Dva svojstva simetrala kutova trokuta i Steiner-Lehmusov teorem

Prosenečki, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Prosenečki

DVA SVOJSTVA SIMETRALA KUTOVA TROKUTA I STEINER-LEHMUSOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelji rada:
prof.dr.sc. Mario Krnić
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, studeni, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Temeljni pojmovi i činjenice **2**
1.1 Teoremi o kružnici 2
1.2 Simetrala kuta i dužine. Upisana i opisana kružnica 6
1.3 Težište i ortocentar trokuta 10

2 Teorem o simetrali kuta u trokutu **12**
2.1 Teorem o simetrali kuta u trokutu i njegove inačice 12
2.2 Duljina simetrale 22
2.3 Neke nejednakosti sa simetralama 27
2.4 Zadatci 36

3 Simetrala kuta i opisana kružnica **45**
3.1 Simetrala kuta raspolavlja luk 45
3.2 Zadatci 47

4 Steiner - Lehmusov teorem **54**
4.1 Povijesna crtica 54
4.2 Trokut sa sukladnim težišnicama odnosno visinama 56
4.3 Planimetrijski dokazi 58
4.4 Algebarski i trigonometrijski dokazi 63

Bibliografija **68**

Uvod

Svrha ovog diplomskog rada je detaljnije proučavanje simetrala kutova u trokutu kako bismo došli do zanimljivih svojstava, teorema i nejednakosti. Simetrala kuta, kao pravac koji dijeli kut na dva sukladna dijela, ima veliku važnost u geometriji trokuta. U prvom poglavlju ovog rada dane su definicije i osnovna svojstva trokuta koja ćemo koristiti u cijelom radu. Cilj ovog rada je podsjetiti na važna svojstva simetrala kutova u trokutu, a potom i dokazati neka manje poznata svojstva i teoreme. Tako ćemo u drugom poglavlju na nekoliko načina dokazati teorem o simetrali kuta u trokutu i neke njegove zanimljive inačice. Nakon što izvedemo formulu za duljinu simetrale kuta u trokutu, prikazat ćemo neke zanimljive nejednakosti koje vrijede za njih. Također, jedna od zadaća ovog rada je i pokazati primjenu dokazanih teorema i nejednakosti što je napravljeno kroz rješavanje zadataka s matematičkih natjecanja. Na kraju rada, upoznajemo se sa svojstvom jednakokračnog trokuta koje se čini naizgled očitim, no dokaz nije trivijalan te još danas zaokuplja pažnju mnogih matematičara. Da su odsječci simetrala kutova unutar jednakokračnog trokuta sukladni pokazano je još u Euklidovim Elementima. No, obrat tog teorema je bio zanemaren sve do 1840. godine. Tada je nastao teorem poznat pod nazivom Steiner - Lehmusov teorem kojem je posvećeno posljednje poglavlje.

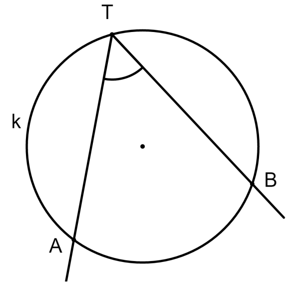
Poglavlje 1

Temeljni pojmovi i činjenice

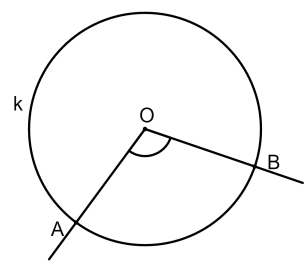
U ovom poglavlju ćemo ponoviti osnovne pojmove i činjenice koje su na izvjestan način povezane s trokutom. Većinu tih tvrdnji nećemo dokazivati, a iste se zajedno s dokazima nalaze u većini udžbenika srednjoškolske matematike.

1.1 Teoremi o kružnici

Definicija 1.1.1. *Konveksni kut kojemu vrh T leži na kružnici k i čiji krakovi sijeku kružnicu k u dvije točke A i B nazivamo obodni kut kružnice k. Kažemo da je $\sphericalangle ATB$ obodni kut nad lukom $\widehat{AB}$.*



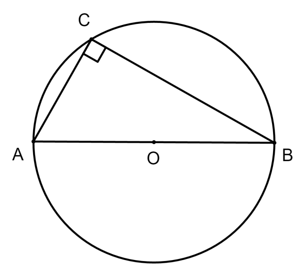
Definicija 1.1.2. *Kut kojemu je vrh središte O kružnice k zovemo središnji kut kružnice k. Krakovi a i b središnjeg kuta $\sphericalangle aOb$ kružnice k sijeku kružnicu k u dvije točke A i B. Kažemo da je $\sphericalangle aOb$ (odnosno $\sphericalangle AOB$) središnji kut nad lukom $\widehat{AB}$.*



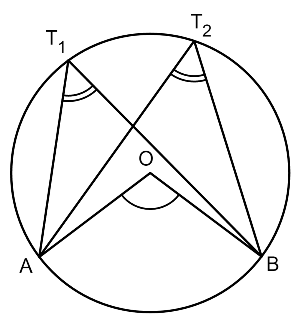
Teorem 1.1.3. *Mjera središnjeg kuta nad nekim lukom dvostruko je veća od mjere obodnog kutu nad tim istim lukom.*

Posebni slučaj teorema je sljedeći korolar koji govori o obodnom kutu nad promjerom kružnice.

Korolar 1.1.4. ***(Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice)*** *Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a C neka točka kružnice različita od A i B, tada je $\sphericalangle ACB$ pravi.*

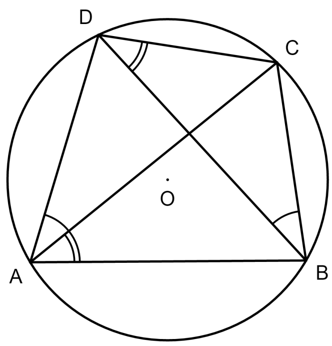


Korolar 1.1.5. *Obodni kutovi nad istim lukom su sukladni.*



Definicija 1.1.6. *Tetivni četverokut je četverokut kojem se može opisati kružnica.*

Teorem 1.1.7. *Zbroj mjera dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta je* 180°.



Dokaz. Kako su kutovi $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle CDB$ obodni kutovi nad lukom $\widehat{BC}$, vrijedi $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB$. Analogno vrijedi sukladnost sljedećih obodnih kutova nad istim lukom: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Označimo mjere unutarnjih kutova četverokuta $ABCD$ kod vrhova A, B, C, D redom s $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tada vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= (\sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB) + (\sphericalangle ACD + \sphericalangle ACB)\\ &= (\sphericalangle DBC + \sphericalangle CDB) + (\sphericalangle ABD + \sphericalangle ADB)\\ &= (\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC) + (\sphericalangle ADB + \sphericalangle CDB) = \beta + \delta.\end{aligned}$$

Kako vrijedi $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, mora biti $\alpha + \gamma = 180°$ i $\beta + \delta = 180°$.

□

Teorem 1.1.8. ***(Potencija točke u odnosu na kružnicu)*** *Neka je k kružnica, a T točka ravnine. Neka je p bilo koji pravac koji prolazi točkom T i siječe kružnicu k u točkama A i B. Tada je vrijednost izraza $|TA| \cdot |TB|$ konstantna, tj. ne ovisi o izboru pravca p.*

Razlikujemo tri slučaja:

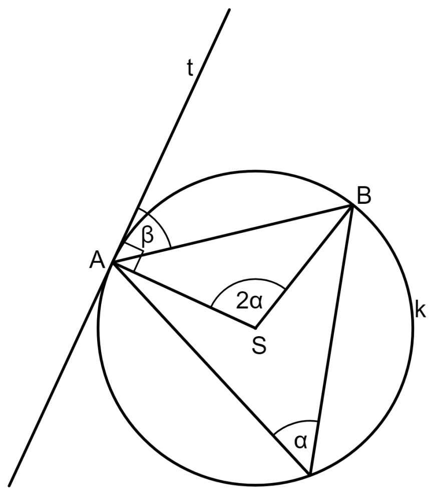
1° Točka T leži na kružnici k
U tom slučaju je $|TA| \cdot |TB| = 0$.

2° Točka T je unutar kružnice k
Neka su točkom T povučena dva pravca od kojih prvi siječe kružnicu k u točkama A i B, a drugi u C i D. Tada je $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

3° Točka T je izvan kružnice k
Uz oznake kao i u prethodnom slučaju, također vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

Teorem 1.1.9. *Kut između tangente kružnice kojoj je dirali̇šte u krajnjoj točki tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k sa središtem u točki S, a t tangenta na kružnicu k koja je dira u točki A. Označimo s α mjeru obodnog kuta nad tetivom $\overline{AB}$, a s β mjeru kuta između tetive i tangente.
Prema Teoremu 1.1.3 mjera središnjeg kuta nad tom tetivom jednaka je 2α.



Kako je trokut $\triangle ABS$ jednakokračan s osnovicom $\overline{AB}$, vrijedi $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 90° - \alpha$. S obzirom da je tangenta na kružnicu u točki A okomita na polumjer koji sadrži točku A, imamo

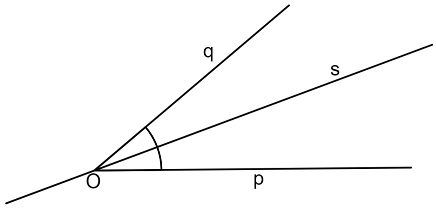
$$\beta = 90° - (90° - \alpha) = \alpha,$$

što je i trebalo dokazati.

$\square$

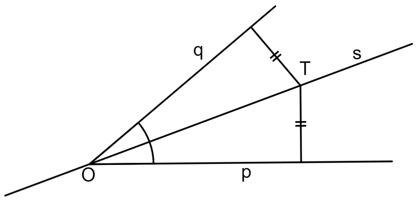
1.2 Simetrala kuta i dužine. Upisana i opisana kružnica

Definicija 1.2.1. *Simetrala kuta je pravac koji taj kut dijeli na dva sukladna dijela.*

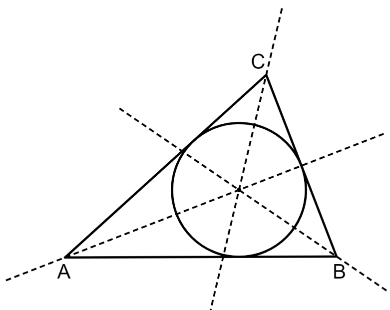


O temeljnom svojstvu simetrale kuta nam govori sljedeći teorem:

Teorem 1.2.2. ***(Teorem o simetrali kuta)*** *Neka je T točka unutar kuta. Točka T leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.*



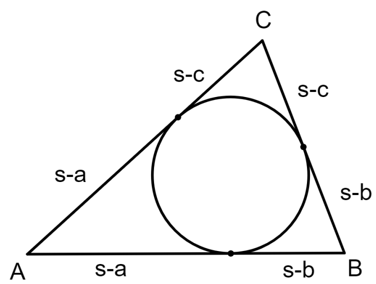
Teorem 1.2.3. ***(Teorem o simetralama unutarnjih kutova trokuta)*** *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka je središte tom trokutu upisane kružnice.*



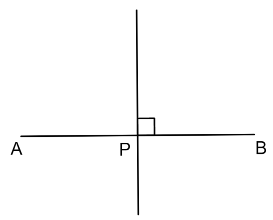
Teorem 1.2.4. *Neka je ABC trokut čije stranice imaju duljine a, b, c i sa s označimo njegov poluopseg. Neka je P njegova površina, a r polumjer upisane kružnice. Tada vrijedi:*

$$r = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Teorem 1.2.5. *Udaljenost vrha trokuta od dirališta upisane kružnice sa stranicama trokuta, kojma je taj vrh zajednički, jednaka je razlici poluopsega i duljine tom vrhu nasuprotne stranice.*

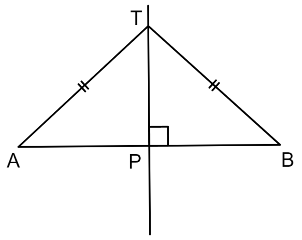


Definicija 1.2.6. *Simetrala dužine je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.*

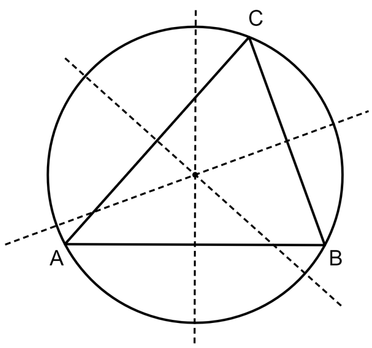


Sljedeći teorem nam govori o temeljnom svojstvu simetrale dužine:

Teorem 1.2.7. ***(Teorem o simetrali dužine)*** *Točka T leži na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AT| = |BT|$.*



Teorem 1.2.8. ***(Teorem o simetralama stranica trokuta)*** *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka je središte tom trokutu opisane kružnice.*



Teorem 1.2.9. *Neka je ABC trokut čije stranice imaju duljine a, b i c. Neka je P njegova površina, a R polumjer opisane kružnice. Tada vrijedi:*

$$R = \frac{abc}{4P}.$$

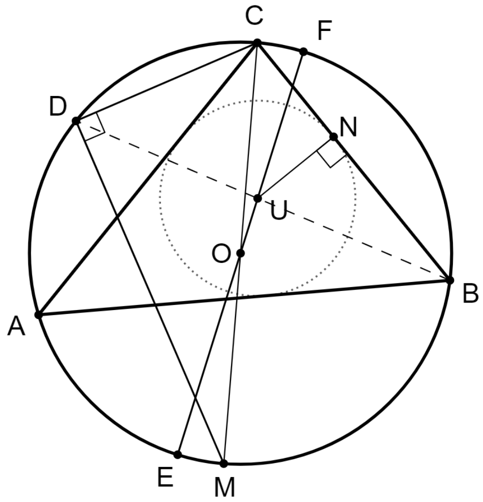
Sljedeći teorem daje nam formulu za udaljenost između središta upisane i središta opisane kružnice trokuta. Navodimo ga s dokazom jer se on ne nalazi u srednjoškolskim udžbenicima.

Teorem 1.2.10. ***(Eulerov teorem)*** *Udaljenost središta O opisane kružnice i središta U upisane kružnice trokuta ABC dana je s*

$$|OU|^2 = R^2 - 2Rr,$$

pri čemu je R polumjer trokutu opisane kružnice, a r polumjer trokutu upisane kružnice.

Dokaz. Neka je D sjecište pravca BU i kružnice opisane trokutu. Pravac BU je simetrala kuta $\sphericalangle ABC$, a pravac CU simetrala kuta $\sphericalangle ACB$. Označimo s E i F sjecišta pravca OU i kružnice opisane trokutu kao na slici. Neka su α, β i γ mjere kutova $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$.



Sada prema Teoremu 1.1.8 vrijedi

$$|BU| \cdot |DU| = |EU| \cdot |FU| = (R + |OU|)(R - |OU|) = R^2 - |OU|^2,$$

iz čega je

$$|OU|^2 = R^2 - |BU| \cdot |DU|.$$

Preostaje nam dokazati da je $|BU| \cdot |DU| = 2Rr$.
Kako su kutovi $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle ABD$ obodni kutovi nad istim lukom, vrijedi $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$.
Nadalje, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \dfrac{\beta}{2}$ jer je BD simetrala kuta $\sphericalangle ABC$, a $\sphericalangle ACU = \sphericalangle BCU$ jer je CU simetrala kuta $\sphericalangle BCA$.
Dakle, vrijedi $\sphericalangle DCU = \sphericalangle ACD + \sphericalangle ACU = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$.
Slično, $\sphericalangle CUD = \sphericalangle CBD + \sphericalangle BCU = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$ jer je $\sphericalangle CUD$ vanjski kut trokuta BCU. Dakle, $\sphericalangle DCU = \sphericalangle CUD$ iz čega slijedi $|DU| = |CD|$.
Označimo sada s N nožište okomice iz točke U na stranicu $\overline{BC}$. Neka je M sjecište pravca CO i kružnice opisane trokutu. Tada je $\overline{CM}$ promjer te kružnice pa prema Talesovom

teoremu o obodnom kutu nad promjerom vrijedi $\sphericalangle CDM = 90°$. Dakle, $\sphericalangle CDM = \sphericalangle BNU$. Uz to je i $\sphericalangle CMD = \sphericalangle CBD$ jer su to obodni kutovi nad istim lukom, pa su prema *K-K-K* teoremu o sličnosti trokuti BNU i MDC slični.
Dakle,

$$\frac{|BU|}{|CM|} = \frac{|NU|}{|CD|},$$

tj.

$$\frac{|BU|}{2R} = \frac{r}{|CD|}$$

iz čega je $|BU| \cdot |DU| = 2Rr$. □

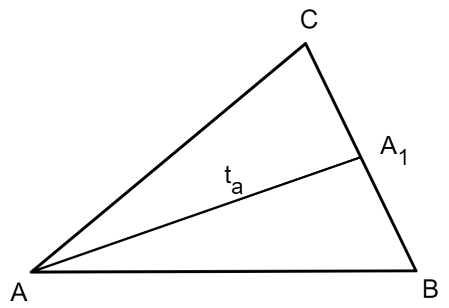
Posljedica ovog teorema je nejednakost koja se u literaturi naziva i Eulerova nejednakost:

Korolar 1.2.11. *Polumjer opisane kružnice danog trokuta ne može biti manji od promjera upisane kružnice, tj.*

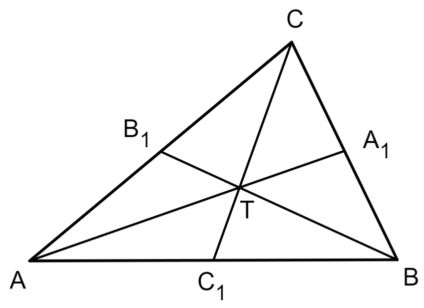
$$R \geq 2r.$$

1.3 Težište i ortocentar trokuta

Definicija 1.3.1. *Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice.*



Teorem 1.3.2. ***(Teorem o težištu trokuta)*** *Sve tri težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki. Udaljenost te točke od pojedinog vrha iznosi* $\frac{2}{3}$ *duljine odgovarajuće težišnice.*



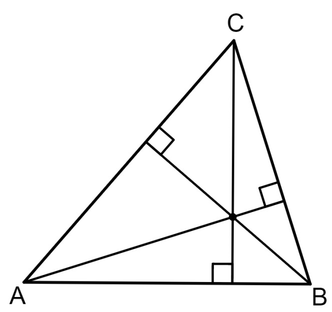
Definicija 1.3.3. *Točka u kojoj se sijeku sve tri težišnice naziva se težište trokuta.*

Teorem 1.3.4. *Neka su a, b i c duljine stranica trokuta, a t_a, t_b i t_c duljine odgovarajućih težišnica. Tada vrijedi:*

$$4{t_a}^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,$$
$$4{t_b}^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2,$$
$$4{t_c}^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2.$$

Definicija 1.3.5. *Visina trokuta je dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi nožište okomice spuštene iz tog vrha na pravac na kojem leži suprotna stranica.*

Teorem 1.3.6. ***(Teorem o ortocentru trokuta)*** *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*



Definicija 1.3.7. *Točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta naziva se ortocentar trokuta.*

Dokazi teorema iskazanih u ovom poglavlju nalaze se u srednjoškolskim udžbenicima, npr. [4] i [20].

