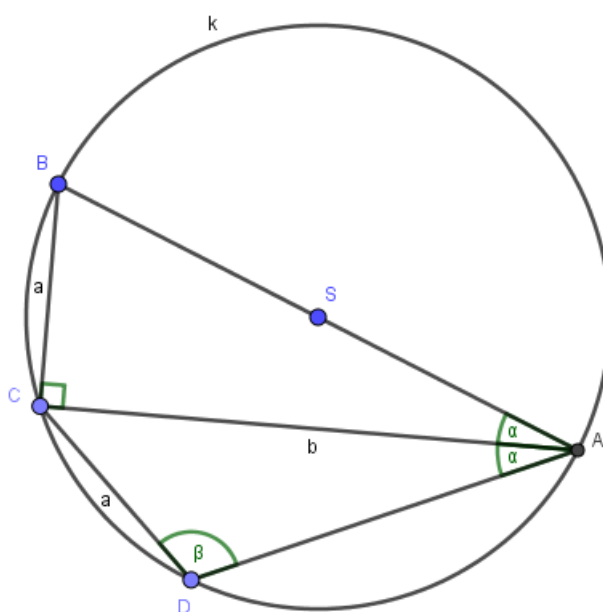
*Dokaz.* Označimo trokutu  $\triangle ABC$  opisanu kružnicu sa  $k$ . Trokut  $\triangle ABC$  je pravokutan pa po (1.28) vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$ .

Neka točka  $D$  leži na kružnici  $k$  tako da je  $\overline{AC}$  simetrala kuta  $\angle BAD$ . Zbog toga je

$$\angle BAC = \angle CAD = \alpha,$$

$$|BC| = |CD| = a. \quad (1.42)$$

Dakle, trokut  $\triangle ACD$  je traženi trokut iz tvrdnje teorema.  $\square$



Slika 1.14: Pridruženi Pitagorini trokuti

## 1.5 Savršeni trokut

Rješavajući zadatke u kojima računamo opsege i površine trokuta, vrlo rijetko se dogodi da su te dvije vrijednosti jednake. U ovom poglavlju ćemo promatrati trokute čiji se opseg i površina podudaraju, a duljine stranica su im prirodni brojevi. Odredit ćemo sve takve trokute.

**Definicija 1.5.1.** *Trokut čije se numeričke vrijednosti opsega i površine podudaraju, a duljine stranica su prirodni brojevi, naziva se **savršeni trokut**.*

Postoje dva pristupa u određivanju savršenih trokuta. U teoremu 1.5.2. tražimo samo pravokutne savršene trokute, dok u teoremu 1.5.3. tražimo sve savršene trokute, koji uključuju i pravokutne savršene trokute. Prvi pristup donosi dva rješenja, a drugi pristup pet rješenja.

**Teorem 1.5.2.** *Postoje točno dva savršena nesukladna pravokutna trokuta duljina stranica  $a, b, c$ ,  $a \leq b \leq c$ . Konkretno vrijedi  $(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (6, 8, 10)\}$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\triangle ABC$  pravokutan savršen trokut s pravim kutom pri vrhu  $C$  i stranicama duljina  $a, b, c$  tako da vrijedi  $a \leq b \leq c$ . Površina pravokutnog trokuta je

$$P_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2}. \quad (1.43)$$

Prema definiciji savršenog trokuta mora vrijediti

$$a + b + c = \frac{a \cdot b}{2}. \quad (1.44)$$

Kada ovu jednakost kvadriramo, dobijemo

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = \frac{a^2b^2}{4}. \quad (1.45)$$

Kako je trokut pravokutan, možemo primijeniti Pitagorin poučak koji daje sljedeću jednakost

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1.46)$$

Uvrštavanjem dobivene jednakosti u (1.45) dobivamo

$$2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = \frac{a^2b^2}{4}, \quad (1.47)$$

a nakon sređivanja imamo

$$2ab + 2c(a + b + c) = \frac{a^2b^2}{4}. \quad (1.48)$$

U dobivenu jednakost uvrstimo (1.44) pa imamo

$$2ab + 2c \cdot \frac{ab}{2} = \frac{a^2b^2}{4}. \quad (1.49)$$

Pošto smo pretpostavili da su duljine stranica  $a$  i  $b$  prirodni brojevi, možemo dijeliti sa  $ab$  nakon čega dobivamo

$$2 + c = \frac{ab}{4}. \quad (1.50)$$



Izrazimo li  $c$ , dobit ćemo

$$c = \frac{ab}{4} - 2, \quad (1.51)$$

što uvrstimo u (1.44) te dobivamo

$$a + b + \frac{ab}{4} - 2 = \frac{ab}{2}. \quad (1.52)$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$b \left( \frac{4-a}{4} \right) = 2-a. \quad (1.53)$$

Izraz u zagradi ne može biti nula jer za  $a = 4$  dobivamo  $0 = -2$ , što je kontradikcija. Zbog toga možemo cijelu jednakost podijeliti sa izrazom u zagradi, pa dobijemo

$$b = \frac{2-a}{\frac{4-a}{4}} = 4 \cdot \frac{a-2}{a-4} = 4 \left( \frac{a-4}{a-4} + \frac{2}{a-4} \right) = 4 \left( 1 + \frac{2}{a-4} \right) = 4 + \frac{8}{a-4}. \quad (1.54)$$

Vidimo da će broj  $b$  biti cijeli ako i samo ako je 8 djeljiv izrazom  $a-4$ . Kako je  $a$  prirodan broj,  $a-4$  ne može biti manji od  $-3$ . Svi cjelobrojni djelitelji broja 8 koji su veći ili jednaki od  $-3$  nalaze se u skupu

$$A = \{-2, -1, 1, 2, 4, 8\}. \quad (1.55)$$

Drugim riječima,

$$a-4 \in \{-2, -1, 1, 2, 4, 8\}, \quad (1.56)$$

iz čega slijedi

$$a \in \{2, 3, 5, 6, 8, 12\}. \quad (1.57)$$

Kada bi  $a$  bio 2 ili 3, tada bi  $b$  bio 0, odnosno -4. Međutim, zbog pretpostavke da je  $b$  prirodan broj, ovo nije rješenje. Uvrštavanjem ostalih vrijednosti iz (1.57) u (1.54) dobivamo

$$(a, b) \in \{(5, 12), (6, 8), (8, 6), (12, 5)\}. \quad (1.58)$$

Dobivena su četiri uređena para  $(a, b)$  među kojima biramo one za koje vrijedi  $a \leq b$ . Vidimo da su to  $(5, 12)$  i  $(6, 8)$ , te ih uvrstimo u (1.51). Tako dobijemo uređene trojke

$$(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (6, 8, 10)\}. \quad (1.59)$$

Time je tvrdnja dokazana. □

U sljedećem teoremu navest ćemo sve savršene trokute koji tada ujedno uključuju dva trokuta koja smo dobili u teoremu 1.5.2.

**Teorem 1.5.3.** *Postoji točno pet nesukladnih savršenih trokuta duljina stranica  $a, b, c$ ,  $a \leq b \leq c$ . Pritom vrijedi*

$$(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (6, 8, 10), (6, 25, 29), (7, 15, 20), (9, 10, 17)\}. \quad (1.60)$$

*Dokaz.* Neka je  $s = \frac{a+b+c}{2}$  poluopseg traženog trokuta. Prema Heronovoj formuli površina trokuta je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (1.61)$$

Definicija savršenog trokuta kaže da je opseg jednak površini, odnosno  $P = 2s$ . Uvrštavanjem ove jednakosti u (1.61) dobivamo

$$2s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (1.62)$$

Kada kvadriramo, dobit ćemo

$$4s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \quad (1.63)$$

što smijemo podijeliti sa  $s$  jer je poluopseg trokuta uvijek strogo veći od 0. Sada imamo

$$4s = (s-a)(s-b)(s-c). \quad (1.64)$$

Ako označimo

$$\begin{aligned} k &:= s - a, \\ l &:= s - b, \\ m &:= s - c, \end{aligned}$$

zbrajanjem dobijemo

$$k + l + m = 3s - (a + b + c) = 3s - 2s = s. \quad (1.65)$$

Sada možemo (1.64) zapisati kao

$$4(k + l + m) = k \cdot l \cdot m. \quad (1.66)$$

Iz dobivene jednakosti želimo izraziti  $k$ :

$$\begin{aligned} 4k + 4l + 4m &= klm, \\ k(lm - 4) &= 4(l + m). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Da bismo mogli podijeliti jednakost sa  $lm - 4$ , moramo biti sigurni da ne dijelimo s nulom. Ako je  $lm = 4$ , uvrštavanjem dobivamo  $l + m = 0$ .

Tvrdimo da su  $l, m > 0$ .

Zbog nejednakosti trokuta vrijedi  $a + b > c$ , odnosno  $a + b - c > 0$ . Zbog toga je

$$m = s - c = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2} > 0. \quad (1.68)$$

Analogno dobivamo da su  $k, l > 0$ . Znači, jednadžba (1.67) nema rješenja u slučaju  $lm = 4$ . Pretpostavimo da je  $lm \neq 4$ . Tada možemo podijeliti jednakost (1.67) izrazom  $lm - 4$ , nakon čega dobivamo

$$k = \frac{4(l + m)}{lm - 4}. \quad (1.69)$$

Tvrdimo da je  $k \geq l \geq m > 0$ . To proizlazi iz pretpostavke teorema da je  $a \leq b \leq c$ . Kada bismo ovaj niz nejednakosti pomnožili s -1 i dodali  $s$ , imali bismo

$$s - a \geq s - b \geq s - c. \quad (1.70)$$

Uvrštavanjem supstitucije dobivamo tvrdnju.

Za nastavak dokaza teorema trebat će nam još jedna tvrdnja:  $m \leq 3$ , odnosno  $m \in \{1, 2, 3\}$ .

Iz nejednakosti  $k \geq l \geq m > 0$  dobivamo:

$$\begin{aligned} k &\geq k, \\ k &\geq l, \\ k &\geq m. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i množenjem sa 4 dobivamo

$$12k \geq 4(k + l + m). \quad (1.71)$$

Pretpostavimo da je  $m \geq 4$ . Odavde slijedi da je  $l \geq 4$ . Sada imamo sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} k &\geq k, \\ l &\geq 4, \\ m &\geq 4. \end{aligned}$$

Kada ih pomnožimo dobivamo

$$k \cdot l \cdot m \geq 16k. \quad (1.72)$$

Iz (1.66), (1.71) i (1.72) imamo

$$12k \geq 4(k + l + m) = k \cdot l \cdot m \geq 16k, \quad (1.73)$$

odnosno

$$k \leq 0,$$

što je kontradikcija s činjenicom da je  $k > 0$ . Dakle,  $m < 4$ , odnosno  $m \in \{1, 2, 3\}$ , čime je tvrdnja dokazana.

Sada se možemo vratiti na dokaz teorema. U (1.69) ubacujemo mogućnosti za  $m$  redom. Uvrštavanjem  $m = 1$  dobivamo

$$k = \frac{4(l+1)}{l-4} = 4 \cdot \left( \frac{l-4}{l-4} + \frac{5}{l-4} \right) = 4 + \frac{20}{l-4}. \quad (1.74)$$

Kako je  $k \geq 1$  i  $l \geq 1$ , broj  $l-4$  pripada skupu pozitivnih djelitelja broja 20, tj.

$$l-4 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}. \quad (1.75)$$

Odavde imamo

$$(k, l) \in \{(24, 5), (14, 6), (9, 8), (8, 9), (6, 14), (5, 24)\}. \quad (1.76)$$

Kako tražimo nesukladne trokute, među uređenim trojkama  $(k, l, m)$  biramo one za koje vrijedi  $k \geq l \geq m$ . Tako dobivamo

$$(k, l, m) \in \{(24, 5, 1), (14, 6, 1), (9, 8, 1)\}. \quad (1.77)$$

Tražene duljine stranica trokuta  $a, b$  i  $c$  dobit ćemo tako da iz supstitucije  $k = s - a$  izrazimo  $a$  te uvrstimo (1.65). Analogno računamo  $b$  i  $c$ . Sada imamo

$$a = s - k = k + l + m - k = l + m, \quad (1.78)$$

$$b = s - l = k + l + m - l = k + m, \quad (1.79)$$

$$c = s - m = k + l + m - m = k + l. \quad (1.80)$$

Svaku uređenu trojku iz (1.77) uvrstimo u (1.78) - (1.80), nakon čega dobivamo

$$(a, b, c) \in \{(6, 25, 29), (7, 15, 20), (9, 10, 17)\}. \quad (1.81)$$

Sada provodimo isti postupak za  $m = 2$ . Uvrštavanjem u (1.69) dobivamo

$$k = \frac{4(l+2)}{2l-4} = \frac{4(l+2)}{2(l-2)} = 2 \cdot \frac{l+2}{l-2} = 2 \cdot \left( \frac{l-2}{l-2} + \frac{4}{l-2} \right) = 2 + \frac{8}{l-2}. \quad (1.82)$$

