SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Danijela Protega

KARDINALNOST SKUPOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

♡*Mojoj mami i mome tati* ♡

Sadržaj

Uvod

Sjetimo se da smo još kao učenici osnovne škole naučili kako prebrojiti elemente nekog skupa. Naime, svakom elementu pridružili bismo naziv jednog prirodnog broja. Drugi način, koji je vjerojatno stariji, direktno je uspoređivanje elemenata dvaju skupova. Odnosno, ako svakom elementu prvog skupa možemo pridružiti točno jedan element drugog skupa, onda kažemo da ti skupovi imaju jednak broj elemenata. Sasvim nam je jasno da na taj način možemo odrediti broj elemenata konačnih skupova. No, ukoliko se pitamo kako usporediti beskonačne skupove, odgovor nije sasvim trivijalan. To je upravo bila motivacija ovog diplomskog rada. Stoga smo logičnim slijedom podijelili ovaj diplomski rad kako bismo na koncu i odgovorili na to pitanje, u čiju je svrhu i sam Cantor, veličinu skupa nazvao *kardinalni broj*.

Proučavat ćemo kardinalnost skupova. Za razumijevanje teksta potrebno je poznavanje osnovnih pojmova iz matematičke analize i teorije skupova. Iako su svi osnovni pojmovi koji su vezani uz temu ovog diplomskog rada navedeni u njemu samome, za bolje razumijevanje dobro bi bilo poznavati pojmove koje smatramo osnovama matematike. Većina tvrdnji je detaljno dokazana, a onih nekoliko koje nisu, uglavnom proizlaze iz već prethodno dokazanih ili se dokazuju na potpuno analogan način već dokazanom. Posebno, teorem koji nije dokazan je teorem o dobrom uređaju, a njegov dokaz moguće je pronaći u navedenoj literaturi.

Rad je podijeljen u četiri poglavlja. U prvom poglavlju govorimo o konačnosti i prebrojivosti. Uvedeni su osnovni pojmovi iz teorije skupova - pojam *ekvipotentnih skupova*, *konačnog* i *prebrojivog skupa* te dokazane važne tvrdnje u vezi s tim.

U drugom poglavlju bavimo se kardinalnim brojevima. Počevši od definicije *kardinalnog broja* dolazimo do teorema poznatog kao *Cantor-Schröder-Bernsteinov*. Potom razrađujemo neke osnovne operacije s kardinalnim brojevima.

Treće poglavlje govori o kardinalnom broju realnih brojeva. Počinjemo s osnovnim pojmovima iz matematičke analize - pojam *maksimuma skupa*, *minimuma*, *supremuma* i *infimuma*. Dajemo definiciju *niza*, *reda*, *konvergencije niza* te *konvergencije reda*. Koristimo decimalni prikaz realnog broja u važnim tvrdnjama ovog poglavlja. U zadnjem dijelu poglavlja računamo s kardinalnim brojevima.

U četvrtom poglavlju najprije uvodimo pojam *binarne relacije*. Zatim, definiramo *uređen* pa *dobro uređen skup*. Prvo dokazujemo pomoćne i bitne tvrdnje koje koristimo u dokazu važnog rezultata iz teorije skupova, koji je ujedno i zadnja tvrdnja u ovom diplomskom radu.

Poglavlje 1

Konačnost i prebrojivost

1.1 Ekvipotentnost

Definicija 1.1.1. *Za skupove S i T kažemo da su* ***ekvipotentni*** *i pišemo $S \cong T$ ako postoji bijekcija $f\colon S \to T$. Ako skupovi S i T nisu ekvipotentni onda pišemo $S \ncong T$.*

Definicija 1.1.2. *Za skup S kažemo da je* ***konačan*** *ako je $S = \emptyset$ ili $S \cong \{1, 2, \dots, n\}$, za neki $n \in \mathbb{N}$.*

Napomena 1.1.3. *Domena i kodomena funkcije mogu biti prazni skupovi.*

Napomena 1.1.4. *Ako su S, T i V skupovi te $f\colon S \to T$ i $g\colon T \to V$ bijekcije, tada je $g \circ f\colon S \to V$ bijekcija.*

Dokaz. Naime, ako su $x_1, x_2 \in S$ takvi da je $x_1 \neq x_2$, onda je $f(x_1) \neq f(x_2)$ (jer je f injekcija) te je $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (jer je g injekcija).
Prema tome,
$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$$
tj. $g \circ f$ je injekcija.
Nadalje, ako je $z \in V$ onda postoji $y \in T$ takav da je $g(y) = z$ (jer je g surjekcija) pa postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$ (jer je f surjekcija).
Slijedi
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$
stoga je $g \circ f$ surjekcija. Dakle, $g \circ f$ je bijekcija. □

Iz ovoga dobivamo sljedeći zaključak: ako su S, T i V skupovi takvi da je $S \cong T$ i $T \cong V$, onda je $S \cong V$.
Uočimo i ovo: ako su S i T skupovi takvi da je $S \cong T$, onda je $T \cong S$.
Naime, ako je $f\colon S \to T$ bijekcija, onda je $f^{-1}\colon T \to S$ također bijekcija.

Lema 1.1.5. *Neka su S i T skupovi takvi da postoji bijekcija $g\colon S \to T$. Pretpostavimo da je $a \in S$ i $b \in T$. Tada postoji bijekcija $f\colon S \to T$ takva da je $f(a) = b$.*

Dokaz. Ako je $g(a) = b$, onda je g tražena funkcija f. Pretpostavimo da je $g(a) \neq b$. Označimo $c = g(a)$.
Definirajmo funkciju $h\colon T \to T$ na sljedeći način:

$$h(x) = \begin{cases} c, & x = b \\ b, & x = c \\ x, & x \neq b, x \neq c. \end{cases}$$

Tvrdimo da je h bijekcija.
Neka su $x_1, x_2 \in T$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Imamo četiri slučaja.

(1) $x_1, x_2 \notin \{b, c\}$.
Tada je $h(x_1) = x_1$, $h(x_2) = x_2$ pa je $h(x_1) \neq h(x_2)$.

(2) $x_1 \in \{b, c\},\ x_2 \notin \{b, c\}$.
Tada je $h(x_1) \in \{b, c\},\ h(x_2) \notin \{b, c\}$ pa je $h(x_1) \neq h(x_2)$.

(3) $x_1 \notin \{b, c\},\ x_2 \in \{b, c\}$.
Analogno kao u *(2)* dobivamo $h(x_1) \neq h(x_2)$.

(4) $x_1, x_2 \in \{b, c\}$.
Tada je $x_1 = b$ i $x_2 = c$ ili $x_1 = c$ i $x_2 = b$, pa je $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Dakle, $h(x_1) \neq h(x_2)$. Prema tome, h je injekcija.
Neka je $y \in T$. Ako je $y \notin \{b, c\}$, onda je $h(y) = y$. Ako je $y = b$, onda je $h(c) = y$, a ako je $y = c$ onda je $h(b) = y$.
U svakom slučaju postoji $x \in T$ takav da je $h(x) = y$. Prema tome h je surjekcija.
Time smo pokazali da je h bijekcija.
Definirajmo $f = h \circ g$. Funkcija $f\colon S \to T$ je bijekcija (kao kompozicija dviju bijekcija).
Nadalje, vrijedi

$$f(a) = h\,(g(a)) = h(c) = b,$$

dakle $f(a) = b$. □

Lema 1.1.6. *Neka su S i T skupovi, neka je $f\colon S \to T$ bijekcija te neka su $x_0 \in S$ i $y_0 \in T$ takvi da je $f(x_0) = y_0$. Tada je funkcija $g\colon S \setminus \{x_0\} \to T \setminus \{y_0\}$ definirana sa $g(x) = f(x), \forall x \in S \setminus \{x_0\}$ bijekcija.*

Dokaz. Uočimo prvo da je funkcija g dobro definirana, naime ako je $x \in S \setminus \{x_0\}$ onda je $f(x) \in T \setminus \{y_0\}$ jer bi u suprotnom vrijedilo $f(x) = y_0$ što bi bilo u kontradikciji s činjenicom

da je f injekcija (jer je $f(x_0) = y_0$).
Neka su $x_1, x_2 \in S \setminus \{x_0\}$, $x_1 \neq x_2$. Tada je $f(x_1) \neq f(x_2)$ (jer je f injekcija) pa je očito $g(x_1) \neq g(x_2)$. Dakle g je injekcija.
Neka je $y \in T \setminus \{y_0\}$. Tada postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$ (zato što je f surjekcija). Imamo

$$f(x_0) = y_0 \neq y = f(x)$$

pa je $f(x_0) \neq f(x)$ što povlači da je $x_0 \neq x$.
Dakle,

$$x \in S \setminus \{x_0\} \text{ i } g(x) = f(x) = y.$$

Time smo dokazali da je g surjekcija.
Zaključak: g je bijekcija. □

Propozicija 1.1.7. *Za $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $m \neq n$ vrijedi* $\{1, \ldots, n\} \ncong \{1, \ldots, m\}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$\text{za } \forall m > n \text{ vrijedi } \{1, \ldots, n\} \ncong \{1, \ldots, m\}.$$

Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi, naime ne postoji bijekcija $\{1\} \to \{1, \ldots, m\}$ za $m > 1$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\{1, \ldots, n\} \ncong \{1, \ldots, m\} \text{ za svaki } m > n.$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n + 1$. Neka je $m > n + 1$.
Pretpostavimo da je

$$\{1, \ldots, n + 1\} \cong \{1, \ldots, m\}.$$

Tada postoji bijekcija $f : \{1, \ldots, n + 1\} \to \{1, \ldots, m\}$.
Prema lemi 1.1.5 možemo pretpostaviti da je $f(n + 1) = m$. Prema lemi 1.1.6 postoji bijekcija $g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m - 1\}$.
Dakle,

$$\{1, \ldots, n\} \cong \{1, \ldots, m - 1\},$$

no $n < m - 1$ jer ($n + 1 < m$). Ovo je u kontradikciji s induktivnom pretpostavkom, tj. s pretpostavkom da tvrdnja koju dokazujemo vrijedi za n.
Prema tome,

$$\{1, \ldots, n + 1\} \ncong \{1, \ldots, m\}.$$

Time smo dokazali da tvrdnja vrijedi za $n + 1$ pa zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 1.1.8. *Neka je S neprazan konačan skup. Tada postoji jedinstveni $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \cong \{1, \dots, n\}$.*

Dokaz. Prema definiciji konačnog skupa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \cong \{1, \dots, n\}$.
Pretpostavimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$m \neq n \text{ i } S \cong \{1, \dots, m\}.$$

Iz napomene 1.1.4 slijedi da je $\{1, \dots, n\} \cong \{1, \dots, m\}$. No, ovo je u kontradikciji s propozicijom 1.1.7.
Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Definicija 1.1.9. *Za skup S kažemo da je **prebrojiv** ako je S konačan ili $S \cong \mathbb{N}$.*

Lema 1.1.10. *Neka je $T \subseteq S$, $T \neq \emptyset$. Tada postoji surjekcija $S \to T$.*

Dokaz. Odaberimo $t_0 \in T$. Neka je $f\colon S \to T$ funkcija definirana s

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \in T \\ t_0, & \text{ako } x \notin T. \end{cases}$$

Tada je f očito surjekcija. □

Napomena 1.1.11. *Kompozicija dviju injekcija je injekcija. Kompozicija dviju surjekcija je surjekcija.*

Dokaz. To je dokazano u napomeni 1.1.4. □

Lema 1.1.12. *Unija konačnog skupa i jednočlanog skupa je konačan skup.*

Dokaz. Neka je S konačan skup te neka je T jednočlan skup, $T = \{x_0\}$.
Ako je $S = \emptyset$, onda je $S \cup T = T$ pa je $S \cup T$ konačan skup.
Ako je $S \neq \emptyset$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ i bijekcija $f\colon \{1, \dots, n\} \to S$.
Ako je $x_0 \in S$, onda je $S \cup T = S$ pa je $S \cup T$ konačan skup.
Ako je $x_0 \neq S$, definiramo $g\colon \{1, \dots, n+1\} \to S \cup T$ s

$$g(i) = \begin{cases} f(i), & i \leq n \\ x_0, & i = n+1. \end{cases}$$

Lako se vidi da je g bijekcija. Prema tome $S \cup T$ je konačan skup. □

Propozicija 1.1.13. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je S skup takav da postoji surjekcija $\{1, \dots, n\} \to S$. Tada je S konačan skup.*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Ako je S skup takav da postoji surjekcija $\{1\} \to S$, onda je S jednočlan skup pa je konačan. Prema tome, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka je S skup takav da postoji surjekcija $f\colon \{1, \dots, n+1\} \to S$.
Tada je

$$S = \{f(1), \dots, f(n+1)\}.$$

Neka je

$$T = \{f(1), \dots, f(n)\}.$$

Očito postoji surjekcija $\{1, \dots, n\} \to T$. Prema induktivnoj pretpostavci skup T je konačan. Iz

$$S = T \cup \{f(n+1)\}$$

i leme 1.1.12 slijedi da je S konačan skup.
Dakle, tvrdnja vrijedi za $n + 1$ pa je time propozicija dokazana. □

Korolar 1.1.14. *Svaki podskup konačnog skupa je konačan.*

Dokaz. Neka je S konačan skup te neka je $T \subseteq S$. Ako je $T = \emptyset$ onda je T konačan skup. Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$. Prema lemi 1.1.10 postoji surjekcija $g\colon S \to T$. Budući da je S konačan skup i $S \neq \emptyset$ (jer je $T \neq \emptyset$) postoje $n \in \mathbb{N}$ i bijekcija $h\colon \{1, \dots, n\} \to S$.
Tada je

$$g \circ h\colon \{1, \dots, n\} \to T$$

surjekcija (kao kompozicija dviju surjekcija), pa iz propozicije 1.1.13 slijedi da je T konačan skup. □

Teorem 1.1.15. *Neka je S neprazan skup. Tada je S prebrojiv ako i samo ako postoji surjekcija $\mathbb{N} \to S$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S prebrojiv. Tada je S konačan ili $S \cong \mathbb{N}$. Ako je S konačan (a znamo da je $S \neq \emptyset$), onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\{1, \dots, n\} \cong S$.
Dakle, postoji bijekcija

$$g\colon \{1, \dots, n\} \to S.$$

Prema lemi 1.1.10 postoji surjekcija

$$f\colon \mathbb{N} \to \{1, \dots, n\}.$$

Prema napomeni 1.1.11

$$g \circ f\colon \mathbb{N} \to S$$

je surjekcija. Ako je $S \cong \mathbb{N}$, onda očito postoji surjekcija $\mathbb{N} \to S$.
Obratno, pretpostavimo da postoji surjekcija $f\colon \mathbb{N} \to S$.
Želimo dokazati da je S prebrojiv skup. To očito vrijedi ako je S konačan.
Pretpostavimo da S nije konačan.
Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{N} \to S$ indukcijom na sljedeći način: neka je $g(1) = f(1)$.
Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $g(1), \dots, g(n) \in S$. Tvrdimo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da

$$f(i) \notin \{g(1), \dots, g(n)\}.$$

Pretpostavimo suprotno.
Tada za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(i) \in \{g(1), \dots, g(n)\}.$$

Neka je $x \in S$. Budući da je f surjekcija postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x = f(i)$.
Slijedi

$$x \in \{g(1), \dots, g(n)\}.$$

Prema tome $S \subseteq \{g(1), \dots, g(n)\}$.
Neka je

$$h\colon \{1, \dots, n\} \to \{g(1), \dots, g(n)\},\ h(i) = g(i)\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Očito je h surjekcija pa iz propozicije 1.1.13 slijedi da je skup $\{g(1), \dots, g(n)\}$ konačan. Iz $S \subseteq \{g(1), \dots, g(n)\}$ i korolara 1.1.14 slijedi da je S konačan skup, što je u kontradikciji s pretpostavkom da S nije konačan.
Prema tome postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da $f(i) \notin \{g(1), \dots, g(n)\}$.
Neka je

$$k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \notin \{g(1), \dots, g(n)\}\}.$$

Definiramo $g(n+1) = f(k)$.
Uočimo da

$$f(k) \notin \{g(1), \dots, g(n)\},$$

dakle

$$g(n+1) \notin \{g(1), \dots, g(n)\}. \tag{1.1}$$

Time smo definirali funkciju $g\colon \mathbb{N} \to S$. Dokažimo da je g bijekcija.
Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $i < j$. Definirajmo $n = j - 1$, tada je $j = n + 1$ pa iz (1.1) slijedi

$$g(j) \notin \{g(1), \dots, g(j-1)\}.$$

Iz $i < j$ slijedi $i \leq j - 1$ pa zaključujemo da je $g(j) \neq g(i)$. Dakle $g(i) \neq g(j)$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$ takve da je $i < j$. Stoga je g injekcija.
Da bismo dokazali da je g surjekcija dovoljno je dokazati sljedeće:

$$\forall i \in \mathbb{N}\ \ \exists j \in \mathbb{N}\ \text{ takav da je }\ f(i) = g(j). \tag{1.2}$$

