Routhov teorem i njegova poopćenja

Mršić, Tea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tea Mršić

ROUTHOV TEOREM I NJEGOVA POOPĆENJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Trokut je uz kružnicu jedan od najviše proučavanih geometrijskih likova. Učimo ga crtati još i prije polaska u školu. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja upoznajemo neke zakonitosti koje vrijede za svaki trokut,poput zbroja kutova u trokutu i nejednakosti trokuta, zatim formulu za površinu trokuta, međusobne relacije između trokuta kao što su sukladnost i sličnost i drugo. I u srednjoj školi znatna se pozornost posvećuje trokutu, od proučavanja njegovih karakterističnih točaka do trigonometrije, različitih preslikavanja ravnine i drugih nastavnih sadržaja. Na prvoj godini studija matematike nastavili smo se baviti svojstvima trokuta kroz teoreme kao što su Cevin i Menelajev teorem, čime dolazimo do poveznice s ovim radom.

Naime, cilj nam je proučiti teorem poznat u matematičkoj literaturi kao Routhov teorem, izložiti nekoliko njegovih dokaza, jedno zanimljivo poopćenje te njegov analogon u tri dimenzije, za tetraedar. Pritom će do izražaja doći različite činjenice i metode naučene u dosadašnjem matematičkom obrazovanju. Uočit ćemo da se Routhov teorem može smatrati poopćenjem Cevinog i Menelajevog teorema.

Edward John Routh (1831.-1907.) bio je iznimno cijenjen i utjecajan engleski matematičar. Rođen u Kanadi, od jedanaeste godine živio je u Engleskoj, a za studij matematike presudna su bila predavanja znamenitog Augustusa De Morgana, prvog profesora na londonskom University Collegeu. Routh i njegov vršnjak James Clerk Maxwell, glasoviti škotski matematičar i fizičar, bili su najuspješniji i najviše nagrađivani studenti svoje generacije. U matematičkim krugovima Routh se naročito proslavio kao najbolji trener kandidata za iznimno zahtjevni završni ispit Mathematical Tripos na Univerzitetu u Cambridgeu, no također je ostavio važne znanstvene doprinose i publikacije iz više znanstvenih područja. Posebno mjesto pritom zauzima primjena matematike u fizici i to dinamici, statici, astronomiji, teoriji valova i harmonijskoj analizi. Osobito je poznat Routh-Hurwitzov teorem o položaju nultočaka polinoma s kompleksnim koeficijentima. Teorem iz geometrije trokuta kojim se ovdje bavimo proizlazi iz samo jedne bilješke u Routhovoj knjizi "Rasprava o analitičkoj statici s brojnim primjerima" [1] pa zapravo ima sporedno mjesto u njegovom bogatom opusu. Ipak, pokazao se poticajnim za niz članaka čiji su autori iznijeli njegove različite dokaze, poopćenja i analogone. Dio tih rezultata izložit ćemo u ovom diplomskom radu.

Poglavlje 1

Formulacija i nekoliko dokaza teorema

1.1 Izvorna formulacija Routhovog teorema

Za početak navest ćemo u kakvom je obliku i s kakvim objašnjenjem Routh iskazao rezultate kojima se bavimo u ovom radu. Na 82. stranici 2. izdanja njegove knjige [1], nakon 132. odjeljka (article) nalazi se dodatak koji, u prijevodu i neznatno skraćen, sadrži sljedeće tvrdnje.

Neka su D, E, F po volji odabrane točke na stranicama trokuta ABC. Ako su Δ i Δ' površine trokuta ABC i DEF, može se pokazati da vrijedi

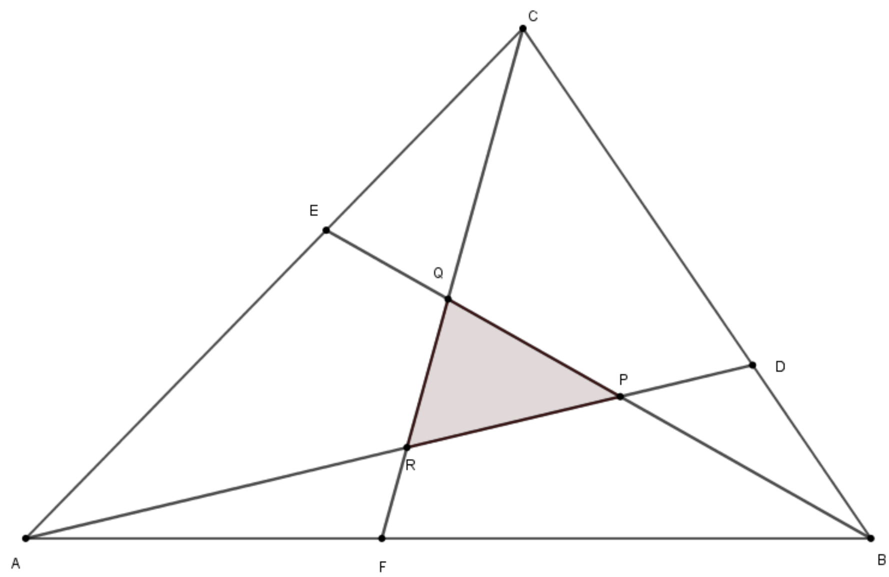
$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{AF \cdot BD \cdot CE + AE \cdot CD \cdot BF}{abc} \tag{1.1}$$

U knjizi slijedi komentar o tome kako se formira izraz u brojniku te kako se bira orijentacija dužina. Primjerice, AF se uzima s pozitivnim predznakom ako se točka F nalazi na pravcu AB gledano iz vrha A „prema“ vrhu B, a s negativnim ako se nalazi na tom pravcu gledano iz vrha A „obrnuto “ od B. Dakle, ako je točka F na stranici AB između vrhova, onda su AF i BF obje pozitivno orijentirane, a ako se F nalazi „iza“ B, to jest na zraci iz vrha B koja ne sadrži vrh A, onda je AF orijentirana pozitivno, a BF negativno. Odatle, omjer $\frac{AF}{BF}$ pozitivan je ako se F nalazi između A i B, a negativan inače. Na isti način, ako kroz vrhove trokuta povučemo bilo koja tri pravca, recimo AD, BE, CF, oni će omeđiti područje PQR. Ako je površina trokuta PQR označena s Δ'', može se pokazati da je

$$\frac{\Delta''}{\Delta} = \frac{(AF \cdot BD \cdot CE – AE \cdot CD \cdot BF)^2}{(ab – CE \cdot CD)(bc – AE \cdot AF)(ca – BF \cdot BD)} \tag{1.2}$$

Routh na kraju napominje kako nigdje nije naišao na ove izraze za površine dva trokuta koje se često pojavljuju pa ih je stoga uvrstio u knjigu kako bi olakšao razumijevanje argumenata u tekstu. Smisao je svakako u tome da Routh nije vidio eksplicitne formule, izražene u tom ili ekvivalentnom obliku, iako se dosta često javlja potreba za njima u različitim problemima. Druga formula, očito znatno složenija od prve, postala je u matematičkoj literaturi poznata kao Routhov teorem, premda on nije naveo dokaz, vjerojatno smatrajući da u knjigu iz područja statike nije potrebno uvrstiti taj razmjerno elementaran geometrijski izvod. Ostao je pri konstataciji da „može se pokazati“ („it may be shown“).

Prije daljnjeg razmatranja i pretvaranja formula u oblik u kakvom se najčešće



Slika 1.1.

navode, uočimo povezanost s dva klasična teorema iz geometrije trokuta, a to su Menelajev i Cevin teorem. Naglasimo i to da je riječ o tvrdnjama iz afine geometrije, jer su iskazane u terminima djelišnih omjera i omjera površina, a te veličine su invarijante afinih preslikavanja ravnine. U različitim dokazima primjenjuju se i metode koje ne pripadaju afinoj geometriji.

Najprije, površina Δ' trokuta DEF jednaka je 0 ako i samo ako su točke D, E, F kolinearne, a to znači:

$$AF \cdot BD \cdot CE + AE \cdot CD \cdot BF = 0,$$

odnosno

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = -1,$$

a upravo to je relacija kojom je karakterizirana kolinearnost, po Menelajevom teoremu.

Nadalje, površina Δ'' trokuta PQR jednaka je 0 ako i samo ako se pravci AD, BE, CF sijeku u jednoj točki, dakle ako

$$AF \cdot BD \cdot CE - AE \cdot CD \cdot BF = 0,$$

odnosno

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1,$$

što je u Cevinom teoremu nužan i dovoljan uvjet da bi se spojnice AD, BE, CF sijekle u jednoj točki.

Uočimo još i najjednostavniji slučaj omjera $\dfrac{\Delta'}{\Delta}$, kad su D, E i F polovišta odgovarajućih stranica. Tada je trokut ABC trima srednjicama podijeljen na četiri sukladna trokuta pa je $\dfrac{\Delta'}{\Delta} = \dfrac{1}{4}$.

Tada je

$$AF = BF = \frac{c}{2}, \quad BD = CD = \frac{a}{2}, \quad CE = AE = \frac{b}{2},$$

pa (1.2) daje

$$\left(\frac{abc}{8} + \frac{abc}{8}\right) : abc = 1 : 4.$$

Prikladnije oblike izvornih Routhovih relacija (1.1) i (1.2) dobit ćemo tako da se umjesto orijentiranim dužinama i stranicama a, b, c trokuta poslužimo djelišnim omjerima.

Neka su, dakle, r, s i t realni brojevi takvi da vrijedi:

$$\overrightarrow{BD} = r\overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{CE} = s\overrightarrow{EA}, \quad \overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{FB}.$$

U Routhovom načinu označavanja bit će tada

$$\frac{BD}{CD} = r, \quad \frac{CE}{AE} = s, \quad \frac{AF}{BF} = t.$$

Naime, vidimo da ako je npr. D između vrhova B i C, onda su $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{DC}$ jednake orijentacije pa je r pozitivan, a i u Routhovom pristupu omjer $\dfrac{BD}{CD}$ je pozitivan.

Također, ako je točka D izvan dužine $\overline{BC}$, onda su $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{DC}$ suprotne orijentacije,

pa je r negativan, kao i $\dfrac{BD}{CD}$ kod Routha.
Sada je

$$\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{FB} = t(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}),$$

odakle

$$(1+t)\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AB},$$

i stoga

$$\overrightarrow{AF} = \frac{t}{1+t}\overrightarrow{AB}.$$

Zato,

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} = \frac{1}{1+t}\overrightarrow{AB}.$$

Analogno,

$$\overrightarrow{BD} = \frac{r}{1+r}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{DC} = \frac{1}{1+r}\overrightarrow{BC}$$

i

$$\overrightarrow{CE} = \frac{s}{1+s}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{EA} = \frac{1}{1+s}\overrightarrow{CA}.$$

Supstitucijom u relaciju (1.1) dobivamo:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{rst+1}{(1+r)(1+s)(1+t)}. \tag{1.3}$$

Nadalje za brojnik i nazivnik u (1.2) dobivamo redom:

$$(AF \cdot BD \cdot CE - AE \cdot CD \cdot BF)^2 = \frac{(rst-1)^2}{(1+r)^2(1+s)^2(1+t)^2}a^2b^2c^2$$

i

$$(ab - CE \cdot CD)(bc - AE \cdot AF)(ca - BF \cdot BD) = \frac{(rs+r+1)(st+s+1)(rt+t+1)}{(1+r)^2(1+s)^2(1+t)^2}a^2b^2c^2.$$

Napokon, pojednostavljivanjem razlomka dobivamo:

$$\frac{\Delta''}{\Delta} = \frac{(rst-1)^2}{(rs+r+1)(st+s+1)(tr+t+1)}. \tag{1.4}$$

U radu ćemo se nadalje služiti formulom (1.4) kao tvrdnjom Routhovog teorema, uz moguće promjene oznaka za zadane djelišne omjere, kad nam to bude odgovaralo.