Poglavlje 2

Teorem o simetrali kuta u trokutu

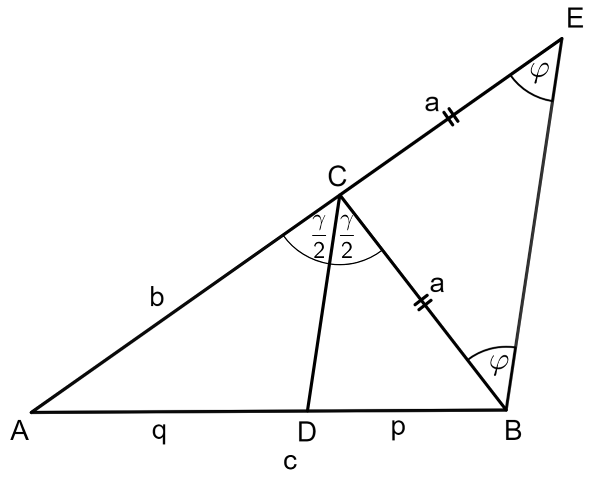
U ovom ćemo poglavlju iznijeti i na nekoliko načina dokazati teorem o simetrali kuta u trokutu. Pritom ćemo koristiti standardne oznake, tj. u trokutu $\triangle ABC$ označit ćemo duljine stranica $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$. Mjeru kuta kod vrha A označit ćemo s α, kod vrha B s β i kod vrha C s γ.

2.1 Teorem o simetrali kuta u trokutu i njegove inačice

Sada ćemo na tri različita načina dokazati važan teorem koji nam govori o omjeru odsječaka dobivenih presjekom simetrale kuta trokuta i stranice nasuprot tom kutu.

Teorem 2.1.1. ***(Teorem o simetrali kuta u trokutu)*** *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica.*

Dokaz. 1. način (pomoću Talesovog teorema o proporcionalnosti)
Neka simetrala kuta $\sphericalangle BCA$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Označimo dobivene odsječke s $|AD| = q$ i $|DB| = p$. Produljimo stranicu $\overline{AC}$ preko vrha C do točke E tako da je $|CE| = |CB| = a$.Na taj način smo dobili jednakokračan trokut $\triangle BCE$.
Označimo mjere kutova $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CEB = \varphi$. Prema teoremu o vanjskom kutu trokuta za trokut $\triangle BCE$ vrijedi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBE + \sphericalangle BEC$, tj. $2\varphi = \gamma$ iz čega je $\varphi = \frac{1}{2}\gamma$. Odavde je $\sphericalangle CBE = \sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\gamma$, a to znači da je $BE \parallel CD$.



Sada, zbog Talesovog teorema o proporcionalnosti dobivamo

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|},$$

tj.

$$\frac{|AC|}{|AC| + |CE|} = \frac{|AD|}{|AD| + |BD|},$$

ili

$$\frac{|AC| + |CE|}{|AC|} = \frac{|AD| + |BD|}{|AD|},$$

a odavde je

$$1 + \frac{|CE|}{|AC|} = 1 + \frac{|BD|}{|AD|}.$$

Kako je $|CE| = |BC|$, imamo

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|AD|},$$

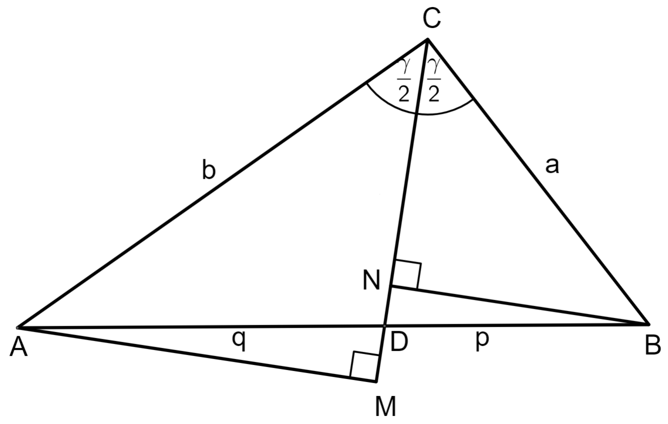
tj.

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

što je i trebalo dokazati.

□

Dokaz. 2. način (pomoću sličnosti trokuta)



Kao i u prethodnom dokazu, označimo odsječke dobivene presjekom simetrale kuta $\sphericalangle BCA$ i stranice $\overline{AB}$ s $|AD| = q$ i $|DB| = p$. Neka su M i N nožišta okomica na pravac CD iz vrhova A i B. Trokuti $\triangle AMD$ i $\triangle BND$ su slični prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta ($\sphericalangle AMD = \sphericalangle BND = 90°$, $\sphericalangle ADM = \sphericalangle BDN$ jer su to vršni kutovi). Također, prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta, slični su i trokuti $\triangle AMC$ i $\triangle BNC$ ($\sphericalangle AMC = \sphericalangle BNC = 90°$ i $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCN = \frac{1}{2}\gamma$). Iz sličnosti trokuta $\triangle AMD$ i $\triangle BND$ imamo sljedeću jednakost:

$$\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{|AD|}{|BD|}. \tag{2.1}$$

Iz sličnosti trokuta $\triangle AMC$ i $\triangle BNC$ imamo:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AM|}{|BN|}. \tag{2.2}$$

Konačno, iz jednakosti (2.1) i (2.2) dobivamo

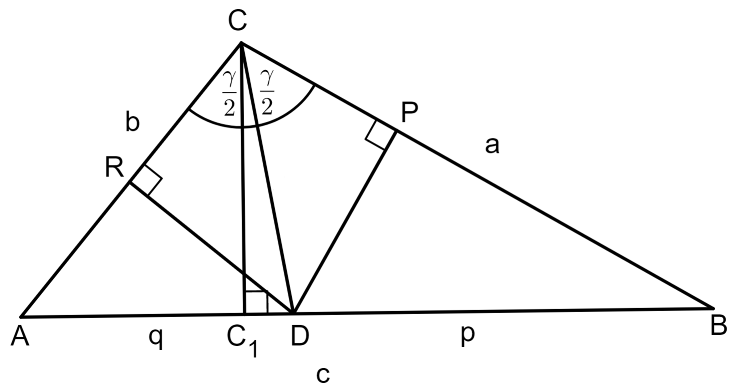
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|},$$

tj.

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p},$$

što je i trebalo dokazati. □

Dokaz. 3. način (pomoću površina trokuta)



Uz oznake kao i u prethodna dva dokaza, konstruirajmo visinu $\overline{DP}$ na stranicu $\overline{BC}$ trokuta $\triangle DBC$ te visinu $\overline{DR}$ na stranicu $\overline{AC}$ trokuta $\triangle ADC$. Nadalje, neka je $\overline{CC_1}$ visina na stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Izrazimo površinu trokuta $\triangle ADC$ na dva načina:

$$P(\triangle ADC) = \frac{|AD| \cdot |CC_1|}{2}$$

i

$$P(\triangle ADC) = \frac{|AC| \cdot |DR|}{2}.$$

Izjednačavanjem dobivamo

$$\frac{|AD| \cdot |CC_1|}{2} = \frac{|AC| \cdot |DR|}{2},$$

tj.

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DR|}{|CC_1|}.$$

Analogno, promatrajući trokut $\triangle BCD$ i izrazivši njegovu površinu na dva načina dobivamo sljedeće:

$$P(\triangle BCD) = \frac{|BD| \cdot |CC_1|}{2}$$

i

$$P(\triangle BCD) = \frac{|BC| \cdot |DP|}{2}.$$

Izjednačavanjem dobivamo

$$\frac{|BD| \cdot |CC_1|}{2} = \frac{|BC| \cdot |DP|}{2},$$

tj.

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|DP|}{|CC_1|}.$$

Kako se točka D nalazi na simetrali kuta $\sphericalangle ACB$, prema Teoremu 1.2.2 je $|DP| = |DR|$.
Sada iz jednakosti $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DR|}{|CC_1|}$ i $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|DP|}{|CC_1|}$ dobivamo

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BC|},$$

tj.

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

odnosno

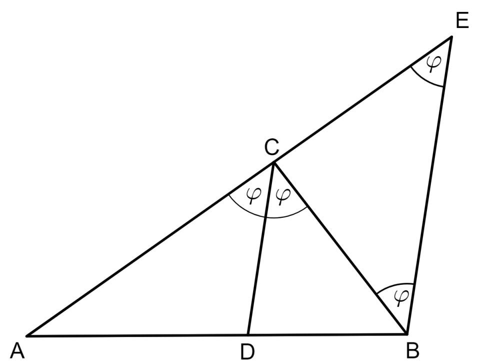
$$\frac{q}{p} = \frac{b}{a}$$

što je i trebalo dokazati. □

Dokažimo da vrijedi i obrat prethodnog teorema:

Teorem 2.1.2. *Ukoliko pravac povučen kroz jedan vrh trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru duljina preostalih dviju stranica, tada je taj pravac simetrala tog kuta u trokutu.*

Dokaz. Neka je D točka na stranici $\overline{AB}$ za koju vrijedi $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.



Dokažimo da se točka D nalazi na simetrali kuta $\sphericalangle BCA$. Točkom B povucimo paralelu s CD. Neka je E sjecište povučene paralele i produžetka stranice $\overline{AC}$ preko vrha C. Primjenom Talesovog teorema o proporcionalnosti imamo

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CE|},$$

iz čega slijedi $|BC| = |CE|$. Dakle, trokut $\triangle BCE$ je jednakokračan s osnovicom $\overline{BE}$. Stoga vrijedi $\sphericalangle BEC = \sphericalangle CBE := \varphi$.
Kako su kutovi $\sphericalangle DCB$ i $\sphericalangle CBE$ te kutovi $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle BEC$ kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca DC i BE, vrijedi

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBE = \varphi \text{ i } \sphericalangle ACD = \sphericalangle BEC = \varphi,$$

tj. $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$ iz čega slijedi da je CD simetrala kuta $\sphericalangle BCA$.

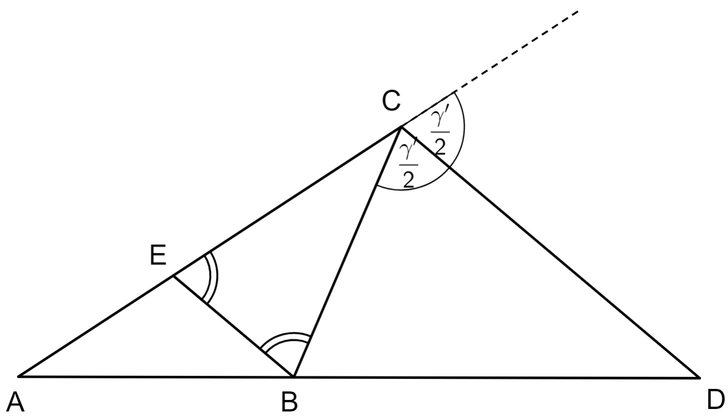
□

Sada ćemo dokazati analogon teorema o simetrali kuta za vanjske kutove trokuta. No za to će nam trebati sljedeća definicija.

Definicija 2.1.3. *Neka je $\overline{AB}$ dužina te neka je T točka na pravcu AB koja ne pripada dužini $\overline{AB}$. Tada kažemo da točka T dijeli dužinu $\overline{AB}$ izvana u omjeru $|AT| : |BT|$.*

Teorem 2.1.4. ***(Teorem o simetrali vanjskog kuta u trokutu)*** *Simetrala vanjskog kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu izvana u omjeru preostalih dviju stranica.*

Dokaz. Označimo s γ' mjeru vanjskog kut kod vrha C. Neka je CD simetrala tog kuta. Točkom B povucimo paralelu s CD. Označimo s E sjecište te paralele i stranice $\overline{AC}$.



Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti, vrijedi

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|} \Rightarrow \frac{|AC|}{|AC| - |CE|} = \frac{|AD|}{|AD| - |BD|},$$

tj.

$$|AC| \cdot |AD| - |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |AC| - |CE| \cdot |AD|,$$

iz čega dobivamo

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}. \tag{2.3}$$

Promotrimo sada trokut $\triangle EBC$. Zbog teorema o transverzali paralelnih pravaca, vrijedi $\sphericalangle DCB = \sphericalangle EBC = \sphericalangle BEC = \frac{\gamma'}{2}$, tj. trokut $\triangle EBC$ je jednakokračan s osnovicom $\overline{EB}$. Dakle, $|EC| = |BC|$. Uvrštavanjem te jednakosti u (2.3) dobivamo traženi omjer. □

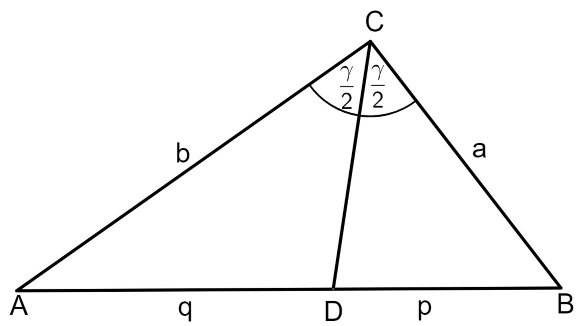
Korištenjem teorema o simetrali kuta u trokutu možemo dobiti formule za duljine odsječaka dobivenih presjekom simetrale kuta trokuta i stranice nasuprot tom kutu.

Korolar 2.1.5. *Ako simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu C trokuta $\triangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, onda vrijedi*

$$|AD| = \frac{bc}{a+b}, \; |BD| = \frac{ac}{a+b},$$

pri čemu je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Dokaz. Neka je $q = |AD|$ i $p = |BD|$ kao na slici.



Prema teoremu o simetrali kuta vrijedi

$$\frac{q}{p} = \frac{b}{a},$$

tj.

$$\frac{q}{c-q} = \frac{b}{a},$$

iz čega dobivamo

$$qa = bc - bq,$$

pa je

$$q(a+b) = bc.$$

Dakle, slijede tražene formule

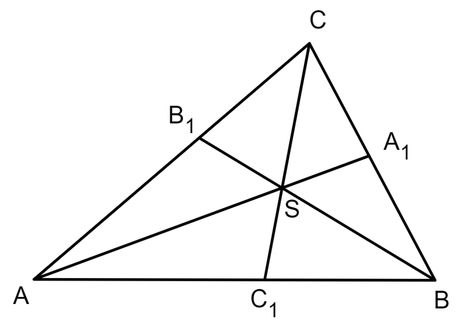
$$q = \frac{bc}{a+b} \text{ i } p = c - q = \frac{ac}{a+b}.$$

□

Na sličan način možemo izračunati omjere u kojima središte upisane kružnice S dijeli odsječke simetrala kuta unutar trokuta.

Korolar 2.1.6. ***(Teorem o središtu trokutu upisane kružnice)*** *Središte trokutu upisane kružnice dijeli odsječak simetrale kuta unutar trokuta u omjeru zbroja duljina dviju stranica koje imaju zajednički vrh na toj simetrali i duljine treće stranice.*

Dokaz. Neka su $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ odsječci simetrala unutarnjih kutova trokuta $\triangle ABC$ i neka je S središte trokutu upisane kružnice.



Želimo dokazati da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{b+c}{a},$$

$$\frac{|BS|}{|SB_1|} = \frac{a+c}{b},$$
$$\frac{|CS|}{|SC_1|} = \frac{a+b}{c}.$$

Označimo s q duljinu odsječka $\overline{BA_1}$ na stranici $\overline{BC}$. Primjenom teorema o simetrali kuta na trokut $\triangle ABA_1$ dobivamo

$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|AB|}{|BA_1|} = \frac{c}{q}.$$

Kako je prema Korolaru 2.1.5 odsječak $q = \dfrac{ac}{b+c}$, dobivamo

$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{c}{\dfrac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Preostale dvije jednakosti se analogno dokazuju. □

Primjenom prethodnog korolara dobivamo dva zanimljiva identiteta u trokutu.