Naime, ako je $x \in S$ onda postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x = f(i)$ (jer je f surjekcija), pa ako vrijedi (1.2) onda postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $f(i) = g(j)$ pa je $x = g(j)$.
Dokažimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ da je

$$f(1), \dots, f(n) \in \{g(1), \dots, g(n)\}. \tag{1.3}$$

Za $n = 1$ ovo vrijedi zbog $g(1) = f(1)$.
Pretpostavimo da (1.3) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Tvrdimo da je

$$f(1), \dots, f(n+1) \in \{g(1), \dots, g(n+1)\}.$$

Iz (1.3) odmah slijedi da je

$$f(1), \dots, f(n) \in \{g(1), \dots, g(n+1)\}.$$

Pretpostavimo da

$$f(n+1) \notin \{g(1), \dots, g(n+1)\}. \tag{1.4}$$

Tada

$$f(n+1) \notin \{g(1), \dots, g(n)\},$$

pa zbog (1.3),

$$n+1 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \notin \{g(1), \dots, g(n)\}\}.$$

Iz definicije funkcije g slijedi $g(n+1) = f(n+1)$, a to je u kontradikciji s (1.4).
Dakle,

$$f(n+1) \in \{g(1), \dots, g(n+1)\}$$

i time je induktivni dokaz završen. Dakle (1.3) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Posebno za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(i) \in \{g(1), \dots, g(i)\}$$

pa zaključujemo da vrijedi (1.2).
Prema tome, g je surjekcija. Time smo dokazali da je $g\colon \mathbb{N} \to S$ bijekcija pa imamo $\mathbb{N} \cong S$, što znači da je S prebrojiv skup. □

Korolar 1.1.16. *Neka je S prebrojiv skup te neka je $T \subseteq S$. Tada je T prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $T = \emptyset$, tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$. Tada je $S \neq \emptyset$, pa prema teoremu 1.1.15 postoji surjekcija $f\colon \mathbb{N} \to S$. Nadalje, prema lemi 1.1.10 postoji surjekcija $g\colon S \to T$.
Imamo da je $g \circ f\colon \mathbb{N} \to T$ surjekcija pa iz teorema 1.1.15 slijedi da je T prebrojiv skup. □

1.2 Unije i familije skupova

Propozicija 1.2.1. *Neka su A i B konačni skupovi. Tada je $A \cup B$ konačan skup.*

Dokaz. Vrijedi
$$A \cup B = (A \backslash B) \cup B,$$
a skupovi $A \backslash B$ i B su disjunktni. Stoga možemo odmah pretpostaviti da su A i B disjunktni skupovi. Nadalje, tvrdnja je očita ako je barem jedan od skupova A i B prazan, stoga možemo pretpostaviti da su A i B neprazni.
Budući da su A i B konačni postoje $n, m \in \mathbb{N}$ i bijekcije
$$f_1 \colon A \to \{1, \dots, n\} \text{ i } f_2 \colon B \to \{1, \dots, m\}.$$
Definiramo funkciju $g \colon A \cup B \to \{1, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$ s
$$g(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A \\ f_2(x) + n, & x \in B. \end{cases}$$
Tvrdimo da je g bijekcija. Neka su $x, \bar{x} \in A \cup B$, $x \neq \bar{x}$.
Ako su $x, \bar{x} \in A$ ili $x, \bar{x} \in B$, onda je $g(x) \neq g(\bar{x})$ jer su f_1 i f_2 injekcije. Ako su $x \in A$ i $\bar{x} \in B$ onda je
$$g(x) = f_1(x) \leq n < n + f_2(\bar{x}) = g(\bar{x})$$
pa je
$$g(x) \neq g(\bar{x}).$$
Do istog zaključka dolazimo ako je $x \in B$ i $\bar{x} \in A$. Prema tome g je injekcija.
Neka je
$$y \in \{1, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}.$$
Ako je $y \leq n$ onda postoji $x \in A$ takav da je $f_1(x) = y$ (jer je f_1 surjekcija), pa je $g(x) = y$.
Ako je $y > n$ onda je
$$n + 1 \leq y \leq n + m$$
pa je
$$1 \leq y - n \leq m.$$
Budući da je f_2 surjekcija postoji $x \in B$ takav da je $y - n = f_2(x)$.
Slijedi $g(x) = y$. Prema tome, g je surjekcija.
Dakle,
$$A \cup B \cong \{1, \dots, n + m\}$$
pa je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.2.2. *Ako je $n \in \mathbb{N}$ te ako su $A_1, \dots, A_n$ konačni skupovi onda je $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ konačan skup.*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $A_1, \dots, A_{n+1}$ konačni skupovi.
Vrijedi
$$A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1} = (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}$$
pa iz induktivne pretpostavke i propozicije 1.2.1 slijedi da je $A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}$ konačan skup.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 1.2.3. *Neka je $\mathcal{F}$ konačna familija konačnih skupova. Tada je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ konačan skup.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{F} = \emptyset$ onda je
$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$$
pa je tvrdnja jasna.
Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i bijekcija $A\colon \{1, \dots, n\} \to \mathcal{F}$.
Slijedi
$$\mathcal{F} = \{A(1), \dots, A(n)\}$$
pa je
$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = A(1) \cup \ldots \cup A(n).$$
Skupovi $A(1), \dots, A(n)$ su konačni pa prema propoziciji 1.2.2 imamo da je $A(1) \cup \ldots \cup A(n)$ konačan skup.
Dakle, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ je konačan skup. □

Propozicija 1.2.4. *Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv.*

Dokaz. Za prost broj p neka je $f_p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija koja broju $x \in \mathbb{N}$ pridružuje eksponent kojim p dolazi u rastavu broja x na proste faktore.
Definirajmo
$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ g(x) = (f_2(x), f_3(x)).$$
Tada je g surjekcija. Naime, ako su $a, b \in \mathbb{N}$ onda za $x = 2^a 3^b$ vrijedi
$$g(x) = (a, b).$$
Prema teoremu 1.1.15 skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv. □

Propozicija 1.2.5. *Neka je $\mathcal{F}$ prebrojiva familija prebrojivih skupova. Tada je $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$ prebrojiv skup.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Inače gledamo familiju $\mathcal{F}\setminus\{\emptyset\}$ koja je prebrojiva (korolar 1.1.16) te čiji elementi su prebrojivi neprazni skupovi.
Ako je $\mathcal{F} = \emptyset$, onda je tvrdnja jasna. Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Prema teoremu 1.1.15 postoji surjekcija $A\colon \mathbb{N} \to \mathcal{F}$.
Dakle,

$$\mathcal{F} = \{A(1), A(2), \ldots\}.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Skup $A(n)$ je neprazan prebrojiv pa prema teoremu 1.1.15 postoji surjekcija $x^n\colon \mathbb{N} \to A(n)$.
Tvrdimo da je

$$\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = \{x^n(i) \mid n, i \in \mathbb{N}\}. \tag{1.5}$$

Ako su $n, i \in \mathbb{N}$, onda je $x^n(i) \in A(n)$, dakle $x^n(i) \in F$, gdje je $F \in \mathcal{F}$.
Prema tome,

$$x^n(i) \in \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F.$$

Obratno, neka je $y \in \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$. Tada postoji $F \in \mathcal{F}$ takav da je $y \in F$. Nadalje, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $F = A(n)$. Dakle, $y \in A(n)$. Budući da je x^n surjekcija postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $y = x^n(i)$. Time smo pokazali da vrijedi (1.5).
Definirajmo funkciju

$$f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F,\ f(n, i) = x^n(i).$$

Iz (1.5) slijedi da je f surjekcija. Prema propoziciji 1.2.4, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je prebrojiv skup pa postoji surjekcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
Funkcija

$$f \circ g\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$$

je surjekcija kao kompozicija dviju surjekcija. Prema teoremu 1.1.15, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$ je prebrojiv skup. □

Korolar 1.2.6. *Neka su S i T prebrojivi skupovi. Tada je $S \cup T$ prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} = \{S, T\}$. Očito je $\mathcal{F}$ prebrojiva familija prebrojivih skupova. Iz propozicije 1.2.5 slijedi da je $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$ prebrojiv skup.
No, očito je

$$\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = S \cup T.$$

□

Poglavlje 2

Kardinalni brojevi

2.1 Klasa svih skupova

Pretpostavimo da postoji skup svih skupova. Označimo ga sa $\mathcal{V}$.
Definirajmo

$$A = \{S \in \mathcal{V} \mid S \notin S\}.$$

Tada je A skup pa je $A \in \mathcal{V}$.
Ako $A \notin A$, onda prema definiciji od A, vrijedi $A \in A$ što je očito nemoguće. Ako je $A \in A$, onda iz definicije od A slijedi da $A \notin A$.
Stoga zaključujemo da ne postoji skup svih skupova.