Kako je riječ o omjeru površina, izborom $\Delta = 1$ za površinu trokuta ABC, za površinu trokuta Δ'' trokuta PQR možemo pisati:

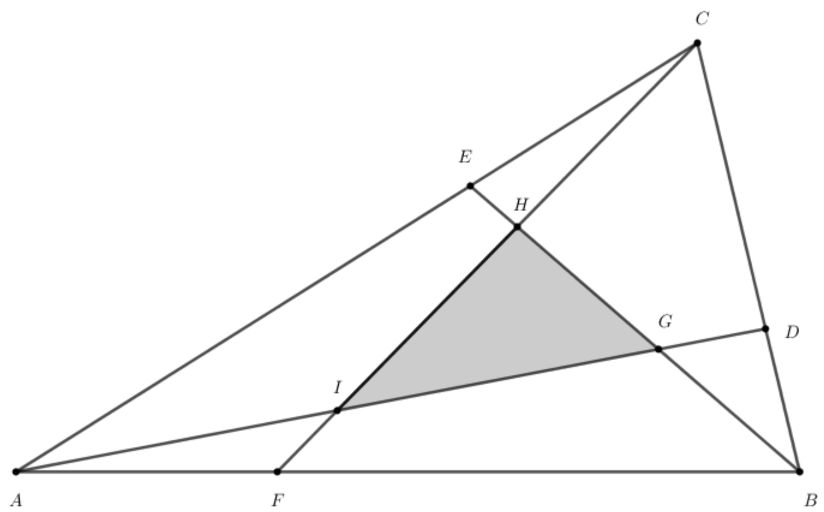
$$\Delta'' = \frac{(rst-1)^2}{(rs+r+1)(st+s+1)(tr+t+1)}. \tag{1.5}$$

Napominjemo da ćemo odsad točke koje je Routh označio s P, Q i R najčešće označavati s G, H, I, redom (v.sl. 1.1.).

1.2 Posebni slučaj: Feynmanov trokut

Najpoznatiji posebni slučaj Routhovog teorema, ne uzimajući u obzir onaj degenerirani kad se trokut GHI stegne u jednu točku pa se dobiva Cevin teorem, vjerojatno je tzv. Feynmanov trokut. Sve tri stranice trokuta ABC podijeljene su tada u jednakom omjeru $1 : 2$, a rezultat da tada omjer površina iznosi $1 : 7$ poznat je odavno. Zadatak izračunavanja tog omjera pojavljivao se u različitim zbirkama i na natjecanjima, a „pripisan" je slavnom fizičaru Feynmanu zahvaljujući anegdoti o tome kako je on u jednoj neformalnoj prigodi bio njime zaintrigiran. Kao početni motivacijski primjer izložit ćemo jedan od mnogih dokaza ovog rezultata, a na kraju ćemo primijeniti Routhovu formulu za taj slučaj i za poopćenje kada su sve stranice trokuta podijeljene u jednakom omjeru.

Zadatak 1. *Neka je ABC zadani trokut, točke D, E, F na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom takve da je $BD : DC = 1 : 2$, $CE : EA = 1 : 2$ i $AF : FB = 1 : 2$. Zatim, neka je G sjecište $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$, H sjecište $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$, I sjecište $\overline{CF}$ i $\overline{AD}$. Treba odrediti omjer površina $P(GHI) : P(ABC)$.*



Slika 1.2.

Rješenje. Označimo $P(ABC) = P$,

$$P(AFI) = P_1, P(BDG) = P_2, P(CEH) = P_3,$$

$$P(BGIF) = P_4, P(CHGD) = P_5, P(AIHE) = P_6.$$

Vrijedi: $P(ABD) = \frac{P}{3}$, također $P(BCE) = P(CAF) = \frac{P}{3}$.
Dakle,

$$P_1 + P_2 + P_4 = P_2 + P_3 + P_5 = P_3 + P_4 + P_6 = \frac{P}{3}.$$

Zatim,

$$P(ADC) = 2 \cdot \frac{P}{3} = P(GHI) + P_3 + P_5 + P_6$$

i stoga

$$P(GHI) + P_3 + P_5 + P_6 = 2(P_1 + P_2 + P_4),$$

te analogno

$$P(GHI) + P_2 + P_4 + P_5 = 2(P_1 + P_3 + P_6),$$

$$P(GHI) + P_1 + P_4 + P_6 = 2(P_2 + P_3 + P_5).$$

Zbrajanjem posljednje tri jednakosti i sređivanjem:

$$P(GHI) = P_1 + P_2 + P_3.$$

Sada pogledajmo četverokut $BGIF$ (analogno $CHGD$ i $AIHE$) i povucimo njegovu dijagonalu BI.
$P(FBI) = 2P(AFI)$ jer ovi trokuti imaju zajednički vrh I i visinu iz njega na AB, a $\overline{FB} = 2\overline{AF}$.
Dakle,

$$P(FBI) = 2P_1,$$

a onda

$$P(BGI) = P_4 - 2P_1$$

i

$$P(BDI) = P(BDG) + P(BGI) = P_2 + P_4 - 2P_1.$$

Pogledajmo još trokute BDI i DCI. Očito je

$$P(DCI) = 2P(BDI),$$

dakle

$$P(GHI) + P_5 = 2(P_2 + P_4 - 2P_1).$$

Analogno,

$$P(GHI) + P_4 = 2(P_1 + P_6 - 2P_3),$$
$$P(GHI) + P_6 = 2(P_3 + P_5 - 2P_2).$$

Zbrajanjem posljednje tri jednakosti:

$$3P(GHI) + (P_4 + P_5 + P_6) = 2(P_4 + P_5 + P_6) - 2(P_1 + P_2 + P_3),$$

pa zbog

$$P(GHI) = P_1 + P_2 + P_3$$

slijedi

$$5P(GHI) = P_4 + P_5 + P_6.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(GHI) + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \\ &= P(GHI) + P(GHI) + 5P(GHI) \\ &= 7P(GHI). \end{aligned}$$

Dakle, $\dfrac{P(GHI)}{P(ABC)} = \dfrac{1}{7}$.

Isti rezultat trebao bi proizaći uvrštavanjem $r = s = t = \dfrac{1}{2}$ u Routhovu formulu (1.4).
Doista,

$$\frac{\Delta''}{\Delta} = \frac{\left(\frac{1}{8} - 1\right)^2}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)^3} = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^3} = \frac{1}{7}.$$

Nadalje, ako vrijedi $r = s = t$ tada uvrštavajući u Routhovu formulu (1.4) imamo:

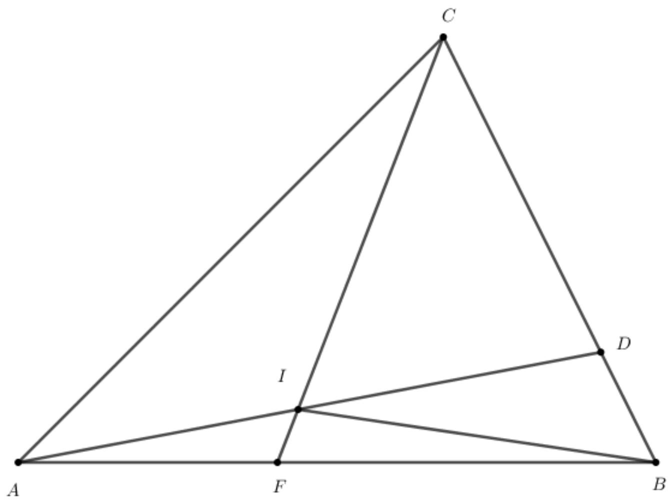
$$\begin{aligned}
\frac{\Delta''}{\Delta} &= \frac{(r^3-1)^2}{(r^2+r+1)(r^2+r+1)(r^2+r+1)} \\
&= \frac{((r-1)(r^2+r+1))^2}{(r^2+r+1)^3} \\
&= \frac{(r-1)^2(r^2+r+1)^2}{(r^2+r+1)^3} \\
&= \frac{(r-1)^2}{r^2+r+1}.
\end{aligned}$$

1.3 Dva sintetička dokaza

Najprije ćemo izložiti dva sintetička dokaza, dakle služeći se samo djelišnim omjerima i omjerima površina pogodno odabranih trokuta, bez koordinata i vektora. Prvi dokaz je sasvim jednostavan, a za drugi je ključna ideja da se kroz jedan od vrhova trokuta GHI povuku paralele sa stranicama trokuta ABC.

Prvi dokaz. Sada nećemo promatrati dužinu $\overline{BE}$. Spojit ćemo B s $\{I\} = AD \cap CF$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
P(CAI) &= P(CAD) - P(CID) \\
&= \frac{P(ADB) - P(IBD)}{r} \\
&= \frac{P(AFI) + P(BIF)}{r} \\
&= \frac{P(AFI)(1+t)}{tr}.
\end{aligned}$$



Slika 1.3.

Također

$$\begin{aligned}\frac{tP(ABC)}{1+t} &= P(CAF) \\ &= P(CAI) + P(AFI) \\ &= \frac{P(AFI)(tr+t+1)}{tr},\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$P(AFI) = \frac{rt^2P(ABC)}{(1+t)(tr+t+1)},$$

odatle

$$P(CAI) = \frac{tP(ABC)}{tr+t+1}.$$

Tako simetrično kao na slici 1.2.

$$P(ABG) = \frac{rP(ABC)}{rs+r+1}$$

i

$$P(BCH) = \frac{sP(ABC)}{st+s+1}.$$

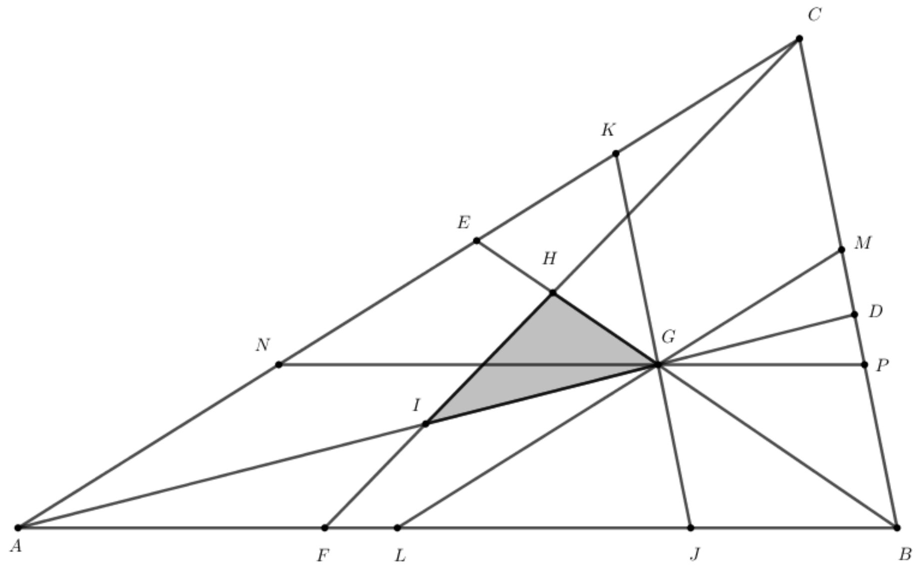
Konačno,

$$\frac{P(GHI)}{P(ABC)} = 1 - \frac{r}{rs+r+1} - \frac{s}{st+s+1} - \frac{t}{tr+t+1}.$$

Pojednostavljivanjem prethodnog izraza slijedi (1.4).