Korolar 2.1.7. *Za simetrale AA_1, BB_1 i CC_1 unutarnjih kutova trokuta $\triangle ABC$ koje se sijeku u središtu S trokutu upisane kružnice vrijedi:*

$$\frac{|SA_1|}{|AA_1|} + \frac{|SB_1|}{|BB_1|} + \frac{|SC_1|}{|CC_1|} = 1$$

i

$$\frac{|SA|}{|AA_1|} + \frac{|SB|}{|BB_1|} + \frac{|SC|}{|CC_1|} = 2.$$

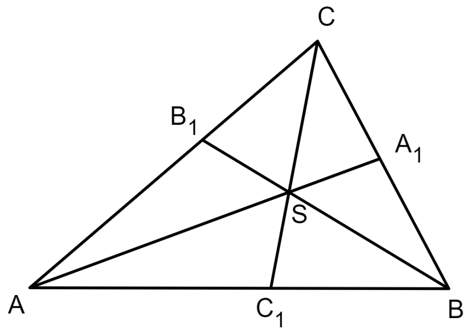
Dokaz. Izrazimo omjere $\dfrac{|SA_1|}{|AA_1|}$, $\dfrac{|SB_1|}{|BB_1|}$ i $\dfrac{|SC_1|}{|CC_1|}$ preko a, b i c. Imamo da je

$$\frac{|SA_1|}{|AA_1|} = \frac{|SA_1|}{|AS| + |SA_1|} = \frac{1}{\dfrac{|AS| + |SA_1|}{|SA_1|}} = \frac{1}{\dfrac{|AS|}{|SA_1|} + 1}. \tag{2.4}$$

Prema Korolaru 2.1.6 vrijedi da je $\dfrac{|AS|}{|SA_1|} = \dfrac{b+c}{a}$. Uvrštavanjem u (2.4) dobivamo

$$\frac{|SA_1|}{|AA_1|} = \frac{1}{\dfrac{b+c}{a} + 1} = \frac{1}{\dfrac{a+b+c}{a}} = \frac{a}{2s},$$

pri čemu je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Analogno dobivamo $\dfrac{|SB_1|}{|BB_1|} = \dfrac{b}{2s}$ i $\dfrac{|SC_1|}{|CC_1|} = \dfrac{c}{2s}$.
Konačno, zbrajanjem dobivamo

$$\frac{|SA_1|}{|AA_1|} + \frac{|SB_1|}{|BB_1|} + \frac{|SC_1|}{|CC_1|} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{2s}{2s} = 1,$$

čime je dokazana prva jednakost.

Izrazimo sada preko a, b i c omjere $\dfrac{|SA|}{|AA_1|}$, $\dfrac{|SB|}{|BB_1|}$ i $\dfrac{|SC|}{|CC_1|}$. Vrijedi,

$$\frac{|SA|}{|AA_1|} = \frac{1}{\frac{|AA_1|}{|SA|}} = \frac{1}{\frac{|SA| + |SA_1}{|SA|}} = \frac{1}{1 + \frac{|SA_1|}{|SA|}}. \tag{2.5}$$

Prema Korolaru 2.1.6 vrijedi da je $\dfrac{|AS|}{|SA_1|} = \dfrac{b+c}{a}$, tj. $\dfrac{|SA_1|}{|SA|} = \dfrac{a}{b+c}$.
Uvrštavanjem u (2.5) dobivamo sljedeće:

$$\frac{|SA|}{|AA_1|} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{2s-a}{2s}.$$

Analogno dobivamo $\dfrac{|SB|}{|BB_1|} = \dfrac{2s-b}{2s}$ i $\dfrac{|SC|}{|CC_1|} = \dfrac{2s-c}{2s}$.
Konačno, zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{|SA|}{|AA_1|} + \frac{|SB|}{|BB_1|} + \frac{|SC|}{|CC_1|} &= \frac{2s-a}{2s} + \frac{2s-b}{2s} + \frac{2s-c}{2s} \\ &= \frac{6s-(a+b+c)}{2s} = \frac{6s-2s}{2s} = 2,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

2.2 Duljina simetrale

Prijeđimo sada na izračunavanje duljina simetrala s_α, s_β i s_γ unutarnjih kutova trokuta $\triangle ABC$. Pod duljinom simetrale kuta trokuta podrazumijevamo duljinu odsječka te simetrale od vrha trokuta do sjecišta s nasuprotnom stranicom. U ovoj točki ćemo na nekoliko različitih načina izvesti formulu za duljine simetrala unutarnjih kutova trokuta.

Teorem 2.2.1. *Za duljine simetrala kutova trokuta s_α, s_β i s_γ vrijedi*

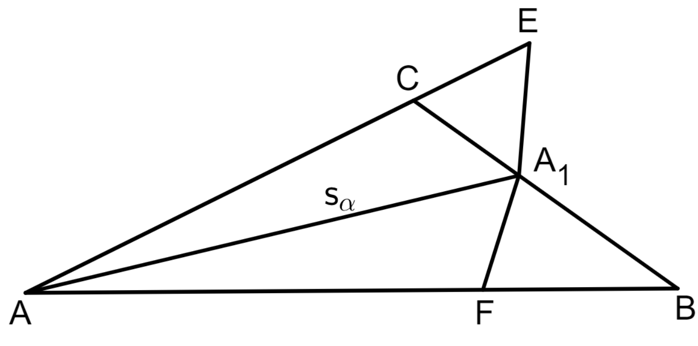
$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)},$$

$$s_\beta = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{s(s-b)},$$

$$s_\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)},$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Dokaz. 1. način
Označimo sa s_α duljinu simetrale $\overline{AA_1}$ kuta $\sphericalangle BAC = \alpha$, tj. $|AA_1| = s_\alpha$. Stranicu $\overline{AC}$ produljimo preko vrha C do točke E tako da je $|CE| = |CA_1|$.



Na stranici $\overline{AB}$ označimo točku F takvu da je $|BF| = |BA_1|$. Takva točka sigurno postoji jer je

$$\sphericalangle AA_1B = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta = (\alpha+\beta+\gamma) - \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\alpha}{2} + \gamma > \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle BAA_1,$$

a s obzirom da nasuprot većeg kuta trokuta leži i veća stranica, imamo $|AB| > |BA_1|$, odnosno $|AB| > |FB|$. Dokažimo sada da su trokuti $\triangle AFA_1$ i $\triangle AA_1E$ slični. Kako je AA_1 simetrala kuta $\sphericalangle CAB$, vrijedi $\sphericalangle A_1AE = \sphericalangle BAA_1 = \frac{\alpha}{2}$.
Prema konstrukciji je trokut $\triangle CA_1E$ jednakokračan, pa je

$$\sphericalangle AEA_1 = \sphericalangle CEA_1 = \frac{1}{2}(\sphericalangle CEA_1 + \sphericalangle EA_1C) = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \frac{\gamma}{2}.$$

Isto tako je jednakokračan i trokut $\triangle FBA_1$, pa vrijedi

$$\sphericalangle AA_1F = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ + \frac{\beta}{2}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Dakle, $\sphericalangle AEA_1 = \sphericalangle AA_1F$, što znači da su trokuti $\triangle AFA_1$ i $\triangle AA_1E$ slični po *K-K-K* teoremu o sličnosti trokuta.

Stoga vrijedi $\frac{|AA_1|}{|AF|} = \frac{|AE|}{|AA_1|}$, odnosno $|AA_1|^2 = |AF| \cdot |AE|$.

Kako je $|AF| = c - |BF|$ i $|AE| = b + |CE|$, imamo $|AA_1|^2 = (c - |BF|) \cdot (b + |CE|)$, tj.

$$s_\alpha^2 = bc - c \cdot |CE| - b \cdot |BF| - |BF| \cdot |CE|. \tag{2.6}$$

Prema Teoremu 2.1.1 vrijedi

$$\frac{|CE|}{|BF|} = \frac{|CA_1|}{|BA_1|} = \frac{b}{c},$$

odnosno $c|CE| = b|BF|$, pa uvrštavanjem u jednakost (2.6) imamo

$$s_\alpha^2 = bc - |BF| \cdot |CE|. \tag{2.7}$$

Iz sustava

$$c \cdot |CE| - b \cdot |BF| = 0$$
$$|CE| + |BF| = a$$

dobivamo $|BF| = \frac{ac}{b+c}$ i $|CE| = \frac{ab}{b+c}$.

Uvrštavanjem tih duljina u jednakost (2.7) dobivamo

$$s_\alpha^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Svođenjem na zajednički nazivnik i faktorizacijom, dobivamo:

$$s_\alpha^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2}.$$

Kako je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, tj. $a+b+c = 2s$, to je

$$s_\alpha^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}$$

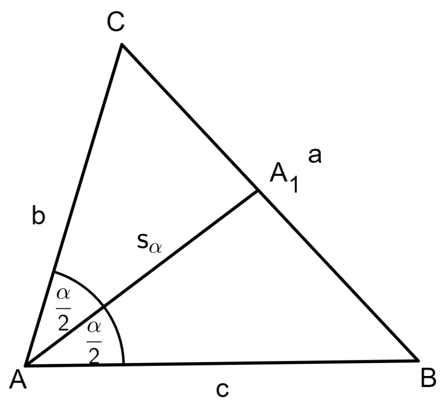
i konačno

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)},$$

što je i trebalo dokazati.
Na analogan način dobivamo formule za duljine simetrala kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$.

□

Dokaz. 2. način (pomoću površina trokuta)



Neka je s_α duljina simetrale kuta $\sphericalangle CAB$. Očito vrijedi: $P(\triangle ABC) = P(\triangle ABA_1) + P(\triangle ACA_1)$.
Koristeći formulu za površinu trokuta, imamo

$$\frac{bc}{2}\sin\alpha = \frac{cs_\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{bs_\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Pomoću formule za sinus dvostrukog kuta, tj. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, dobivamo

$$bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{s_\alpha(b+c)}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$2bc\cos\frac{\alpha}{2} = (b+c)s_\alpha,$$

odnosno imamo da je

$$s_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{2.8}$$

Iskoristimo sada formulu za kosinus polovičnog kuta $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ te poučak o kosinusu $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Uvrštavanjem u jednakost (2.8) dobivamo

$$\begin{aligned} s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} &= \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\ &= \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} \\ &= \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Analogno se dokazuju preostale dvije formule. □

Dokaz. 3. način (pomoću Talesovog teorema o proporcionalnosti i trigonometrije pravokutnog trokuta)
Povucimo pravac p vrhom C trokuta $\triangle ABC$ tako da je p paralelan sa simetralom $\overline{AA_1}$ kuta $\sphericalangle CAB$ te neka je točka D presjek pravca p s pravcem AB. Kako je $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle ADC = \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle DCA = \frac{\alpha}{2}$ (jer je pravac AC transverzala dvaju paralelnih pravaca), slijedi da je trokut $\triangle ACD$ jednakokračan, tj. $|AD| = |AC|$.

Sada korištenjem Talesovog teorema o proporcionalnosti vrijedi

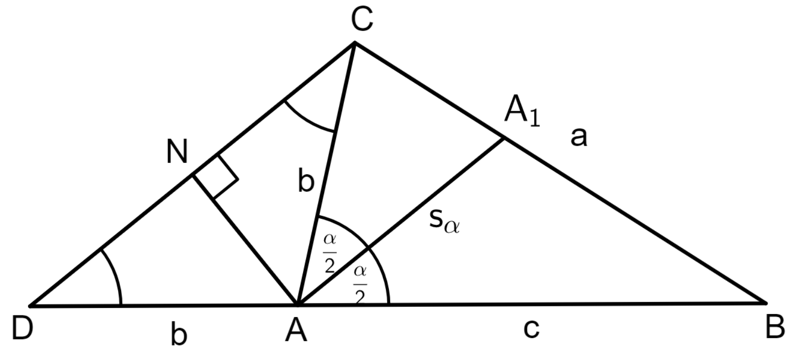
$$\frac{|AA_1|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BD|},$$

odakle je

$$|AA_1| = \frac{|AB|}{|BD|}\cdot|CD| = \frac{|AB|\cdot|CD|}{|AB|+|AD|},$$

tj.

$$|AA_1| = \frac{|AB|\cdot|CD|}{|AB|+|AC|}. \tag{2.9}$$



Neka je $\overline{AN}$ visina jednakokračnog trokuta $\triangle ACD$. Za pravokutan trokut $\triangle ADN$ vrijedi:

$$\cos \sphericalangle ADN = \frac{|DN|}{|AD|}, \text{ tj. } \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}|CD|}{|AC|},$$

a odavde je

$$|CD| = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot|AC|. \tag{2.10}$$

Sada iz jednakosti (2.9) i (2.10) dobivamo

$$|AA_1| = \frac{2|AB|\cdot|AC|}{|AB|+|AC|}\cos\frac{\alpha}{2},$$

tj.

$$s_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$$

čime smo dobili izraz (2.8) iz prethodnog dokaza.

Analogno bismo dobili da je $s_\beta = \dfrac{2ac}{a+c}\cos\dfrac{\beta}{2}$ i $s_\gamma = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, a ostatak dokaza provodi se kao i u prethodnom dokazu.

□

2.3 Neke nejednakosti sa simetralama

U ovoj ćemo točki dati neke zanimljive nejednakosti koje uključuju simetrale kutova trokuta. Prije toga, prisjetimo se osnovnih sredina i nejednakosti među njima.

Definicija 2.3.1. *Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi. Tada je*

harmonijska sredina *brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$ dana izrazom $H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}}$;*

geometrijska sredina *brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$ izrazom $G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$;*

aritmetička sredina *brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$ izrazom $A_n = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ i*

kvadratna sredina *brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$ izrazom $K_n = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$.*

Indukcijom se pokazuje da za pozitivne realne brojeve vrijedi

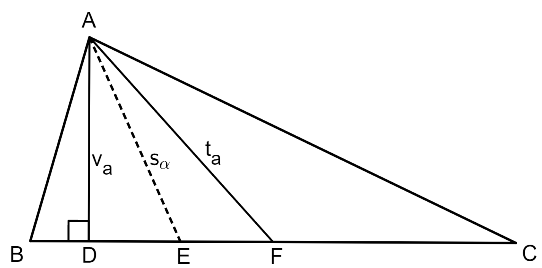
$$\min\{x_1, x_2, ..., x_n\} \leq H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n \leq \max\{x_1, x_2, ..., x_n\},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Dokazi navedenih tvrdnji mogu se pronaći u [9]. Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, ili kraće AG nejednakost, svakako je jedna od najpoznatijih algebarskih nejednakosti. Za dva pozitivna realna broja a i b stoga vrijedi $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ što će nam za posljedicu dati sljedeću nejednakost sa simetralama.

Primjer 1. Za duljinu visine v_a, duljinu simetrale kuta s_α i duljinu težišnice t_a povučenih iz istog vrha, primjerice A, vrijedi $v_a \leq s_\alpha \leq t_a$.

Dokaz. Pokažimo najprije da je duljina visine najkraća od ovih triju duljina.



Neka visina, simetrala kuta i težišnica iz vrha A sijeku stranicu $\overline{BC}$ u točkama D, E i F redom. Promatrajmo najprije pravokutni trokut $\triangle ADE$. Kako je $\overline{AE}$ hipotenuza tog trokuta, vrijedi da je duljina stranice $\overline{AE}$ najveća, tj. $v_a \leq s_\alpha$. Zatim, u pravokutnom trokutu $\triangle ADF$ je $\overline{AF}$ hipotenuza pa je $v_a \leq t_a$. Nadalje, zbog odnosa aritmetičke i geometrijske sredine dvaju brojeva b i c vrijedi $b^2 + c^2 \geq 2bc$, a prema Teoremu 1.3.4 za duljinu težišnice t_a imamo:

$$\begin{aligned} t_a^2 &= \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{b^2+c^2+b^2+c^2-a^2}{4} \\ &\geq \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{4} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4} \\ &= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4} = \frac{2(s-a)\cdot 2s}{4} = s(s-a), \end{aligned}$$

pri čemu je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Dakle, $t_a^2 \geq s(s-a)$, tj. $t_a \geq \sqrt{s(s-a)}$. Koristeći ponovno odnos aritmetičke i geometrijske sredine $\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c} \leq 1$ i Teorem 2.2.1, dobivamo

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{s(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)}.$$

Prema tome je $s_\alpha \leq \sqrt{s(s-a)} \leq t_a$ i konačno $v_a \leq s_\alpha \leq t_a$ što je trebalo dokazati. Obje jednakosti vrijede ako i samo ako se radi o jednakokračnom trokutu s osnovicom duljine a.

$\square$

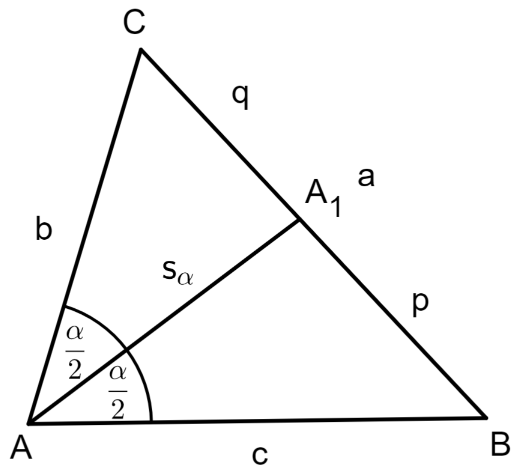
Dokažimo sada još neke zanimljive nejednakosti koje vrijede za simetrale kutova trokuta. Pritom koristimo standardne oznake za trokut $\triangle ABC$.