Želimo, za zadani skup S, definirati kardinalni broj skupa S kao skup svih skupova T takvih da je $S \cong T$. No, skup svih takvih T ne mora postojati (prethodno smo vidjeli da ne postoji skup svih skupova). Stoga ćemo koristiti pojam klase.
Pojam klase te pojam ”biti element klase” shvaćamo na isti način kao pojam skupa i pojam ”biti element skupa”. Jedina razlika između ovih pojmova je u sljedećem: smatramo da postoji klasa svih skupova.
Za označavanje skupova koristimo $\{$ i $\}$, a za označavanje klasa koristit ćemo $\pmb{\{}$ i $\pmb{\}}$. Praznu klasu označavamo $\pmb{\emptyset}$. Da je x element klase K označavamo $x \pmb{\in} K$. Klasu svih skupova označavamo s $\int$.

Definicija 2.1.1. *Neka je S skup. Tada postoji klasa svih skupova T takvih da je $S \cong T$. Naime, to je upravo klasa*

$$\pmb{\{} T \pmb{\in} \int \mid S \cong T \pmb{\}}.$$

Tu klasu označavamo sa $\operatorname{card} S$ *i nazivamo* ***kardinalni broj*** *skupa S.*
Dakle,

$$\operatorname{card} S = \pmb{\{} T \textit{ skup } \mid S \cong T \pmb{\}}.$$

Propozicija 2.1.2. *Neka su S i T skupovi. Tada je $S \cong T \iff \operatorname{card} S = \operatorname{card} T$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $S \cong T$.
Neka je $V \in \operatorname{card} S$. Tada je V skup i $S \cong V$. Kako je $S \cong T$ slijedi da je $T \cong V$. Prema tome $V \in \operatorname{card} T$. Analogno vidimo da za svaki $V \in \operatorname{card} T$ vrijedi da je $V \in \operatorname{card} S$.
Prema tome, $\operatorname{card} S = \operatorname{card} T$.
Obratno, očito je $S \in \operatorname{card} S$ pa slijedi da je $S \in \operatorname{card} T$, a to povlači da je $S \cong T$. □

Ako kažemo da je k kardinalni broj, to će značiti da je $k = \operatorname{card} S$ za neki skup S.

Definicija 2.1.3. *Neka su k_1 i k_2 kardinalni brojevi. Pišemo $k_1 \leq k_2$ ako postoje skupovi A i B takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$ i $k_2 = \operatorname{card} B$ te takvi da postoji injekcija $A \to B$.*

Propozicija 2.1.4. *Neka su k_1 i k_2 kardinalni brojevi takvi da je $k_1 \leq k_2$. Neka su S i T skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} S$ i $k_2 = \operatorname{card} T$. Tada postoji injekcija $S \to T$.*

Dokaz. Zbog $k_1 \leq k_2$ postoje skupovi A i B takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$ i $k_2 = \operatorname{card} B$ te takvi da postoji injekcija $g\colon A \to B$.
Imamo $\operatorname{card} S = \operatorname{card} A$ i $\operatorname{card} T = \operatorname{card} B$. Iz propozicije 2.1.2 slijedi da je $S \cong A$ i $T \cong B$.
Stoga postoje bijekcije $f_1\colon S \to A$ i $f_2\colon B \to T$.
Funkcija

$$(f_2 \circ g) \circ f_1\colon S \to T$$

je injekcija (kao kompozicija injekcija). Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Iz propozicije 2.1.4 slijedi da za sve skupove S i T vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} T \iff \exists \text{ injekcija } S \to T. \tag{2.1}$$

Propozicija 2.1.5.

(1) Za svaki kardinalni broj k vrijedi $k \leq k$.

(2) Ako su k_1, k_2 i k_3 kardinalni brojevi takvi da je $k_1 \leq k_2$ i $k_2 \leq k_3$ onda je $k_1 \leq k_3$.

Dokaz.

(1) Neka je S skup takav da je $k = \operatorname{card} S$. Funkcija $f\colon S \to S$, $f(x) = x$, je očito injekcija. Prema tome $k \leq k$.

(2) Neka su A, B i C skupovi takvi da je $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ i $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} C$. Tada postoje injekcije $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$.
Funkcija $g \circ f\colon A \to C$ je injekcija, dakle $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} C$.
Time je tvrdnja *(2)* dokazana.

□

2.2 Cantor-Schröder-Bernsteinov teorem

Lema 2.2.1. *Neka su X, Y i Z skupovi takvi da je $X \subseteq Y \subseteq Z$ i $X \cong Z$. Tada je $Y \cong Z$.*

Dokaz. Prema pretpostavci postoji bijekcija $f\colon Z \to X$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ definirajmo funkciju $f^n\colon Z \to Z$ indukcijom na sljedeći način: neka je f^0 identiteta na Z, tj. $f^0(z) = z$, $\forall z \in Z$.
Pretpostavimo da smo definirali $f^n\colon Z \to Z$ za neki $n \in \mathbb{N}$.
Definirajmo $f^{n+1}\colon Z \to Z$ sa

$$f^{n+1}(z) = f\left(f^n(z)\right), \ \forall z \in Z.$$

Definirajmo funkciju $g\colon Z \to Y$ na sljedeći način:

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y) \\ z, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uočimo da je funkcija g dobro definirana, tj. da je $g(z) \in Y$, $\forall z \in Z$. Naime, u prvom slučaju to je istina jer je

$$f(z) \in X, \text{ a } X \subseteq Y.$$

U drugom slučaju imamo

$$g(z) = z \text{ i } z \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$

Posebno

$$z \notin f^0(Z\backslash Y) \text{ tj. } z \notin Z\backslash Y.$$

Stoga je $z \in Y$, tj. $g(z) \in Y$.
Tvrdimo da je g bijekcija. Neka su $z_1, z_2 \in Z$ takvi da je $z_1 \neq z_2$.
Tvrdimo da je

$$g(z_1) \neq g(z_2). \tag{2.2}$$

(1)

$$z_1,\ z_2 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$

Tada je $g(z_1) = f(z_1)$ i $g(z_2) = f(z_2)$, a $f(z_1) \neq f(z_2)$ jer je f injekcija.
Stoga vrijedi (2.2).

(2)

$$z_1,\ z_2 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$

Tada je $g(z_1) = z_1$ i $g(z_2) = z_2$ pa zbog $z_1 \neq z_2$ vrijedi (2.2).

(3)
$$z_1 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y),\ z_2 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$

Slijedi da postoji $m \in \mathbb{N}_0$ takav da je $z_1 \in f^m(Z\backslash Y)$. Slijedi da je $z_1 = f^m(a)$ za neki $a \in Z\backslash Y$.
Stoga je
$$f(z_1) = f\left(f^m(a)\right) = f^{m+1}(a) \text{ pa je } f(z_1) \in f^{m+1}(Z\backslash Y).$$
Prema tome
$$f(z_1) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y) \text{ tj. } g(z_1) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$
S druge strane $g(z_2) = z_2$ pa
$$g(z_2) \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$
Dakle, vrijedi (2.2).

(4)
$$z_1 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y),\ z_2 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$

Na isti način kao u trećem slučaju dobivamo da vrijedi (2.2).

Zaključak: g je injekcija.
Neka je $y \in Y$.

(1)
$$y \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$

Tada je $g(y) = y$.

(2)
$$y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$

Tada postoji $m \in \mathbb{N}_0$ takav da je $y \in f^m(Z\backslash Y)$. Stoga je $y = f^m(a)$ za neki $a \in Z\backslash Y$.
Uočimo da je $m \geq 1$ (jer ako je $m = 0$ imamo $y = f^0(a) = a \in Z\backslash Y$, a to je nemoguće jer je $y \in Y$).
Definirajmo $z = f^{m-1}(a)$.
Vrijedi
$$z \in f^{m-1}(Z\backslash Y) \text{ pa je } z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(Z\backslash Y).$$

Stoga je

$$g(z) = f(z) = f\left(f^{m-1}(a)\right) = f^m(a) = y.$$

Dakle $g(z) = y$.