Iz istog razloga kao kod slučaja  $m = 1$ , imamo da  $l-2$  pripada skupu pozitivnih cjelobrojnih djelitelja broja 8, odnosno

$$l-2 \in \{1, 2, 4, 8\}. \quad (1.83)$$

Odavde slijedi da je

$$(k, l) \in \{(10, 3), (6, 4), (4, 6), (3, 10)\}. \quad (1.84)$$

Ponovno biramo one uređene trojke  $(k, l, m)$  za koje vrijedi  $k \geq l \geq m$  te imamo

$$(k, l, m) \in \{(10, 3, 2), (6, 4, 2)\}. \quad (1.85)$$

Korištenjem formula iz (1.78) - (1.80) dobivamo

$$(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (6, 8, 10)\}. \quad (1.86)$$

Još trebamo isti postupak provesti za  $m = 3$ . Imamo

$$k = \frac{4(l+3)}{3l-4} = \frac{4l+12}{3l-4} = \frac{\frac{4}{3}(3l-4)}{3l-4} + \frac{\frac{52}{3}}{3l-4} = \frac{4}{3} + \frac{52}{3(3l-4)}. \quad (1.87)$$

Dobiveni izraz će biti prirodan broj ako i samo ako je

$$\frac{52}{3(3l-4)} \in \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \dots \right\}, \quad (1.88)$$

odnosno

$$\frac{52}{3l-4} \in \{-1, 2, 5, \dots\}. \quad (1.89)$$

Elementi dobivenog skupa su članovi aritmetičkog niza čiji je prvi član  $a_1 = -1$ , a razlika  $d = 3$ . Opći član je

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -1 + (n-1) \cdot 3 = -1 + 3n - 3 = 3n - 4, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.90)$$

Dakle, zanimaju nas djelitelji broja 52 koji su članovi ovako zadanog aritmetičkog niza. Drugim riječima, tražimo  $n \in \mathbb{N}$  za koji je  $3n - 4 \in A$ , gdje je

$$A = \{-1, 1, 2, 4, 13, 26, 52\} \quad (1.91)$$

skup cjelobrojnih djelitelja broja 52 većih ili jednakih od -1.

Primijetimo da  $3n - 3$  mora biti u skupu  $B$  koji je jednak

$$B = \{0, 2, 3, 5, 14, 27, 53\}. \quad (1.92)$$

Međutim,  $3n - 3$  je djeljiv s 3 pa se lako vidi da  $3n - 3$  može biti 0, 3 ili 27, odnosno  $3n - 4$  je -1, 2 ili 26 pa je iz (1.89)  $3l - 4$  jednak -52, 26 ili 2 redom. Odavde dobivamo da je  $l = 2$  i  $l = 10$ , no za  $l = 10$  je  $k = 2$ , što je manje od  $l$ . Dakle, samo je jedno rješenje za  $l$  u skupu prirodnih brojeva i to je  $l = 2$ .

Kada uvrstimo  $l = 2$  u (1.87) dobivamo  $k = 10$ , odnosno dobivamo uređenu trojku  $(k, l, m) = (10, 2, 3)$ . Međutim, za nju ne vrijedi uvjet da je  $k \geq l \geq m$ , što znači da ova uređena trojka nije rješenje danog problema.

Time smo pronašli sva rješenja i tvrdnja je dokazana.  $\square$

Sljedeća tvrdnja govori o tome kakav je opseg savršenog trokuta.

**Teorem 1.5.4.** *Opseg savršenog trokuta je paran prirodan broj.*

*Dokaz.* Dokaz ćemo provesti metodom kontradikcije. Pretpostavimo da je opseg savršenog trokuta neparan prirodan broj. Pošto se opseg trokuta sastoji od tri pribrojnika, neparan zbroj dobit ćemo ako je jedan pribrojnik neparan ili ako su sva tri pribrojnika neparni brojevi.

Pretpostavimo da su duljine svih triju stranica trokuta neparni brojevi. Neka su duljine stranica trokuta  $a$ ,  $b$  i  $c$  te neka je

$$\begin{aligned} a &= 2k + 1, \\ b &= 2l + 1, \\ c &= 2m + 1, \end{aligned} \tag{1.93}$$

pri čemu su  $k, l, m \in \mathbb{N}$ . Ako je  $s = \frac{a+b+c}{2}$  poluopseg trokuta, onda vidimo da su izrazi

$$\begin{aligned} s &= \frac{a + b + c}{2}, \\ s - a &= \frac{-a + b + c}{2}, \\ s - b &= \frac{a - b + c}{2}, \\ s - c &= \frac{a + b - c}{2} \end{aligned} \tag{1.94}$$

neskrativi razlomci koji se sastoje od neparnog prirodnog broja u brojniku i broja 2 u nazivniku. Površina trokuta prema Heronovoj formuli je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}. \tag{1.95}$$

Umnožak pod korijenom je neskrativ razlomak čiji je brojnik neparan prirodni broj, a nazivnik broj 16. Iz toga slijedi da je površina ili neskrativ racionalan broj ili iracionalan broj. Prema pretpostavci, opseg je neparan prirodan broj, što očito nije jednako kao i površina. Time smo došli do kontradikcije, jer su savršenom trokutu opseg i površina jednaki. Dakle, pretpostavka u kojoj smo pretpostavili da su duljine svih triju stranica trokuta neparni brojevi je kriva, odnosno ne postoji savršeni trokut koji ima sve tri stranice neparne duljine. Preostaje dokazati da ne postoji trokut sa točno jednom stranicom neparne duljine, no taj je dokaz analogan prethodnome.  $\square$

## 1.6 Zlatni trokut

Sljedeći trokut kojeg ćemo promatrati vezan je uz zlatni rez. Prije nego što definiramo zlatni trokut, potrebno je definirati zlatni rez te vidjeti što je to zlatni broj.

**Definicija 1.6.1.** *Zlatni rez* je omjer u kojem je dužina  $\overline{AB}$  podijeljena na dva dijela tako da se veći dio prema cijeloj dužini odnosi kao manji dio prema većem.



Slika 1.15: Dužina podijeljena u zlatnom rezu

Uz oznake kao na slici 1.15, možemo zapisati

$$|AP| : |AB| = |PB| : |AP|, \quad (1.96)$$

odnosno

$$x : (x + y) = y : x. \quad (1.97)$$

Ako omjere napišemo u obliku razlomaka, imamo

$$\frac{x + y}{x} = \frac{x}{y}, \quad (1.98)$$

pa iz toga dobivamo

$$1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}. \quad (1.99)$$

Uvođenjem supstitucije  $\frac{x}{y} = \varphi$ , dobivamo

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi, \quad (1.100)$$

odnosno

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \quad (1.101)$$

Rješavajući dobivenu kvadratnu jednadžbu, dolazimo do dva rješenja:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad (1.102)$$

no zbog uvjeta da je  $\varphi > 1$ , imamo da je

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989. \quad (1.103)$$

Dakle,  $\varphi$  je konstanta koju nazivamo **zlatni broj** ili omjer zlatnog reza.

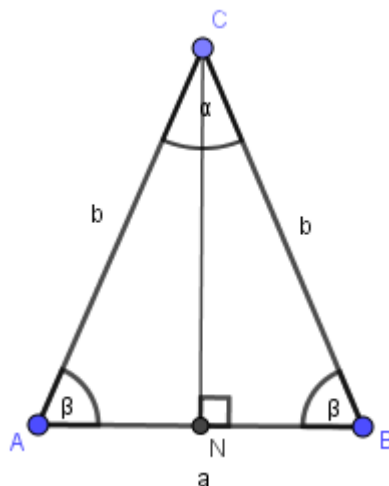
Sada možemo definirati zlatni trokut.

**Definicija 1.6.2.** *Jednakokrani trokut kojemu je omjer duljine kraka i duljine osnovice jednak zlatnom broju  $\varphi$  naziva se **zlatni trokut**.*

**Propozicija 1.6.3.** *Za svaki zlatni trokut vrijedi da su veličine kutova jednake  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  i  $72^\circ$ .*

*Dokaz.* Neka je zadan zlatni trokut  $\triangle ABC$  s osnovicom duljine  $a$  i krakom duljine  $b$  te kutom  $\alpha$  nasuprot osnovice, kao na slici 1.16. Tada vrijedi

$$b : a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (1.104)$$



Slika 1.16: Zlatni trokut

Neka je  $N$  nožište visine iz vrha  $C$  na stranicu  $\overline{AB}$ . Iz trokuta  $\triangle ANC$  dobivamo

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b}. \quad (1.105)$$



Iz (1.104) slijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}. \quad (1.106)$$

Kada (1.106) uvrstimo u (1.105), dobivamo

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \quad (1.107)$$

Sada ćemo izraz sa desne strane jednakosti (1.107) zapisati kao sinus poznatog kuta.

Neka je  $\delta = 18^\circ$ . Vidimo da je  $\delta \in \langle 0, 90^\circ \rangle$ . Znamo da za svaki  $\delta$  iz tog intervala vrijedi

$$\begin{aligned} 0 < \sin \delta < 1, \\ 0 < \cos \delta < 1. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Ako je  $\delta = 18^\circ$ , tada imamo

$$\begin{aligned} 3\delta &= 90^\circ - 2\delta, \\ \cos 3\delta &= \cos(90^\circ - 2\delta). \end{aligned} \quad (1.109)$$

Korištenjem adicijskih formula za kosinus dobivamo

$$\cos 3\delta = \cos 90^\circ \cdot \cos 2\delta + \sin 90^\circ \cdot \sin 2\delta. \quad (1.110)$$

Nakon sređivanja imamo

$$\cos 3\delta = \sin 2\delta. \quad (1.111)$$

Također, znamo da vrijede sljedeći trigonometrijski identiteti:

$$\cos 3\delta = 4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta, \quad (1.112)$$

$$\sin 2\delta = 2 \sin \delta \cos \delta. \quad (1.113)$$

Kada (1.112) - (1.113) uvrstimo u (1.111), dobivamo

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta &= 2 \sin \delta \cos \delta, \\ \cos \delta(4 \cos^2 \delta - 3) &= 2 \sin \delta \cos \delta, \end{aligned} \quad (1.114)$$

te ako jednakost (1.114) podijelimo sa  $\cos \delta > 0$ , imamo

$$4 \cos^2 \delta - 2 \sin \delta - 3 = 0. \quad (1.115)$$

Kako je  $\cos^2 \delta = 1 - \sin^2 \delta$ , (1.115) možemo zapisati kao

$$4 \sin^2 \delta + 2 \sin \delta - 1 = 0. \quad (1.116)$$

Na taj smo način dobili kvadratnu jednadžbu s nepoznicom  $\sin \delta$ , čija su rješenja

$$\sin \delta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}. \quad (1.117)$$

Međutim, kako je  $\sin \delta > 0$ , jedino rješenje je

$$\sin \delta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad (1.118)$$

odnosno

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \quad (1.119)$$

Iz (1.107) i (1.119) slijedi da je

$$\frac{\alpha}{2} = 18^\circ,$$

odnosno

$$\alpha = 36^\circ. \quad (1.120)$$

Sada kada imamo veličinu jednog kuta jednakokravnog trokuta, lako izračunamo veličinu preostala dva kuta. Ako kut uz osnovicu zadanog zlatnog trokuta označimo sa  $\beta$ , imamo

$$\beta = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ, \quad (1.121)$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Primijetimo još da je karakteristični trokut pravilnog deseterokuta zlatni trokut. To lako vidimo iz činjenice da je središnji kut pravilnog deseterokuta jednak  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ . Iz propozicije 1.6.3. slijedi da je taj trokut zlatni.

## Poglavlje 2

### Vrste četverokuta

U ovom ćemo poglavlju promatrati četverokute, od jednostavnijih prema složenijima. Neka njihova svojstva učenici znaju već u osnovnoj školi, a mi ćemo ih u ovom radu dokazati te ćemo navesti još neka manje poznata svojstva.

#### 2.1 Paralelogram

Postoji više definicija paralelograma, a mi ćemo ga definirati na sljedeći način:

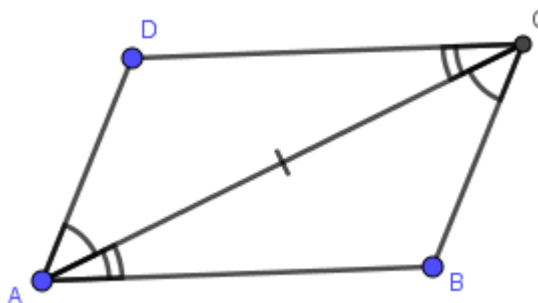
**Definicija 2.1.1.** Četverokut koji ima dva para paralelnih stranica jest **paralelogram**.

Paralelogram ima brojna lijepa svojstva koja se lako mogu dokazati.