Primjer 2. Za duljine simetrala kutova vrijedi $s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 3s$.

Dokaz. Ova nejednakost se vrlo lako dokazuje primjenom nejednakosti trokuta: Svaka stranica trokuta je manja od zbroja preostalih dviju stranica. Primijenimo sada nejednakost trokuta na trokute $\triangle ABA_1$ i $\triangle ACA_1$.

Uz oznake kao na slici vrijedi:

$$\begin{aligned} s_\alpha &< c + p, \\ s_\alpha &< b + q. \end{aligned}$$



Zbrajanjem dobivamo:

$$2s_\alpha < b + c + p + q,$$

odnosno zbog $p + q = a$ imamo

$$2s_\alpha < a + b + c,$$

tj.

$$s_\alpha < s.$$

Na analogan način bismo dobili i nejednakosti $s_\beta < s$ i $s_\gamma < s$, a nakon zbrajanja tih nejednakosti dobivamo traženu tvrdnju:

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 3s.$$

□

Dokažimo sada da vrijedi još jača nejednakost od prethodne:

Primjer 3. Za duljine simetrala kutova vrijedi $s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 2s$.

Dokaz. U Primjeru 1. je korištenjem formule za duljinu simetrale i AG nejednakosti dokazano da vrijedi:

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{s(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)}. \tag{2.11}$$

Ponovnim korištenjem AG nejednakosti za pozitivne realne brojeve s i $s-a$ dobivamo:

$$\sqrt{s(s-a)} < \frac{s+s-a}{2},$$

tj.

$$\sqrt{s(s-a)} < \frac{2s-a}{2}, \tag{2.12}$$

s time da u ovom slučaju vrijedi stroga nejednakost jer je $s \neq s-a$. Iz nejednakosti (2.11) i (2.12) dobivamo

$$s_\alpha < \frac{2s-a}{2}.$$

Analogno bismo dobili nejednakosti:

$$s_\beta < \frac{2s-b}{2}$$

te

$$s_\gamma < \frac{2s-c}{2}.$$

Zbrajanjem dobivenih nejednakosti dobivamo novu nejednakost

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < \frac{2s-a}{2} + \frac{2s-b}{2} + \frac{2s-c}{2},$$

odnosno

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 2s,$$

što je i trebalo dokazati. □

Sljedeće tri nejednakosti su posljedice dokazanih ocjena $s_\alpha \leq \sqrt{s(s-a)}$, $s_\beta \leq \sqrt{s(s-b)}$ i $s_\gamma \leq \sqrt{s(s-c)}$.

Primjer 4. Za duljine simetrala kutova s_α, s_β i s_γ vrijedi $s_\alpha s_\beta s_\gamma \leq rs^2$ pri čemu je r polumjer trokutu upisane kružnice.

Dokaz. Množenjem prethodno spomenutih nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta s_\gamma &\leq \sqrt{s(s-a)} \cdot \sqrt{s(s-b)} \cdot \sqrt{s(s-c)} \\ &= s\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= s \cdot P = s \cdot rs = rs^2, \end{aligned}$$

pri čemu smo upotrijebili Heronovu formulu za površinu trokuta i Teorem 1.2.4. □

Primjer 5. Za duljine simetrala kutova s_α, s_β i s_γ vrijedi $s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \leq s^2$.

Dokaz. Kvadriranjem nejednakosti $s_\alpha \leq \sqrt{s(s-a)}$, $s_\beta \leq \sqrt{s(s-b)}$ i $s_\gamma \leq \sqrt{s(s-c)}$ imamo:

$$s_\alpha^2 \leq s(s-a),\ s_\beta^2 \leq s(s-b) \text{ i } s_\gamma^2 \leq s(s-c).$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo:

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \leq s(s-a+s-b+s-c) = s[3s-(a+b+c)] = s(3s-2s) = s^2$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost vrijedi ako i samo ako se radi o jednakostraničnom trokutu.

□

Primjer 6. Za duljine simetrala kutova s_α, s_β i s_γ vrijedi $s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\gamma \leq s^2$.

Dokaz. Uvrštavanjem nejednakosti $s_\alpha \leq \sqrt{s(s-a)}$, $s_\beta \leq \sqrt{s(s-b)}$ i $s_\gamma \leq \sqrt{s(s-c)}$ u lijevu stranu tražene nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\gamma &\leq \sqrt{s(s-a)} \cdot \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-b)} \cdot \sqrt{s(s-c)} + \sqrt{s(s-a)} \cdot \sqrt{s(s-c)} \\ &= s\left(\sqrt{(s-a)(s-b)} + \sqrt{(s-b)(s-c)} + \sqrt{(s-a)(s-c)}\right). \end{aligned}$$

Primjenom AG nejednakosti na članove $s-a$, $s-b$ i $s-c$ dobivamo

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\gamma &\leq s\left(\frac{s-a+s-b}{2} + \frac{s-b+s-c}{2} + \frac{s-a+s-c}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}s[2s-(2s-c)+2s-(2s-a)+2s-(2s-b)] \\ &= \frac{1}{2}s(a+b+c) = \frac{1}{2}s \cdot 2s = s^2. \end{aligned}$$

Dakle, $s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\gamma \leq s^2$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan. □

Primjer 7. Za duljine simetrala kutova s_α, s_β i s_γ vrijedi $\frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2}\geq\frac{9}{s^2}$.

Dokaz. Iz nejednakosti $s_\alpha \leq \sqrt{s(s-a)}$, $s_\beta \leq \sqrt{s(s-b)}$ i $s_\gamma \leq \sqrt{s(s-c)}$ imamo:

$$\frac{1}{s_\alpha^2}\geq\frac{1}{s(s-a)},\ \frac{1}{s_\beta^2}\geq\frac{1}{s(s-b)},\ \frac{1}{s_\gamma^2}\geq\frac{1}{s(s-c)}.$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2}&\geq\frac{1}{s(s-a)}+\frac{1}{s(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)}\\&=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\\&=\frac{1}{s}\cdot\frac{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\frac{s^2-bs-cs+bc+s^2-as-cs+ac+s^2-as-bs+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ac}{P^2},\end{aligned}\tag{2.13}$$

pri čemu smo kod posljednje jednakosti iskoristili Heronovu formulu za površinu trokuta. Korištenjem Heronove formule i Teorema 1.2.4 dobivamo

$$\begin{aligned}r^2+4Rr&=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}+\frac{abc}{s}\\&=\frac{s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ac)s-abc+abc}{s}\\&=s^2-(a+b+c)s+ab+bc+ac\\&=ab+bc+ac-s^2,\end{aligned}$$

tj.

$$r^2+s^2+4Rr=ab+bc+ac.\tag{2.14}$$

Uvrštavanjem činjenica da je $a+b+c=2s$, $P=rs$ te jednakosti (2.14) u jednakost (2.13) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2}&\geq\frac{3s^2-4s^2+r^2+s^2+4Rr}{r^2s^2}\\&=\frac{r^2+4Rr}{r^2s^2}.\end{aligned}$$

Sada zbog Eulerove nejednakosti $R \geq 2r$ vrijedi da je

$$\frac{r^2 + 4Rr}{r^2 s^2} \geq \frac{r^2 + 8r^2}{r^2 s^2} = \frac{9}{s^2}.$$

Dakle, $\frac{1}{s_\alpha^2} + \frac{1}{s_\beta^2} + \frac{1}{s_\gamma^2} \geq \frac{9}{s^2}$ što je i trebalo dokazati. Pritom, jednakost vrijedi ako i samo ako se radi o jednakostraničnom trokutu. □

Zadatci ovog tipa često se pojavljuju na srednjoškolskim natjecanjima iz matematike.

Primjer 8. *(Bosna i Hercegovina, 1990.)* Za duljine simetrala kutova s_α, s_β i s_γ vrijedi

$$\frac{s_\alpha}{a} + \frac{s_\beta}{b} + \frac{s_\gamma}{c} \leq \frac{s}{2r}.$$

Dokaz. Korištenjem nejednakosti $s_\alpha \leq \sqrt{s(s-a)}$, $s_\beta \leq \sqrt{s(s-b)}$ i $s_\gamma \leq \sqrt{s(s-c)}$, formule za površinu trokuta $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$ te činjenice iz Primjera 1. da je duljina visine manja ili jednaka duljini simetrale kuta, tj. $v_a \leq s_\alpha$, $v_b \leq s_\beta$ i $v_c \leq s_\gamma$ dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
\frac{s_\alpha}{a} + \frac{s_\beta}{b} + \frac{s_\gamma}{c} &= \frac{s_\alpha v_a}{2P} + \frac{s_\beta v_b}{2P} + \frac{s_\gamma v_c}{2P} \\
&\leq \frac{1}{2P}\left(s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2\right) \\
&\leq \frac{1}{2rs}\left[s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)\right] \\
&= \frac{1}{2r}(s - a + s - b + s - c) \\
&= \frac{1}{2r}\left[3s - (a + b + c)\right] \\
&= \frac{1}{2r}(3s - 2s) = \frac{s}{2r}.
\end{aligned}$$

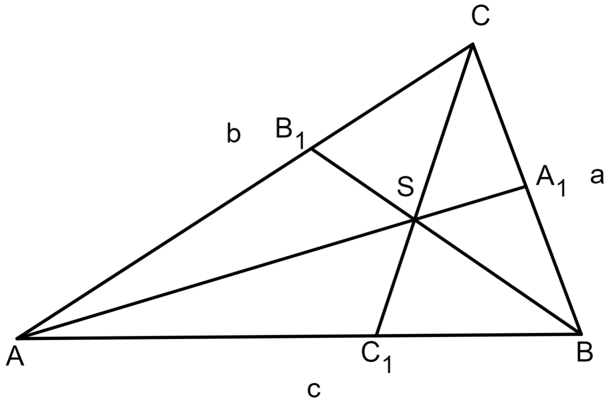
Jednakost $\frac{s_\alpha}{a} + \frac{s_\beta}{b} + \frac{s_\gamma}{c} = \frac{s}{2r}$ vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

□

U sljedećem primjeru dajemo zadatak koji se pojavio na međunarodnoj matematičkoj olimpijadi.

Primjer 9. *(IMO 1991.)* Zadan je trokut $\triangle ABC$. Neka su A_1, B_1 i C_1 točke u kojima simetrale kutova $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ sijeku stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ redom te neka je S središte trokutu upisane kružnice. Tada vrijedi:

$$\frac{1}{4} < \frac{|AS| \cdot |BS| \cdot |CS|}{|AA_1| \cdot |BB_1| \cdot |CC_1|} \leq \frac{8}{27}.$$



Dokaz. Prema Korolaru 2.1.6 vrijedi

$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{b+c}{a}.$$

Stoga je

$$\frac{|AS|}{|AA_1|} = \frac{1}{\frac{|AA_1|}{|AS|}} = \frac{1}{\frac{|AS| + |SA_1|}{|AS|}} = \frac{1}{1 + \frac{|SA_1|}{|AS|}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Analogno bismo dobili da vrijedi $\dfrac{|BS|}{|BB_1|} = \dfrac{a+c}{a+b+c}$ i $\dfrac{|CS|}{|CC_1|} = \dfrac{a+b}{a+b+c}$.

Kako je $a + b + c = 2s$, imamo:

$$\frac{|AS|}{|AA_1|} = \frac{2s-a}{2s}, \frac{|BS|}{|BB_1|} = \frac{2s-b}{2s}, \frac{|CS|}{|CC_1|} = \frac{2s-c}{2s}.$$

Zbog odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\begin{aligned}
\frac{|AS|}{|AA_1|}\cdot\frac{|BS|}{|BB_1|}\cdot\frac{|CS|}{|CC_1|} &\leq \left(\frac{\frac{|AS|}{|AA_1|}+\frac{|BS|}{|BB_1|}+\frac{|CS|}{|CC_1|}}{3}\right)^3\\
&= \left(\frac{\frac{2s-a+2s-b+2s-c}{2s}}{3}\right)^3\\
&= \left(\frac{\frac{4s}{2s}}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.
\end{aligned}$$

Time je dokazana desna strana nejednakosti. Dokažimo sada i lijevu stranu. Očito je

$$\begin{aligned}
\frac{|AS|}{|AA_1|}\cdot\frac{|BS|}{|BB_1|}\cdot\frac{|CS|}{|CC_1|} &= \frac{(2s-a)(2s-b)(2s-c)}{8s^3}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{(2s-a)(2s-b)(2s-c)-2s^3}{8s^3}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da je dovoljno dokazati da je

$$\frac{(2s-a)(2s-b)(2s-c)-2s^3}{8s^3} > 0.$$

Međutim, ta nejednakost slijedi iz niza jednakosti:

$$\begin{aligned}
(2s-a)(2s-b)(2s-c)-2s^3 &= 8s^3-abc+2s(ab+ac+bc)-4s^2(a+b+c)-2s^3\\
&= 2s(ab+ac+bc-s^2)-abc\\
&= 2s\left(ab+ac+bc-\frac{(a+b+c)^2}{4}\right)-abc\\
&= (a+b+c)\cdot\frac{2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2}{4}-abc\\
&= \frac{a^2b+ab^2+bc^2+b^2c+ac^2+a^2c-a^3-b^3-c^3+2abc}{4}\\
&= \frac{a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)+2abc}{4}.
\end{aligned}$$

Zbog nejednakosti trokuta ovaj je izraz uvijek veći od 0 čime je dokazana i lijeva strana nejednakosti. □

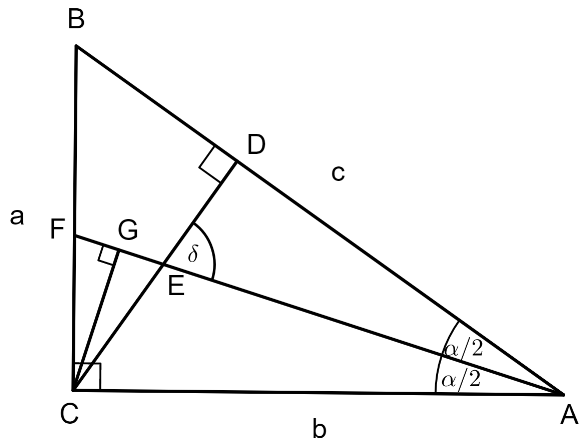
2.4 Zadatci

U ovoj ćemo točki prezentirati nekoliko zadataka u kojima se primjenjuje teorem o simetrali kuta u trokutu i njegove inačice te prethodno dokazane nejednakosti. Mnogi od njih pojavili su se na najvišim razinama srednjoškolskih matematičkih natjecanja. Ukoliko ništa nije napomenuto, s_α, s_β i s_γ su duljine simetrala kutova trokuta, v_a, v_b i v_c duljine visina te R i r polumjeri opisane i upisane kružnice trokutu.

Zadatak 1. *(Crux Mathematicorum, 1992.)* Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha C. Neka je D nožište visine povučene iz vrha C te neka su E i F sjecišta simetrale kuta $\sphericalangle CAB$ s $\overline{CD}$ i $\overline{CB}$ redom. Dokažite da je $|BD| > 2|EF|$.

Rješenje.

Označimo s G nožište okomice iz vrha C na pravac EF. Kako je $\overline{AF}$ simetrala kuta $\sphericalangle CAB$, vrijedi $\sphericalangle EAD = \dfrac{\alpha}{2}$. Označimo s δ mjeru kuta $\sphericalangle AED$.



Trokut $\triangle CEG$ je pravokutan s pravim kutom kod vrha G i vrijedi $\sphericalangle CEG = \delta$ jer su to vršni kutovi. Iz toga slijedi da je $\sphericalangle GCE = \dfrac{\alpha}{2}$. Trokut $\triangle ACF$ je pravokutan s pravim kutom kod vrha C i $\sphericalangle CAF = \dfrac{\alpha}{2}$. Dakle, $\sphericalangle AFC = \delta$. Sada za pravokutan trokut $\triangle FCG$ s pravim kutom kod vrha G vrijedi da je $\sphericalangle FCG = \dfrac{\alpha}{2}$. Stoga je $\triangle CEF$ jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{FE}$, tj. $|FC| = |CE|$. Prema *K-K-K* teoremu o sličnosti vrijedi da su navedeni trokuti međusobno slični.

Trebamo izračunati omjer $\frac{|BD|}{|EF|}$. Primjenom Euklidovog teorema o pravokutnom trokutu na trokut $\triangle ABC$ dobivamo da je $a = \sqrt{c \cdot |BD|}$, tj. $|BD| = \frac{a^2}{c}$.