Zaključak: g je surjekcija. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Napomena 2.2.2. *Neka su S i T skupovi te neka je $f\colon S \to T$ injekcija. Tada je $S \cong f(S)$.*

Dokaz. Naime, funkcija $g\colon S \to f(S)$ definirana s $g(x) = f(x)$ je očito bijekcija. □

Napomena 2.2.3. *Neka su S, T i V skupovi te $f\colon S \to T$ i $g\colon T \to V$ funkcije. Neka je $A \subseteq S$. Tada je $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.*

Dokaz. Neka je $z \in (g \circ f)(A)$. Tada postoji $x \in A$ takav da je $z = (g \circ f)(x)$. Slijedi $z = g(f(x))$. Očito je $f(x) \in f(A)$ pa je

$$g(f(x)) \in g(f(A)) \text{ tj. } z \in g(f(A)).$$

Obratno, pretpostavimo da je $z \in g(f(A))$. Tada postoji $y \in f(A)$ takav da je $z = g(y)$.
Nadalje, postoji $x \in A$ takav da je $y = f(x)$.
Slijedi

$$z = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Prema tome $z \in (g \circ f)(A)$. □

Napomena 2.2.4. *Neka je $f\colon S \to T$ funkcija te neka su A i B podskupovi od S takvi da je $A \subseteq B$. Tada je očito $f(A) \subseteq f(B)$.*

Teorem koji slijedi poznat je i pod nazivom *Cantor-Schröder-Bernsteinov teorem*.

Teorem 2.2.5. *Neka su k_1 i k_2 kardinalni brojevi takvi da je $k_1 \leq k_2$ i $k_2 \leq k_1$. Tada je $k_1 = k_2$.*

Dokaz. Neka su S i T skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} S$ i $k_2 = \operatorname{card} T$.
Prema pretpostavci teorema postoje injekcije $f\colon S \to T$ i $g\colon T \to S$. Tada je $g \circ f\colon S \to S$ također injekcija pa prema napomeni 2.2.2 vrijedi $S \cong (g \circ f)(S)$.
Prema napomeni 2.2.3 vrijedi

$$(g \circ f)(S) = g(f(S)).$$

Stoga je $S \cong g(f(S))$. Očito je $f(S) \subseteq T$ pa prema napomeni 2.2.4 vrijedi $g(f(S)) \subseteq g(T)$.
Imamo dakle

$$g(f(S)) \subseteq g(T) \subseteq S$$

i

$$g(f(S)) \cong S.$$

Iz leme 2.2.1 slijedi $S \cong g(T)$. Prema napomeni 2.2.2 vrijedi $g(T) \cong T$ pa zaključujemo da je $S \cong T$. Iz propozicije 2.1.2 slijedi da je $k_1 = k_2$. □

2.3 Osnovne operacije s kardinalnim brojevima

Propozicija 2.3.1. *Neka su S i T skupovi takvi da je $S \neq \emptyset$ te neka je $f\colon S \to T$ injekcija. Tada postoji surjekcija $T \to S$.*

Dokaz. Prema napomeni 2.2.2 vrijedi $S \cong f(S)$. Stoga postoji bijekcija $h\colon f(S) \to S$. Očito je $f(S)$ neprazan podskup od T (jer je $S \neq \emptyset$) pa prema lemi 1.1.10 postoji surjekcija $g\colon T \to f(S)$. Funkcija $h \circ g\colon T \to S$ je surjekcija kao kompozicija dviju surjekcija. □

Propozicija 2.3.2. *Neka su S i T skupovi te neka je $f\colon S \to T$ surjekcija. Tada postoji injekcija $T \to S$.*

Dokaz. Za $y \in T$ neka je

$$A(y) = \{x \in S \mid f(x) = y\}.$$

Za svaki $y \in T$ vrijedi $A(y) \neq \emptyset$ (jer je f surjekcija) pa odaberimo neki element od $A(y)$ i označimo ga s $g(y)$. Na taj način smo dobili funkciju $g\colon T \to S$ takvu da je $g(y) \in A(y)$ za svaki $y \in T$.
Neka su y_1 i $y_2 \in T$, $y_1 \neq y_2$. Skupovi $A(y_1)$ i $A(y_2)$ su disjunktni (kad bi postojao neki x koji se nalazi u presjeku ovih skupova, onda bi vrijedilo $f(x) = y_1$ i $f(x) = y_2$, što je očito nemoguće) pa zbog $g(y_1) \in A(y_1)$ i $g(y_2) \in A(y_2)$ imamo $g(y_1) \neq g(y_2)$.
Prema tome g je injekcija. □

Korolar 2.3.3. *Neka su S i T skupovi. Tada je*

$$\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} T \iff \exists \text{ surjekcija } T \to S.$$

Dokaz. Prema zadnje dvije propozicije vrijedi

$$\exists \text{ injekcija } S \to T \iff \exists \text{ surjekcija } T \to S.$$

Iz ovoga i (2.1) slijedi tvrdnja korolara. □

Lema 2.3.4. *Neka su S i T skupovi. Tada postoje disjunktni skupovi S' i T' takvi da je $S' \cong S$ i $T' \cong T$.*

Dokaz. Ako stavimo $S' = \{1\} \times S$ i $T' = \{2\} \times T$, onda su S' i T' skupovi s traženim svojstvom. □

Lema 2.3.5. *Neka su S, T, S' i T' skupovi takvi da $S \cap T = \emptyset$, $S' \cap T' = \emptyset$, $S \cong S'$ i $T \cong T'$. Tada je $S \cup T \cong S' \cup T'$.*

Dokaz. Kako je $S \cong S'$ i $T \cong T'$ postoje bijekcije $f\colon S \to S'$ i $g\colon T \to T'$.
Definirajmo funkciju $h\colon S \cup T \to S' \cup T'$ na sljedeći način:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \\ g(x), & x \in T. \end{cases}$$

Tvrdimo da je h bijekcija. Neka su $x_1, x_2 \in S \cup T$, $x_1 \neq x_2$.
Ako su $x_1, x_2 \in S$ onda je $f(x_1) \neq f(x_2)$ jer je f injekcija, dakle $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Do istog zaključka dolazimo kada su $x_1, x_2 \in T$.
Pretpostavimo da je $x_1 \in S$ i $x_2 \in T$. Tada je $h(x_1) = f(x_1) \in S'$ i $h(x_2) = g(x_2) \in T'$ pa zbog $S' \cap T' = \emptyset$ vrijedi $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Do istog zaključka dolazimo kada je $x_1 \in T$ i $x_2 \in S$. Time smo pokazali da je h injekcija.
Neka je $y \in S' \cup T'$. Ako je $y \in S'$ tada postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$ (jer je f surjekcija) tj. $h(x) = y$.
Ako je $y \in T'$ tada postoji $x \in T$ takav da je $g(x) = y$ tj. $h(x) = y$.
Zaključak: h je surjekcija.
Prema tome, h je bijekcija, odnosno $S \cup T \cong S' \cup T'$. □

Definicija 2.3.6. *Neka su k_1 i k_2 kardinalni brojevi. Iz leme 2.3.4 slijedi da postoje disjunktni skupovi A i B takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$ i $k_2 = \operatorname{card} B$.*
Definiramo

$$k_1 + k_2 = \operatorname{card}(A \cup B).$$

*Za $k_1 + k_2$ kažemo da je **zbroj kardinalnih brojeva** k_1 i k_2.*

Pokažimo da ova definicija ne ovisi o izboru skupova A i B.
Pretpostavimo da su A' i B' disjunktni skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A'$ i $k_2 = \operatorname{card} B'$.
Tada je $A \cong A'$ i $B \cong B'$ pa iz prethodne leme slijedi da je

$$A \cup B \cong A' \cup B',$$

tj.

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A' \cup B').$$

Dakle, definicija kardinalog broja $k_1 + k_2$ zaista ne ovisi odabiru skupova A i B.

Propozicija 2.3.7. *Neka su k_1, k_2 i k_3 kardinalni brojevi. Tada vrijedi:*

(1) $k_1 + k_2 = k_2 + k_1$,

(2) $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$,

(3) $k_1 + \operatorname{card} \emptyset = k_1$.