**Teorem 2.1.2.** *Ekvivalentno je:*

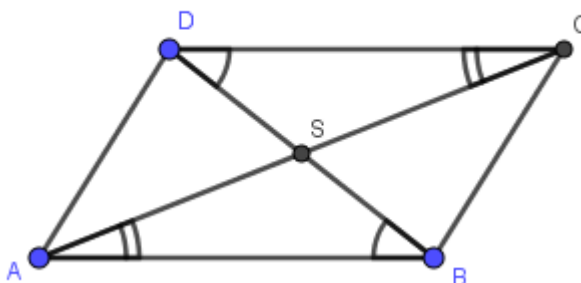
- a) četverokut  $ABCD$  je paralelogram;
- b) nasuprotne stranice četverokuta  $ABCD$  su sukladne i paralelne;
- c) dijagonale četverokuta  $ABCD$  se međusobno raspolavljaju;
- d) nasuprotni kutovi četverokuta  $ABCD$  su sukladni.

*Dokaz.* a)  $\Rightarrow$  b) Pretpostavimo da je četverokut  $ABCD$  paralelogram. Dakle nasuprotne stranice su mu paralelne prema definiciji. Prema teoremu o transversali paralelnih pravaca, kutevi  $\angle DAC$  i  $\angle ACB$  te  $\angle CAB$  i  $\angle ACD$  su jednakih veličina (slika 2.1). Primijetimo da trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle CDA$  imaju dva kuta jednakih veličina i zajedničku stranicu  $\overline{AC}$ . Prema KSK teoremu o sukladnosti, ta dva trokuta su sukladna. Dakle, nasuprotne stranice paralelograma su sukladne.



Slika 2.1: Četverokut ABCD je paralelogram

$b) \Rightarrow c)$  Pretpostavimo da su nasuprotne stranice četverokuta  $ABCD$  sukladne i paralelne. Neka se dijagonale sijeku u točki  $S$  (slika 2.2). Prema poučku o transverzali paralelnih pravaca, imamo da su kutevi  $\angle ABD$  i  $\angle BDC$  te  $\angle CAB$  i  $\angle ACD$  sukladni. Uz to, stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  su jednakih duljina. Dakle, trokuti  $\triangle ABS$  i  $\triangle CDS$  su sukladni prema KSK teoremu o sukladnosti. Dakle,  $|AS| = |SC|$  te  $|BS| = |SD|$ . Drugim riječima, dijagonale četverokuta  $ABCD$  se raspolavljaju.

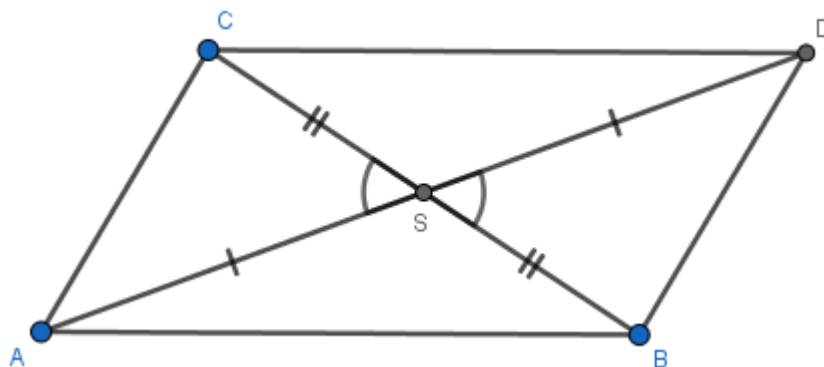


Slika 2.2: Nasuprotne stranice četverokuta ABCD su sukladne i paralelne

$c) \Rightarrow d)$  Pretpostavimo da se dijagonale četverokuta  $ABCD$  raspolavljaju, tj.  $|AS| = |SC|$  te  $|BS| = |SD|$  (slika 2.3). Također,  $\angle ASD = \angle BSC$  jer su to vršni kutovi. Prema SKS teoremu o sukladnosti, trokuti  $\triangle ASD$  i  $\triangle CSB$  su sukladni. Dakle,  $\angle DAS = \angle BCS$  i  $\angle SDA = \angle SBC$ . Analogno dobivamo da je  $\angle SAB = \angle SCD$  i  $\angle SBA = \angle SDC$ . Sada imamo

$$\angle DAB = \angle DAS + \angle SAB = \angle BCS + \angle SCD = \angle BCD.$$

Analogno dobijemo da je  $\angle ABC = \angle CDA$ . Dakle, nasuprotni kutovi četverokuta  $ABCD$  su jednakih veličina.



Slika 2.3: Dijagonale četverokuta  $ABCD$  se raspolavljaju

$d) \Rightarrow a)$  Neka su u četverokutu  $ABCD$  nasuprotni kutovi sukladni, tj.  $\angle DAB = \angle BCD$  i  $\angle ABC = \angle CDA$ . Kako je zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta jednak  $360^\circ$ , slijedi da je  $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$ . Dakle,  $AD \parallel BC$ . Analogno se dobije da je  $AB \parallel CD$ . Time smo dokazali da je promatrani četverokut paralelogram.  $\square$

Specijalni slučaj paralelograma je romb.

**Definicija 2.1.3.** Paralelogram kojemu su dvije susjedne stranice jednakih duljina naziva se **romb**.

U sljedećem ćemo teoremu dokazati neka svojstva romba.

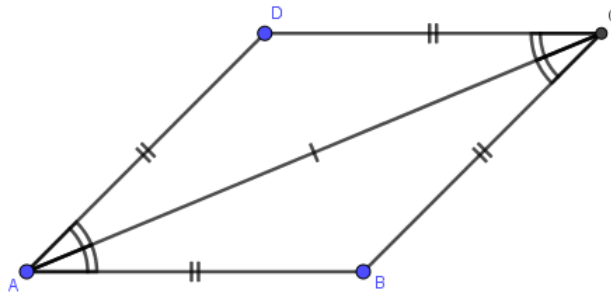
**Teorem 2.1.4.** Ekvivalentno je:

- a) četverokut  $ABCD$  je romb;
- b) sve stranice četverokuta  $ABCD$  su jednakih duljina;
- c) dijagonale četverokuta  $ABCD$  raspolavljaju unutarnje kutove;
- d) dijagonale četverokuta  $ABCD$  su okomite i raspolavljaju se.

*Dokaz.*  $a) \Rightarrow b)$  Pretpostavimo da je četverokut  $ABCD$  romb. Prema definiciji, dvije susjedne stranice romba su jednakih duljina. No, kako je romb paralelogram, iz teorema 2.1.2 slijedi da su nasuprotnne stranice jednakih duljina. Dakle, sve četiri stranice romba su jednakih duljina.

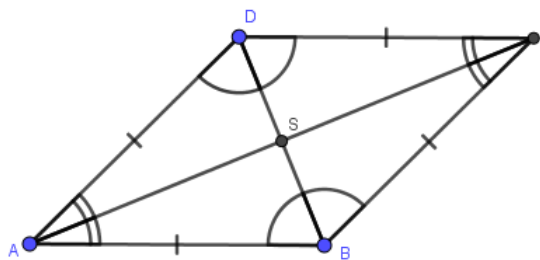
$b) \Rightarrow c)$  Pretpostavimo da su sve stranice četverokuta  $ABCD$  jednakih duljina. Trokut  $\triangle ABC$  je jednakokrčan pa su mu kutovi uz osnovicu  $\overline{AC}$  jednakih veličina (slika 2.4). S

druge strane, trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle ADC$  su sukladni po SSS teoremu o sukladnosti. Dakle, vrijedi  $\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle ACD$  pa dijagonala  $\overline{AC}$  raspolavlja kutove četverokuta. Analogno dobijemo da dijagonala  $\overline{BD}$  raspolavlja druga dva kuta četverokuta  $ABCD$ .



Slika 2.4: Dijagonale romba raspolavljaju kutove

$c) \Rightarrow d)$  Pretpostavimo da dijagonale četverokuta  $ABCD$  raspolavljaju unutarnje kutove. Vrijedi  $\angle BAC = \angle CAD$  i  $\angle BCA = \angle ACD$  (slika 2.5). Kako im je  $\overline{AC}$  zajednička stranica, trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle ADC$  su sukladni po KSK teoremu o sukladnosti. Dakle,  $|AB| = |AD|$  i  $|BC| = |CD|$ . Analogno zaključujemo da su i trokuti  $\triangle ABD$  i  $\triangle CBD$  sukladni po KSK teoremu o sukladnosti, što znači da vrijedi  $|AB| = |BC|$  i  $|AD| = |CD|$ . Odavde slijedi da su sve stranice četverokuta  $ABCD$  jednakih duljina, odnosno  $\angle CAB = \angle ACB$  i  $\angle BDA = \angle ABD$ . Neka je  $S$  sjecište dijagonala. Trokuti  $\triangle ABS$ ,  $\triangle CBS$ ,  $\triangle CDS$  i  $\triangle ADS$  su sukladni prema KSK teoremu o sukladnosti. Dakle,  $|AS| = |CS|$  te  $|BS| = |DS|$ , što znači da se dijagonale raspolavljaju. Vrijedi  $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle ASD$ . Zbroj tih kutova je  $360^\circ$ , pa je svaki od njih jednak  $90^\circ$ . Dakle, dijagonale se sijeku pod pravim kutom.



Slika 2.5: Dijagonale romba se raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom

$d) \Rightarrow a)$  Pretpostavimo da se dijagonale četverokuta  $ABCD$  raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom u točki  $S$ . Iz teorema 2.1.2. znamo da je tada četverokut  $ABCD$  paralelogram. Prema SKS teoremu o sukladnosti vidimo da su trokuti  $\triangle ABS$  i  $\triangle ADS$  sukladni, jer im je  $\overline{AS}$  zajednička stranica,  $|BS| = |SD|$  i  $\angle ASB = \angle ASD = 90^\circ$ . Dakle,  $|AB| = |AD|$ . Dokazali smo da su dvije susjedne stranice paralelograma sukladne, što znači da je četverokut  $ABCD$  romb.  $\square$

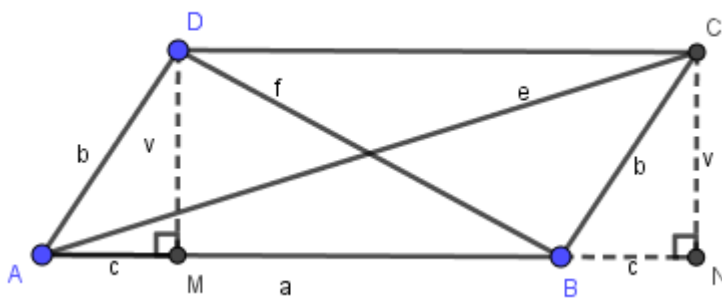
Za paralelograme vrijedi Eulerov poučak koji glasi:

**Teorem 2.1.5.** Zbroj kvadrata duljina stranica jednak je zbroju kvadrata duljina dijagonala paralelograma.

*Dokaz.* Označimo sa  $e$  i  $f$  duljine dijagonala  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  paralelograma  $ABCD$  redom (slika 2.6). Neka je  $M$  nožište visine spuštene iz vrha  $D$  na pravac  $AB$ , a  $N$  nožište visine spuštene iz vrha  $C$  na pravac  $AB$ . Primijetimo da su trokuti  $\triangle AMD$  i  $\triangle BNC$  sukladni prema KSK teoremu o sukladnosti, jer prema poučku o transverzali paralelnih pravaca vrijedi  $\angle MAD = \angle NBC$  i  $\angle ADM = \angle BCN$ , te je  $|AD| = |BC| =: b$ . Odavde slijedi da je

$$\begin{aligned}
 |AM| &= |BN| =: c, \\
 |DM| &= |CN| =: v.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Označimo još  $a = |AB| = |CD|$ . Promotrimo pravokutne trokute  $\triangle DMB$ ,  $\triangle BNC$  i  $\triangle ANC$ .



Slika 2.6: Eulerov poučak za paralelogram

Kada na njih primijenimo Pitagorin poučak, dobivamo

$$f^2 = v^2 + (a - c)^2, \tag{2.2}$$

$$b^2 = v^2 + c^2, \tag{2.3}$$

$$e^2 = (a + c)^2 + v^2. \quad (2.4)$$

Zbrajanjem (2.2) i (2.4) imamo

$$e^2 + f^2 = a^2 + 2ac + c^2 + v^2 + v^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 2(a^2 + c^2 + v^2). \quad (2.5)$$

Uvrštavanjem (2.3) u (2.5) dobivamo

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2), \quad (2.6)$$

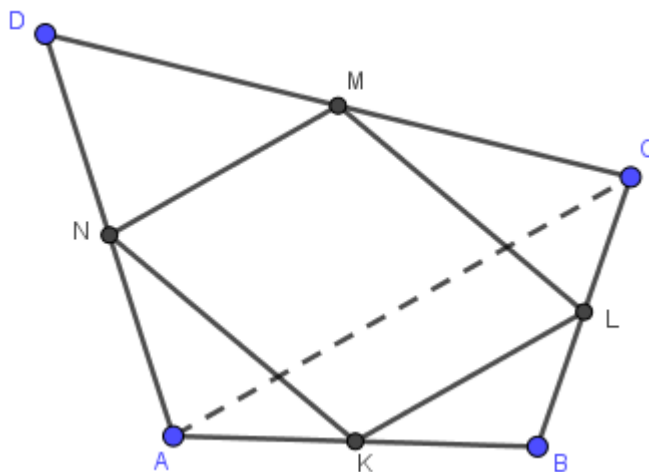
što smo trebali dokazati. □

Dokažimo još jednu zanimljivu tvrdnju.