Zbog sličnosti trokuta $\triangle CGE$ i $\triangle CAF$ vrijedi

$$\frac{|CE|}{|GE|} = \frac{|FA|}{|FC|},$$

pa je

$$|GE| = \frac{|CE| \cdot |FC|}{|FA|} = \frac{|FC|^2}{|FA|}.$$

Nadalje, prema Korolaru 2.1.5 vrijedi

$$|FC| = \frac{ab}{b+c}.$$

Primjenom Pitagorinog teorema na pravokutan trokut $\triangle AFC$, a zatim na trokut $\triangle ABC$ dobivamo

$$|AF| = \sqrt{b^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2}} = \frac{b}{b+c}\sqrt{(b+c)^2 + a^2} = \frac{b}{b+c}\sqrt{2c^2 + 2bc}.$$

Sada je

$$\frac{|BD|}{|EF|} = \frac{|BD|}{2|GE|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BD| \cdot |FA|}{|FC|^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{c} \cdot \frac{\frac{b}{b+c}\sqrt{2c^2+2bc}}{\frac{a^2b^2}{(b+c)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b+c}{bc} \cdot \sqrt{2c^2 + 2bc}.$$

Ocijenimo sada $\frac{|BD|}{|EF|}$. Kako je $c > b$, to je $\frac{|BD|}{|EF|} > \frac{1}{2} \cdot \frac{b+c}{bc}\sqrt{2c^2 + 2b^2}$.
Zbog odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi

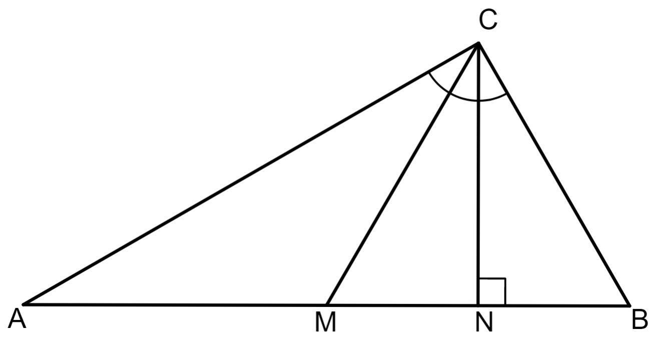
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b+c}{bc}\sqrt{2c^2 + 2b^2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{bc}}{bc} \cdot \sqrt{2\sqrt{4b^2c^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4bc}{bc} = 2.$$

Dakle, dobili smo $\frac{|BD|}{|EF|} > 2$, tj. $|BD| > 2|EF|$.

Zadatak 2. Dokažite da je trokut $\triangle ABC$ pravokutan ako težišnica i visina iz vrha C dijele kut pri vrhu C na tri sukladna dijela.

Rješenje.

Neka težišnica i visina iz vrha C sijeku stranicu $\overline{AB}$ u točkama M i N redom. Pokažimo najprije da su pravokutni trokuti $\triangle MNC$ i $\triangle NBC$ sukladni.
Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $\sphericalangle NCM = \sphericalangle BCN$.



Kateta $\overline{CN}$ im je zajednička pa prema *K-S-K* teoremu o sukladnosti vrijedi $\triangle MNC \cong \triangle NBC$. Dakle, $|MN| = |NB|$.
Nadalje, budući da je $\overline{CM}$ težišnica trokuta $\triangle ABC$, vrijedi $|AM| = |MB|$.
Iz uvjeta zadatka je $\sphericalangle MCA = \sphericalangle NCM$, pa je $\overline{CM}$ simetrala kuta $\sphericalangle NCA$.
Primjenom teorema o simetrali kuta u trokutu na trokut $\triangle ANC$ dobivamo

$$\frac{|AC|}{|CN|} = \frac{|AM|}{|MN|} = \frac{|MB|}{|MN|} = \frac{2|MN|}{|MN|} = 2,$$

tj.

$$|AC| = 2|CN|.$$

Pokažimo sada da je pravokutni trokut $\triangle ANC$ polovica jednakostraničnog trokuta. Naime, prema Pitagorinom teoremu vrijedi da je

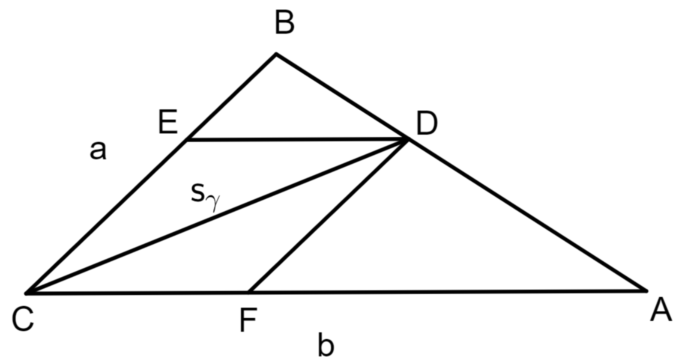
$$|AN| = \sqrt{|AC|^2 - |CN|^2} = \sqrt{|AC|^2 - \frac{|AC|^2}{4}} = \sqrt{\frac{3|AC|^2}{4}} = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2}.$$

Dakle, $\overline{AN}$ je visina jednakostraničnog trokuta čija je duljina stranice $|AC|$. Stoga je $\sphericalangle NCA = 60°$, tj. $\sphericalangle MCA = 30°$. Prema tome, $\sphericalangle MCA = \sphericalangle NCM = \sphericalangle BCN = 30°$, odakle je $\sphericalangle BCA = 90°$.

Zadatak 3. Konstruirajte trokut ako je zadano a, b i s_γ.

Rješenje.

<u>*Analiza:*</u> Neka je CD simetrala kuta $\sphericalangle ACB = \gamma$, tj. $\overline{CD} = s_\gamma$.
Točkom D povucimo paralele sa stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.



Označimo sjecišta tih paralela sa stranicama točkama E i F kao na slici.
Pokažimo da je dobiveni četverokut $CFDE$ romb. Kako je $CFDE$ paralelogram, dovoljno je pokazati da je $|CF| = |FD|$.
Vrijedi da je $\sphericalangle DCF = \dfrac{\gamma}{2}$. Kako je $\overline{FD} \parallel \overline{CE}$, to je $\sphericalangle AFD = \gamma$, pa je $\sphericalangle CFD = 180° - \gamma$, odakle je $\sphericalangle CDF = \dfrac{\gamma}{2}$. Dakle, trokut $\triangle CFD$ je jednakokračan, pa je $|CF| = |FD|$.
Izračunajmo sada duljinu stranice tog romba.
Zbog sličnosti trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle DBE$ imamo da je

$$\frac{|AC|}{|ED|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AD| + |BD|}{|BD|} = \frac{|AD|}{|BD|} + 1.$$

Prema teoremu o simetrali kuta u trokutu vrijedi $\dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{b}{a}$, pa je $\dfrac{|AC|}{|ED|} = \dfrac{b}{a} + 1$, odakle je $\dfrac{1}{|ED|} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, tj. $|ED| = \dfrac{ab}{a+b}$.

<u>*Konstrukcija:*</u>

1° Koristeći Talesov teorem o proporcionalnosti dužina konstruirajmo dužinu $\overline{CF}$ takvu da je $|CF| = \dfrac{ab}{a+b}$.

2° Konstruirajmo pomoćni trokut $\triangle CFD$ čije su stranice duljina $|CF| = |FD| = \dfrac{ab}{a+b}$ i $|CD| = s_\gamma$.
3° Točkom D povucimo paralelu s dužinom $\overline{CF}$, a točkom C paralelu s dužinom $\overline{DF}$. Sjecište tih paralela je točka E.
4° Produljimo dužinu $\overline{CF}$ preko vrha F do vrha A tako da je $|CA| = b$.
5° Presjek pravaca AD i CE je vrh B.

Rasprava:

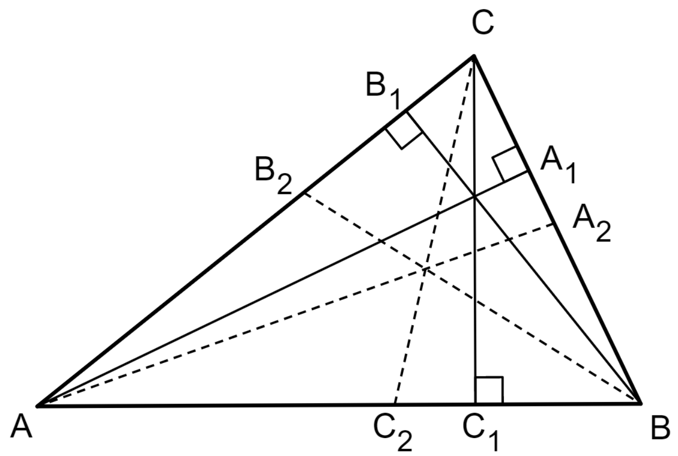
Zadatak ima jedinstveno rješenje ako je moguće konstruirati jednakokračan trokut CFD, tj. ako je $\dfrac{2ab}{a+b} > s_\gamma$.

Zadatak 4. *(Albanija, 2002.)* Dokažite da u svakom trokutu vrijedi

$$\frac{v_a}{s_\alpha^2} + \frac{v_b}{s_\beta^2} + \frac{v_c}{s_\gamma^2} = \frac{R+2r}{2Rr}.$$

Rješenje.

Neka su A_1, B_1 i C_1 redom nožišta visina povučenih iz vrhova A, B i C, te neka su A_2, B_2 i C_2 redom sjecišta simetrala kutova $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ s nasuprotnim stranicama.



Kako je površina trokuta $\triangle ABC$ jednaka zbroju površina trokuta $\triangle ABA_2$ i $\triangle AA_2C$, imamo da je

$$bs_\alpha \sin\frac{\alpha}{2} + cs_\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = 2P,$$

odakle je

$$s_\alpha = \frac{2P}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Zbog toga je

$$\frac{v_a}{s_\alpha^2} = \frac{\frac{2P}{a}}{\frac{4P^2}{(b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{(b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2aP} = \frac{(b+c)^2(s-b)(s-c)}{2Pabc} = \frac{(b+c)^2(s-b)(s-c)}{8P^2R}, \tag{2.15}$$

pri čemu smo iskoristili Teorem 1.2.9 i formulu za sinus polovičnog kuta.
U daljnjem tekstu ćemo radi preglednosti koristiti oznaku $\sum$ za zbroj traženih simetričnih elemenata, npr. oznaka $\sum \frac{v_a}{s_\alpha^2}$ označavat će $\frac{v_a}{s_\alpha^2} + \frac{v_b}{s_\beta^2} + \frac{v_c}{s_\gamma^2}$.
Zbog simetrije, iz (2.15) dobivamo jednakost

$$\sum \frac{v_a}{s_\alpha^2} = \frac{\sum(b+c)^2(s-b)(s-c)}{8P^2R}. \tag{2.16}$$

Kako je

$$(b+c)^2 = (s+s-a)^2 = s^2 + 2s(s-a) + (s-a)^2,$$

primjenom Heronove formule dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum(b+c)^2(s-b)(s-c) &= s^2\sum(s-b)(s-c) + 6s(s-a)(s-b)(s-c) \\
&\quad + (s-a)(s-b)(s-c)\sum(s-a) \\
&= s^2\sum(s-b)(s-c) + 7P^2 \\
&= s\left[s\sum(s-b)(s-c) - (s-a)(s-b)(s-c)\right] + 8P^2. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned}
&s\sum(s-b)(s-c) - (s-a)(s-b)(s-c) \\
&= s(s-b)(s-c) - (s-a)(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-b) + s(s-a)(s-c) \\
&= [s-(s-a)]\,(s-b)(s-c) + s(s-a)\,[s-b+s-c] \\
&= a(s-b)(s-c) + as(s-a) = a\,[(s-b)(s-c) + s(s-a)] \\
&= a\left[s^2 - bs - cs + bc + s^2 - as\right] = a\left[bc + 2s^2 - (a+b+c)s\right] \\
&= a\left[bc + 2s^2 - 2s^2\right] = abc = 4PR.
\end{aligned}$$

Sada, uvrštavanjem dobivene jednakosti u (2.17) dobivamo da je

$$\sum(b+c)^2(s-b)(s-c) = 4PRs + 8P^2 = 4P(Rs + 2P).$$

Iz (2.16) i Teorema 1.2.4 slijedi jednakost

$$\sum \frac{v_a}{s_\alpha^2} = \frac{4P(Rs + 2P)}{8P^2R} = \frac{Rs + 2P}{2PR} = \frac{Rs + 2rs}{2Rrs} = \frac{R + 2r}{2Rr},$$

što je i trebalo dokazati.

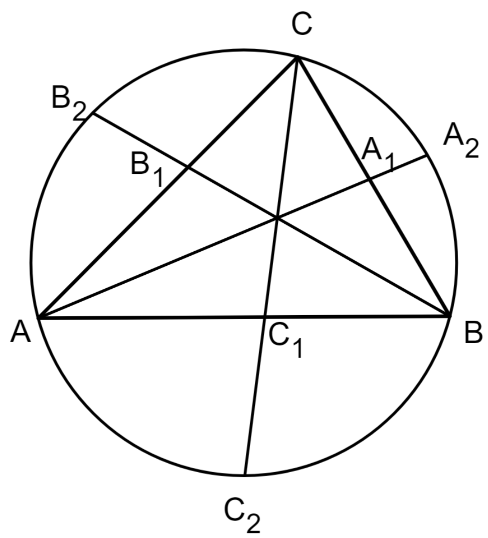
Zadatak 5. *(Brazil, 1999.)* U trokutu $\triangle ABC$, simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ i opisanu kružnicu redom u točkama A_1 i A_2. Točke B_1, B_2, C_1 i C_2 definirane su na isti način. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{|A_1A_2|}{|BA_2| + |CA_2|} + \frac{|B_1B_2|}{|CB_2| + |AB_2|} + \frac{|C_1C_2|}{|AC_2| + |BC_2|} \geq \frac{3}{4}.$$

Rješenje.

Kako je AA_1 simetrala kuta $\sphericalangle CAB$, to su mjere obodnih kutova nad tetivama $\overline{BA_2}$ i $\overline{CA_2}$ jednake. Stoga je

$$|BA_2| = |CA_2|. \tag{2.18}$$



Nadalje, $\sphericalangle CAA_2 = \sphericalangle CBA_2$ jer su to kutovi nad istim lukom, te $\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle BA_1A_2$ jer su to vršni kutovi. Zbog toga su prema *K-K-K* teoremu o sličnosti trokuti $\triangle AA_1C$ i $\triangle A_1BA_2$ slični. Dakle, vrijedi

$$\frac{|A_1A_2|}{|BA_2|} = \frac{|CA_1|}{|AC|} = \frac{a}{b+c} \tag{2.19}$$

jer prema Korolaru 2.1.5 vrijedi da je $|CA_1| = \dfrac{ab}{b+c}$. Sada iz (2.18) i (2.19) dobivamo jednakost

$$\frac{|A_1A_2|}{|BA_2| + |CA_2|} = \frac{a}{2(b+c)}$$

pa lijeva strana zadane nejednakosti poprima oblik

$$\frac{1}{2}\sum \frac{a}{b+c}.$$

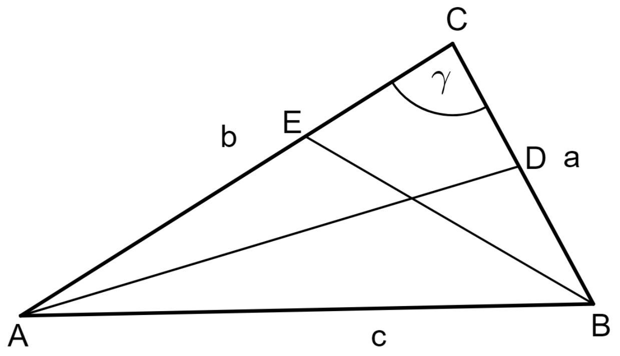
Uvedimo sada sljedeću supstituciju: $a + b = x$, $b + c = y$, $a + c = z$. Korištenjem navedene supstitucije i odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine dobivamo

$$\frac{1}{2}\sum \frac{a}{b+c} = \frac{1}{4}\sum \frac{x+y-z}{z} = \frac{1}{4}\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) - \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}\sum\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Pritom jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$, tj. $a = b = c$.

Zadatak 6. *(Švedska, 2005.)* U trokutu $\triangle ABC$ simetrale kutova $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle ABC$ sijeku nasuprotne stranice redom u točkama D i E. Ako je $\gamma > 60°$, dokažimo da je $|AE| + |BD| < c$.

Rješenje.



Prema Korolaru 2.1.5 imamo da je $|AE| = \dfrac{bc}{a+c}$ i $|BD| = \dfrac{ac}{b+c}$.

Stoga vrijedi

$$\frac{|AE| + |BD|}{c} = \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c} = \frac{a^2+b^2+ac+bc}{(a+c)(b+c)}. \tag{2.20}$$

S obzirom da je funkcija kosinus padajuća na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, vrijedi $\cos\gamma < \cos 60°$. Zbog toga, korištenjem poučka o kosinusu, dobivamo da je

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} < \frac{1}{2},$$

odakle je

$$a^2 + b^2 < ab + c^2. \tag{2.21}$$

Sada zbog (2.21) za brojnik izraza (2.20) dobivamo

$$a^2 + b^2 + ac + bc < ab + c^2 + ac + bc = a(b+c) + c(b+c) = (a+c)(b+c).$$

Dakle, vrijedi nejednakost

$$\frac{|AE| + |BD|}{c} < \frac{(a+c)(b+c)}{(a+c)(b+c)} = 1,$$

odakle je $|AE| + |BD| < c$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 7. *(Moldavija, 2003.)* Dokažite da u svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha \le s\sqrt{3r^2 + 12Rr}.$$

Rješenje.

Iz već dokazanih nejednakosti $s_\alpha \le \sqrt{s(s-a)}$, $s_\beta \le \sqrt{s(s-b)}$ i $s_\gamma \le \sqrt{s(s-c)}$ te odnosa između aritmetičke i kvadratne sredine, dobivamo sljedeći niz nejednakosti

$$\begin{aligned}
s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha &\le s\sqrt{(s-a)(s-b)} + s\sqrt{(s-b)(s-c)} + s\sqrt{(s-c)(s-a)} \\
&\le s\sqrt{3\left[(s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a)\right]} \\
&= s\sqrt{3\left[(s^2-(a+b)s+ab) + (s^2-(b+c)s+bc) + (s^2-(a+c)s+ac)\right]} \\
&= s\sqrt{3(ab+bc+ac-s^2)}.
\end{aligned}$$

Sada, korištenjem jednakosti (2.14), dobivena desna strana nejednakosti poprima oblik

$$s\sqrt{3(ab+bc+ac-s^2)} = s\sqrt{3(r^2+4Rr)} = s\sqrt{3r^2+12Rr},$$

što je i trebalo dokazati. Pritom, jednakost vrijedi samo u slučaju jednakostraničnog trokuta.