□

Drugi dokaz. Na slici 1.4. nacrtane su dužine paralelne sa stranicama trokuta ABC



Slika 1.4.

kroz točku G. Vrijedi: $\dfrac{JG}{GK} = \dfrac{BD}{DC} = r$ (jer je $JK \| BC$).
Iz toga slijedi $GK = \dfrac{JG}{r}$.
Također kako su trokuti LJG i GPM slični vrijedi: $\dfrac{PM}{JG} = \dfrac{MG}{GL} = \dfrac{CE}{EA} = s$, pa iz toga slijedi $PM = s \cdot JG$.
Tada

$$\begin{aligned} BC &= BP + PM + MC \\ &= JG + PM + GK \\ &= JG + sJG + \frac{JG}{r} \\ &= \frac{rs + r + 1}{r} JG, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\frac{JG}{BC} = \frac{r}{rs + r + 1}.$$

Ovaj omjer ujedno je omjer visina trokuta ABG i ABC, a kako imaju zajedničku bazu to je omjer i njihovih površina. Površina trokuta ABC jednaka je 1, pa je stoga

$$P(ABG) = \frac{r}{rs + r + 1}.$$

Analogno, koristeći paralelne dužine sa stranicama trokuta ABC kroz točke H i I dolazimo do formula:

$$P(BCH) = \frac{s}{st + s + 1} \quad \text{i} \quad P(CAI) = \frac{t}{tr + r + 1}.$$

Trokut ABC sastavljen je od trokuta ABG, BCH, CAI i GHI koji nemaju zajedničkih unutarnjih točaka pa je

$$P(ABC) = P(ABG) + P(BCH) + P(CAI) + P(GHI).$$

Odatle dobivamo:

$$\begin{aligned} P(GHI) &= 1 - \frac{r}{rs + r + 1} - \frac{s}{st + s + 1} - \frac{t}{tr + t + 1} \\ &= \frac{(rst - 1)^2}{(rs + r + 1)(st + s + 1)(tr + t + 1)}. \end{aligned}$$

$\square$

1.4 Dva vektorska dokaza

Primjena vektora očito je pogodna za dokazivanje Routhovog teorema i sličnih tvrdnji, jer se na taj način mogu izraziti ne samo djelišni omjeri nego i površine, pomoću vektorskog produkta. Pritom će biti povoljno ravninu promatrati unutar trodimenzionalnog prostora, kako bi se izabralo ishodište izvan ravnine i onda $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ za bazu vektorskog prostora. U drugom dokazu primijenit će se i promjena baze pa stoga i tehnika iz linearne algebre.

Prvi dokaz. Označimo s $\overrightarrow{OA}$ radijvektor točke A s ishodištem O izvan ravnine trokuta ABC.
Neka je

$$\overrightarrow{AI} = u\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CI} = v\overrightarrow{CF},$$

za u, v nepoznate skalare.
Izrazimo prethodne jednakosti pomoću radijvektora:

$$\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} = u(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}), \quad \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OC} = v(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC}).$$

Iz prve od prethodne dvije jednakosti slijedi:

$$\overrightarrow{OI} = (1-u)\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OD},$$

pri čemu je $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$.
Iz 1.1 dijela znamo: $\overrightarrow{BD} = \dfrac{r}{r+1}\overrightarrow{BC}$.
Dakle,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{r+1}\overrightarrow{OB} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{OC}.$$

Uvrštavajući prethodni izraz u $\overrightarrow{OI} = (1-u)\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OD}$, dobivamo:

$$\overrightarrow{OI} = (1-u)\overrightarrow{OA} + u\frac{1}{r+1}\overrightarrow{OB} + u\frac{r}{r+1}\overrightarrow{OC}.$$

Nadalje, iz jednakosti $\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OC} = v(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC})$ slijedi:

$$\overrightarrow{OI} = (1-v)\overrightarrow{OC} + v\overrightarrow{OF},$$

pri čemu je $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF}$.
Iz 1.1 dijela znamo: $\overrightarrow{AF} = \dfrac{t}{t+1}\overrightarrow{AB}$.
Dakle,

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{t+1}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{t+1}\overrightarrow{OB}.$$

Uvrštavajući prethodni izraz u $\overrightarrow{OI} = (1-v)\overrightarrow{OC} + v\overrightarrow{OF}$, dobivamo:

$$\overrightarrow{OI} = v\frac{1}{t+1}\overrightarrow{OA} + v\frac{t}{t+1}\overrightarrow{OB} + (1-v)\overrightarrow{OC}.$$

Sada smo dobili vektor $\overrightarrow{OI}$ izražen na dva načina pomoću vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ koji čine bazu vektorskog prostora. Izjednačimo koeficijente uz pojedine vektore baze jer $\overrightarrow{OI}$ ima jedinstveni prikaz.

$$1-u = v\frac{1}{t+1}$$
$$u\frac{1}{r+1} = v\frac{t}{t+1}$$
$$1-v = u\frac{r}{r+1}$$

Kraćim računom dobivamo: $v = \dfrac{t+1}{tr+t+1}$, $u = \dfrac{tr+t}{tr+t+1}$.
Sada je prikaz $\overrightarrow{OI}$ pomoću poznatih koeficijenata:

$$(tr+t+1)\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + tr\overrightarrow{OC}.$$

Kružno mijenjajući $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, r, s, t, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OI}$ dobivamo:

$$(rs+r+1)\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC} + rs\overrightarrow{OA}$$

$$(st+s+1)\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{OA} + st\overrightarrow{OB}.$$

Površina trokuta GHI iznosi:

$$\begin{aligned} 2P(GHI) &= |(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG}) \times (\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OG})| \\ &= |(\overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI} \times \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OG} \times \overrightarrow{OH})|. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Slično za površinu trokuta ABC imamo:

$$2P(ABC) = |(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})|.$$

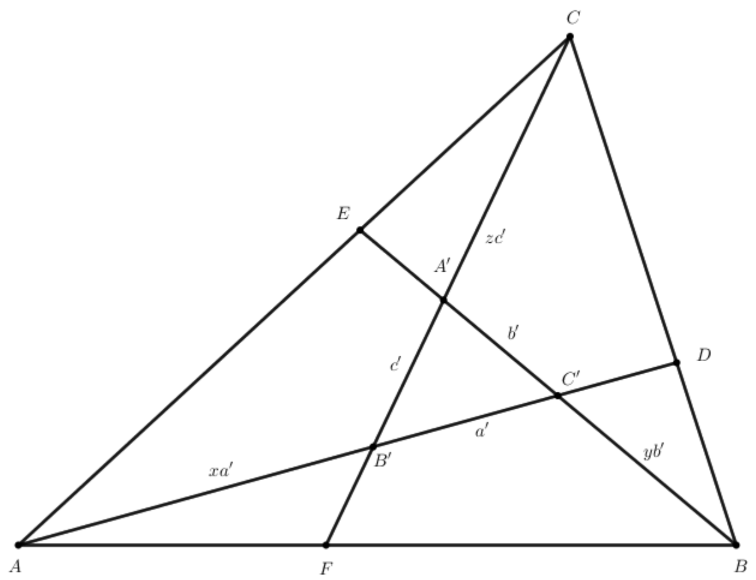
Dijeljenjem prethodne dvije jednakosti:

$$\frac{P(GHI)}{P(ABC)} = \frac{|(\overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI} \times \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OG} \times \overrightarrow{OH})|}{|(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})|}. \tag{1.7}$$

Kada provedemo račun u (1.6) vidjet ćemo da se (1.7) svodi na (1.4).

□

Prikazat ćemo još jedan dokaz pomoću vektora, specifičan po tome što se polazi „obrnuto“, to jest od stranica trokuta GHI. U prvoj fazi računa to daje jednostavniji izraz za traženi omjer površina, ali zatim treba prijeći na osnovne parametre r, s i t. Poslužit ćemo se promjenom baze vektorskog prostora, koristeći linearnu algebru. Ovdje ćemo uvesti i nešto drukčije oznake, tako da sjecišta pravaca BE i CF bude označeno s A', sjecište CF i AD s B', a sjecište AD i BE s C'.



Slika 1.5.

Drugi dokaz. Imamo $\overline{B'C'} = a'$, $\overline{C'A'} = b'$, $\overline{A'B'} = c'$ i $\overline{AB'} = xa'$, $\overline{BC'} = yb'$, $\overline{CA'} = zc'$.
Iz toga odmah slijedi

$$P(ABC') = yP(AC'A') = y(1+x)P(A'B'C').$$

Analogno za ostale trokute,

$$P(BCA') = z(1+y)P(A'B'C'),$$

$$P(CAB') = x(1+z)P(A'B'C').$$

Tada je

$$\begin{aligned}\frac{P(ABC)}{P(A'B'C')} &= z(1+y) + x(1+z) + y(1+x) + 1 \\ &= (x+1)(y+1)(z+1) - xyz. \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Sada moramo odrediti x, y, z u terminima r, s, t.
Prvo promotrimo prikaz vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ pomoću baze $\{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}\}$:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB'} + x(\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'}) = 0\overrightarrow{OA'} + (1+x)\overrightarrow{OB'} - x\overrightarrow{OC'},$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC'} + y(\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA'}) = -y\overrightarrow{OA'} + 0\overrightarrow{OB'} + (1+y)\overrightarrow{OC'},$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + z(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'}) = (1+z)\overrightarrow{OA'} - z\overrightarrow{OB'} + 0\overrightarrow{OC'}.$$

Iz prethodnih jednakosti možemo izravno napisati matricu prijelaza

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -y & 1+z \\ 1+x & 0 & -z \\ -x & 1+y & 0 \end{pmatrix}.$$

Trebat će nam njezina inverzna matrica, kao matrica prijelaza iz baze $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ u $\{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}\}$.
Determinanta gornje matrice iznosi :

$$det(T) = (1+x)(1+y)(1+z) - xyz.$$

Inverzna matrica jednaka je $\dfrac{1}{det(T)}$ pomnoženo s adjunktom gornje matrice.
Adjunkta je

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} (1+y)z & (1+y)(1+z) & yz \\ xz & x(1+z) & (1+x)(1+z) \\ (1+x)(1+y) & xy & y(1+x) \end{pmatrix}.$$

Sada odavdje trebamo dobiti omjere $r = BD : DC$, $s = CE : EA$, $t = AF : FB$.
Razmotrimo najprije točku D.
Vektor $\overrightarrow{OD}$ je linearna kombinacija $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, a vektor $\overrightarrow{OB'}$ je linearna kombinacija $\overrightarrow{OD}$ i $\overrightarrow{OA}$ (jer je $D \in \overline{BC}$ i $B' \in \overline{AD}$).
Kako je $r = BD : DC$, imamo:

$$(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = r(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}),$$

pa je

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{r+1}\overrightarrow{OB} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{OC}.$$

U prikazu $\overrightarrow{OB'}$ pomoću $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ upravo onaj dio koji je linearna kombinacija $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ predstavlja prikaz $\overrightarrow{OD}$ s nekim faktorom.