**Teorem 2.1.6.** *Polovišta stranica bilo kojeg četverokuta su vrhovi paralelograma.*

*Dokaz.* Polovišta stranica četverokuta  $ABCD$  označimo s  $K, L, M, N$ , kao na slici 2.7. Povucimo dijagonalu  $\overline{AC}$  te promotrimo trokut  $\triangle ABC$ . Primijetimo da je dužina  $\overline{KL}$  srednjica trokuta  $\triangle ABC$ , zbog čega vrijedi da je  $\overline{KL} \parallel \overline{AC}$ .

S druge strane,  $\overline{NM}$  je srednjica trokuta  $\triangle ACD$  pa je  $\overline{NM} \parallel \overline{AC}$ . Zaključujemo da je  $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ . Promatrajući trokute  $\triangle ABD$  i  $\triangle DBC$ , analogno bismo dobili da je  $\overline{NK} \parallel \overline{ML}$ . Dakle, četverokut  $KLMN$  je paralelogram. □



Slika 2.7: Polovišta stranica svakog četverokuta vrhovi su paralelograma



Posebni paralelogrami s kojima se učenici upoznaju već u nižim razredima osnovne škole su pravokutnik i kvadrat.

**Definicija 2.1.7.** *Paralelogram koji ima barem jedan pravi kut naziva se **pravokutnik**.*

Postoji pravokutnik koji ima zanimljiva svojstva zbog kojih je dobio posebno ime.

**Definicija 2.1.8.** *Pravokutnik kojemu je omjer duljina stranica jednak zlatnom broju  $\varphi$  naziva se **zlatni pravokutnik**.*

**Definicija 2.1.9.** *Pravokutnik kojemu su dvije susjedne stranice jednakih duljina naziva se **kvadrat**.*

**Napomena 2.1.10.** *Kvadrat se obično definira kao četverokut kojemu su svi kutovi pravi, a stranice jednakih duljina.*

## 2.2 Trapez

U literaturi pronalazimo da se trapez definira na više načina, no neke definicije su neprecizne. Česta definicija trapeza govori o četverokutu sa dvije paralelne stranice. Međutim, nije jasno uključuje li ova definicija paralelograme ili ne. Zbog toga je potrebno definirati trapez na sljedeći način:

**Definicija 2.2.1.** *Trapez je četverokut kojemu su točno dvije stranice paralelne. Paralelne stranice trapeza nazivaju se osnovice ili baze, a ostale dvije stranice nazivaju se kraci.*

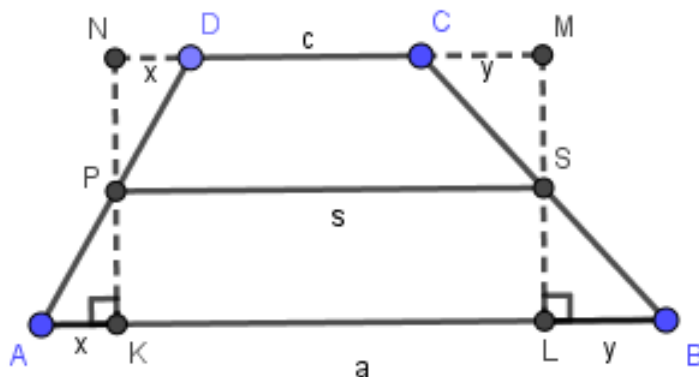
**Definicija 2.2.2.** *Dužina koja spaja polovišta krakova trapeza naziva se **srednjica trapeza**.*

Poučak o srednjici trapeza donekle je sličan poučku o srednjici trokuta.

**Teorem 2.2.3.** *Srednjica trapeza paralelna je osnovici trapeza, a duljina joj je jednaka polovini zbroja duljina osnovica trapeza.*

*Dokaz.* Označimo redom sa  $a$  i  $c$  duljine osnovica  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  trapeza  $ABCD$ , a sa  $P$  i  $S$  polovišta krakova tog trapeza, te neka je  $|PS| = s$ . Nožišta visina iz  $P$  na  $AB$ , odnosno na  $CD$ , označimo sa  $K$ , odnosno  $N$ . Nožišta visina iz  $S$  na  $AB$ , odnosno  $CD$  neka su točke  $L$ , odnosno  $M$  (slika 2.8). Kako je  $P$  polovište dužine  $\overline{AD}$ , vrijedi da je  $|AP| = |PD|$ . Osim toga, vršni kutovi  $\angle APK$  i  $\angle NPD$  su jednaki. Također, zbog teorema o transverzali paralelnih pravaca, vrijedi  $\angle PAK = \angle PDN$ . Dakle, vrijedi:

$$\triangle AKP \cong \triangle DNP. \quad (2.7)$$



Slika 2.8: Poučak o srednjici trapeza

Analogno,  $\triangle SLB \cong \triangle SMC$ .

Oдавde slijedi da je  $|AK| = |ND| =: x$  i  $|LB| = |CM| =: y$ .

Iz činjenice da je  $|PK| = \frac{1}{2}|KN| = \frac{1}{2}|ML| = |LS|$ , slijedi da je  $\overline{KL} \parallel \overline{PS} \parallel \overline{NM}$ . Sada imamo

$$2s = 2|PS| = |KL| + |NM| = a - x - y + c + x + y = a + c, \quad (2.8)$$

odnosno

$$s = \frac{a + c}{2}, \quad (2.9)$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Dokažimo još jedan teorem vezan uz srednjicu trapeza i njegove dijagonale.

**Teorem 2.2.4.** *Ako je duljina jedne osnovice trapeza dva puta veća od duljine druge osnovice, tada dijagonale trapeza dijele njegovu srednjicu na tri jednaka dijela.*

*Dokaz.* Neka je  $\overline{PS}$  srednjica trapeza  $ABCD$ . Točke  $K$  i  $L$  su sjecišta dijagonala trapeza s njegovom srednjicom (Slika 2.9). Kako je  $P$  polovište stranice  $\overline{AD}$  te je dužina  $\overline{PK}$  paralelna s  $\overline{CD}$ , prema teoremu 2.2.3. slijedi da je  $\overline{PK}$  srednjica trokuta  $\triangle ACD$ . Zbog toga vrijedi

$$|PK| = \frac{1}{2}|CD|. \quad (2.10)$$

Promatrajući trokut  $\triangle BCD$ , analogno zaključujemo da je  $\overline{SL}$  njegoва srednjica pa vrijedi

$$|SL| = \frac{1}{2}|CD|. \quad (2.11)$$

Iz (2.10) i (2.11) slijedi da je  $|PK| = |SL|$ .

Povucimo sada pravac  $CL$  koji siječe stranicu  $\overline{AB}$  u točki  $M$ . Ako promotrimo trokut  $\triangle CMB$ , na već opisani način zaključujemo da je  $\overline{SL}$  njegova srednjica te vrijedi

$$|SL| = \frac{1}{2}|MB|. \quad (2.12)$$

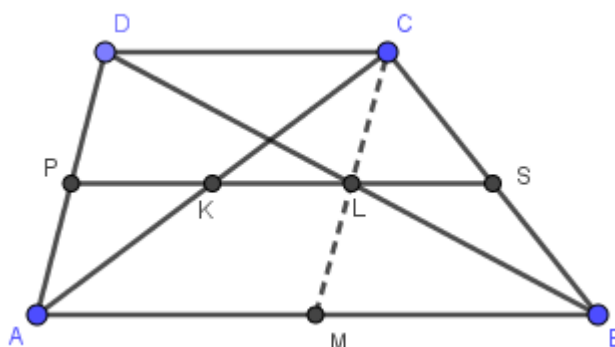
Iz (2.11), (2.12) i pretpostavke zadatka, zaključujemo da je

$$|MB| = |CD| = \frac{1}{2}|AB|. \quad (2.13)$$

Sada imamo da je  $\overline{KL}$  srednjica trokuta  $\triangle AMC$  pa vrijedi

$$|KL| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2}|MB| = \frac{1}{2}|CD|. \quad (2.14)$$

Na kraju zaključujemo da je  $|PK| = |KL| = |LS|$ , što je trebalo i dokazati.



Slika 2.9: Teorem o dijagonalama i srednjici trapeza

□

## 2.3 Tetivni četverokut

Sljedeći četverokut koji ćemo proučavati je poseban po tome što mu se može opisati kružnica. Znamo da se kružnica može opisati svakom trokutu, no četverokute s tim svojstvom ne susrećemo tako često.

**Definicija 2.3.1.** Četverokut kojemu se može opisati kružnica naziva se **tetivni četverokut**.

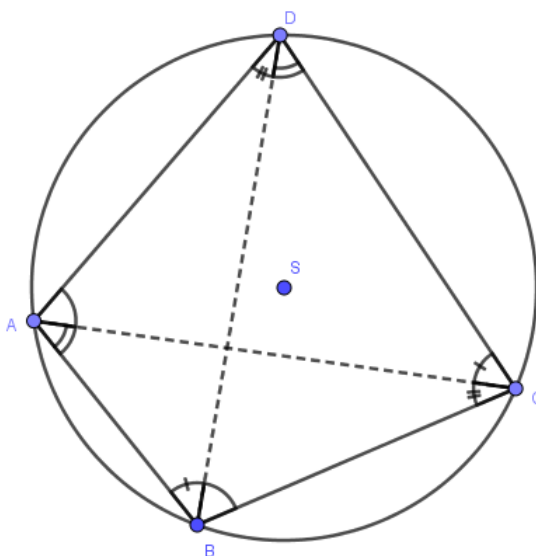
Naziv je dobio po tome što su stranice toga četverokuta zapravo tetive njemu opisane kružnice.

Pogledajmo neka svojstva tetivnog četverokuta.

**Teorem 2.3.2.** *Nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta su suplementarni.*

*Dokaz.* Neka je zadan tetivni četverokut  $ABCD$  (slika 2.10). Koristeći tvrdnju da su obodni kutovi nad istim lukom kružnice jednakih veličina, zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned}\angle ABD &= \angle ACD, \\ \angle BCA &= \angle BDA, \\ \angle BDC &= \angle BAC, \\ \angle CAD &= \angle CBD.\end{aligned}\tag{2.15}$$



Slika 2.10: Poučak o kutovima tetivnog četverokuta

Neka su unutarnji kutovi četverokuta  $ABCD$  s vrhovima  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  redom jednaki  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Vrijedi

$$\begin{aligned}\beta + \delta &= \angle ABD + \angle DBC + \angle ADB + \angle BDC \\ &= \angle ACD + \angle CAD + \angle BCA + \angle BAC\end{aligned}$$

$$= (\angle ACD + \angle BCA) + (\angle CAD + \angle BAC) = \gamma + \alpha. \quad (2.16)$$

Znamo da vrijedi

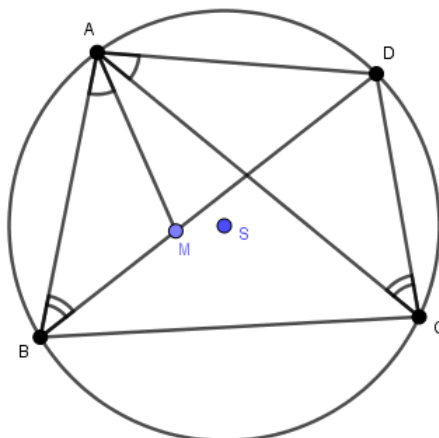
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ. \quad (2.17)$$

Iz (2.16) i (2.17) slijedi da je  $\alpha + \gamma = 180^\circ$  i  $\beta + \delta = 180^\circ$ , čime je tvrdnja dokazana.  $\square$

Sljedeći teorem govori o odnosu stranica i dijagonala tetivnog četverokuta.

**Teorem 2.3.3 (Ptolomejev teorem).** *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.*

*Dokaz.* Neka je dan tetivni četverokut  $ABCD$ . Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je  $\angle BAC \geq \angle CAD$  (slika 2.11). Na dijagonali  $\overline{BD}$  uzmimo točku  $M$  takvu da je  $\angle BAM = \angle CAD$ . Osim toga,  $\angle ABD = \angle ACD$  jer su to obodni kutovi nad istim kružnim lukom. Odavde vidimo da su trokuti  $\triangle ABM$  i  $\triangle ACD$  slični po KK teoremu o sličnosti. Zbog toga



Slika 2.11: Ptolomejev teorem o tetivnom četverokutu

imamo

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|CD|}, \quad (2.18)$$

odnosno

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BM|. \quad (2.19)$$

Primijetimo da je

$$\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC = \angle CAD + \angle MAC = \angle MAD. \quad (2.20)$$

Također,  $\angle ADB = \angle ACB$ , jer su to obodni kutovi nad istim lukom. Odavde slijedi da su trokuti  $\triangle CAB$  i  $\triangle DAM$  slični po KK teoremu o sličnosti. Sada imamo

$$\frac{|CA|}{|DA|} = \frac{|CB|}{|DM|}, \quad (2.21)$$

odnosno

$$|CA| \cdot |DM| = |DA| \cdot |CB|. \quad (2.22)$$

Kada zbrojimo (2.19) i (2.22) dobivamo

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| &= |AC| \cdot |BM| + |AC| \cdot |DM| \\ &= |AC|(|BM| + |DM|) \\ &= |AC| \cdot |BD|, \end{aligned} \quad (2.23)$$

čime je tvrdnja dokazana.  $\square$

U nastavku ćemo dokazati formulu za površinu tetivnog četverokuta.