Dokaz. Tvrdnje (*1*) i (*3*) direktno slijede iz činjenice da za sve skupove A i B vrijedi

$$A \cup B = B \cup A \text{ i } A \cup \emptyset = A.$$

Neka su A', B' i C' skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A'$, $k_2 = \operatorname{card} B'$ i $k_3 = \operatorname{card} C'$.
Definirajmo

$$A = \{1\} \times A', \ B = \{2\} \times B' \text{ i } C = \{3\} \times C'.$$

Tada su skupovi A, B i C u parovima disjunktni te vrijedi

$$k_1 = \operatorname{card} A, \ k_2 = \operatorname{card} B \text{ i } k_3 = \operatorname{card} C.$$

Skupovi $A \cup B$ i C su očito disjunktni. Također, skupovi A i $B \cup C$ su disjunktni.
Imamo

$$\begin{aligned}
(k_1 + k_2) + k_3 &= \operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card} C \\
&= \operatorname{card}((A \cup B) \cup C) \\
&= \operatorname{card}(A \cup (B \cup C)) \\
&= \operatorname{card} A + \operatorname{card}(B \cup C) = k_1 + (k_2 + k_3).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.8. *Neka su A, B, A' i B' skupovi takvi da je $A \cong A'$ i $B \cong B'$.
Tada je $A \times B \cong A' \times B'$.*

Dokaz. Neka su $f\colon A \to A'$ i $g\colon B \to B'$ bijekcije.
Definirajmo funkciju

$$h\colon A \times B \to A' \times B', \ h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Želimo pokazati da je h bijekcija. Neka su z_1, $z_2 \in A \times B$, $z_1 \neq z_2$. Imamo $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$, gdje su x_1, $x_2 \in A$ i y_1, $y_2 \in B$. Iz $z_1 \neq z_2$ slijedi $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$ pa iz činjenice da su f i g injekcije slijedi da je $f(x_1) \neq f(x_2)$ ili $g(y_1) \neq g(y_2)$.
Stoga je

$$(f(x_1), g(y_1)) \neq (f(x_2), g(y_2)),$$

tj. $h(z_1) \neq h(z_2)$. Prema tome h je injekcija.
Neka je $w \in A' \times B'$. Tada je $w = (u, v)$ gdje su $u \in A'$ i $v \in B'$. Budući da su f i g surjekcije postoje $x \in A$ i $y \in B$ takvi da je $f(x) = u$ i $g(y) = v$.
Neka je $z = (x, y)$.
Tada je $z \in A \times B$ te je

$$h(z) = (f(x), g(y)) = (u, v) = w,$$

dakle $h(z) = w$. Prema tome h je surjekcija.
Zaključak: $A \times B \cong A' \times B'$.

□

Definicija 2.3.9. *Neka su k_1 i k_2 kardinalni brojevi. Tada postoje skupovi A i B takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$ i $k_2 = \operatorname{card} B$.*
Definiramo

$$k_1 \cdot k_2 = \operatorname{card}(A \times B).$$

Za $k_1 \cdot k_2$ kažemo da je ***umnožak kardinalnih brojeva*** *k_1 i k_2.*

Da ova definicija ne ovisi o izboru skupova A i B slijedi direktno iz prethodne leme.

Propozicija 2.3.10. *Neka su k_1, k_2 i k_3 kardinalni brojevi. Tada vrijedi:*

(1) $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1$,

(2) $(k_1 \cdot k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3)$.

Dokaz. Neka su A, B i C skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$, $k_2 = \operatorname{card} B$ i $k_3 = \operatorname{card} C$.
Definirajmo funkciju

$$h\colon A \times B \to B \times A, \ h(x, y) = (y, x).$$

Očito je h bijekcija.
Stoga je

$$A \times B \cong B \times A, \ \text{tj.} \operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(B \times A).$$

Iz ovoga odmah slijedi tvrdnja (*1*).
Neka je

$$g\colon\ (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$$

funkcija definirana sa

$$g\,((x, y), z) = (x, (y, z)).$$

Očito je g bijekcija.
Slijedi

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C),$$

tj.

$$\operatorname{card}((A \times B) \times C) = \operatorname{card}(A \times (B \times C))$$

pa zaključujemo da vrijedi tvrdnja (*2*). □

Propozicija 2.3.11. *Neka su k_1, k_2 i k_3 kardinalni brojevi.*
Tada je $(k_1 + k_2) \cdot k_3 = (k_1 k_3) + (k_2 k_3)$.

Dokaz. Neka su A, B i C skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$, $k_2 = \operatorname{card} B$, $k_3 = \operatorname{card} C$ i $A \cap B = \emptyset$.

Očito je $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ te $(A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$.
Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned}(k_1 + k_2) \cdot k_3 &= \operatorname{card}(A \cup B) \cdot \operatorname{card} C \\ &= \operatorname{card}((A \cup B) \times C) \\ &= \operatorname{card}((A \times C) \cup (B \times C)) \\ &= \operatorname{card}(A \times C) + \operatorname{card}(B \times C) = k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3.\end{aligned}$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Označimo $\mathbf{0} = \operatorname{card} \emptyset$. Uočimo da je $\mathbf{0} = \{\emptyset\}$. Prema propoziciji 2.3.7 vrijedi $k + \mathbf{0} = k$ za svaki kardinalni broj k.
Za skup S kažemo da je jednočlan ako postoji a takav da je $S = \{a\}$. Ako su S i T skupovi takvi da je S jednočlan onda je $S \cong T$ ako i samo ako je T jednočlan skup.
Stoga je kardinalni broj bilo kojeg jednočlanog skupa klasa svih jednočlanih skupova. Tu klasu označavamo $\mathbf{1}$.
Dakle, $\mathbf{1} = \operatorname{card} S$ za svaki jednočlan skup S.

Propozicija 2.3.12. *Za svaki kardinalni broj k vrijedi* $\mathbf{1} \cdot k = k$.

Dokaz. Neka je S skup te neka je A jednočlan skup. Imamo $A = \{a\}$ za neki a.
Vrijedi

$$A \times S = \{(a, x) \mid x \in S\}.$$

Funkcija $S \to A \times S$, $x \mapsto (a, x)$ je očito bijekcija.
Stoga je $S \cong A \times S$ pa je

$$\begin{aligned}\operatorname{card} S &= \operatorname{card}(A \times S) \\ &= \operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} S \\ &= \mathbf{1} \cdot \operatorname{card} S.\end{aligned}$$

Dakle, $\operatorname{card} S = \mathbf{1} \cdot \operatorname{card} S$ za svaki skup S.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.3.13. *Neka su k_1, k_2 i k_3 kardinalni brojevi takvi da je $k_1 \leq k_2$. Tada je $k_1 + k_3 \leq k_2 + k_3$ i $k_1 \cdot k_3 \leq k_2 \cdot k_3$.*

Dokaz. Neka su A, B i C skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$, $k_2 = \operatorname{card} B$ i $k_3 = \operatorname{card} C$.
Možemo pretpostaviti, kao u dokazu propozicije 2.3.7 da su skupovi A, B i C u parovima disjunktni. Iz $k_1 \leq k_2$ slijedi da postoji injekcija $f : A \to B$.
Definirajmo funkciju $g : A \cup C \to B \cup C$ s

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ x, & x \in C. \end{cases}$$

Tvrdimo da je g injekcija.
Neka su $x_1, x_2 \in A \cup C$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Ako su $x_1, x_2 \in A$, onda je $g(x_1) \neq g(x_2)$ jer je f injekcija.
Ako su $x_1, x_2 \in C$, onda je očito $g(x_1) \neq g(x_2)$. Ako je $x_1 \in A$ i $x_2 \in C$, onda je $g(x_1) \in B$, $g(x_2) \in C$ pa zbog $B \cap C = \emptyset$ imamo $g(x_1) \neq g(x_2)$.
Zaključak: g je injekcija.
Stoga je

$$\operatorname{card}(A \cup C) \leq \operatorname{card}(B \cup C).$$

Imamo

$$k_1 + k_3 = \operatorname{card}(A \cup C) \leq \operatorname{card}(B \cup C) = k_2 + k_3.$$

Definirajmo funkciju

$$h\colon A \times C \to B \times C,\ h(a,c) = (f(a), c).$$

Tada je h injekcija, naime ako su $x, x' \in A \times C$ takvi da je $x \neq x'$, onda je $x = (a, c)$, $x' = (a', c')$, gdje su $a, a' \in A$ i $c, c' \in C$ takvi da je $a \neq a'$ ili $c \neq c'$ pa slijedi $f(a) \neq f(a')$ ili $c \neq c'$, stoga je $h(x) \neq h(x')$.
Stoga je

$$\operatorname{card}(A \times C) \leq \operatorname{card}(B \times C) \text{ pa je } k_1 \cdot k_3 \leq k_2 \cdot k_3.$$