Vektorski:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB'} \\
&= \overrightarrow{OD} + \lambda\overrightarrow{DA} \\
&= \overrightarrow{OD} + \lambda(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) \\
&= (1-\lambda)\overrightarrow{OD} + \lambda\overrightarrow{OA} \\
&= \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\left(\frac{1}{r+1}\overrightarrow{OB} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{OC}\right) \\
&= \lambda\overrightarrow{OA} + \frac{1-\lambda}{r+1}\overrightarrow{OB} + \frac{(1-\lambda)r}{r+1}\overrightarrow{OC}.
\end{aligned}$$

S druge strane, iz drugog stupca adjunkte imamo:

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{det(T)}\left((1+y)(1+z)\overrightarrow{OA} + x(1+z)\overrightarrow{OB} + xy\overrightarrow{OC}\right).$$

Uspoređujući dva zapisa vektora $\overrightarrow{OB'}$ zbog jedinstvenosti prikaza u bazi imamo:

$$\lambda = \frac{(1+y)(1+z)}{det(T)},$$

$$\frac{1-\lambda}{r+1} = \frac{x(1+z)}{det(T)},$$

$$\frac{(1-\lambda)r}{r+1} = \frac{xy}{det(T)}.$$

Promatrajući posljednje tri jednakosti, dijeljenjem treće s drugom slijedi:

$$r = \frac{xy}{x(1+z)} = \frac{y}{1+z}.$$

Analogno,

$$s = \frac{z}{1+x},$$

$$t = \frac{x}{1+y}.$$

Rješavanjem po x, y, z dobivamo:

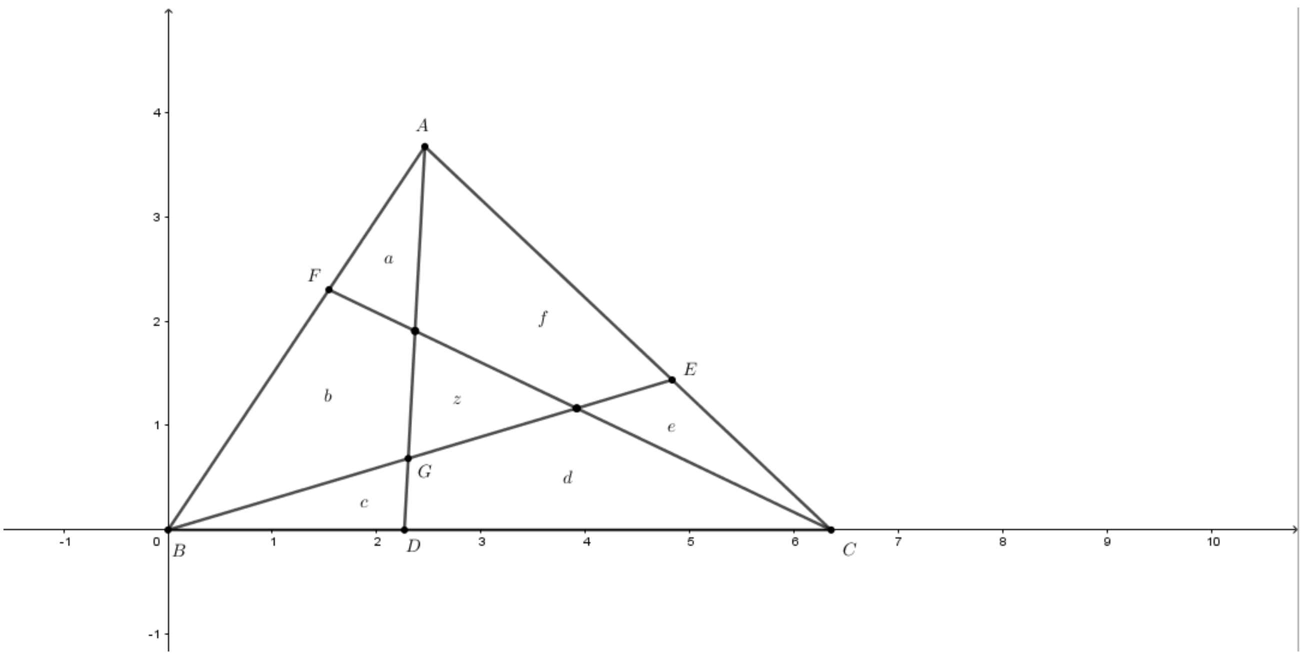
$$x = \frac{t(rs+r+1)}{1-rst} \quad i \quad x+1 = \frac{tr+t+1}{1-rst},$$

$$y = \frac{r(st+s+1)}{1-rst} \quad i \quad y+1 = \frac{rs+r+1}{1-rst},$$
$$z = \frac{s(tr+t+1)}{1-rst} \quad i \quad z+1 = \frac{st+s+1}{1-rst}.$$

Konačno, nakon uvrštavanja prethodno dobivenih jednakosti u jednadžbu (1.8) dobivamo da je to ekvivalentno s $\frac{P(A'B'C')}{P(ABC)} = \frac{(rst-1)^2}{(rs+r+1)(st+s+1)(tr+t+1)}$.

□

1.5 Dokaz koordinatnom metodom



Slika 1.6.

Označimo s a, b, c, d, e, f, z površine trokuta i četverokuta dobivenih spajanjem i međusobnim presijecanjem dužina $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ kao na slici 1.6.
Trokut ABC smjestimo u pravokutni koordinatni sustav tako da se točka B nalazi u ishodištu, a C na osi x. Jedinica duljine može se odabrati po volji. Možemo pretpostaviti da površina trokuta ABC iznosi 1. Koordinate točaka B, C i A sada su, redom, $(0,0)$, $(u,0)$ i (v,w).

Odredit ćemo $\frac{|AD|}{|GD|}$ za točku G.
Kako bismo odredili koordinate točaka D i E koristimo poznatu činjenicu:

Tvrdnja 1. *Ako točka (x, y) dijeli dužinu omeđenu točkama (x_1, y_1), (x_2, y_2) u omjeru $p : q$ tada je $x = \frac{qx_1 + px_2}{p+q}$ i $y = \frac{qy_1 + py_2}{p+q}$.*

Tada točke D i E imaju koordinate :

$$D = \left(\frac{ru}{1+r}, 0\right), \quad E = \left(\frac{u+sv}{1+s}, \frac{sw}{1+s}\right).$$

Ako označimo $\frac{AG}{GD} = \lambda$ *i* $\frac{GE}{BG} = \mu$, koordinate točke G možemo dobiti primjenjujući Tvrdnju 1 na točke A, D i E, B te izjednačavanjem dobivenih koordinata.
Tada imamo:

$$\frac{v + \lambda\frac{ru}{1+r}}{1+\lambda} = \frac{u+sv}{(1+s)(1+\mu)}, \quad \frac{w}{1+\lambda} = \frac{sw}{(1+s)(1+\mu)}.$$

Kraćim računom slijedi

$$\lambda = \frac{1+r}{rs}.$$

Nadalje, omjer površina trokuta BGD i ABD jednak je omjeru duljina dužina $|GD|$ i $|AD|$.
Tada imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{a+b+c} &= \frac{|GD|}{|AD|} \\
&= \frac{|GD|}{|AG| + |GD|} \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \\
&= \frac{rs}{rs+s+1}.
\end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$c = \frac{rs(a+b+c)}{rs+s+1}.$$

Slično, omjer površina trokuta ABD i ABC jednak je omjeru duljina dužina $|BD|$ i $|BC|$.

Budući da je ABC trokut površine 1, slijedi:

$$\frac{a+b+c}{1} = \frac{|BD|}{|BC|}.$$

Stoga je

$$a+b+c = \frac{r}{1+r}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}
c &= \frac{r^2 s}{(1+r)(rs+r+1)} \\
&= \frac{r^2 s + r^2 + r - r^2 - r}{(1+r)(rs+r+1)} \\
&= \frac{r(rs+r+1) - r(r+1)}{(1+r)(rs+r+1)} \\
&= \frac{r}{1+r} - \frac{r}{rs+r+1}.
\end{aligned}$$

Analogno za a i e dobivamo:

$$a = \frac{s}{1+s} - \frac{s}{st+s+1}, \quad e = \frac{t}{1+t} - \frac{t}{tr+t+1}.$$

Ako jednadžbi $a+b+c = \dfrac{r}{1+r}$ dodamo $c+d+e$ i $e+f+a$ tada dobivamo:

$$2(a+c+e) + (b+d+f) = \frac{r}{1+r} + \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}.$$

Nadalje, ako od prethodno dobivene jednadžbe oduzmemo $c+a+e$ imamo:

$$(a+c+e) + (b+d+f) = \frac{r}{rs+r+1} + \frac{s}{st+s+1} + \frac{t}{tr+t+1}.$$

Kako je $P(ABC) = 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
z &= 1 - (a+c+e) - (b+d+f) \\
&= 1 - \frac{r}{rs+r+1} - \frac{r}{st+s+1} - \frac{t}{tr+t+1} \\
&= \frac{(rst-1)^2}{(rs+s+1)(st+t+1)(tr+r+1)}.
\end{aligned}$$

Ovo je ekivalentno početnoj tvrdnji.
Promatrajući sliku 1.6. vidimo da ovaj dokaz ne obuhvaća sve slučajeve. Ako je točka

D jako blizu točki C onda će se G nalaziti unutar trokuta ACF i gornji argument ne možemo primijeniti na ovu sliku. Međutim, ako je točka G unutar trokuta ACF možemo promatrati zrcalnu sliku $A'B'C'$ od ABC. Možemo formulu (1.5), pogodno modificiranu, primijeniti na $A'B'C'$. Koristeći smjer obrnut od smjera kazaljke na satu pišemo stranice $A'C'$, $C'B'$, $B'A'$ koje su podijeljene u sljedećim omjerima $\frac{1}{s} : 1$, $\frac{1}{r} : 1$, $\frac{1}{t} : 1$. Sada mijenjamo r, s, t u formuli (1.5) s $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{t}$ kako bi vidjeli da će formula (1.5) ostati nepromijenjena s ovom transformacijom. Ovime je Routhov teorem dokazan za sve realne brojeve r, s, t takve da su svi navedeni izrazi definirani, to jest $r, s, t \neq 0$ i $rs + r + 1, st + s + 1, tr + t + 1 \neq 0$.

$\square$

Poglavlje 2

Poopćenje Routhovog teorema u ravnini

Već na početku prvog poglavlja napomenuli smo da je Routh u svojoj knjizi [1] zapravo naveo dvije formule kojima je izražen omjer površine po volji zadanog trokuta ABC i površina nekih trokuta, dobivenih na određeni način počevši od točaka koje dijele stranice trokuta ABC u zadanim djelišnim omjerima. Druga od tih formula ostala je u literaturi zabilježena kao Routhov teorem. U ovom poglavlju izložit ćemo rezultat iz članka [5], kojim su objedinjene i poopćene obje spomenute formule, kao posebni slučajevi tzv. generaliziranog Routhovog trokuta. Polazna je ideja da se umjesto tri zadana djelišna omjera promatra šest omjera, po dva za svaku stranicu trokuta ABC i da se onda kroz svaki vrh postave spojnice s obje točke na suprotnoj stranici, zadane odgovarajućim djelišnim omjerima. Sjecišta triju parova tih spojnica, izabranih po određenom pravilu, vrhovi su generaliziranog Routhovog trokuta. Izračunava se omjer površina tog trokuta i početnog trokuta ABC.

Neka je ABC trokut određen s tri nekolinearne točke A, B, C u euklidskoj ravnini. Dužine koje spajaju vrh trokuta s točkom koja se nalazi na nasuprotnoj dužini zovemo cevijane.
Dana je točka D na dužini $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ je cevijana jer prolazi kroz vrh A. Ako je $D \neq C$, onda je $\overline{AD}$ jedinstveno određena s $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tako da $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{DC}$.
Obrnuto, za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ jednakost $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{DC}$ jedinstveno određuje točku $D \neq C$ na pravcu BC. Ovdje ćemo za takvu točku D pisati $D = A_x$. U skladu s prethodno definiranom oznakom pisat ćemo $B = A_0$ te $C = A_\infty$.
Za dužinu koja prolazi kroz A i paralelna je s BC, također ćemo uzeti da je cevijana jer prolazi kroz A. Označit ćemo ju s AA_{-1}, shvaćajući A_{-1} kao beskonačno daleku točku pravca BC.

Sada smo uspostavili bijekciju između točaka na pravcu BC i skupa $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ta bijekcija povezuje pozitivne brojeve s točkama između B i C, povezuje brojeve iz $\langle -1, 0\rangle$ s točkama između beskonačno daleke točke i B te povezuje brojeve manje od -1 s točkama između beskonačno daleke točke i C.
Koristit ćemo analognu notaciju za cevijane kroz B i C. Označit ćemo s B_y jedinstvenu točku na CA tako da $\overrightarrow{CB_y} = y\overrightarrow{B_yA}$ i s C_z jedinstvenu točku na AB tako da je $\overrightarrow{AC_z} = z\overrightarrow{C_zB}$. Također $C = B_0$, $A = B_\infty$, $A = C_0$ i $B = C_\infty$.

Koristeći prethodno uvedene oznake, Routhovu relaciju (1.1) napisat ćemo u sljedećem obliku, pri čemu omjer površina trokuta promatramo kao funkciju tri varijable x, y, z.

$$\frac{P(A_xB_yC_z)}{P(ABC)} = \frac{xyz+1}{(1+x)(1+y)(1+z)}. \tag{2.1}$$

Prirodna domena ove funkcije je $(\mathbb{R} \setminus \{-1\})^3$.
U ovom slučaju točke A_x, B_y, C_z s $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ su točke euklidske ravnine (nisu beskonačno daleke).
U (2.1) i svakoj sljedećoj formuli koja uključuje površine uzet ćemo u obzir predznak površine trokuta. Pozitivna površina odgovara pozitivno orijentiranom trokutu, slova idu abecedno u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Negativna površina odgovara trokutu s obrnutom orijentacijom.