**Teorem 2.3.4.** *Za površinu tetivnog četverokuta  $ABCD$  vrijedi*

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} (|AB| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD|) \sin \alpha = \frac{1}{2} (|AB| \cdot |BC| + |CD| \cdot |AD|) \sin \beta, \quad (2.24)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  unutarnji kutovi četverokuta s vrhovima  $A$  i  $B$ .

*Dokaz.* Zbog jednostavnosti, uvest ćemo sljedeće oznake:  $a = |AB|$ ,  $b = |BC|$ ,  $c = |CD|$ ,  $d = |AD|$ , kao na slici 2.12.

Prema teoremu 2.3.2. slijedi da je  $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$ .

Četverokut  $ABCD$  podijelimo na dva dijela povlačenjem dijagonale  $\overline{BD}$ . Površina četverokuta jednaka je zbroju površina tako dobivenih trokuta, odnosno

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} ad \sin \alpha + \frac{1}{2} bc \sin(180^\circ - \alpha). \quad (2.25)$$

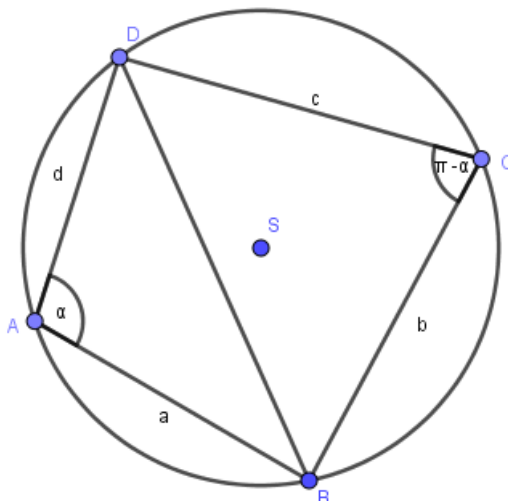
Kako je  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ , imamo

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin \alpha. \quad (2.26)$$

Promatrajući trokute  $\triangle ABC$  i  $\triangle CDA$ , na analogan način dobivamo

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin \beta. \quad (2.27)$$

Time je formula za površinu tetivnog četverokuta dokazana.  $\square$



Slika 2.12: Površina tetivnog četverokuta

U nastavku ćemo dokazati još nekoliko tvrdnji koje vrijede za tetivne četverokute.

**Lema 2.3.5.** *Simetrala kuta  $\angle BAC$  trokuta  $\triangle ABC$  siječe trokutu opisanu kružnicu u polovištu nasuprotnog kružnog luka, koje je ujedno i središte kružnice kojoj pripadaju vrhovi  $B$  i  $C$  te središte trokutu  $\triangle ABC$  upisane kružnice.*

*Dokaz.* Neka su  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  kutovi trokuta  $\triangle ABC$  s vrhovima  $A, B$  i  $C$  redom. Neka je  $I$  središte trokutu upisane kružnice, a  $F$  polovište kružnog luka  $BC$  (slika 2.13).

Prema teoremu o zbroju vanjskih kutova trokuta, primijenjenom na trokutu  $\triangle IBF$ , te teoremu o presjeku simetrala kutova trokuta, vrijedi

$$\angle FIB = \angle IAB + \angle ABI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}. \quad (2.28)$$

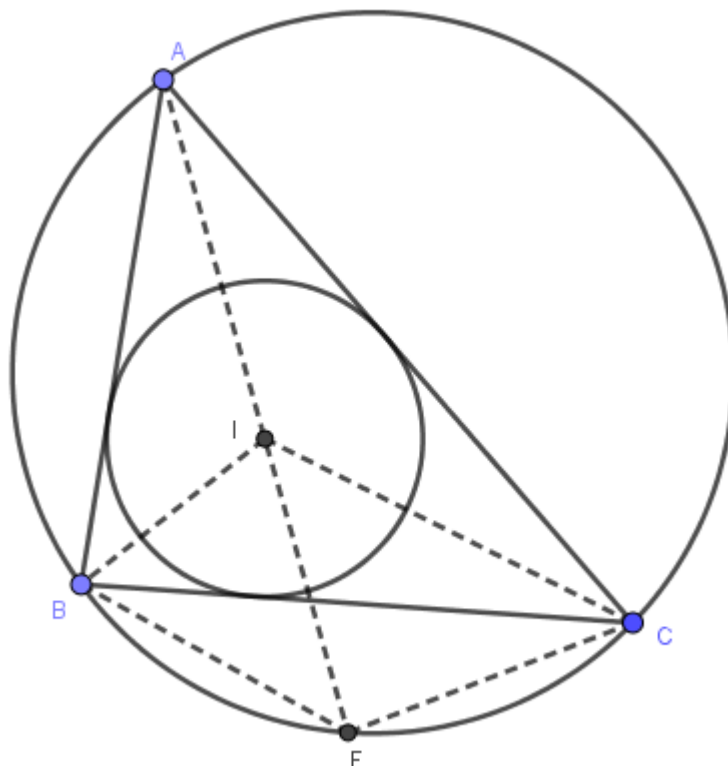
Također, prema teoremu o obodnim kutovima nad istim kružnim lukom, imamo

$$\angle IBF = \angle IBC + \angle CBF = \angle IBC + \angle CAF = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}. \quad (2.29)$$

Iz (2.28) i (2.29) zaključujemo da je

$$\angle FIB = \angle IBF, \quad (2.30)$$

što znači da je trokut  $\triangle BFI$  jednakokratan te vrijedi da je  $|BF| = |FI|$ .



Slika 2.13: Simetrala kuta prolazi kroz polovište nasuprotnog kružnog luka

Promotrimo sada trokut  $\triangle IFC$ . Prema teoremu o zbroju vanjskih kutova trokuta te teoremu o presjeku simetrala kutova tog trokuta, imamo

$$\angle FIC = \angle IAC + \angle ACI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}. \quad (2.31)$$

Također, prema teoremu o obodnim kutovima nad istim kružnim lukom, vrijedi

$$\angle ICF = \angle ICB + \angle BCF = \angle ICB + \angle FAB = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}. \quad (2.32)$$

Iz (2.31) i (2.32) vidimo da je

$$\angle FIC = \angle ICF. \quad (2.33)$$

Dakle, trokut  $\triangle IFC$  je jednakokračan te je  $|IF| = |FC|$ . Odavde slijedi da je

$$|BF| = |IF| = |FC|. \quad (2.34)$$



Dakle, točke  $B$ ,  $C$  i  $I$  leže na kružnici sa središtem u točki  $F$ . Kako je  $\angle BAF = \angle CAF$  i ti kutovi se nalaze nad kružnim lukom  $BF$ , odnosno  $CF$ , slijedi da je  $F$  polovište kružnog luka  $BC$ . Dakle, simetrala kuta  $\angle CAB$  siječe trokutu opisanu kružnicu u polovištu nasuprotnog kružnog luka.  $\square$

**Teorem 2.3.6.** *Zadan je tetivni četverokut  $ABCD$ . Neka su  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$  redom središta trokuta  $\triangle ABC$ ,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ACD$ ,  $\triangle ABD$ . Tada je četverokut  $IJKL$  pravokutnik.*

*Dokaz.* Neka je  $E$  polovište luka  $AB$ ,  $F$  polovište luka  $BC$ ,  $G$  polovište luka  $CD$  i  $H$  polovište luka  $AD$ .

S obzirom da je  $DL$  simetrala kuta  $\angle ADB$ , možemo primijeniti lemu 2.3.5 na trokut  $\triangle ABD$  te dobivamo

$$|EA| = |EB| = |EL|. \quad (2.35)$$

Primjenom te iste leme na trokut  $\triangle ABC$ , dobivamo

$$|EA| = |EB| = |EI|. \quad (2.36)$$

Iz (2.35) i (2.36) slijedi da je

$$|EI| = |EL|. \quad (2.37)$$

Također,

$$\angle GED = \angle GEC, \quad (2.38)$$

jer je  $G$  polovište luka  $CD$ . Odavde vidimo da visina iz  $E$  trokuta  $\triangle EIL$  pripada pravcu  $EG$ . Dakle,  $\overline{IL} \perp \overline{EG}$ . Analogno vidimo da je  $\overline{JK} \perp \overline{EG}$ , odakle slijedi da je  $\overline{IL} \parallel \overline{JK}$ .

Također, analogno dokazujemo da je  $\overline{IJ} \perp \overline{FH}$  i  $\overline{LK} \perp \overline{FH}$  pa je  $\overline{IJ} \parallel \overline{LK}$ .

Dokažimo sada da je  $EG \perp FH$ .

Označimo

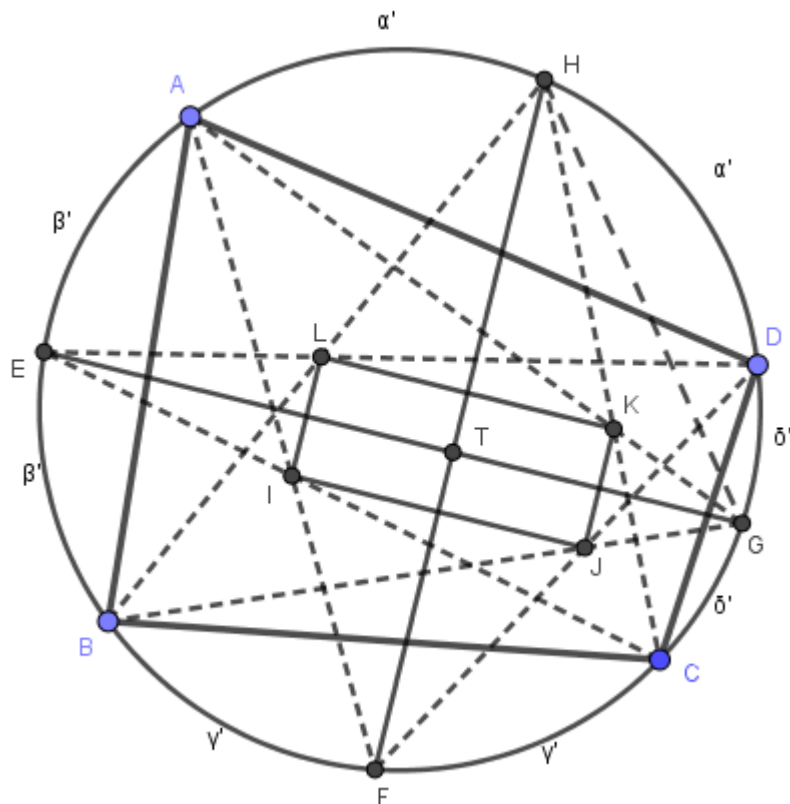
$$\begin{aligned} \alpha &= \angle ABH, \\ \beta &= \angle AGE, \\ \gamma &= \angle BHF, \\ \delta &= \angle CEG. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Neka su  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  duljine lukova na slici 2.14. Tada je

$$2(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta') = 2\pi. \quad (2.40)$$

Kako je prema teoremu o središnjem i obodnom kutu

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha'}{2\pi} \cdot 360^\circ \right) = \frac{\alpha'}{\pi} \cdot 90^\circ, \quad (2.41)$$



Slika 2.14: Spojnice polovišta nasuprotnih lukova su okomite

dobivamo

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 90^\circ. \quad (2.42)$$

Prema teoremu o središnjem i obodnom kutu, dobivamo

$$\begin{aligned} \angle EGH &= \alpha + \beta, \\ \angle FHG &= \gamma + \delta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Iz (2.42) i (2.43) imamo

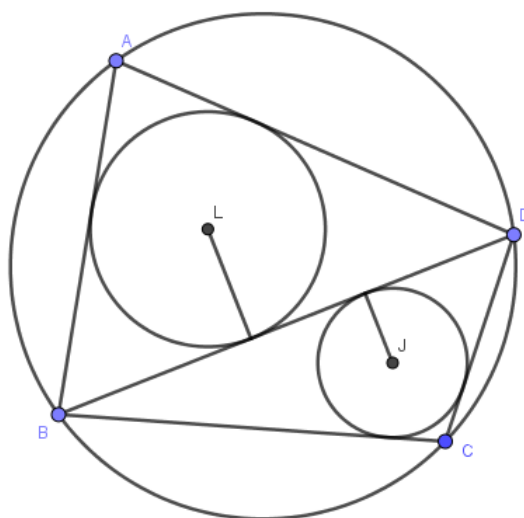
$$\angle HTG = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \quad (2.44)$$

Dakle, pravci  $EG$  i  $FH$  su okomiti, odakle slijedi da je četverokut  $IJKL$  pravokutnik.  $\square$

**Teorem 2.3.7 (Japanski teorem o tetivnim četverokutima).** *Zbroj radijusa upisanih kružnica trokutima nastalima povlačenjem jedne dijagonale tetivnog četverokuta, jednak je zbroju radijusa upisanih kružnica trokutima nastalima povlačenjem druge dijagonale tog četverokuta.*

*Dokaz.* Neka je  $ABCD$  tetivni četverokut s dijagonalama  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$ . Tvrdimo da je zbroj radijusa kružnica sa slike 2.15 jednak zbroju radijusa kružnica sa slike 2.16.