Poglavlje 3

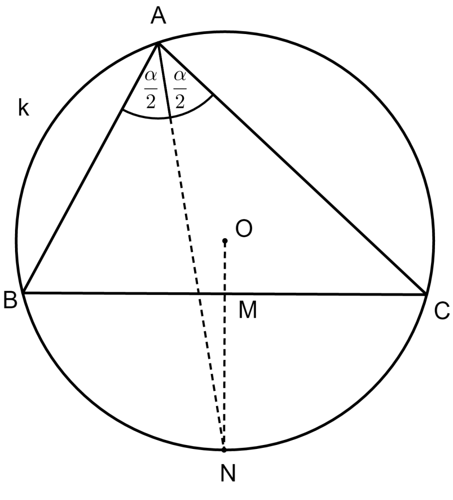
Simetrala kuta i opisana kružnica

U ovom poglavlju navest ćemo dva teorema koji povezuju simetralu kuta trokuta i trokutu opisanu kružnicu. Primjenom tih teorema rješavaju se neki vrlo složeni problemi koji se pojavljuju na natjecanjima.

3.1 Simetrala kuta raspolavlja luk

Teorem 3.1.1. *Simetrala unutarnjeg kuta iz jednog vrha trokuta i simetrala stranice nasuprot tom vrhu sijeku se na tom trokutu opisanoj kružnici.*

Dokaz. Neka je kružnica k opisana trokutu $\triangle ABC$.



Simetrala stranice $\overline{BC}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki M, a kružnicu k u točki N.

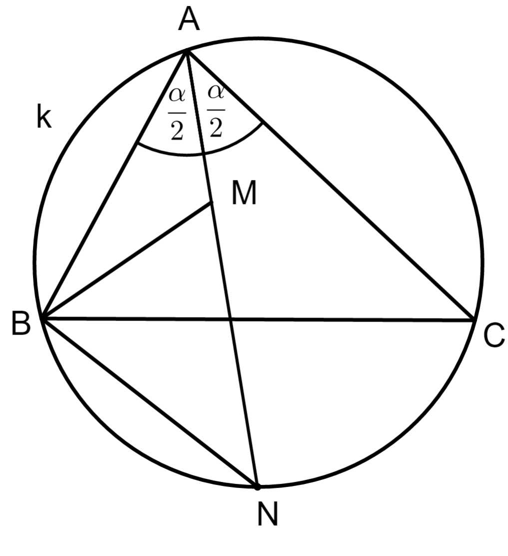
S obzirom da ona raspolavlja stranicu $\overline{BC}$, tj. $|BM| = |MC|$ i okomita je na nju, ona raspolavlja i pripadni luk $\widehat{BC}$, tj. $|\widehat{BN}| = |\widehat{NC}|$.
Budući da su obodni kutovi nad jednakim lukovima sukladni, vrijedi da je

$$\sphericalangle BAN = \sphericalangle NAC = \frac{\alpha}{2}.$$

Dakle, simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ prolazi točkom N čime je dokazana tvrdnja teorema. □

Teorem 3.1.2. *Neka simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$ u točki $N \neq A$. Neka je M točka na dužini $\overline{AN}$. Točka M je središte trokutu $\triangle ABC$ upisane kružnice ako i samo ako je $|MN| = |BN|$.*

Dokaz. Kako je AN simetrala kuta $\sphericalangle BAC$, te iz činjenice da su kutovi $\sphericalangle NBC$ i $\sphericalangle CAN$ obodni kutovi nad istim lukom, vrijedi $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAN = \sphericalangle CBN$.



Kako točka M leži na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$, ona je središte upisane kružnice trokutu $\triangle ABC$ ako i samo ako leži na simetrali kuta $\sphericalangle ABC$, a to je dalje ekvivalentno s

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sphericalangle CBM = \sphericalangle ABM \\
&\Leftrightarrow \sphericalangle MBN - \sphericalangle CBN = \sphericalangle BMN - \sphericalangle BAN \\
&\Leftrightarrow \sphericalangle MBN = \sphericalangle BMN \\
&\Leftrightarrow |MN| = |BN|.
\end{aligned}$$

□

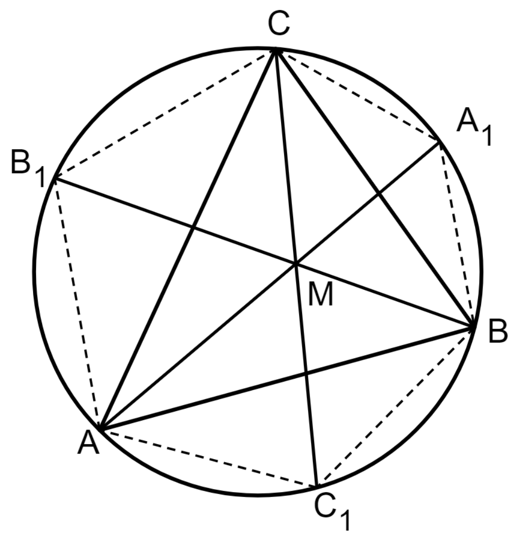
3.2 Zadatci

Riješimo sada neke složenije zadatke koji su se pojavili na natjecanjima, a rješavaju se primjenom teorema iz prethodne točke.

Zadatak 1. *(Australija 1982.)* Neka u trokutu $\triangle ABC$ simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe trokutu opisanu kružnicu u točki A_1, simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ u točki B_1 i simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ u točki C_1. Dokažite da vrijedi $|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| > |AB| + |BC| + |CA|$.

Riješenje.

Neka je M središte trokutu upisane kružnice.



Prema Teoremu 3.1.2 vrijedi

$$|MC_1| = |AC_1| = |BC_1|,$$

tj.

$$2|MC_1| = |AC_1| + |BC_1|.$$

Primjenom nejednakosti trokuta na trokut $\triangle AC_1B$ dobivamo

$$|AC_1| + |BC_1| > |AB|.$$

Dakle, $2|MC_1| > |AB|$. Analogno bismo dobili $2|MA_1| > |BC|$ i $2|MB_1| > |AC|$.

Također, zbog nejednakosti trokuta vrijede nejednakosti

$$|AM| + |BM| > |AB|, |BM| + |CM| > |BC| \text{ i } |CM| + |AM| > |AC|.$$

Zbrajanjem svih nejednakosti dobivamo

$$2|MC_1|+2|MA_1|+2|MB_1|+|AM|+|BM|+|BM|+|CM|+|CM|+|AM| > 2|AB|+2|BC|+2|AC|.$$

No, kako vrijedi $|AA_1| = |AM| + |MA_1|$, $|BB_1| = |BM| + |MB_1|$ i $|CC_1| = |CM| + |MC_1|$, uvrštavanjem u prethodnu nejednakost dobivamo

$$2(|AA_1| + |BB_1| + |CC_1|) > 2(|AB| + |BC| + |CA|),$$

tj.

$$|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| > |AB| + |BC| + |CA|$$

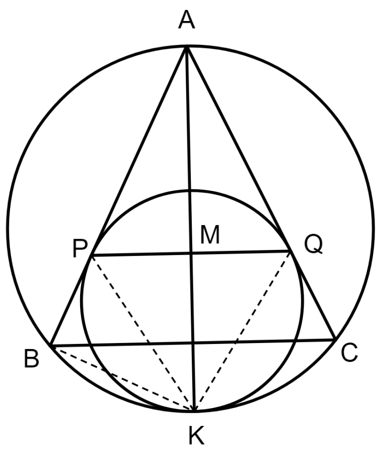
što je i trebalo dokazati.

Sljedeća tri zadatka pojavila su se na međunarodnoj matematičkoj olimpijadi.

Zadatak 2. *(IMO 1989.)* Neka je ABC jednakokračan trokut s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Kružnica k iznutra dodiruje trokutu opisanu kružnicu, te stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama P i Q redom. Dokažite da je polovište dužine $\overline{PQ}$ središte tom trokutu upisane kružnice.

Rješenje.

Označimo s M poloviše dužine $\overline{PQ}$ i s K sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i luka $\widehat{BC}$ kao na slici. Zbog simetrije je $\overline{AK}$ promjer trokutu ABC opisane kružnice, a K je polovište kružnog luka $\widehat{PQ}$ kružnice k.



Promatrajmo sada kružnicu k, njezinu tetivu $\overline{PK}$ i tangentu AB. Prema Teoremu 1.1.9 vrijedi $\sphericalangle BPK = \sphericalangle PQK$, a zbog simetrije je $\sphericalangle KPQ = \sphericalangle PQK$. Dakle, $\sphericalangle BPK = \sphericalangle KPM$ iz čega slijedi da je PK simetrala kuta $\sphericalangle BPQ$. Prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom vrijedi $\sphericalangle ABK = 90^\circ = \sphericalangle PMK$, što znači da se točke P, M, B i K nalaze na kružnici promjera $\overline{PK}$. Dakle, korištenjem Korolara 1.1.5 dobivamo tvrdnju

$$\sphericalangle MBK = \sphericalangle MPK = \sphericalangle BPK = \sphericalangle BMK$$

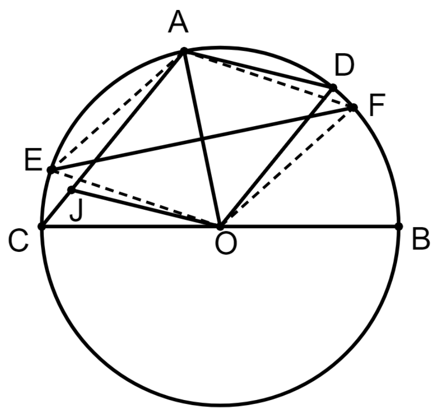
iz čega je

$$|KM| = |KB|.$$

Sada prema Teoremu 3.1.2 slijedi da je točka M središte upisane kružnice trokutu $\triangle ABC$.

Zadatak 3. *(IMO 2002.)* Neka je $\overline{BC}$ promjer kružnice k sa središtem O. Neka je točka A na kružnici k takva da je $0^\circ < \sphericalangle AOB < 120^\circ$, a točka D polovište luka $\widehat{AB}$ koji ne sadrži točku C. Pravac kroz točku O paralelan s pravcem AD siječe AC u točki J. Simetrala dužine $\overline{OA}$ siječe kružnicu k u točkama E i F. Dokažite da je točka J središte upisane kružnice trokutu $\triangle CEF$.

Rješenje.



Zbog uvjeta zadatka $\sphericalangle AOB < 120^\circ$, točka J se nalazi unutar trokuta CEF. Radijus $\overline{OA}$ i tetiva $\overline{EF}$ su okomiti i međusobno se raspolavljaju iz čega slijedi da je četverokut $EOFA$ romb. Stoga je točka A polovište kružnog luka $\widehat{EF}$.

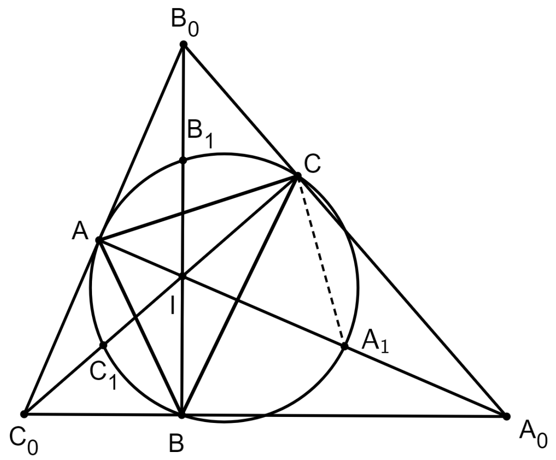
Znamo da u rombu $EOFA$ vrijedi jednakost sljedećih kutova:

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle OEF = \sphericalangle AFE = \sphericalangle EFO.$$

Također, vrijedi $\sphericalangle ECA = \sphericalangle EFA$ i $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ACF$ jer su to obodni kutovi nad istim lukovima.
Dakle, vrijedi $\sphericalangle ECA = \sphericalangle ACF$, odnosno CA je simetrala kuta $\sphericalangle ECF$.
Kako je $|OA| = |OC|$ i $\sphericalangle AOD = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle OAC$, slijedi $\overline{DO} \parallel \overline{AJ}$. Stoga je četverokut $ODAJ$ paralelogram. Dakle, $|AJ| = |DO| = |EO| = |AE|$. Sada primjenom Teorema 3.1.2 dolazimo do tražene tvrdnje.

Zadatak 4. *(IMO 1989.)* U šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$, simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe trokutu opisanu kružnicu u točki A_1. Na isti su način definirane točke B_1 i C_1. Neka je točka A_0 sjecište pravca AA_1 sa simetralama vanjskih kutova kod vrhova B i C. Analogno su definirane točke B_0 i C_0. Dokažite da vrijede sljedeće tvrdnje:
a) Površina trokuta $\triangle A_0B_0C_0$ je dvostruko veća od površine šesterokuta $AC_1BA_1CB_1$.
b) Površina trokuta $\triangle A_0B_0C_0$ je najmanje četiri puta veća od površine trokuta $\triangle ABC$.

Rješenje.

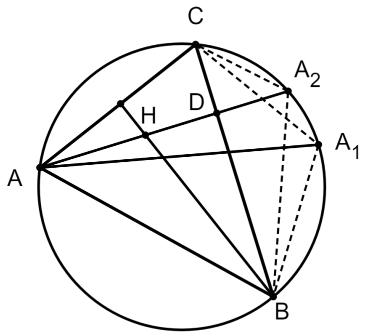


a) Neka je točka I središte upisane kružnice trokutu $\triangle ABC$. S obzirom da su simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta u trokutu okomite, vrijedi da je $\sphericalangle B_0BA_0 = 90°$. Prema Teoremu 3.1.2 je $|A_1I| = |A_1B|$. Dakle, A_1 je polovište hipotenuze pravokutnog trokuta $\triangle IBA_0$ iz čega slijedi

$$P(\triangle IBA_0) = 2P(\triangle BIA_1).$$

Rastavljanjem šesterokuta $AC_1BA_1CB_1$ na šest trokuta sa zajedničkim vrhom u točki I i primjenom analognog zaključka kao i u prethodnom koraku na svih šest trokuta, dobivamo traženu tvrdnju.

b) Uočimo najprije da je zbog a) dijela zadatka dovoljno dokazati da vrijedi nejednakost $P(AC_1BA_1CB_1) \geq 2P(ABC)$.

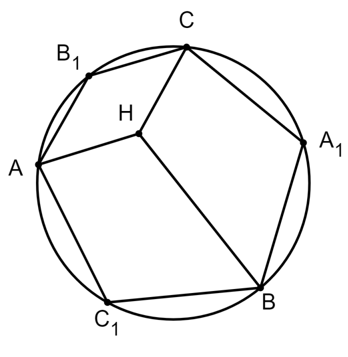


Neka je H ortocentar trokuta ABC. Pravac AH siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, a kružnicu opisanu trokutu ABC u točki A_2. Primjenom Korolara 1.1.5 o obodnim kutovima nad istim lukom, imamo

$$\sphericalangle A_2BC = \sphericalangle A_2AC = \sphericalangle DAC = 90^\circ - \sphericalangle ACD = \sphericalangle HBC$$

Analogno dobivamo $\sphericalangle A_2CB = \sphericalangle HBC$ iz čega primjenom K-S-K teorema o sukladnosti slijedi $\triangle BA_2C \cong \triangle BHC$. Kako je točka A_1 polovište luka $\widehat{BC}$, udaljenost točke A_1 od pravca BC ne može biti manja od udaljenosti točke A_2 do tog pravca. Dakle,

$$P(\triangle BA_1C) \geq P(\triangle BA_2C) \Rightarrow P(\square BA_1CH) \geq 2(P\triangle BHC).$$

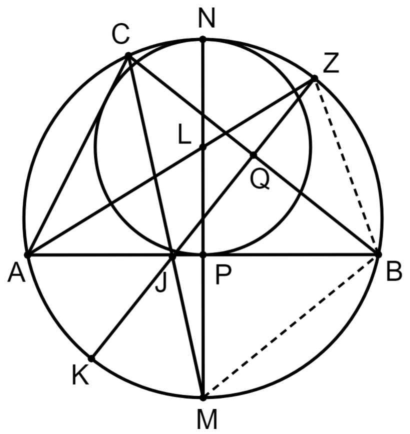


Konačno, rastavljanjem šesterokuta $AC_1BA_1CB_1$ na tri četverokuta sa zajedničkim vrhom H, kao na slici, slijedi tvrdnja.

Poglavlje završavamo zadatkom koji se pojavio na Azijsko - pacifičkoj matematičkoj olimpijadi.

Zadatak 5. *(APMO 2006.)* Neka su A i B dvije različite točke na danoj kružnici k i točka P polovište dužine $\overline{AB}$. Neka kružnica k_1 dodiruje $\overline{AB}$ u točki P te neka dodiruje kružnicu k. Neka je t tangenta točkom A na kružnicu k_1 različita od AB. Nadalje, neka je točka $C \neq A$ sjecište tangente t i kružnice k. Točka Q je polovište dužine $\overline{BC}$, a k_2 kružnica koja dodiruje $\overline{BC}$ u točki Q i dodiruje $\overline{AC}$. Dokažite da kružnica k_2 dodiruje kružnicu k.