Neka se cevijane $\overline{AA_x}$ i $\overline{BB_y}$ sijeku u jednoj točki koju ćemo označiti s P. Slično s Q ćemo označiti točku koja je sjecište dužina $\overline{BB_y}$ i $\overline{CC_z}$, te s R točku koja je sjecište dužina $\overline{CC_z}$ i $\overline{AA_x}$.
Na isti način kao gore, Routhovu relaciju (1.2) sada pišemo u obliku:

$$\frac{P(PQR)}{P(ABC)} = \frac{(xyz-1)^2}{(1+x+xy)(1+y+yz)(1+z+zx)}. \tag{2.2}$$

Imamo funkciju varijabli x, y, z, čija je prirodna domena $\mathbb{R}^3 \setminus S$ gdje je S skup svih uređenih trojki $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ takvih da je $(1+x+xy)(1+y+yz)(1+z+zx) \neq 0$.
Primijetimo također da se dužine $\overline{AA_0}$ i $\overline{BB_\infty}$ podudaraju. Trokut PQR zvat ćemo Routhov trokut trokuta ABC.

Cilj nam je sada objediniti pristup koji dovodi do relacija (2.1) i (2.2) tako da izvedemo općenitiju relaciju, izraženu pomoću funkcije šest varijabli. Za u, v, w, x, y, $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uzimamo u obzir sljedećih šest dužina, po dvije iz svakog vrha: $\overline{AA_u}$, $\overline{AA_x}$, $\overline{BB_v}$, $\overline{BB_y}$, $\overline{CC_w}$, $\overline{CC_z}$. Pretpostavimo da se svaki od parova dužina $(\overline{AA_x}, \overline{BB_v})$, $(\overline{BB_y}, \overline{CC_w})$, $(\overline{CC_z}, \overline{AA_u})$ sijeku točno u jednoj točki.

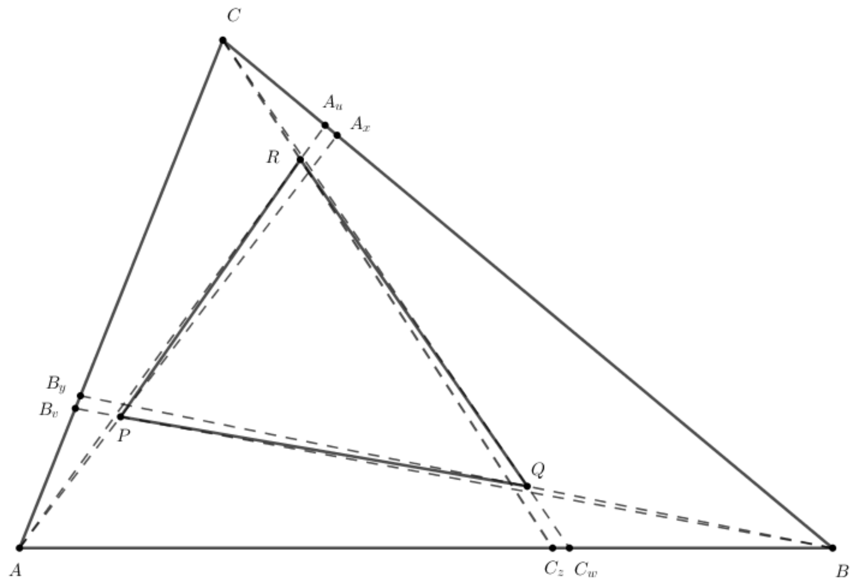
Definiramo poopćeni Routhov trokut PQR danog trokuta ABC tako da stavimo:

$$\{P\} = AA_x \cap BB_v, \{Q\} = BB_y \cap CC_w, \{R\} = CC_z \cap AA_u. \tag{2.3}$$

Primijetimo da diskusija za (2.2) povlači da su točke P, Q, R u (2.3) dobro definirane ako i samo ako $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zadovoljavaju

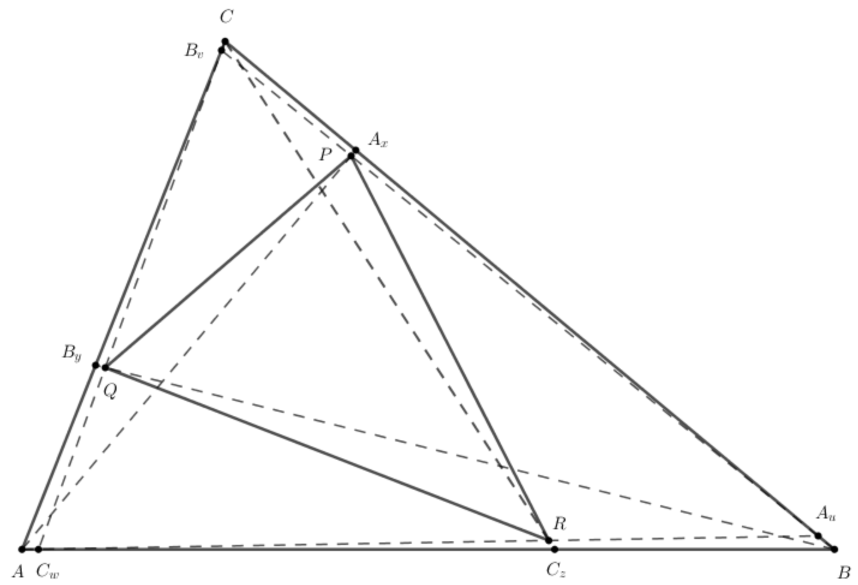
$$(1 + x + xv)(1 + y + yw)(1 + z + zu) \neq 0. \tag{2.4}$$

Izborom $u = x$, $v = y$, $w = z$ trokut PQR definiran u (2.3) postaje Routhov trokut.



Slika 2.1.

S druge strane izborom $u = v = w = 0$ imamo $AA_0 = AB$, $BB_0 = BC$, $CC_0 = CA$ i (2.3) prelazi u $P = A_x$, $Q = B_y$, $Q = C_z$. U ovom slučaju trokut PQR je Cevin trokut $A_xB_yC_z$.



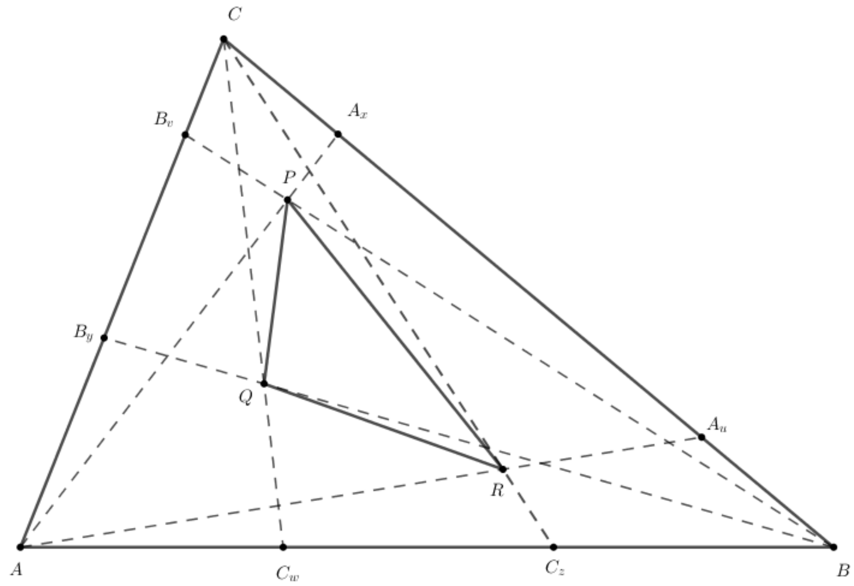
Slika 2.2.

Teorem 2.1. *Neka su točke P, Q, R definirane u (2.3). Omjer između površine trokuta PQR i površine trokuta ABC dan je formulom*

$$\frac{P(PQR)}{P(ABC)} = \frac{1 - xyw - xvz - uyz + xyz + xyzuvw}{(1 + x + xv)(1 + y + yw)(1 + z + zu)}. \tag{2.5}$$

Prirodna domena od (2.5) je skup svih uređenih šestorki $(x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R}^6$ koje zadovoljavaju (2.4) odnosno $(1 + x + xv)(1 + y + yw)(1 + z + zu) \neq 0$.
Za $u = x$, $v = y$, $w = z$ (2.5) se svodi na (2.2) i za $u = v = w = 0$ (2.5) se svodi na (2.1).
Također ako $x, y, z \to \infty$ formula (2.5) postaje (2.1) ako x supstituiramo s u, y s v i z s w.

Dokaz. Jednakost (2.5) izvest ćemo primjenom pravokutnog koordinatnog sustava. Pritom radi pojednostavljivanja omjera možemo za zadani trokut ABC izabrati $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$.
Sljedeće, tražimo koordinate točaka P, Q, R za ovako odabrane vrhove A, B, C.
Naime, svaka dva trokuta su afino ekvivalentna, što znači da postoji afino preslikavanje ravnine koje jedan trokut preslika u drugi. Omjer površina se primjenom afinog preslikavanja ne mijenja (omjer površina je afina invarijanta), pa ako su P_1 i P_2 površine nekih dvaju trokuta, a P_1' i P_2' površine njihovih slika u afinom preslika-



Slika 2.3.

vanju, onda je $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{P_1'}{P_2'}$.
Računom dobivamo:

$$P = \left(\frac{1}{1+x+xv}, \frac{x}{1+x+xv} \right),$$

$$Q = \left(\frac{yw}{1+y+yw}, \frac{1}{1+y+yw} \right),$$

$$R = \left(\frac{z}{1+z+zu}, \frac{zu}{1+z+zu} \right).$$

Neka M predstavlja lijevu stranu jednadžbe (2.4), odnosno

$$M = (1+x+xv)(1+y+yw)(1+z+zu).$$

Ako pretpostavimo da se svaki par dužina $(\overline{AA_x}, \overline{BB_v})$, $(\overline{BB_y}, \overline{CC_w})$, $(\overline{CC_z}, \overline{AA_u})$ siječe točno u jednoj točki, imamo $M \neq 0$.

Površina trokuta ABC je $\frac{1}{2}$, omjer u teoremu je dan pomoću determinante

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{1}{1+x+xv} & \frac{yw}{1+y+yw} & \frac{z}{1+z+zu} \\ \frac{x}{1+x+xv} & \frac{1}{1+y+yw} & \frac{zu}{1+z+zu} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{M}\begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ x & 1 & zu \\ 1+x+xv & 1+y+yw & 1+z+zu \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{M}\begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ x & 1 & zu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{M}\begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ x & 1 & zu \\ x & y & z \end{vmatrix} + \frac{1}{M}\begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ x & 1 & zu \\ xv & yw & zu \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{M}(1 + ywzu + zx - z - zu - xyw) \\
&\quad + \frac{1}{M}(z + ywzux + zxy - zx - zuy - zxyw) \\
&\quad + \frac{1}{M}(1 - xyw - xvz - uyz + xyz + uvwxyz) \\
&= \frac{1}{M}(1 - xyw - xvz - uyz + xyz + uvwxyz).
\end{aligned}$$

Time je dokazana relacija (2.5). □

Na kraju, kao posljedicu ovog teorema dobivamo objedinjenje Cevinog i Menelajevog teorema.