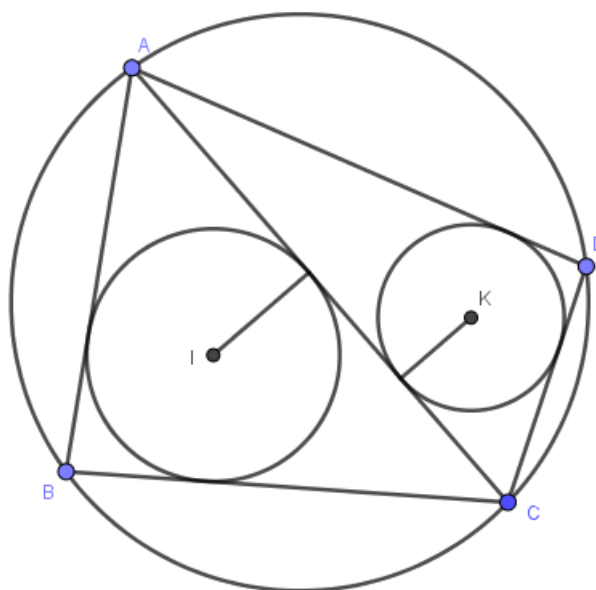
Označimo sa  $E$  polovište luka  $AB$ ,  $F$  polovište luka  $BC$ ,  $G$  polovište luka  $CD$  i  $H$  polovište luka  $AD$ . Neka je  $I$  središte kružnice upisane trokutu  $\triangle ABC$ ,  $J$  središte kružnice upisane trokutu  $\triangle BCD$ ,  $K$  središte kružnice upisane trokutu  $\triangle ACD$  te  $L$  središte kružnice upisane trokutu  $\triangle ABD$ .



Slika 2.15: Prva triangulacija tetivnog četverokuta

Povucimo paralele s  $\overline{BD}$  kroz  $J$  i  $L$ , te paralele s  $\overline{AC}$  kroz  $I$  i  $K$ , koje zajedno čine četverokut  $OPRS$  (slika 2.18).

Udaljenosti između nasuprotnih stranica dobivenog četverokuta jednake su zbroju radijusa odgovarajućih upisanih kružnica sa slike 2.15 i 2.16. Kako bismo opravdali tvrdnju teorema, dovoljno je dokazati da je četverokut  $OPRS$  zapravo romb, jer su visine u rombu jednakih duljina.

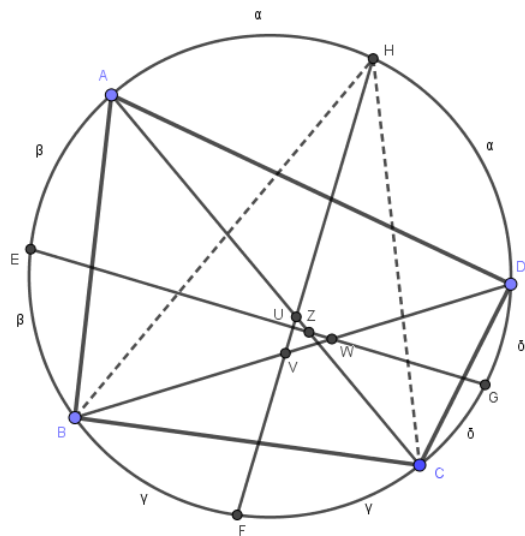


Slika 2.16: Druga triangulacija tetivnog četverokuta

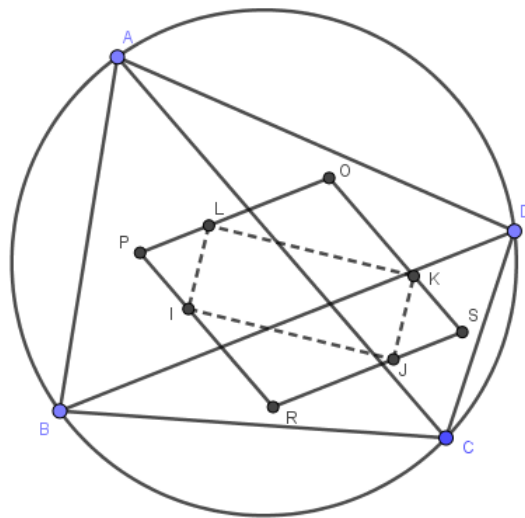
Kao na slici 2.17, neka je

$$\begin{aligned}
 \overline{HF} \cap \overline{BD} &= V, \\
 \overline{HF} \cap \overline{AC} &= U, \\
 \overline{EG} \cap \overline{BD} &= W, \\
 \overline{EG} \cap \overline{AC} &= Z.
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

Primijetimo da je  $\angle ACH = \angle DBH$  te  $\angle BHF = \angle CHF$ , jer su to kutovi nad lukovima jednakih duljina. Odavde slijedi da su trokuti  $\triangle BVH$  i  $\triangle CUH$  slični po KK teoremu o sličnosti, te vrijedi da je  $\angle BVH = \angle CUH$ . Dakle,  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  sijeku  $\overline{HF}$  pod istim kutom sa suprotne strane. U teoremu 2.3.6 smo dokazali da su  $\overline{EG}$  i  $\overline{FH}$  okomiti. Dakle,  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  sijeku  $\overline{EG}$  pod istim kutom sa suprotne strane. Stoga, svi pravci paralelni s dijagonalama tetivnog četverokuta sijeku stranice pravokutnika  $IJKL$  pod istim kutom. Odavde slijedi da su trokuti  $\triangle ILP$ ,  $\triangle LKO$ ,  $\triangle KJS$  i  $\triangle IJR$  jednakokračni (slika 2.18).



Slika 2.17: Svi pravci paralelni s dijagonalama tetivnog četverokuta sijeku stranice pravokutnika pod istim kutom



Slika 2.18: Paralele s dijagonalama tetivnog četverokuta kroz vrhove pravokutnika čine romb

Označimo

$$\begin{aligned} |PI| &= e, \\ |RJ| &= f, \\ |KS| &= g, \\ |OL| &= h. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Kako je  $OPRS$  paralelogram, imamo

$$|OP| = |RS| \tag{2.47}$$

i

$$|PR| = |OS|. \tag{2.48}$$

Raspisivanjem jednakosti (2.47), dobivamo

$$|OP| = |OL| + |LP| = |OL| + |PI| = h + e, \tag{2.49}$$

$$|RS| = |RJ| + |JS| = |RJ| + |KS| = f + g. \tag{2.50}$$

Iz (2.47), (2.49) i (2.50) imamo

$$h + e = f + g. \tag{2.51}$$

Kada raspišemo (2.48), dobivamo

$$|PR| = |PI| + |IR| = |PI| + |RJ| = e + f, \tag{2.52}$$

$$|OS| = |OK| + |KS| = |OL| + |KS| = h + g. \tag{2.53}$$

Iz (2.48), (2.52) i (2.53) imamo

$$e + f = h + g. \tag{2.54}$$

Oduzimanjem (2.54) od (2.51) dobivamo da je  $f = h$  i  $e = g$ .

Sada imamo

$$|OP| = |RS| = h + e, \tag{2.55}$$

$$|PR| = |OS| = h + e. \tag{2.56}$$

Dakle, četverokut  $OPRS$  ima sve stranice jednakih duljina, što znači da je taj četverokut romb. Time je tvrdnja teorema dokazana.  $\square$

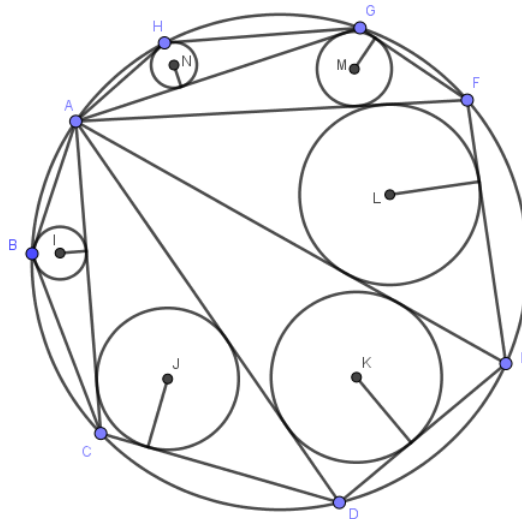
**Korolar 2.3.8.** Zbroj radijusa upisanih kružnica je jednak za bilo koju triangulaciju tetivnog mnogokuta.

*Dokaz.* Ovaj korolar je poopćenje teorema 2.3.7, odnosno dokazali smo da tvrdnja vrijedi za četverokute. Sada želimo pokazati da ona vrijedi za bilo koji tetivni mnogokut.

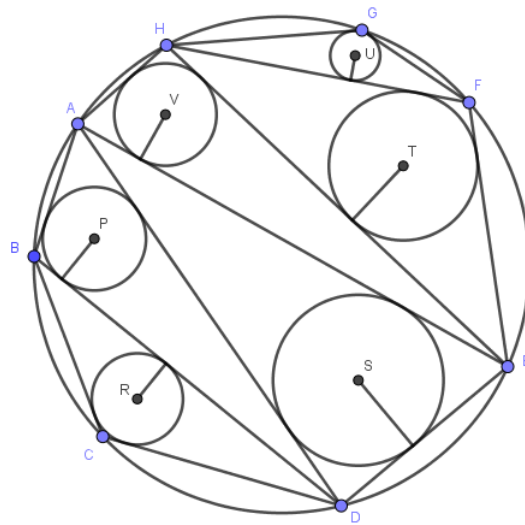
Uzmimo proizvoljan tetivni mnogokut i njegove dvije različite triangulacije. Od jedne triangulacije možemo doći do druge tako da izvedemo niz transformacija. Svaka transformacija se sastoji u tome da odaberemo neki četverokut koji se sastoji od dva trokuta iz triangulacije te da mu izbrišemo dijagonalu i nacrtamo drugu dijagonalu. Svaki takav četverokut je tetivan, a za tetivne četverokute tvrdnja korolara vrijedi prema prethodnom teoremu. Dakle, zbroj pripadnih radijusa se pri transformacijama ne mijenja pa te dvije triangulacije imaju jednak zbroj radijusa.  $\square$

Prethodni korolar vizualizirat ćemo na primjeru osmerokuta. Na slikama 2.19 i 2.20 nalaze se dvije triangulacije tetivnog osmerokuta  $ABCDEFGH$ . Tvrdimo da je zbroj radijusa kružnica sa slike 2.19 jednak zbroju radijusa kružnica sa slike 2.20. Promotrimo prvu triangulaciju (slika 2.19). Zamjenom dijagonala u pojedinim četverokutima želimo doći do druge triangulacije (slika 2.20).

Uzmimo četverokut  $AFGH$  kojemu umjesto dijagonale  $\overline{AG}$  povučemo dijagonalu  $\overline{FH}$  (slika 2.21). Sljedeći četverokut koji promatramo je  $AEFH$  u kojemu umjesto dijagonale  $\overline{AF}$  povučemo dijagonalu  $\overline{HE}$  (slika 2.22). Kako želimo doći do situacije kao na slici 2.20, vidimo da nam jedino još preostaje zamjena dijagonala u četverokutu  $ABCD$  (slika 2.23). Dakle, nizom transformacija došli smo od jedne triangulacije do druge, a korolar 2.3.8. nam osigurava da je zbroj radijusa u obje triangulacije jednak.