Rješenje.



Neka simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe kružnicu k u točkama M i N kao na slici. Zbog simetrije vrijedi da je $\overline{NP}$ promjer kružnice k_1, a njegovo polovište, točka L, središte kružnice k_1. Neka pravac AL siječe kružnicu k u točki Z. Zatim, pravac ZQ siječe CM u točki J i kružnicu k u točki K.
Kako su AB i AC tangente na kružnicu k_1, AL raspolavlja kut $\sphericalangle CAB$, pa je točka Z polovište luka $\widehat{BC}$. Prema Teoremu 3.1.1 ZQ je simetrala stranice $\overline{BC}$.
Kako je Q polovište od $\overline{BC}$, imamo $\sphericalangle ZQB = 90° = \sphericalangle LPA$ i $\sphericalangle JQC = 90° = \sphericalangle MPB$.
Nadalje, $\sphericalangle ZBQ = \sphericalangle ZBC = \sphericalangle ZAC = \sphericalangle LAP$ jer su to obodni kutovi nad istim lukom. Dakle, trokuti $\triangle ZQB$ i $\triangle LPA$ su slični.
Kako je M polovište luka AMB, vrijedi $\sphericalangle JCQ = \sphericalangle MCB = \sphericalangle MCA = \sphericalangle MBP$ iz čega sijedi da su i trokuti $\triangle JQC$ i $\triangle MPB$ slični.
Primjenom Teorema 1.1.8 o potenciji točke dobivamo

$$|AP| \cdot |BP| = |NP| \cdot |MP| = 2|LP| \cdot |MP|. \tag{3.1}$$

Zbog navedenih sličnosti trokuta i jednakosti (3.1) vrijedi

$$\frac{1}{2} = \frac{|LP| \cdot |MP|}{|AP| \cdot |BP|} = \frac{|ZQ| \cdot |JQ|}{|BQ| \cdot |CQ|}.$$

Ponovno, zbog Teorema 1.1.8 vrijedi $|KQ| \cdot |ZQ| = |BQ| \cdot |CQ|$.
Stoga je $|KQ| = \dfrac{|BQ| \cdot |CQ|}{|ZQ|} = 2|JQ|$, iz čega slijedi da je točka J polovište dužine $\overline{KQ}$.
Stoga kružnica sa središtem u točki J i promjerom $\overline{KQ}$ dodiruje kružnicu k u točki K i dužinu $\overline{BC}$ u točki Q. Kako je J na simetrali kuta $\sphericalangle BCA$, ta kružnica također dodiruje i AC. Dakle, ta kružnica je k_2.

Poglavlje 4

Steiner - Lehmusov teorem

4.1 Povijesna crtica

Steiner - Lehmusov teorem privlači mnogo pozornosti sve od svog začetka 1840. godine, a čak se i danas, nakon što je prošlo više od 150 godina, pojavljuju njegovi razni dokazi.
Još od približno 300.g. pr.Kr. Euklid je pokušavao aksiomatizirati geometriju, područje koje se do tada empirijski otkrivalo i spoznavalo. U Euklidovim aksiomima i teoremima opisani su trokuti, četverokuti, kružnice, poligoni, te su opisane i mnoge povezanosti između njih. Zbog tih sličnosti i svojstava, uspostavljene su specifične vrste trokuta: raznostraničan, jednakostraničan te jednakokračan, na kojeg ćemo posebno obratiti pažnju u nastavku ovog rada. Karakteristike težišnica, visina, simetrala kutova, itd. jednakokračnog trokuta detaljno su opisane u Euklidovim Elementima i narednim radovima. Stoga pomalo začuđuje kako postoji svojstvo jednakokračnog trokuta koje se još dokazuje, gotovo 1500 godina kasnije. Pitanje jesu li duljine simetrala kutova jednakokračnog trokuta sukladne bilo je direktna posljedica *K-S-K* teorema o sukladnosti, što je pokazano još u Elementima. No, čini se kako je obrat tog teorema bio zanemaren sljedećih mnogo godina, a novi dokazi se pojavljuju još i danas.
Prvi konkretan dokaz o postavljanju tog pitanja nalazi se u pismu koje je C. H. Lehmus napisao C. Sturmu 1840. godine tražeći od njega geometrijski dokaz. Sturm je taj problem prosljedio drugima, a jedan od prvih koji su dali rješenje tom problemu bio je Jacob Steiner.
Tako je nastao teorem poznat pod nazivom Steiner - Lehmusov teorem: *Ako su duljine simetrala dvaju unutarnjih kutova u trokutu jednake, trokut je jednakokračan.* Steiner - Lehmusov teorem od tada zaokuplja mnogo pažnje, te su se mnogi dokazi pojavljivali narednih stotinjak godina, što je rezultiralo s više od 80 prihvaćenih dokaza.
U nastavku ovog rada pokazat ćemo nekoliko dokaza Steiner - Lehmusovog teorema, a prije toga ćemo se još osvrnuti na njihove sličnosti i različitosti. Najkraći trigonometrijski

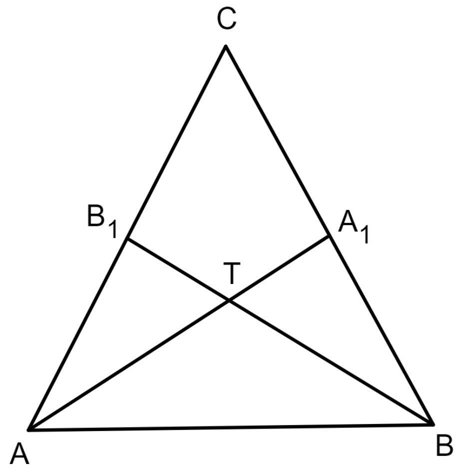
dokaz dao je Mowaffaq Hajja [6] koristeći teorem o simetrali kutova u trokutu i poučak o sinusu, a dokazuje se obratom po kontrapoziciji. Róbert Oláh - Gál i József Sándor u [17] prezentiraju četiri trigonometrijska dokaza. Prvi od njih dao je V. Cristescu 1916. godine, a dokazuje se korištenjem poučka o sinusu i nekoliko trigonometrijskih identiteta. Drugi je dao Plachy 2000. godine, no sličan se može naći i ranije 1983. u djelima Ken Seydela i njegovog studenta Newmana. Dokaz se svodi na kotradikciju, a pritom se koristi formula za površinu trokuta preko sinusa kuta, poučak o sinusu i sinus razlike kutova. Za treći dokaz autor je nepoznat, a potječe iz Rusije. Također se dokazuje svođenjem na kontradikciju te korištenjem formule za površinu trokuta preko sinusa kuta i formule za sinus dvostrukog kuta. Četvrti je dokaz inspiriran dokazom M. Hajje spomenutim maloprije, no u ovom ga radu nećemo navoditi. Svi navedeni dokazi mogu se pronaći u [5].
Spomenimo sada i neke geometrijske dokaze, tj. dokaze korištenjem konstruktivnih metoda. Jedan od njih pripisuje se A. I. Fetisovu, a svodi se na kontradikciju. Dokaz korištenjem konciklličkih točaka pripisuje se G. Gilbertu i D. MacDonnellu te se također svodi na kontradikciju. David Beran u članku *SSA and the Steiner-Lehmus Theorem* iz 1874. predstavlja dokaz napravljen 1840. kojeg pripisuje F. G. Hesseu. Time se to smatra jednim od prvih dokaza koji su se pojavili kao odgovor na Sturmov zahtjev. U tom dokazu koristi se *S-S-K* teorem o sukladnosti i jedan je od direktnih dokaza Steiner - Lehmusovog teorema, tj. ne dokazuje se svođenjem na kontradikciju. K. R. S. Sastry je u članku *A Gergonne Analogue of the Steiner-Lehmus Theorem* dao četiri dokaza teorema od kojih je jedan direktan, a ostala tri se svode na kontradikciju. Detaljnije o tome čitatelj može vidjeti u radu [5].
Čini se kako je svođenje na kontradikciju najčešći način dokazivanja Steiner - Lehmusovog teorema.

4.2 Trokut sa sukladnim težišnicama odnosno visinama

Za razliku od Steiner - Lehmusovog teorema za simetrale, odgovarajući dokaz za težišnice i visine je iznimno jednostavan i ide direktno.

Teorem 4.2.1. *Neka su u trokutu $\triangle ABC$ duljine težišnica povučenih iz vrhova A i B međusobno jednake, tj. $|AA_1| = |BB_1|$, gdje su A_1 i B_1 polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Tada je $|AC| = |BC|$.*

Dokaz. Neka je točka T težište trokuta ABC.



Prema Teoremu 1.3.2 vrijedi

$$|AT| = \frac{2}{3}|AA_1| = \frac{2}{3}|BB_1| = |BT|,$$

zbog čega je

$$|TA_1| = |TB_1|.$$

Kako je $\sphericalangle ATB_1 = \sphericalangle BTA_1$ jer su to vršni kutovi, vrijedi da su trokuti $\triangle ATB_1$ i $\triangle BTA_1$ sukladni prema *S-K-S* poučku o sukladnosti trokuta. Zbog toga je $|AB_1| = |BA_1|$, tj.

$$\frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|BC| \Rightarrow |AC| = |BC|.$$

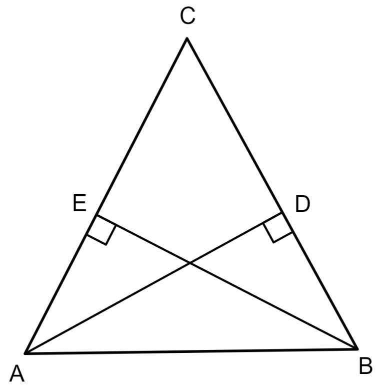
□

Promotrimo sada trokut s dvije sukladne visine.

Teorem 4.2.2. *Neka su u trokutu $\triangle ABC$ duljine visina povučenih iz vrhova A i B međusobno jednake, tj. $|AD| = |BE|$, gdje su D i E nožišta visina na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Tada je $|AC| = |BC|$.*

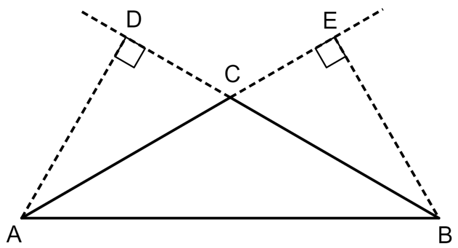
Dokaz. 1. slučaj (visine unutar trokuta)

Pravokutni trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle ABE$ imaju zajedničku hipotenuzu i podudaraju se u jednoj kateti, pa su prema S-S-$K^{>}$ teoremu o sukladnosti trokuta sukladni.



Stoga je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DBA$, odnosno $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$. Budući da su nasuprot jednakim kutovima trokuta pripadne stranice sukladne, to je $|AC| = |BC|$.

2. slučaj (visine izvan trokuta)



Pravokutni trokuti $\triangle ACD$ i $\triangle BCE$ podudaraju se u jednoj stranici te vrijedi $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ECD$ jer su to vršni kutovi. Dakle, trokuti $\triangle ACD$ i $\triangle BCE$ su sukladni prema K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta. Dakle, $|AC| = |BC|$, tj. trokut $\triangle ABC$ je jednakokračan.

□

4.3 Planimetrijski dokazi

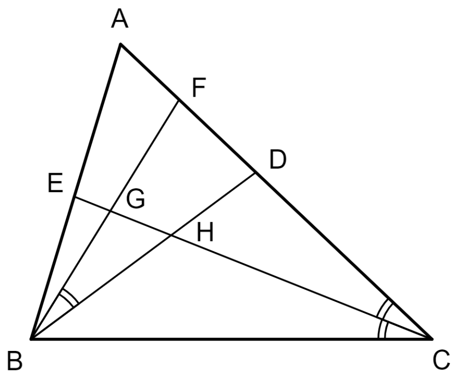
U dokazu Steiner - Lehmusovog teorema u knjigama [1] i [3] koristi se isti princip. U [1] je Lema 4.3.2 navedena kao teorem, a nakon njegovog dokaza navodi se kao korolar Steiner - Lehmusov teorem. U [3] je najprije naveden sam teorem, a potom je dokazana Lema 4.3.2 nakon koje je dokaz teorema naveden kao direktna posljedica leme.

Lema 4.3.1. *Ako dvije tetive na kružnici imaju različite šiljaste obodne kutove, onda manji kut pripada kraćoj tetivi.*

Dokaz. Dvije sukladne tetive imaju sukladne središnje kutove i sukladne obodne kutove. Ako imamo dvije različite tetive, onda je kraća udaljenija od središta kružnice, pa joj je mjera središnjeg kuta manja. Stoga joj je i mjera šiljastog obodnog kuta manja. □

Lema 4.3.2. *U trokutu s dva različita kuta, manji kut ima dulju simetralu.*

Dokaz. Neka u trokutu $\triangle ABC$ vrijedi $\beta > \gamma$.



Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ simetrale tih kutova. Odaberimo na $\overline{AD}$ točku F takvu da vrijedi $\sphericalangle FBD = \sphericalangle ACE = \sphericalangle ECB$. Takva točka postoji jer je $\sphericalangle DBA = \dfrac{\beta}{2} > \dfrac{\gamma}{2} = \sphericalangle ACE$. Neka su G i H sjecišta simetrale $\overline{CE}$ s $\overline{BF}$ i $\overline{BD}$ redom. Prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta, vrijedi $\triangle FBD \sim \triangle FGC$. Stoga je

$$\frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|BD|}{|CG|}. \tag{4.1}$$

Kako je u trokutu $\triangle BFC$ kut kod vrha C manji nego kut kod vrha B, vrijedi da je $|BF| < |CF|$. Stoga je zbog (4.1)

$$|BD| < |CG| < |CE|,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Teorem 4.3.3. ***(Steiner - Lehmusov teorem)*** *Ako su duljine simetrala dvaju unutarnjih kutova u trokutu jednake, trokut je jednakokračan.*

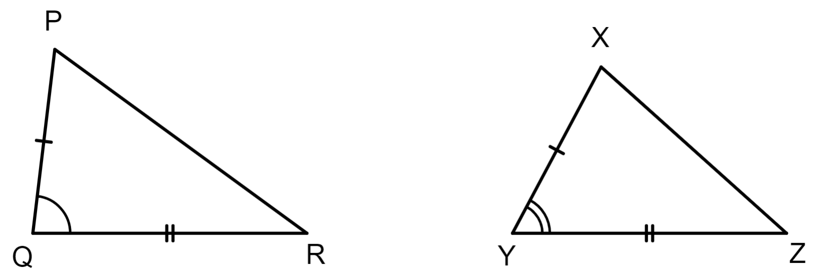
Dokaz 1. Pretpostavimo da je $s_\beta = s_\gamma$. Moguća su tri slučaja, $\beta > \gamma$, $\beta < \gamma$ i $\beta = \gamma$. Ako je $\beta > \gamma$, onda je prema Lemi 4.3.2 $s_\beta < s_\gamma$. Analogno, ako je $\beta < \gamma$, onda je $s_\beta > s_\gamma$. Dakle, mora biti $\beta = \gamma$, tj. trokut je jednakokračan.

□

Pokažimo sada još jedan dokaz Steiner - Lehmusovog teorema. Dokaz koji ćemo sada prezentirati svodi se na kontradikciju. Vrlo je elegantan te je jedan od trenutno najkraćih dokaza koji postoje. U dokazu ćemo koristiti sljedeću lemu:

Lema 4.3.4. *Neka su PQR i XYZ dva trokuta takva da vrijedi $|PQ| = |XY|$ i $|QR| = |YZ|$. Ako je $\sphericalangle PQR > \sphericalangle XYZ$, onda je $|PR| > |XZ|$.*

Dokaz. Označimo $|QR| = |YZ| = x$, $|PQ| = |XY| = y$, $|PR| = z$, $|XZ| = w$ te mjere kutova $\sphericalangle PQR = \delta$, $\sphericalangle XYZ = \varphi$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $z \leq w$.



Primjenom poučka o kosinusu na trokute $\triangle PQR$ i $\triangle XYZ$ dobivamo

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\delta$$
$$w^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi.$$

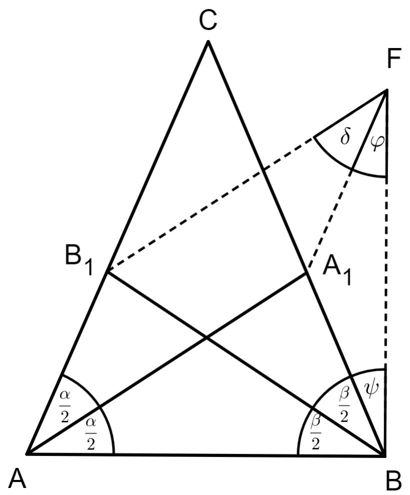
Oduzimanjem dobivenih jednakosti imamo

$$w^2 - z^2 = 2xy(\cos\delta - \cos\varphi).$$

Kako su z i w prirodni brojevi, vrijedi $z^2 \leq w^2$ pa je lijeva strana jednakosti nenegativna. Dakle, $\cos\delta - \cos\varphi \geq 0$. S obzirom da je funkcija kosinus padajuća na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, vrijedi da je $\delta \leq \varphi$ čime smo došli do kontradikcije. □

Vratimo se sada na dokaz Steiner - Lehmusovog teorema.