□

Neka su A i B skupovi. Sa A^B ćemo označavati skup svih funkcija $B \to A$.
Dakle,

$$A^B = \{f \text{ funkcija} \mid f\colon B \to A\}.$$

Primjer 2.3.14. Neka su a, b i c takvi da je $a \neq b$, $a \neq c$ i $b \neq c$.
Za $x, y \in \{a, b, c\}$ neka je $f_{xy}\colon \{1, 2\} \to \{a, b, c\}$ funkcija takva da je

$$f_{xy}(1) = x \text{ i } f_{xy}(2) = y.$$

Tada je

$$\{a, b, c\}^{\{1,2\}} = \{f_{aa}, f_{ab}, f_{ac}, f_{ba}, f_{bb}, f_{bc}, f_{ca}, f_{cb}, f_{cc}\}.$$

S druge strane za x,y, $z \in \{1, 2\}$ neka je $g_{xyz}\colon \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$ funkcija takva da je

$$g_{xyz}(a) = x,\ g_{xyz}(b) = y \text{ i } g_{xyz}(c) = z.$$

Tada je

$$\{1, 2\}^{\{a,b,c\}} = \{g_{111}, g_{112}, g_{121}, g_{122}, g_{211}, g_{212}, g_{221}, g_{222}\}.$$

Uočimo da skup $\{a, b, c\}^{\{1,2\}}$ ima 9 elemenata i $9 = 3^2$ te da skup $\{1, 2\}^{\{a,b,c\}}$ ima 8 elemenata i $2^3 = 8$.

Propozicija 2.3.15. *Neka su S, T i V skupovi te neka su $f\colon S \to T$ i $g\colon T \to V$ funkcije.*

(1) Ako je $g \circ f$ injekcija, onda je f injekcija.

(2) Ako je $g \circ f$ surjekcija, onda je g surjekcija.

Dokaz.

(1) Pretpostavimo da je $g \circ f$ injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$.
Tada je

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2) \text{ tj. } g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

pa je očito $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dakle, f je injekcija.

(2) Pretpostavimo da je $g \circ f$ surjekcija. Neka je $z \in V$.
Tada postoji $x \in S$ takav da je

$$(g \circ f)(x) = z, \text{ tj. } g(f(x)) = z.$$

Time smo dokazali da za svaki $z \in V$ postoji $y \in T$ takav da je $g(y) = z$.
Prema tome, g je surjekcija.

□

Definicija 2.3.16. *Neka je X skup. Definirajmo funkciju $id_X\colon X \to X$, $id_X(x) = x$ za svaki $x \in X$. Za id_X kažemo da je **identiteta** na skupu X.*

Očito je id_X bijekcija.

Propozicija 2.3.17. *Neka su S i T skupovi te neka su $f\colon S \to T$ i $g\colon T \to S$ funkcije takve da je $g \circ f = id_S$ te $f \circ g = id_T$. Tada je f bijekcija i $f^{-1} = g$.*

Dokaz. Iz $g \circ f = id_S$ i tvrdnje (*1*) iz propozicije 2.3.15 slijedi da je f injekcija. Iz $f \circ g = id_T$ i tvrdnje (*2*) iz propozicije 2.3.15 slijedi da je f surjekcija.
Prema tome f je bijekcija.
Neka je $y \in T$. Tada je $f^{-1}(y) = x$, gdje je $x \in S$ takav da je $f(x) = y$.
Slijedi

$$g(f(x)) = g(y)$$

pa je

$$x = g(y) \text{ (jer je } g \circ f = id_S).$$

Dakle, $f^{-1}(y) = g(y)$ za svaki $y \in T$. Prema tome $f^{-1} = g$. □

Lema 2.3.18. *Neka su A, A', B i B' skupovi takvi da je $A \cong A'$ i $B \cong B'$. Tada je $A^B \cong A'^{B'}$.*

Dokaz. Neka su $a\colon A \to A'$ i $b\colon B \to B'$ bijekcije. Neka je $\Phi\colon A^B \to A'^{B'}$ funkcija definirana s $\Phi(f) = a \circ f \circ b^{-1}$ za svaki $f \in A^B$ te neka je $\Psi\colon A'^{B'} \to A^B$ funkcija definirana s $\Psi(g) = a^{-1} \circ g \circ b$ za svaki $g \in A'^{B'}$.
Tvrdimo da je funkcija Φ bijekcija. To će slijediti iz propozicije 2.3.17 ako pokažemo da je $\Phi \circ \Psi = id_{A'^{B'}}$ i $\Psi \circ \Phi = id_{A^B}$.
Neka je $f \in A^B$.
Imamo

$$(\Psi \circ \Phi)(f) = \Psi(\Phi(f)) = \Psi\left(a \circ f \circ b^{-1}\right) = a^{-1} \circ \left(a \circ f \circ b^{-1}\right) \circ b = f.$$

Dakle,

$$(\Psi \circ \Phi)(f) = f = id_{A^B}(f).$$

Prema tome $\Psi \circ \Phi = id_{A^B}$.
S druge strane, za svaki $g \in A'^{B'}$ vrijedi

$$(\Phi \circ \Psi)(g) = \Phi(\Psi(g)) = \Phi\left(a^{-1} \circ g \circ b\right) = a \circ \left(a^{-1} \circ g \circ b\right) \circ b^{-1} = g.$$

Prema tome, $\Phi \circ \Psi = id_{A'^{B'}}$.
Zaključak: Φ je bijekcija. Time je tvrdnja leme dokazana. $\square$

Definicija 2.3.19. *Neka su k_1 i k_2 kardinalni brojevi. Tada postoje skupovi A i B takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$ i $k_2 = \operatorname{card} B$. Definirajmo kardinalni broj $k_1^{k_2}$ na sljedeći način:*

$$k_1^{k_2} = \operatorname{card}\left(A^B\right).$$

Uočimo da ova definicija ne ovisi o izboru skupova A i B. Naime, ako su A' i B' skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A'$ i $k_2 = \operatorname{card} B'$, onda je $A' \cong A$ i $B' \cong B$ pa iz leme 2.3.18 slijedi

$$A^B \cong A'^{B'}, \text{ tj. } \operatorname{card}\left(A^B\right) = \operatorname{card}\left(A'^{B'}\right).$$

Primjer 2.3.20. Za skup A neka je $z_A\colon \emptyset \to A$ prazna funkcija. Neka je k kardinalni broj. Imamo $k = \operatorname{card} A$, A je skup.
Vrijedi

$$k^0 = \operatorname{card}\left(A^\emptyset\right) = \operatorname{card}\{z_A\} = \mathbf{1}.$$

Dakle, $k^0 = \mathbf{1}$ za svaki kardinalni broj k.
S druge strane, ako je k kardinalni broj te A skup takav da je $k = \operatorname{card} A$ onda je

$$\mathbf{0}^k = \operatorname{card}\left(\emptyset^A\right) = \begin{cases} \operatorname{card}\emptyset, & \text{ako je } A \neq \emptyset \\ \operatorname{card}\{z_A\}, & \text{ako je } A = \emptyset. \end{cases}$$

Iz ovoga zaključujemo da je

$$\mathbf{0}^k = \begin{cases} 0, & \text{ako je } k \neq 0 \\ 1, & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

Primjer 2.3.21. Neka je k kardinalni broj. Neka je A skup takav da je $k = \operatorname{card} A$. Neka je C bilo koji jednočlan skup. Neka je c takav da je $C = \{c\}$.
Imamo funkciju $f : A \to C$ definiranu s $f(x) = c$ za svaki $x \in A$.
Dakle, C^A je neprazan skup.
S druge strane ako su $f, g \in C^A$ tj. $f, g : A \to C$, onda za svaki $x \in A$ vrijedi $f(x) = c = g(x)$ pa očito vrijedi $f = g$. Prema tome, C^A je jednočlan skup.
Imamo

$$\mathbf{1}^k = \operatorname{card} C^A = \mathbf{1}.$$

Prema tome $\mathbf{1}^k = \mathbf{1}$.
S druge strane, tvrdimo da je $k^1 = k$. U tu svrhu dokažimo da je $A \cong A^C$.
Definirajmo $f : A \to A^C$ na sljedeći način: za $x \in A$ imamo da je $f(x) : C \to A$ funkcija takva da je $f(x)(c) = x$.
Ako su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $x_1 \neq x_2$, onda je $f(x_1)(c) \neq f(x_2)(c)$ pa je $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Prema tome f je injekcija.
Nadalje, ako je $g \in A^C$ tada za $x = g(c)$ vrijedi $g = f(x)$ (jer se funkcije g i $f(x)$ podudaraju u jedinoj točki svoje domene: $g(c) = x$, $f(x)(c) = x$). Prema tome f je surjekcija, time smo pokazali da je $A \cong A^C$.
Stoga je

$$k^1 = \operatorname{card} A^C = \operatorname{card} A = k.$$

Dakle, $k^1 = k$.