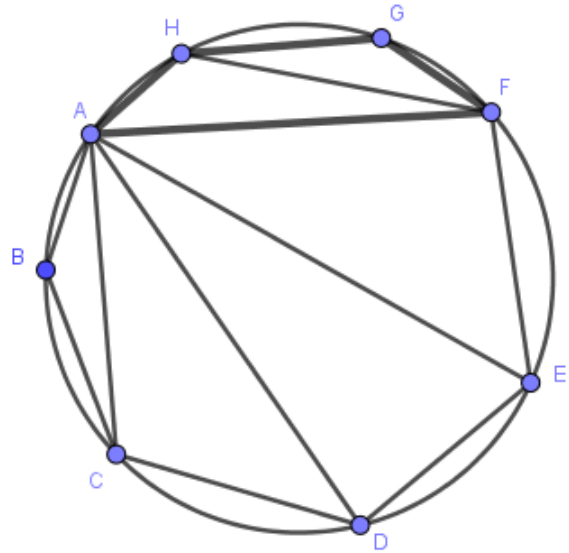
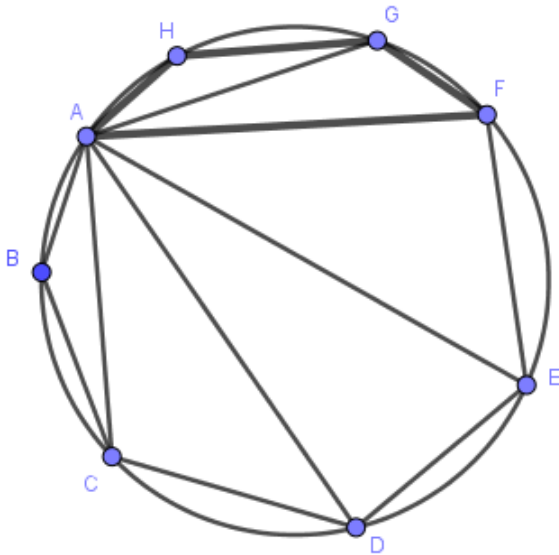


Slika 2.19: Prva triangulacija tetivnog osmerokuta

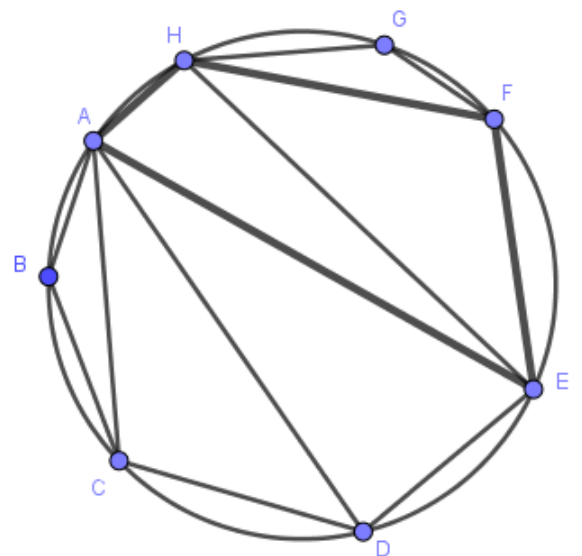
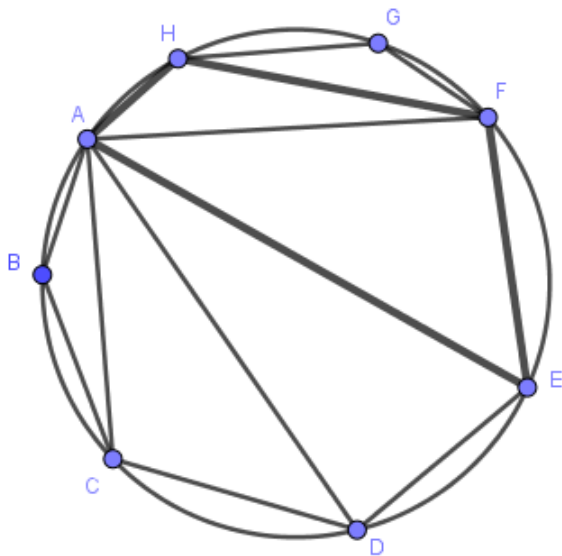


Slika 2.20: Druga triangulacija tetivnog osmerokuta

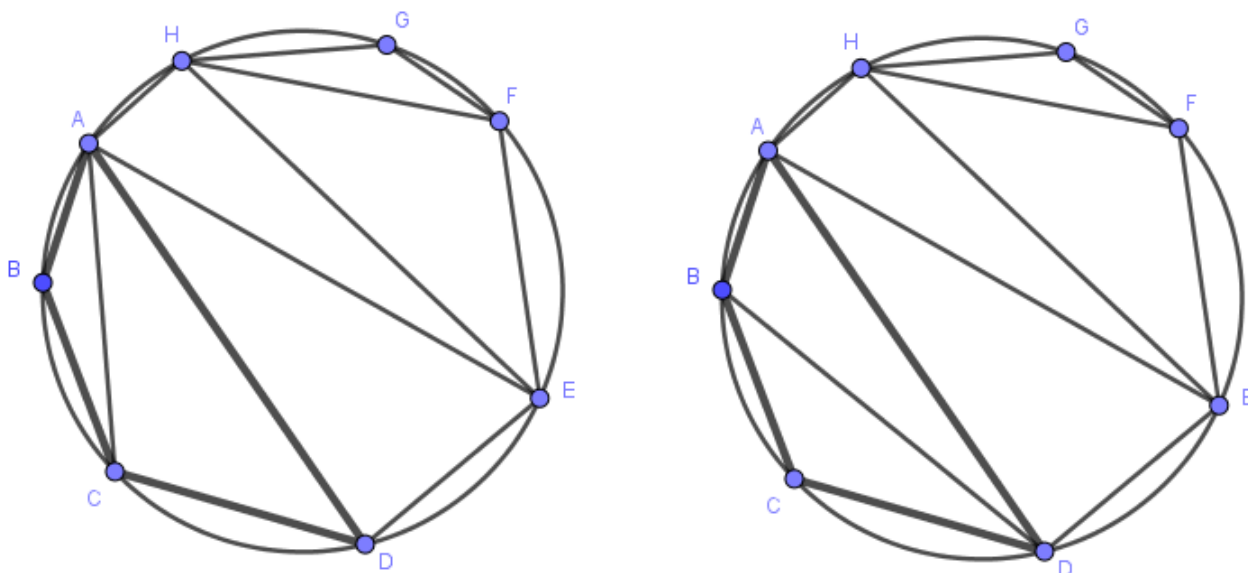




Slika 2.21: Zamjena dijagonala u četverokutu AFGH



Slika 2.22: Zamjena dijagonala u četverokutu AEFH



Slika 2.23: Zamjena dijagonala u četverokutu ABCD

## 2.4 Tangencijalni četverokut

Osim što postoje četverokuti kojima se može opisati kružnica, postoje i oni kojima se kružnica može upisati. Stranice takvih četverokuta ujedno pripadaju tangentama na tu kružnicu, odakle im i dolazi naziv.

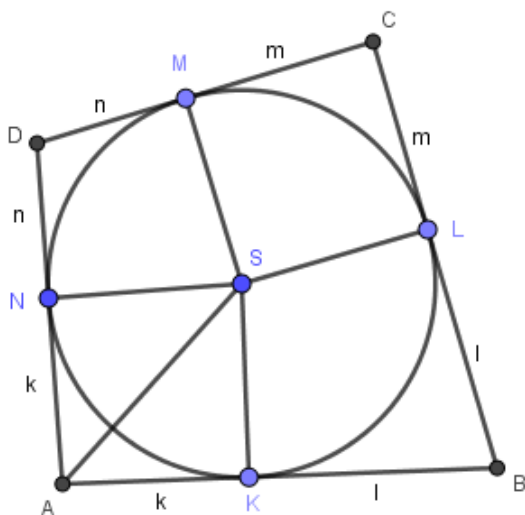
**Definicija 2.4.1.** Četverokut kojemu se može upisati kružnica naziva se **tangencijalni četverokut**.

Pogledajmo svojstvo koje vrijedi za stranice tangencijalnog četverokuta.

**Teorem 2.4.2.** Zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak je zbroju duljina drugih dviju nasuprotnih stranica tog četverokuta.

*Dokaz.* Neka su točke  $K, L, M, N$  dirališta stranica tangencijalnog četverokuta  $ABCD$  s njemu upisanom kružnicom, kao na slici 2.24. Promotrimo trokute  $\triangle AKS$  i  $\triangle ANS$ . Stranice  $\overline{SK}$  i  $\overline{SN}$  su zapravo radijusi upisane kružnice četverokuta, dakle one su jednakih duljina. Nadalje, znamo da je tangenta na kružnicu okomita na njezin radijus. Dakle,  $\angle SKA = \angle SNA$ . Uz to, stranica  $\overline{SA}$  zajednička je promatranim trokutima. Zaključujemo da su trokuti  $\triangle AKS$  i  $\triangle ANS$  sukkladni po  $SSK^>$  teoremu o sukkladnosti. Odavde slijedi da

je  $|AK| = |AN| =: k$ . Analogno zaključujemo da je  $|KB| = |BL| =: l$ ,  $|LC| = |CM| =: m$ , te  $|MD| = |DN| =: n$ .



Slika 2.24: Poučak o stranicama tangencijalnog četverokuta

Zbrajanjem duljina dviju nasuprotnih stranica dobivamo

$$|AB| + |CD| = (k + l) + (m + n) = (k + n) + (l + m) = |AD| + |BC|, \quad (2.57)$$

što smo trebali i dokazati.  $\square$

Izvedimo sada formulu za površinu tangencijalnog četverokuta.

**Teorem 2.4.3.** Za površinu tangencijalnog četverokuta  $ABCD$  vrijedi

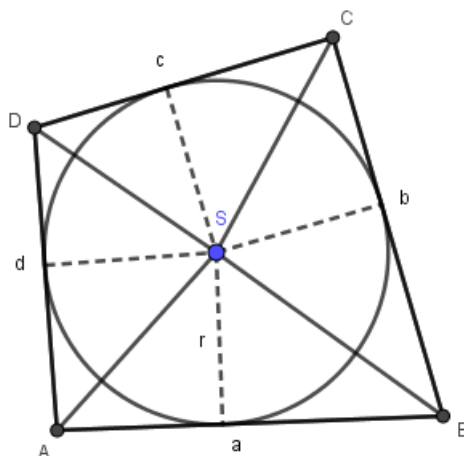
$$P_{ABCD} = \frac{a + b + c + d}{2} \cdot r, \quad (2.58)$$

pri čemu su  $a, b, c$  i  $d$  duljine stranica tog četverokuta, a  $r$  duljina radijusa njemu upisane kružnice.

*Dokaz.* Spojimo li vrhove četverokuta  $ABCD$  sa središtem njemu upisane kružnice, podijelit ćemo četverokut na četiri trokuta:  $\triangle ABS$ ,  $\triangle BCS$ ,  $\triangle CDS$  i  $\triangle DAS$  (slika 2.25).

Primijetimo da je površina četverokuta  $ABCD$  jednaka zbroju površina dobivenih trokuta, odnosno

$$P_{ABCD} = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CDS} + P_{DAS}$$



Slika 2.25: Površina tangencijalnog četverokuta

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{r(a + b + c + d)}{2}, \quad (2.59)$$

čime je tvrdnja dokazana.  $\square$

Uz mnoga druga lijepa svojstva, za sljedeći četverokut također vrijedi da mu se može upisati kružnica.

**Definicija 2.4.4.** Četverokut kojemu su po dvije stranice jednakih duljina, a dijagonale okomite naziva se **deltoid**.

**Propozicija 2.4.5.** Ako tangencijalni četverokut ima okomite dijagonale, onda je on deltoid.

*Dokaz.* Neka je zadan tangencijalni četverokut  $ABCD$  sa stranicama duljina  $a, b, c, d$ . Dijagonale četverokuta sijeku se u točki  $S$  (slika 2.26).

S obzirom da je četverokut tangencijalan, vrijedi

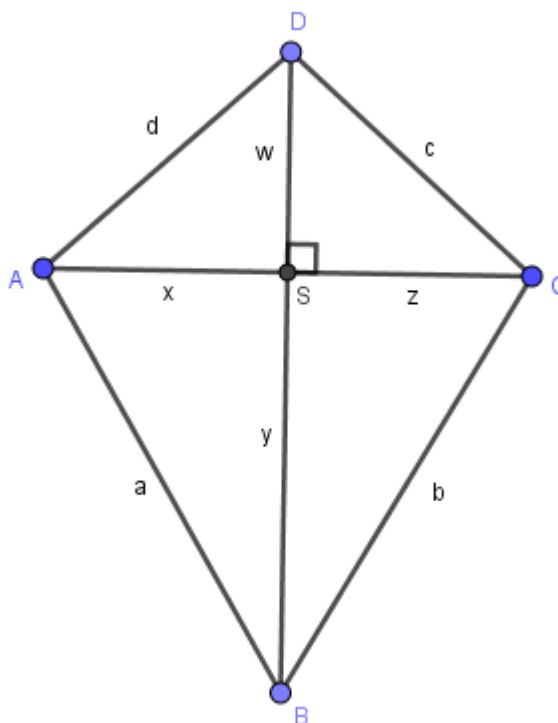
$$a + c = b + d. \quad (2.60)$$

Označimo  $|AS| = x$ ,  $|BS| = y$ ,  $|CS| = z$ ,  $|DS| = w$ . Tada iz pravokutnih trokuta  $\triangle ASB$ ,  $\triangle BSC$ ,  $\triangle CSD$ ,  $\triangle ASD$  dobivamo

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (2.61)$$

$$z^2 + y^2 = b^2, \quad (2.62)$$

$$w^2 + z^2 = c^2, \quad (2.63)$$



Slika 2.26: Deltoid je tangencijalni četverokut

$$x^2 + w^2 = d^2. \quad (2.64)$$

Zbrajanjem (2.61) i (2.63) te (2.62) i (2.64), dobivamo

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2. \quad (2.65)$$

Kada izrazimo  $d$  iz (2.60) i uvrstimo ga u (2.65), imamo

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - b^2 &= (a + c - b)^2, \\ b^2 + ac - ab - bc &= 0, \end{aligned} \quad (2.66)$$

odnosno

$$(b - a)(b - c) = 0. \quad (2.67)$$

Odavde vidimo da je  $a = b$  ili  $b = c$ , odakle slijedi da je  $c = d$  ili  $a = d$ . Dakle, dobili smo da je četverokut  $ABCD$  deltoid.  $\square$

# Poglavlje 3

## Ostali mnogokuti

U posljednjem poglavlju ćemo upoznati neke posebne vrste peterokuta i šesterokuta. Neke od njih su manje poznate, a zanimljive su zbog svojih svojstava.