Korolar 1. *Točke P, Q, R definirane u (2.3) su kolinearne ako i samo ako*

$$1 - xyw - xvz - uyz + xyz + xyzuvw = 0. \tag{2.6}$$

Dokaz. Za Menelajev teorem treba uzeti $u = v = w = 0$ i tada iz (2.6) dobivamo

$$1 - xyz = 0,$$

dakle

$$xyz = -1.$$

Za Cevin teorem uzme se $x = u$, $y = v$, $z = w$ pa tada (2.6) prelazi u

$$1 - xyz - xyz - xyz + xyz + x^2y^2z^2 = (1 - xyz)^2 = 0,$$

dakle

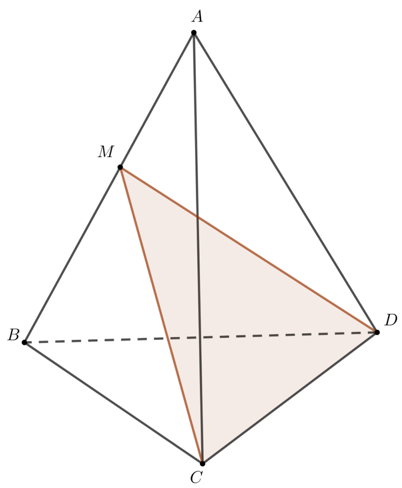
$$xyz = 1.$$

□

Poglavlje 3

Routhov teorem za tetraedar

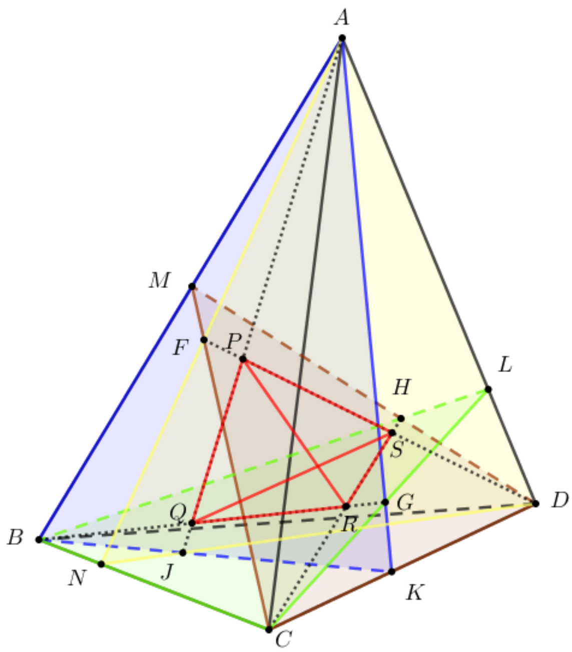
Vidjeli smo nekoliko načina dokazivanja Routhovog teorema, te potom generalizaciju Routhovog teorema u ravnini, a sad ćemo pokazati kako se u trodimenzionalnom euklidskom prostoru izvode relacije koje su posve analogne Routhovim jednadžbama (1.3) i (1.4) u ravnini. Ovdje se odgovarajuće relacije odnose na tetraedar.



Slika 3.1.: Presjek tetraedra $ABCD$ ravninom CDM

Započinjemo s po volji odabranim tetraedrom $ABCD$ volumena 1. Odaberimo točku M na dužini $\overline{AB}$ i presijecimo tetraedar ravninom CDM kako je prikazano na slici 3.1.
Zatim, postavit ćemo tri dodatne ravnine kojima ćemo presjeći tetraedar: ravninu koja sadrži brid AB i točku K na bridu CD, ravninu koja sadrži brid BC i točku L

na bridu DA i ravninu koja sadrži brid AD i točku N na bridu BC.
Točke M, N, K, L leže na bridovima tetraedra $ABCD$. Sve četiri ravnine i njihovi presjeci su prikazani na slici 3.2.



Slika 3.2.: Četiri ravnine i njihovi presjeci

Pisat ćemo V_{ABCD} za volumen tetraedra $ABCD$ i koristit ćemo analognu notaciju za volumene drugih tetraedara.
Dokazat ćemo sljedeći rezultat, koji se očito može nazvati Routhovim teoremom za tetraedar.

Teorem 3.1. *Neka je $ABCD$ po volji odabran tetraedar volumena 1. Izaberimo točku M na bridu AB, točku N na bridu BC, točku K na bridu CD i točku L na bridu DA takve da vrijedi $\frac{|CK|}{|KD|} = x$, $\frac{|DL|}{|LA|} = y$, $\frac{|AM|}{|MB|} = z$ i $\frac{|BN|}{|NC|} = t$.*
Tada

$$V_{KLMN} = \frac{|1 - xyzt|}{(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)}. \tag{3.1}$$

Četiri ravnine određene točkama A, B, K, točkama B, C, L, točkama C, D, M i *točkama D, A, N omeđuju tetraedar $PQRS$ volumena*

$$V_{PQRS} = \frac{|1 - xyzt|^3}{(1 + x + xy + xyz)(1 + y + yz + yzt)(1 + z + zt + ztx)(1 + t + tx + txy)} \tag{3.2}$$

Jasno je da Teorem (3.1) implicira sljedeći Menelajev teorem za tetraedar.

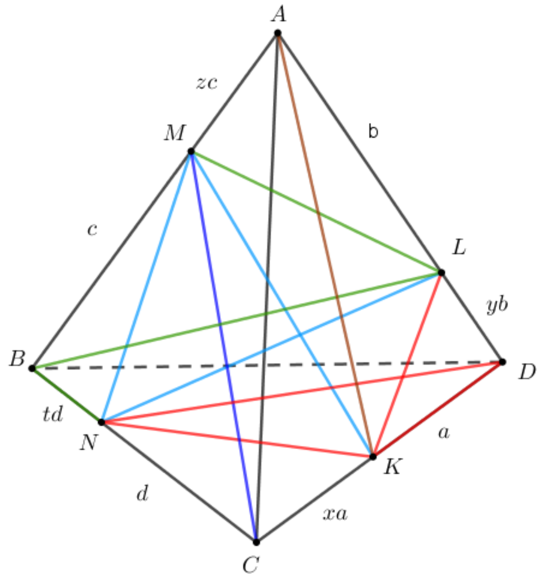
Teorem 3.2. *Točke K, L, M, N u Teoremu (3.1) su komplanarne ako i samo ako $xyzt = 1$.*

Kao drugu posljedicu Teorema (3.1) dobivamo analogon Cevinog teorema.

Teorem 3.3. *Četiri ravnine određene točkama A, B, K, točkama B, C, L, točkama C, D, M i točkama D, A, N sijeku se u jednoj točki ako i samo ako $xyzt = 1$.*

Dakle, ako su K, L, M, N komplanarne onda je $xyzt = 1$. To je jedini slučaj kada je $V_{KLMN} = 0$.
Promatranjem slike 3.2., može se primijetiti da vrhovi P i R tetraedra $PQRS$ leže na pravcu KM dok vrhovi S i Q leže na pravcu LN. Kako to povlači da je $V_{KLMN} = 0$ ako i samo ako je $V_{PQRS} = 0$, također zaključujemo da $V_{PQRS} = 0$ samo kada je $xyzt = 1$.
Primijetimo, kada fiksiramo npr. y, z, t i neka se x povećava počevši od 0, tada se i produkt također povećava počevši od 0 i $xyzt = 1$ se postiže kada se točka K pomakne od C do D.
Sve dok se to ne dogodi, točke R i C pripadaju istom poluprostoru određenom ravninom koja prolazi kroz točke P, Q, S. Stoga slika 3.2. odgovara slučaju kada je $xyzt < 1$.
Nadalje ćemo pretpostaviti da u Teoremu (3.1) $xyzt < 1$ i izvest ćemo formule za volumene tetraedara $KLMN$ i $PQRS$.
Kada riješimo taj slučaj, proširit ćemo formule na slučaj $xyzt > 1$ mijenjanjem orijentacije i primjenom pogodne supstitucije za parametre x, y, z i t.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati formulu (3.1)
Pretpostavimo prvo $xyzt < 1$ i pogledajmo sliku 3.3.



Slika 3.3.: Oznake u dokazu slučaja $xyzt < 1$

Lema 1. *U oznakama kao sa slike 3.1. imamo:*

$$V_{AMCD} = V_{ABCD} \cdot \frac{|AM|}{|AB|}.$$

Također, iskoristit ćemo sljedeću posljedicu Leme 1 u više navrata.

Lema 2. *U oznakama kao sa slike 3.4. imamo:*

$$V_{ACKM} = V_{ABCD} \cdot \frac{|AM|}{|AB|} \cdot \frac{|CK|}{|CD|}$$

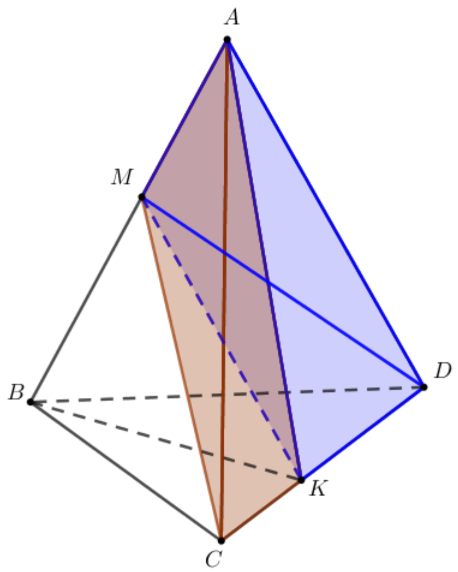
i

$$V_{AMKD} = V_{ABCD} \cdot \frac{|AM|}{|AB|} \cdot \frac{|DK|}{|DC|}.$$

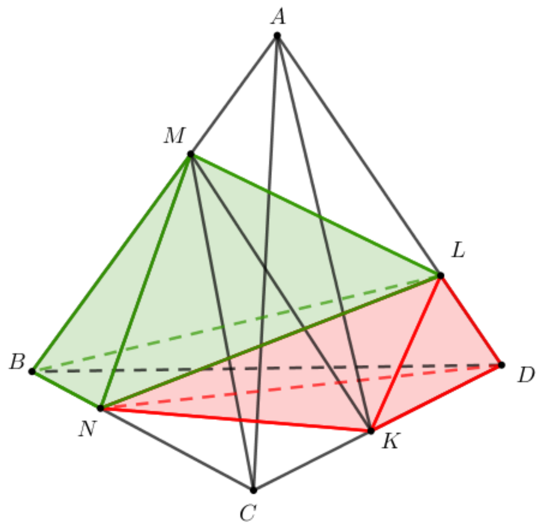
Uz pomoć slike 3.3. uočavamo da se tetraedar $ABCD$ sastoji od 7 tetraedara: $KLMN$, $AKLM$, $BLMN$, $CKMN$, $DKLN$, $ACKM$ i $BDLN$ koji nemaju zajedničkih unutarnjih točaka, pa stoga vrijedi:

$$V_{ABCD} = V_{KLMN} + V_{AKLM} + V_{BLMN} + V_{CKMN} + V_{DKLN} + V_{ACKM} + V_{BDLN}. \quad (3.3)$$

Kako bi nam međusobni položaj navedenih tetraedara bio pregledniji, priložene su još i slike 3.4., 3.5. i 3.6.