Dokaz 2. Neka su AA_1 i BB_1 simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$ i neka je $|AA_1| = |BB_1|$. Tada je $\sphericalangle BAA_1 = CAA_1 = \dfrac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle ABB_1 = \dfrac{\beta}{2}$. Da bismo dokazali da je trokut jednakokračan, tj. da vrijedi $|AC| = |BC|$, dovoljno je dokazati da je $\alpha = \beta$. Prepostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da vrijedi $\alpha \neq \beta$.
Tada je ili $\alpha < \beta$ ili $\alpha > \beta$.



Neka je

$$\alpha < \beta. \tag{4.2}$$

Promatrajmo trokute $\triangle ABA_1$ i $\triangle ABB_1$. Kako je $|AA_1| = |BB_1|$, $\overline{AB}$ je zajednička stranica trokutima i zbog (4.2), korištenjem Leme 4.3.4 slijedi da je

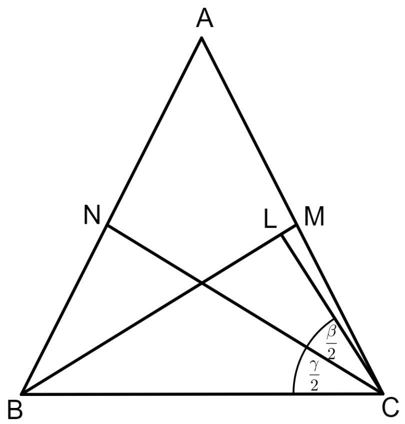
$$|BA_1| < |AB_1|. \tag{4.3}$$

Nadalje, neka je točka F takva da je AA_1FB_1 paralelogram. Označimo mjere kutova $\sphericalangle A_1FB_1 = \delta$, $\sphericalangle A_1FB = \varphi$ i $\sphericalangle A_1BF = \psi$.
Kako je
$$|B_1F| = |AA_1| = |BB_1|,$$
vrijedi da je
$$\sphericalangle BFB_1 = \sphericalangle B_1BF,$$
tj.
$$\delta + \varphi = \frac{\beta}{2} + \psi.$$
No, kako su u paralelogramu nasuprotni kutovi sukladni, slijedi da je
$$\delta = \frac{\alpha}{2}.$$
Prema tome,
$$\frac{\alpha}{2} + \varphi = \frac{\beta}{2} + \psi.$$
Sada zbog (4.2) vrijedi $\varphi > \psi$ iz čega slijedi da je $|BA_1| > |A_1F|$.
Kako je $|A_1F| = |AB_1|$, imamo da je
$$|BA_1| > |AB_1|$$
što je u kontradikciji s (4.3). Dakle, pretpostavka $\alpha < \beta$ nije točna. Analogno bismo zaključili da ne može biti ni $\alpha > \beta$. Dakle, $\alpha = \beta$, što znači da je trokut jednakokračan.

□

U nastavku ćemo navesti još jedan jednostavni geometrijski dokaz Steiner - Lehmusovog teorema, a pripisuje se M. Gardneru. Dokaz je preuzet iz članka [18].

Dokaz 3. Neka je ABC trokut sa sukladnim simetralama kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$, tj. $|BM| = |CN|$ kao na slici. Ako kutovi β i γ nisu sukladni, tada jedan od njih mora biti manji od drugog. Pretpostavimo da je $\beta < \gamma$. Neka je točka L na simetrali $\overline{BM}$ takva da je $\sphericalangle LCN = \frac{1}{2}\beta$. Kako je $\sphericalangle LBN = \sphericalangle LCN$, slijedi da točke L, N, B i C leže na istoj kružnici.
Iz $\beta < \gamma$ slijedi
$$\beta < \frac{1}{2}(\beta + \gamma) < \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90°,$$
tj. vrijedi da je
$$\sphericalangle CBN < \sphericalangle LCB < 90°,$$
što znači da je $|BL| < |BM|$, tj. točka L se nalazi na $\overline{BM}$.



Kako je $|BL| < |CN|$, prema Lemi 4.3.1 slijedi da je $\sphericalangle LCB < \sphericalangle CBN$, tj. $\gamma < \beta$ čime smo došli u kontradikciju s pretpostavkom. Analogno bismo pokazali da ne može biti ni $\gamma < \beta$. Dakle, $\beta = \gamma$, tj. trokut je jednakokračan.

□

4.4 Algebarski i trigonometrijski dokazi

U ovoj ćemo točki najprije dati algebarski dokaz Steiner - Lehmusovog teorema koristeći formule za duljine simetrala kutova u trokutu koje smo izveli u Teoremu 2.2.1, a potom ćemo dati i nekoliko trigonometrijskih dokaza.

Dokaz 1. Neka u trokutu $\triangle ABC$ vrijedi $s_\alpha = s_\beta$. Tada prema Teoremu 2.2.1 vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{s(s-b)} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b(s-a)}}{b+c} = \frac{\sqrt{a(s-b)}}{a+c} \\
&\Leftrightarrow (a+c)^2 \cdot b(s-a) = (b+c)^2 \cdot a(s-b) \\
&\Leftrightarrow \frac{b}{2}(a+c)^2(b+c-a) = \frac{a}{2}(b+c)^2(a+c-b) \\
&\Leftrightarrow b(a+c)^2(b+c) - ab(a+c)^2 = a(b+c)^2(a+c) - ab(b+c)^2 \\
&\Leftrightarrow ab\left[(b+c)^2 - (a+c)^2\right] + (b+c)(a+c)\left[b(a+c) - a(b+c)\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow ab(a+b+2c)(b-a) + c(b+c)(a+c)(b-a) = 0 \\
&\Leftrightarrow (b-a)\left[ab(a+b+2c) + c(b+c)(a+c)\right] = 0
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow b - a = 0$, tj. $\Leftrightarrow a = b$ (jer je izraz u uglatoj zagradi uvijek pozitivan). Dakle, slijedi da je trokut $\triangle ABC$ jednakokračan.

$\square$

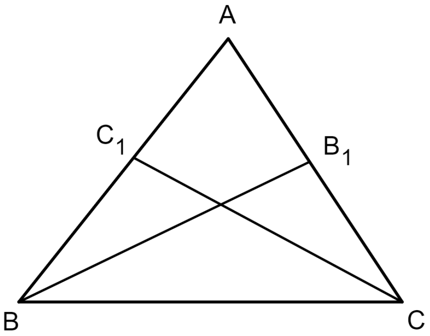
Sljedeći dokaz Steiner - Lehmusovog teorema je vjerojatno jedan od najkraćih trigonometrijskih dokaza, a prema članku [17] pripisuje se V. Cristescu.

Dokaz 2. Označimo s BB_1 i CC_1 simetrale kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$. Primjenom poučka o sinusu na trokut $\triangle BB_1C$ dobivamo

$$\frac{|BB_1|}{\sin\gamma} = \frac{|BC|}{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Kako je $\gamma + \frac{\beta}{2} = \gamma + \dfrac{180^\circ - \gamma - \alpha}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha - \gamma}{2}$, vrijedi da je

$$|BB_1| = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}.$$



Analogno bismo dobili

$$|CC_1| = a \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Uz pretpostavku da je $|BB_1| = |CC_1|$ te koristeći identitete $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, dobivamo

$$\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}. \tag{4.4}$$

Kako je

$$\begin{aligned}\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y)(\cos x\cos y + \sin x\sin y)\\ &= \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y = \cos^2 x\cos^2 y - (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 y)\\ &= \cos^2 x\cos^2 y - (1-\cos^2 x - \cos^2 y + \cos^2 x\cos^2 y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 1,\end{aligned}$$

jednakost (4.4) poprima sljedeći oblik:

$$\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} - 1\right) = \cos\frac{\beta}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right),$$

tj. nakon sređivanja dobivamo

$$\left(\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) = 0.$$

Kako je izraz u drugoj zagradi strogo pozitivan, slijedi da je $\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2} = 0$, tj. $\beta = \gamma$.

□

Godine 2000. i 2001., njemački matematičari D. Plachky i D. Rüthing dali su još neke trigonometrijske dokaze Steiner - Lehmusovog teorema razmatrajući površine odgovarajućih trokuta. Sljedeći je dokaz urađen Plachkyjevom metodom. Dokaz je preuzet iz rada [17].

Dokaz 3. Neka su AA_1 i BB_1 simetrale kutova $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle ABC$. Označimo njihove duljine sa s_α i s_β. Koristeći formulu $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ za površinu trokuta $\triangle ABC$, dobivamo

$$\frac{1}{2}as_\beta\sin\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}cs_\beta\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}bs_\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}cs_\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Prema poučku o sinusu vrijedi

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))}{c}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{c}.$$

Uz pretpostavku da je $s_\alpha=s_\beta$, dobivamo

$$\frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\frac{\beta}{2}+c\sin\frac{\beta}{2}=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\frac{\alpha}{2}+c\sin\frac{\alpha}{2},$$

tj.

$$\sin(\alpha+\beta)\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta-\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}=0. \tag{4.5}$$

Koristeći identitet $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ i formule

$$\sin u-\sin v=2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2},$$

$$\cos u-\cos v=-2\sin\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2},$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\
&=\sin(\alpha+\beta)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\right)+2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\\
&=\sin(\alpha+\beta)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\right)+2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right)\\
&=\sin(\alpha+\beta)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\right)+2\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\right),
\end{aligned}$$

tj. izraz (4.5) poprima oblik

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\left(\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha+\beta}{4}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0.$$

Kako je $\alpha+\beta<180^\circ$, izraz u zagradi je strogo pozitivan iz čega slijedi da je $\alpha=\beta$.

□

Sljedeći dokaz je nešto jednostavniji, a kako stoji u [17] otkrio ga je M. Hajja koji je naišao na njega u nekoj "nepoznatoj" ruskoj knjizi.

Dokaz 4. Koristeći oznake kao i u prethodnom dokazu, zapisivanjem površine trokuta ABC na dva načina (koristeći trokute ABB_1 i BB_1C), imamo

$$\frac{ac}{2}\sin\beta=\frac{cs_\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\frac{as_\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Pomoću formule za sinus dvostrukog kuta dobivamo

$$ac\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{s_\beta(a+c)}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$2ac\cos\frac{\beta}{2}=(a+c)s_\beta,$$

tj. imamo da je

$$s_\beta=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}. \tag{4.6}$$

Analogno,

$$s_\alpha=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{4.7}$$

Sada pretpostavimo da je $a>b$. Onda je $\alpha>\beta$, tj. $\frac{\alpha}{2}>\frac{\beta}{2}$. Kako su kutovi $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ šiljasti, slijedi da je $\cos\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\beta}{2}$.

Također,

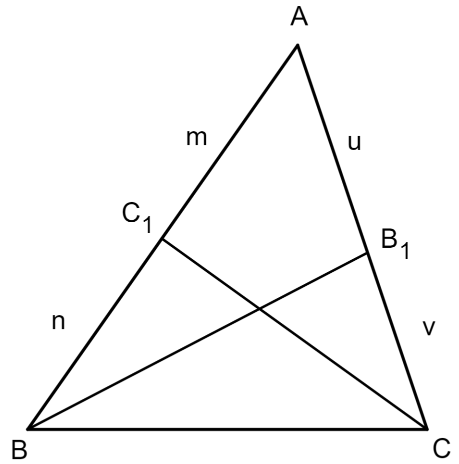
$$\frac{bc}{b+c}<\frac{ac}{a+c}\Leftrightarrow b<a$$

Stoga zbog (4.6) i (4.7) slijedi $s_\alpha>s_\beta$ što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema. Analogno se pokaže da ne vrijedi niti $a<b$. Dakle, $a=b$, tj. trokut je jednakokračan.

□

Poglavlje završavamo dokazom M. Hajjae iz rada [6] koji se smatra najkraćim trigonometrijskim dokazom.

Dokaz 5. Neka su $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ simetrale kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$. Označimo dobivene odsječke s $|AB_1| = u$, $|B_1C| = v$, $|AC_1| = m$, $|C_1B| = n$.



Pretpostavimo da je $\gamma > \beta$ iz čega slijedi da je $c > b$.
Primjenom poučka o sinusu, Teorema 2.1.1 i formule za sinus dvostrukog kuta, dobivamo

$$\frac{b}{u} - \frac{c}{m} = \frac{u+v}{u} - \frac{m+n}{m} = \frac{v}{u} - \frac{n}{m} = \frac{a}{c} - \frac{a}{b} < 0 \tag{4.8}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{\frac{b}{u}}{\frac{c}{m}} &= \frac{b}{c} \cdot \frac{m}{u} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot \frac{m}{u} = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{m}{u} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{u} \cdot \frac{m}{\sin\frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{|BB_1|} \cdot \frac{|CC_1|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} > 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

No, relacija (4.8) daje $\frac{b}{u} < \frac{c}{m}$, dok (4.9) daje $\frac{b}{u} > \frac{c}{m}$. Kontradikcija.

□

Bibliografija

[1] N. Altshiller - Court, *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, Mineola, New York, 2007.

[2] Š. Arslanagić, *Sve o simetralama unutrašnjih uglova trokuta*, Naša škola (Sarajevo), Vol.56, Br. 52, 2010.

[3] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer *Geometry revisited*, Mathematical Association of America, 1967.

[4] B. Dakić, N. Elezović *Matematika 1*, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred prirodoslovno - matematičke gimnazije 2. dio, Element, Zagreb, 2013.

[5] S. R. Gardner, *A Variety of Proofs of the Steiner - Lehmus Theorem*, East Tennessee State University, 2013.

[6] M. Hajja, *A Short Trigonometric Proof of the Steiner - Lehmus Theorem*, Forum Geometricorum, Vol.8, 2008.

[7] H. K. Hoo, K. K. Meng, *The Steiner - Lehmus theorem*, Mathematical Medley, Vol.22, 1995.

[8] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija:*
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf,
(kolovoz, 2018.)

[9] J. Pečarić, *Nejednakosti*, HMD, Zagreb, 1996.

[10] M. Krnić, *Geometrijske nejednakosti*, rukopis

[11] M. Krnić, *Poučak o simetrali kuta u trokutu*, Matka 11 (2002./2003.), Br. 42, Zagreb, 78-82.

[12] M. Krnić, *Visina, težišnica i simetrala kuta (bez trigonometrije)*, Poučak 6, 2001.

[13] K. Y. Li, *Angle Bisect Arcs*, Mathematical Excalibur, Vol.11, No.2, 2006.

[14] A. Marić, *Poopćeni Steinerov poučak*, Zbornik radova Šestog susreta nastavnika matematike, Zagreb 3.-5. srpnja 2002., HMD, Zagreb, 279-281.

[15] A. Marić, *Primjene metode ploština u dokazivanju nekih poučaka*, Matematika i škola 7 (2000), 76-78.

[16] M. Nemec, *Nejednakosti između osnovnih sredina*, diplomski rad, PMF, Zagreb, 2015.

[17] R. Oláh-Gál, J.Sándor, *On Trigonometric Proofs of the Steiner - Lehmus Theorem*, Forum Geometricorum, Vol.9, 2009.

[18] L. Sauvé, *The Steiner Lehmus Theorem*, Crux Mathematicorum, Vol.2, No.2, 1976, 19-21.

[19] M. Soldo, *Simetrale kutova trokuta i konstruktivni problemi*, diplomski rad, PMF, Zagreb, 2014.

[20] S. Varošanec, *Matematika 1*, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred tehničkih škola, Element, Zagreb, 2012.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je izučavanje nekih značajnih svojstava simetrala kutova trokuta. Rad se sastoji od četiri poglavlja. Nakon uvodnog poglavlja, u drugom poglavlju bavimo se teoremom o simetrali kuta u trokutu. Dajemo nekoliko dokaza tog teorema kao i njegove inačice. Kao primjenu, dobivamo eksplicitne formule za duljine simetrala kutova trokuta. Nadalje, u istom poglavlju izvodimo nekoliko zanimljivih nejednakosti koje uključuju simetrale kutova trokuta. U trećem poglavlju dajemo nekoliko primjena jednostavne činjenice da simetrala kuta trokuta raspolavlja odgovarajući luk opisane kružnice trokuta. Nadalje, primjenom glavnih rezultata iz drugog i trećeg poglavlja rješavamo neke složenije geometrijske probleme s brojnih matematičkih natjecanja za srednjoškolce. Konačno, u četvrtom poglavlju dajemo nekoliko dokaza Steiner - Lehmusovog teorema koji kaže da ako trokut ima dvije simetrale kutova jednakih duljina, onda je on jednakokračan.

Summary

In the present thesis, we study some interesting properties of angle bisectors in a triangle. The thesis is divided into four chapters as follows: after an introductory chapter, in Chapter 2 we give several variants and proofs of an angle bisector theorem. As an application, we derive formulas for lenghts of angle bisectors of a triangle. Further, we also study some inequalities involving angle bisectors of a triangle. In Chapter 3 we utilize a simple fact that an angle bisector of a triangle bisects the corresponding arc of a circumscribed circle. As an application of main results from Chapters 2 and 3, we also solve some geometry problems appearing on numerous mathematical competitions for high school students. Finally, in Chapter 4 we give several proofs of the Steiner - Lehmus theorem which asserts that if the triangle has two equal angle bisectors, then it is isosceles.

Životopis

Zovem se Ana Prosenečki. Rođena sam 17. kolovoza 1991. godine u Koprivnici. Završila sam Osnovnu školu "Vladimir Nazor" te prirodoslovno - matematički smjer u gimnaziji Ivana Zakmardija Dijankovečkog u Križevcima. Godine 2012. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, te 2016. godine stječem zvanje prvostupnika edukacije matematike. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer, na istom fakultetu.