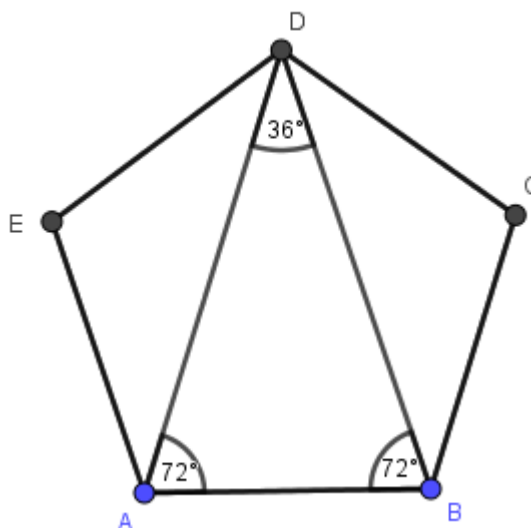
### 3.1 Peterokut

Kod zlatnog trokuta definirali smo zlatni rez kao omjer u kojem je podijeljena dužina na dva dijela tako da se veći dio prema cjelini odnosi kao manji dio prema većem. Omjer zlatnog reza nazivamo zlatni broj. Osim kod trokuta, zlatni rez se javlja i kod peterokuta.

**Teorem 3.1.1.** *Svake dvije dijagonale u pravilnom peterokutu, koje se sijeku unutar peterokuta, sijeku se u omjeru zlatnog reza. Omjer duljine dijagonale i duljine osnovice jednak je zlatnom omjeru. [2]*

Uočimo da se u pravilnom peterokutu  $ABCD$  nalazi pet zlatnih trokuta:  $\triangle ABD$ ,  $\triangle BCE$ ,  $\triangle CDA$ ,  $\triangle DEB$  i  $\triangle EAC$ , zbog čega takav peterokut nazivamo i zlatni peterokut (slika 3.1).

Povlačenjem svih dijagonala u pravilnom peterokutu dobivamo mnogokut koji nazivamo pravilni ili zlatni pentagram (slika 3.2). Pentagram je primjer samopresijecajućeg poligona, odnosno poligona čije se stranice sijeku i u točkama koje nisu vrhovi poligona. Samopresijecajući poligoni su u suprotnosti s jednostavnim poligonima čije se stranice nikad ne sijeku, osim u vrhovima. Svi do sad navedeni mnogokuti su jednostavni poligoni, tj. rub im čini zatvorenu krivulju koja ne siječe samu sebe.



Slika 3.1: Zlatni peterokut

## 3.2 Šesterokut

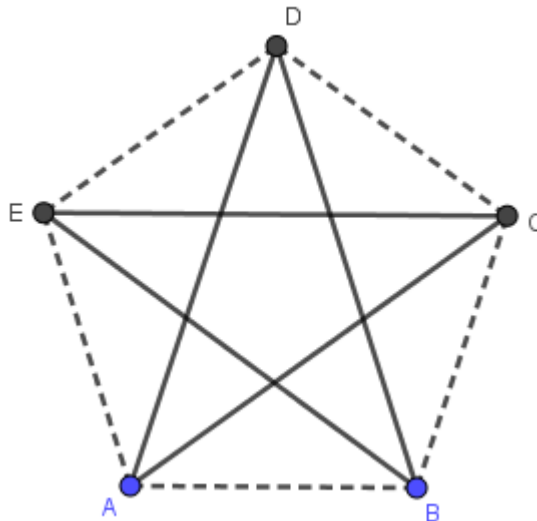
Šesnaestogodišnji Blaise Pascal prezentirao je uglednim matematičarima toga doba svoja otkrića iz projektivne geometrije. Najpoznatije od njih znamo pod nazivom Pascalov teorem o mističnom heksagonu, kojeg ćemo navesti bez dokazivanja.

**Teorem 3.2.1 (Pascalov teorem).** *Ako je šesterokut  $ABCDEF$  tetivni, tada su sjecišta pravaca  $AB$  i  $DE$ ,  $BC$  i  $EF$  te  $CD$  i  $FA$  kolinearne točke (slika 3.3). [9]*

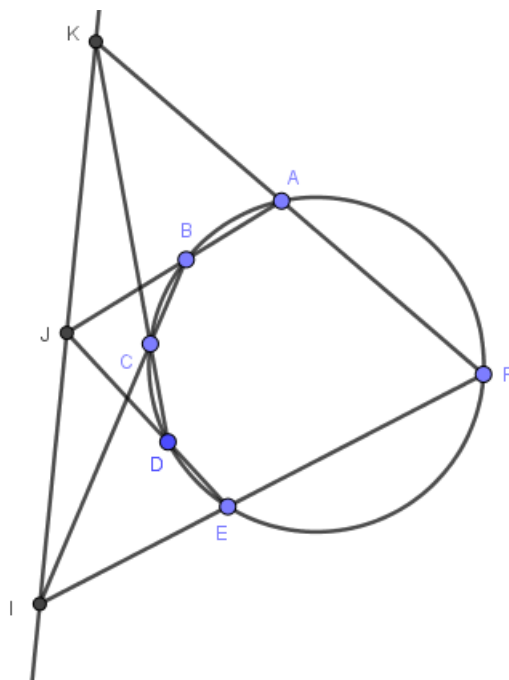
Napomenimo da osim kružnici, šesterokut može biti upisan bilo kojoj drugoj krivulji drugog reda. Za svaku od njih vrijedit će Pascalov teorem.

Francuski matematičar Brianchon je dokazao teorem koji je sličan Pascalovom, s razlikom da kružnica nije opisana šesterokutu, nego je upisana.

**Teorem 3.2.2 (Brianchonov teorem).** *Ako je  $ABCDEF$  tangencijalni šesterokut, tada se pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  sijeku u istoj točki (slika 3.4). [9]*

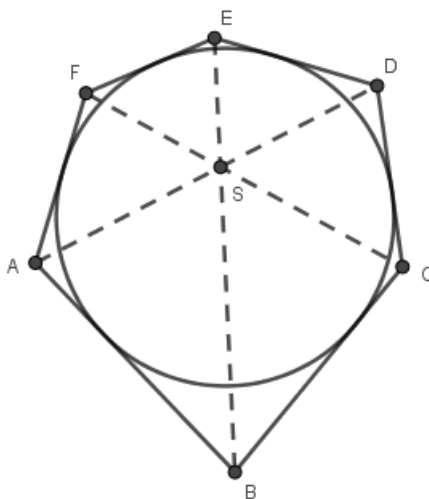


Slika 3.2: Pravični pentagram



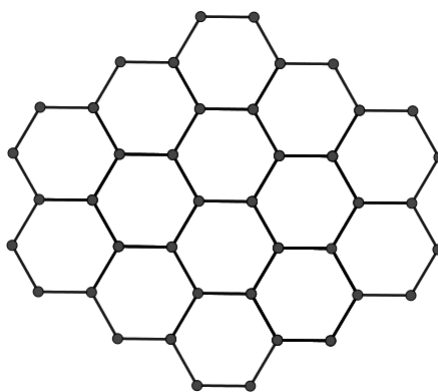
Slika 3.3: Pascalov šesterekut





Slika 3.4: Brianchonov šesterokut

Znamo da matematika ima široku primjenu u različitim područjima. Pravilni mnogokuti se često koriste za popločavanje podova, dvorišta i ulica. Postoji hipoteza o pčelinjem saću koja kaže da je odabir pravilnih šesterokuta najbolji način da se neki prostor razdijeli na jednake dijelove uz minimalnu potrošnju pregradnih elemenata. Dakle, popločavanjem pravilnim šesterokutima najviše se uštedi na materijalu.



Slika 3.5: Popločavanje ravnine pravilnim šesterokutima

# Bibliografija

- [1] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, skripta, Zagreb, 2007.
- [2] M. Katić Žlepalo, B. Kovačić, *O zlatnom trokutu*, math.e (2016), br. 30.
- [3] B. Kovačić, *O savršenim trokutima*, Matematika i škola **71** (2013), br. 5, 17–22.
- [4] A. Marić, *Četverokut*, Element, Zagreb, 2006.
- [5] A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.
- [6] A. Marić, *Neke osobitosti pseudopravokutnog trokuta*, Matematika i škola **4** (2000), br. 8, 176–178.
- [7] A. Marić, *Važnost dokaza obrata poučka*, Matematika i škola **3** (2000), br. 4, 112–114.
- [8] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004.
- [9] T. Pejković, *Afine i projektivne transformacije*, Predavanja za nastavnike i mentore na Državnom natjecanju iz matematike, Šibenik, 2010.
- [10] J. M. Unger, *A Collection Sangaku Problems*, Department of East Asian Languages and Literatures, Ohio, 2009.

# Sažetak

U diplomskom radu su prikazane različite vrste mnogokuta te su dokazana neka njihova svojstva. Kod trokuta imamo osnovnu podjelu prema stranicama i kutovima te u ovisnosti o tome primjećujemo neka karakteristična svojstva trokuta.

Postoje i neke manje poznate vrste trokuta poput pseudopravokutnog trokuta kojeg karakterizira određena relacija između kutova trokuta. Neke vrste trokuta se definiraju pomoću nekog drugog trokuta, poput nožišnog trokuta kojemu su vrhovi nožišta okomica spuštenih iz neke točke na pravce na kojima leže stranice danog trokuta. Kada se ta točka poklapa s ortocentrom danog trokuta, tada se dobiveni trokut naziva ortocentrični, a ako se točka poklapa sa središtem danom trokutu opisane kružnice, trokut se naziva medijalni. Postoji i savršeni trokut čiji su opseg i površina jednaki, a stranice prirodni brojevi te zlatni trokut koji se definira pomoću omjera zlatnog reza. Također, zlatni rez nalazimo i kod pravilnog ili zlatnog peterokuta.

Nadalje, u radu su promatrane razne vrste četverokuta. Osim dobro poznatih vrsta paralelograma, postoje četverokuti kojima se može opisati ili upisati kružnica, a nazivamo ih tetivni, odnosno tangencijalni četverokut. Posebna vrsta tangencijalnog četverokuta je onaj s okomitim dijagonalama, a naziva se deltoid.

Također, istražene su karakteristike nekih mnogokuta s više od četiri stranice, poput Pascalovog i Brianchonovog šesterokuta.

# Summary

Various types of polygons have been shown in this graduate thesis and some of their properties have been proven. Triangles are classified in two general ways: by their sides and by their angles. On the basis of that, we can notice some of the characteristic properties of the triangles.

There are also some lesser-known types of triangles such as the pseudo right triangle that is characterized by a certain relation between the angles of the triangle. Some types of triangles are defined by another triangle, such as the pedal triangle whose vertices are equal to feet of the lines perpendicular to lines that contain sides of the given triangle, passing through a given point. When that point fits with the orthocenter of the given triangle, then the resulting triangle is called orthic, and if this point is the center of the circumcircle, the triangle is called medial. There is a triangle which is called perfect whose perimeter and area are equal and the lengths of its sides are natural numbers. Also, there is the gold triangle which is defined by the golden ratio. Likewise, we find the golden ratio in the regular or gold pentagon.

In this paper various types of quadrilaterals were observed. In addition to well-known types of parallelograms, there are quadrilaterals that have the circumcircle or the incircle, and we call them cyclic and tangential quadrilaterals respectively. A special kind of tangential quadrilateral is the one with perpendicular diagonals and is called deltoid.

Furthermore, some polygons with five and more sides have been researched, such as Pascal and Brianchon hexagon.

# Životopis

Ana Merkaš rođena je 5.11.1994. u Zaboku. Osnovnu školu je pohađala u Područnoj školi Donja Šemnica - Osnovna škola "Ljudevit Gaj" Krapina. Srednju školu je pohađala u Zaboku gdje je stekla zanimanje ekonomist. Nakon mature, 2013. godine upisuje Preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer, na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, 2016. godine upisuje Diplomski studij matematike, smjer nastavnički, na istom fakultetu. U slobodno vrijeme pjeva u zboru mladih "Sv. Mihael" iz Mihovljana.