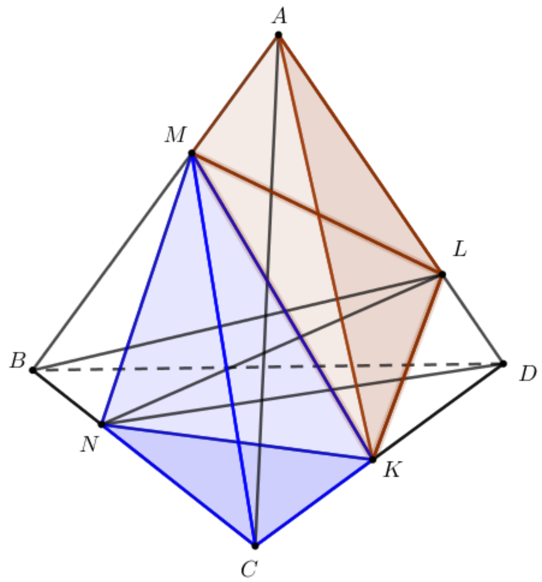
Slika 3.4.: Tetraedri $ACKM$ i $ADKM$



Slika 3.5.: Tetraedri $BLMN$ i $DKLN$

Lema 2 daje:

$$V_{ACKM} = V_{ABCD} \cdot \frac{|AM|}{|AB|} \cdot \frac{|CK|}{|CD|} = \frac{z}{1+z} \cdot \frac{x}{1+x},$$



Slika 3.6.: Tetraedri $AKLM$ i $CKMN$

i

$$V_{BDLN} = V_{ABCD} \cdot \frac{|BN|}{|BC|} \cdot \frac{|DL|}{|DA|} = \frac{t}{1+t} \cdot \frac{y}{1+y}.$$

Primjenjujući Lemu 2 u drugom koraku svakog od sljedeća četiri računa imamo:

$$V_{AKLM} = V_{AKDM} \cdot \frac{|AL|}{|AD|} = V_{ABCD} \cdot \frac{|AM|}{|AB|} \cdot \frac{|DK|}{|DC|} \cdot \frac{|AL|}{|AD|} = \frac{z}{1+z} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+y},$$

$$V_{BLMN} = V_{BALN} \cdot \frac{|BM|}{|BA|} = V_{ABCD} \cdot \frac{|AL|}{|AD|} \cdot \frac{|BN|}{|BC|} \cdot \frac{|BM|}{|BA|} = \frac{1}{1+y} \cdot \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{1+z},$$

$$V_{CKMN} = V_{CKMB} \cdot \frac{|CN|}{|CB|} = V_{ABCD} \cdot \frac{|BM|}{|BA|} \cdot \frac{|CK|}{|CD|} \cdot \frac{|CN|}{|CB|} = \frac{1}{1+z} \cdot \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1+t},$$

$$V_{DKLN} = V_{DCLN} \cdot \frac{|DK|}{|DC|} = V_{ABCD} \cdot \frac{|CN|}{|CB|} \cdot \frac{|DL|}{|DA|} \cdot \frac{|DK|}{|DC|} = \frac{1}{1+t} \cdot \frac{y}{1+y} \cdot \frac{1}{1+x}.$$

Stoga jednadžba (3.3) daje:

$$\begin{aligned} V_{KLMN} &= 1 - \frac{x}{(1+x)(1+z)(1+t)} - \frac{y}{(1+x)(1+y)(1+t)} - \frac{z}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ &- \frac{t}{(1+y)(1+z)(1+t)} - \frac{xz}{(1+x)(1+z)} - \frac{yt}{(1+y)(1+t)} \\ &= \frac{1-xyzt}{(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada $xyzt > 1$. Kako bi se ovaj slučaj sveo na slučaj $xyzt < 1$ promijenit ćemo oznake vrhova. Neka sada vrh koji je bio označen s A dobije oznaku D i neka se brid DB podudara s bridom AC u prvotnim oznakama s istom orijentacijom. Naime, promatrajući ciklus $DCBA$, uočavamo da točka koja dijeli prvi brid u omjeru koji sada označimo sa z' ujedno je i točka koja dijeli treći brid u prvotnom ciklusu $ABCD$ u omjeru $1 : x$ (recipročna vrijednost nastupa zbog promjene orijentacije brida).
Stoga je $z' = 1 : x$. Analogno $x' = 1 : z$ za treći brid u novom ciklusu, jednak prvom u početnom ciklusu $ABCD$, ali sa suprotnom orijentacijom.
Kako se drugi i četvrti brid u oba ciklusa podudaraju, ali s obrnutom orijentacijom, imamo $y' = 1 : y$ i $t' = 1 : t$.
Stoga za izračunavanje V_{KLMN} u ovom slučaju u prethodno izvedenu formulu umjesto x, y, z i t uvrštavamo redom $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{t}$, pri čemu je $\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{t} < 1$.
Imamo

$$\frac{1 - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{t}}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = \frac{xyzt - 1}{(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)}.$$

□

Dokaz. Slijedi dokaz formule (3.2)
Nadalje, računamo volumen tetraedra $PQRS$, koji smo dobili na već prije opisan način.
Ponovno pretpostavimo $xyzt < 1$ i koristimo oznake sa slike 3.7. Uočimo sedam tetraedara $APKD$, $BQLA$, $CRMB$, $DSNC$, $AMCK$, $BNDL$ i $PQRS$.
Slično kao u dokazu (3.1), ovdje vrijedi

$$V_{ABCD} = V_{APKD} + V_{BQLA} + V_{CRMB} + V_{DSNC} + V_{AMCK} + V_{BNDL} + V_{PQRS}, \quad (3.4)$$

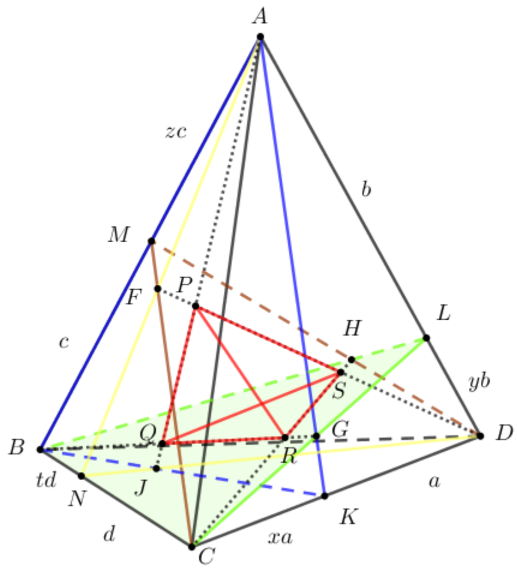
što je moguće vidjeti na slikama 3.8. i 3.9.
Koristeći Lemu 2 slijedi,

$$V_{AMCK} = V_{ABCD} \cdot \frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|CK|}{|CD|} = \frac{z}{1+z} \cdot \frac{x}{1+x}$$

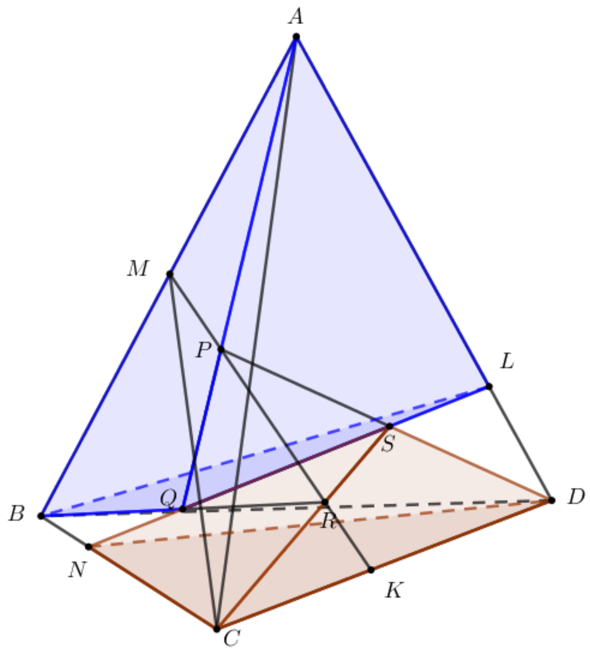
i

$$V_{BNDL} = V_{ABCD} \cdot \frac{|DL|}{|DA|} \cdot \frac{|BN|}{|BC|} = \frac{y}{1+y} \cdot \frac{t}{1+t}.$$

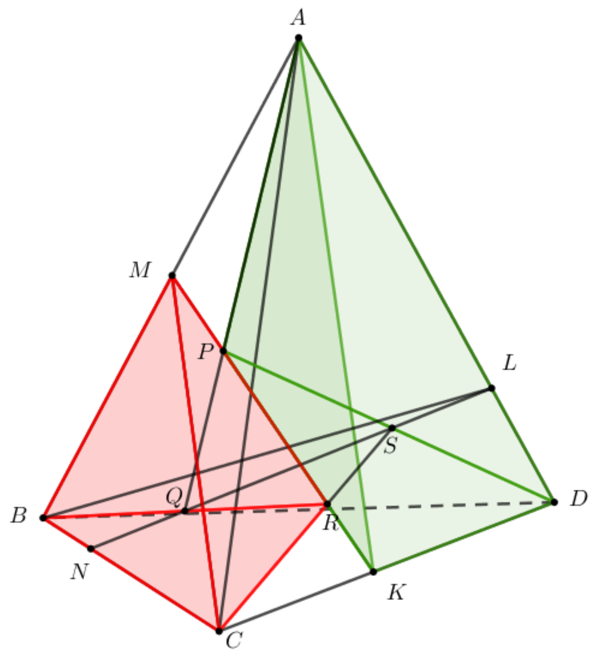
Sada možemo izračunati volumene četiri ostala tetraedra s desne strane jednadžbe (3.4).



Slika 3.7.: Koristimo oznake kao na slici



Slika 3.8.: Tetraedri $BQLA$ i $DSNC$



Slika 3.9.: Tetraedri $APKD$ i $CRMB$

Lema 3. *Razmotrimo trokut ABC sa slike 3.10. Ako* $\dfrac{|AM|}{|MB|} = v$ *i* $\dfrac{|BK|}{|KC|} = u$*, onda* $\dfrac{|AP|}{|PK|} = v(1+u)$.

Dokaz. Vrijedi: $KT \| CM$, $|MB| = f$, $|MT| + |TB| = f$.
Iz sličnosti trokuta BKT i BCM slijedi:

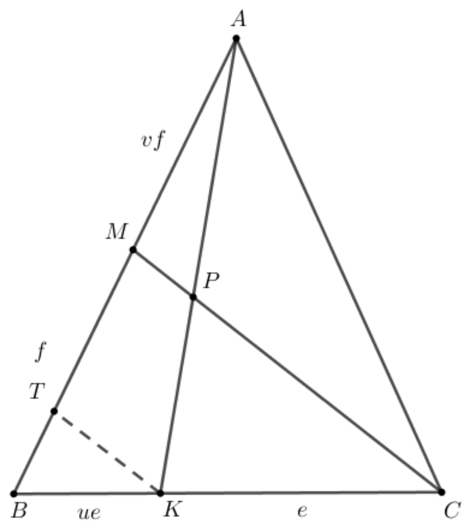
$$\frac{|BT|}{|BM|} = \frac{|BK|}{|BC|} = \frac{ue}{ue+e} = \frac{u}{u+1},$$

odnosno

$$|BT| = \frac{u}{u+1} \cdot |BM| = \frac{u}{u+1} \cdot f.$$

Odredimo $|MT|$:

$$|MT| = f - |BT| = f - \frac{uf}{u+1} = \frac{f}{u+1}.$$



Slika 3.10.: Omjer $\dfrac{|AP|}{|PK|}$

Iz sličnosti trokuta AMP i ATK slijedi:

$$\frac{|AP|}{|PK|} = \frac{|AM|}{|AT|} = \frac{vf}{vf + \dfrac{f}{1+u}} = \frac{v}{v + \dfrac{1}{1+u}} = \frac{v(1+u)}{uv+v+1}.$$

S druge strane

$$\frac{|AP|}{|AK|} = \frac{|AP|}{|AK| - |AP|},$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\frac{|PK|}{|AP|} &= \frac{|AK|}{|AP|} - 1 \\
&= \frac{uv+v+1}{v(1+u) - 1} \\
&= \frac{uv+v+1-v-uv}{v(1+u)} \\
&= \frac{1}{v(1+u)}.
\end{aligned}$$

Stoga,

$$\frac{|AP|}{|PK|} = v(1+u).$$

$\square$

Primjenjujući Lemu 1 nekoliko puta dobivamo:

$$\begin{aligned}
V_{APKD} &= V_{APCD} \cdot \frac{|DK|}{|DC|} \\
&= V_{AFCD} \cdot \frac{|DP|}{|DF|} \cdot \frac{|DK|}{|DC|} \\
&= V_{AMCD} \cdot \frac{|CF|}{|CM|} \cdot \frac{|DP|}{|DF|} \cdot \frac{|DK|}{|DC|} \\
&= V_{ABCD} \cdot \frac{|AM|}{|AB|} \cdot \frac{|CF|}{|CM|} \cdot \frac{|DP|}{|DF|} \cdot \frac{|DK|}{|DC|}.
\end{aligned}$$

Neposredno slijedi da su omjeri:

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{z}{1+z} \quad \text{i} \quad \frac{|DK|}{|DC|} = \frac{1}{1+x}.$$

Primjenjujući Lemu 3 na trokut ABC dobivamo:

$$\frac{|CF|}{|FM|} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1+z}{zt}.$$

Koristeći to izvodimo:

$$\frac{|CF|}{|FM|} = \frac{|CF|}{|CF|+|FM|} = \frac{\frac{|CF|}{|FM|}}{\frac{|CF|}{|FM|}+1} = \frac{\frac{1+z}{zt}}{\frac{1+z}{zt}+1} = \frac{1+z}{1+z+zt}$$

i

$$\frac{|DP|}{|DF|} = \frac{|DP|}{|DP|+|PF|} = \frac{\frac{|DP|}{|PF|}}{\frac{|DP|}{|PF|}+1} = \frac{\frac{1+z+zt}{ztx}}{\frac{1+z+zt}{ztx}+1} = \frac{1+z+zt}{1+z+zt+ztx}.$$

Stoga,

$$V_{APKD} = \frac{z}{1+z} \cdot \frac{1+z}{1+t+zt} \cdot \frac{1+z+zt}{1+z+zt+ztx} = \frac{z}{(1+x)(1+z+zt+ztx)}.$$

Slično,

$$\begin{aligned} V_{BQLA} &= V_{BQDA} \cdot \frac{|AL|}{|AD|} \\ &= V_{BJDA} \cdot \frac{|AQ|}{|AJ|} \cdot \frac{|AL|}{|AD|} \\ &= V_{BNDA} \cdot \frac{|DJ|}{|DN|} \cdot \frac{|AQ|}{|AJ|} \cdot \frac{|AL|}{|AD|} \\ &= V_{ABCD} \cdot \frac{|BN|}{|BC|} \cdot \frac{|DJ|}{|DN|} \cdot \frac{|AQ|}{|AJ|} \cdot \frac{|AL|}{|AD|}, \end{aligned}$$

i

$$\frac{|BN|}{|BC|} = \frac{t}{1+t} \quad , \quad \frac{|AL|}{|AD|} = \frac{1}{1+y}.$$

Primjenjujući Lemu 3 na trokut BCD dobivamo:

$$\frac{|DJ|}{|JN|} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{t}\right) = \frac{1+t}{xt},$$

stoga

$$\frac{|DJ|}{|DN|} = \frac{1+t}{1+t+xt}.$$

Primjenjujući Lemu 3 na trokut AND dobivamo:

$$\frac{|AQ|}{|QJ|} = \frac{1}{y}\left(1+\frac{1+t}{xt}\right) = \frac{1+t+xt}{xyt},$$

i stoga

$$\frac{|AQ|}{|AJ|} = \frac{1+t+xt}{1+t+xt+xyt}.$$

Stoga je,

$$V_{BQLA} = \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1+t}{1+t+xt} \cdot \frac{1+t+xt}{1+t+xt+xyt} = \frac{t}{(1+y)(1+t+tx+txy)}.$$

Nastavljajući kao prije imamo:

$$\begin{aligned} V_{CRMB} &= V_{CRAB} \cdot \frac{|BM|}{|BA|} \\ &= V_{CGAB} \cdot \frac{|BR|}{|BG|} \cdot \frac{|BM|}{|BA|} \\ &= V_{CLAB} \cdot \frac{|CG|}{|CL|} \cdot \frac{|BR|}{|BG|} \cdot \frac{|BM|}{|BA|} \\ &= V_{ABCD} \cdot \frac{|AL|}{|AD|} \cdot \frac{|CG|}{|CL|} \cdot \frac{|BR|}{|BG|} \cdot \frac{|BM|}{|BA|}, \end{aligned}$$

gdje je
$$\frac{|AL|}{|AD|} = \frac{1}{1+y} \quad , \quad \frac{|BM|}{|BA|} = \frac{1}{1+z}.$$
Primjenjujući Lemu 3 na trokut ACD dobivamo:
$$\frac{|CG|}{|GL|} = x(1+y),$$
to daje
$$\frac{|CG|}{|CL|} = \frac{x(1+y)}{1+x+xy}.$$
Također, primjenjujući Lemu 3 na trokut ABD dobivamo:
$$\frac{|BH|}{|HL|} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{y}\right) = \frac{1+y}{yz}.$$
Sada, primjenom na trokut ABD, Lema 3 daje:
$$\frac{|BR|}{|RG|} = \frac{1+y}{yz}\left(1+\frac{1}{x(1+y)}\right) = \frac{1+x+xy}{xyz},$$
i izvodimo
$$\frac{|BR|}{|BG|} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy+xyz}.$$
Stoga,
$$V_{CRMB} = \frac{1}{1+y} \cdot \frac{x(1+y)}{1+x+xy} \cdot \frac{1+x+xy}{1+t+xy+xyz} = \frac{x}{(1+z)(1+x+xy+xyz)}.$$
Konačno,
$$\begin{aligned} V_{DSNC} &= V_{DSBC} \cdot \frac{|NC|}{|BC|} \\ &= V_{DHBC} \cdot \frac{|CS|}{|CH|} \cdot \frac{|NC|}{|BC|} \\ &= V_{DLBC} \cdot \frac{|BH|}{|BL|} \cdot \frac{|CS|}{|CH|} \cdot \frac{|NC|}{|BC|} \\ &= V_{ABCD} \cdot \frac{|DL|}{|DA|} \cdot \frac{|BH|}{|BL|} \cdot \frac{|CS|}{|CH|} \cdot \frac{|NC|}{|BC|}, \end{aligned}$$
i
$$\frac{|DL|}{|DA|} = \frac{y}{1+y} \quad , \quad \frac{|NC|}{|BC|} = \frac{1}{1+t}.$$

Primjenjujući Lemu 3 na trokut ABD dobivamo:

$$\frac{|BH|}{|HL|} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{1+y}{yz},$$

a to daje

$$\frac{|BH|}{|BL|} = \frac{1+y}{1+y+yz}.$$

Primjenjujući Lemu 3 na trokut BCL dobivamo:

$$\frac{|CS|}{|SH|} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{1+y}{yz}\right) = \frac{1+y+yz}{yzt},$$

i stoga

$$\frac{|CS|}{|CH|} = \frac{1+y+yz}{1+y+yz+yzt}.$$

Time je

$$V_{DSNC} = \frac{y}{1+y} \cdot \frac{1+y}{1+y+yz} \cdot \frac{1+y+yz}{1+y+yz+yzt} = \frac{y}{(1+t)(1+y+yz+yzt)}.$$

Sada jednadžba (3.4) izgleda ovako:

$$\begin{aligned} V_{PQRS} &= 1 - \frac{xz}{(1+x)(1+z)} - \frac{yt}{(1+y)(1+t)} - \frac{x}{(1+z)(1+x+xy+xyz)} \\ &\quad - \frac{y}{(1+t)(1+y+yz+yzt)} - \frac{z}{(1+x)(1+z+zt+ztx)} - \frac{t}{(1+y)(1+t+tx+txy)}. \end{aligned}$$

Pojednostavljivanjem desne strane dobiva se

$$V_{PQRS} = \frac{(1-xyzt)^3}{(1+x+xy+xyz)(1+y+yz+yzt)(1+z+zt+ztx)(1+t+tx+txy)}.$$

Ako je $xyzt > 1$ možemo primijeniti istu supstituciju za parametre x, y, z, t kao u dokazu formule (3.1) i time konačno imamo:

$$V_{PQRS} = \frac{(xyzt-1)^3}{(1+x+xy+xyz)(1+y+yz+yzt)(1+z+zt+ztx)(1+t+tx+txy)}.$$

□

Bibliografija

[1] Routh, E. J., *A Treatise on Analytical Statics with Numerous Examples*, Vol. 1, drugo izdanje. Cambridge University Press, London, 1909., reprint, dostupno na http://www.archive.org/details/texts.

[2] Niven, I., *A new proof of Routh's theorem*, Mathematics Magazine 49 (1976), no. 1, pp. 25-27.

[3] Kline, J.S., Velleman, D., *Yet another proof of Routh's theorem*, Crux Mathematicorum 21 (1995), pp. 37-40.

[4] Klamkin, M.S., Liu, A., *Three more proofs of Routh's theorem*, Crux Mathematicorum 7 (1981), pp. 199-203.

[5] Benyi, A., Ćurgus, B., *A generalization of Routh's triangle theorem*, The American Mathematical Monthly 120 (2013), no. 9, pp. 841-846.

[6] Litvinov, S., Marko, F., *Routh's Theorem for Tetrahedra*, Geom. Dedicata 174 (2015), no. 1, pp. 155-167. https://arxiv.org/pdf/1405.4418.pdf (2014)

[7] Coxeter, H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Wiley and Sons, New York - London, (1969).

Sažetak

Središnja tema ovog rada je teorem koji se uobičajeno pripisuje istaknutom engleskom matematičaru E. J. Routhu, jer smatra se da je on prvi eksplicitno iskazao taj rezultat i to kao popratnu bilješku, bez dokaza, u svojoj knjizi iz područja statike. Ako se vrhovi trokuta ABC spoje s odabranim trima točkama na suprotnim stranicama, međusobna sjecišta tih spojnica omeđuju trokut PQR. Routh je dao formulu za omjer površina trokuta PQR i ABC, koja se lako pretvori u funkciju djelišnih omjera r, s i t, određenih točkama odabranima na stranicama.

Mogućnost pristupa pomoću različitih metoda, kao i očigledna srodnost s klasičnim Menelajevim i Cevinim teoremom potaknule su brojne matematičare da pronađu nove dokaze i poopćenja Routhove formule. U radu je prikazan dio tih rezultata, uključujući objedinjenje Menelajevog i Cevinog teorema uvođenjem tzv. poopćenog Routhovog trokuta.

U završnom poglavlju izložen je trodimenzionalni analogon Routhovog teorema, u kojem se za tetraedar dobiva rezultat koji u potpunosti odgovara osnovnoj formuli za trokut.

Summary

The central topic of this thesis is a theorem that is usually attributed to the outstanding English mathematician E. J. Routh, since he was apparently the first one to publish that particular statement. It was included as a helpful note, without a proof, in his book on statics. If the vertices of a triangle ABC are joined to three points chosen on the opposite sides, another triangle PQR is formed by mutual intersection points of these segments. Routh gave a formula for the ratio of the areas of PQR and ABC, which can be easily transformed into a function of the ratios r, s and t, determined by the points chosen on the sides.

The possibility of different approaches by various methods, as well as its obvious connection to the classical theorems of Menelaus and Ceva, prompted numerous mathematicians to find new proofs and generalizations of Routh's formula. Some of these results are presented here, including a unification of Menelaus' and Ceva's theorem by introducing a so-called generalized Routh's triangle.

The final chapter is dedicated to a three-dimensional analogue of Routh's theorem, valid for any tetrahedron and entirely corresponding to the basic formula for a triangle.

Životopis

Moje ime je Tea Mršić. Rođena sam 16.6.1994. godine u Požegi gdje sam do devetnaeste godine živjela s majkom, ocem, sestrom i bratom.

2001. godine upisujem Osnovnu školu Julija Kempfa u Požegi. Po završetku osnovne škole upisala sam Prirodoslovno-matematičku gimanziju gdje sam 2013. godine maturirala. Nakon mature upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, matematika, smjer: nastavnički.

Tijekom osnovne i srednje škole matematika me uvijek više zanimala od ostalih predmeta, pa sam se tako pripremala za natjecanja te sudjelovala na istim.

Studentske dane obogatila sam radeći i skupljajući iskustva na raznim studentskim poslovima. Mijenjajući studentske poslove stekla sam bolje komunikacijske vještine, odgovornost te tako napravila korak više prema svijetu odraslih.