Propozicija 2.3.22. *Neka su a, b i c kardinalni brojevi. Tada vrijedi* $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

Dokaz. Odaberimo skupove A, B i C takve da je $a = \operatorname{card} A$, $b = \operatorname{card} B$ i $c = \operatorname{card} C$. Pri tome možemo pretpostaviti da su skupovi B i C disjunktni.
Imamo

$$b + c = \operatorname{card}(B \cup C) \text{ pa je } a^{b+c} = \operatorname{card}\left(A^{B \cup C}\right),$$

s druge strane

$$a^b = \operatorname{card}\left(A^B\right) \text{ i } a^c = \operatorname{card}\left(A^C\right)$$

pa je

$$a^b \cdot a^c = \operatorname{card}\left(A^B \times A^C\right).$$

Stoga je dovoljno dokazati

$$A^{B \cup C} \cong A^B \times A^C.$$

Uočimo sljedeće: ako je $f \in A^{B \cup C}$, onda je $f : B \cup C \to A$ pa imamo restrikcije

$$f_{|B} : B \to A \text{ i } f_{|C} : C \to A,$$

dakle

$$(f_{|B}, f_{|C}) \in A^B \times A^C.$$

Definirajmo

$$\Phi\colon A^{B\cup C} \to A^B \times A^C \text{ sa } \Phi(f) = \left(f_{|B}, f_{|C}\right), \text{ za svaki } f \in A^{B\cup C}.$$

Tvrdimo da je Φ bijekcija. Neka su $f_1, f_2 \in A^{B\cup C}$ takvi da je $f_1 \neq f_2$.
Imamo $f_1, f_2\colon B \cup C \to A$ i $f_1 \neq f_2$ pa postoji $x \in B \cup C$ takav da je $f_1(x) \neq f_2(x)$.
Slijedi $x \in B$ ili $x \in C$.
Ako je $x \in B$ onda imamo

$$\left(f_{1|B}\right)(x) = f_1(x) \neq f_2(x) = \left(f_{2|B}\right)(x),$$

tj.

$$\left(f_{1|B}\right)(x) \neq \left(f_{2|B}\right)(x)$$

pa je $f_{1|B} \neq f_{2|B}$, a onda je očito $\Phi(f_1) \neq \Phi(f_2)$.
Do istog zaključka dolazimo ako je $x \in C$.
Dakle, $\Phi(f_1) \neq \Phi(f_2)$ pa zaključujemo da je Φ injekcija.
Neka je $w \in A^B \times A^C$. Imamo $w = (g, h)$ gdje je $g\colon B \to A$ i $h\colon C \to A$.
Definirajmo $f\colon B \cup C \to A$ na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in B \\ h(x), & x \in C. \end{cases}$$

Imamo $f \in A^{B\cup C}$ i očito vrijedi $f_{|B} = g$ i $f_{|C} = h$.
Stoga je

$$\Phi(f) = (g, h) \text{ tj. } \Phi(f) = w.$$

Time smo dokazali da je Φ surjekcija.
Dakle, Φ je bijekcija.
Prema tome

$$A^{B\cup C} \cong A^B \times A^C \text{ pa je } a^{b+c} = a^b \cdot a^c.$$

□

Propozicija 2.3.23. *Neka su a, b i c kardinalni brojevi. Tada vrijedi* $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

Dokaz. Neka su A, B i C skupovi takvi da je $a = \operatorname{card} A$, $b = \operatorname{card} B$ i $c = \operatorname{card} C$.
Imamo

$$\left(a^b\right)^c = \operatorname{card}\left(\left(A^B\right)^C\right) \text{ i } a^{bc} = \operatorname{card}\left(A^{B\times C}\right).$$

Stoga je dovoljno dokazati da je $\left(A^B\right)^C \cong A^{B\times C}$.
Uočimo sljedeće: ako je $f \in \left(A^B\right)^C$, onda je $f\colon C \to A^B$ pa za $x \in B$ i $y \in C$ imamo

$$f(y) \in A^B \text{ tj. } f(y)\colon B \to A$$

pa je

$$[f(y)]\,(x) \in A.$$

Definirajmo funkciju $\Phi\colon \left(A^B\right)^C \to A^{B\times C}$ na sljedeći način: za $f \in \left(A^B\right)^C$ neka je $\Phi(f)\colon B \times C \to A$ funkcija definirana sa

$$\Phi(f)(x,y) = [f(y)]\,(x), \text{ za sve } x \in B \text{ i } y \in C.$$

Dokažimo da je Φ bijekcija.
Neka su f_1, $f_2 \in \left(A^B\right)^C$ takvi da je $f_1 \neq f_2$. Dakle, f_1 i f_2 su dvije različite funkcije sa C u A^B pa slijedi da postoji $y \in C$ takav da je $f_1(y) \neq f_2(y)$. Sada imamo da su $f_1(y)$ i $f_2(y)$ dvije različite funkcije sa B u A pa slijedi da postoji $x \in B$ takav da je

$$[f_1(y)]\,(x) \neq [f_2(y)]\,(x), \text{ tj. } \Phi(f_1)(x,y) \neq \Phi(f_2)(x,y).$$

Stoga je $\Phi(f_1) \neq \Phi(f_2)$. Prema tome Φ je injekcija.
Neka je $g \in A^{B\times C}$. Dakle, $g\colon B \times C \to A$.
Definirajmo funkciju $f\colon C \to A^B$ na sljedeći način: za $y \in C$ neka je $f(y)\colon B \to A$ funkcija definirana sa

$$[f(y)]\,(x) = g(x,y), \text{ za svaki } x \in B.$$

Dakle, $f \in \left(A^B\right)^C$. Odmah se vidi da je $\Phi(f) = g$. Time smo pokazali da je Φ surjekcija.
Stoga imamo da je Φ bijekcija.
Prema tome,

$$\left(A^B\right)^C \cong A^{B\times C}.$$

□

Propozicija 2.3.24. *Neka je A skup. Tada je* $\{0,1\}^A \cong \mathcal{P}(A)$.

Dokaz. Definirajmo funkciju $\Psi\colon \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ sa

$$\Psi(f) = \{x \in A \mid f(x) = 1\} \text{ za svaki } f \in \{0,1\}^A\,.$$

Neka su f_1, $f_2 \in \{0,1\}^A$, $f_1 \neq f_2$. Postoji $x_0 \in A$ takav da je $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$.
Očito je

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0) \in \{0,1\}\,.$$

Ako je $f_1(x_0) = 1$, onda je $f_2(x_0) = 0$ te imamo $x_0 \in \Psi(f_1)$ i $x_0 \notin \Psi(f_2)$ pa je $\Psi(f_1) \neq \Psi(f_2)$, a ako je $f_1(x_0) = 0$, onda je $f_2(x_0) = 1$ pa analogno zaključujemo da je $\Psi(f_1) \neq \Psi(f_2)$.
U svakom slučaju je $\Psi(f_1) \neq \Psi(f_2)$ pa zaključujemo da je Ψ injekcija.
Neka je $B \in \mathcal{P}(A)$.
Definirajmo funkciju $f : A \to \{0, 1\}$ sa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \setminus B \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Očito je $\Psi(f) = B$. Dakle, Ψ je surjekcija, pa imamo da je Ψ bijekcija.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.3.25. *Neka je S skup. Tada ne postoji surjekcija $S \to \mathcal{P}(S)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji surjekcija $f : S \to \mathcal{P}(S)$.
Definirajmo

$$A = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}.$$

Očito je $A \subseteq S$, dakle $A \in \mathcal{P}(S)$. Budući da je f surjekcija postoji $x_0 \in S$ takav da je $f(x_0) = A$. Imamo dva slučaja:

(1) $x_0 \in A$.
Dakle, $x_0 \in f(x_0)$, a to znači da $x_0 \notin A$. Kontradikcija.

(2) $x_0 \notin A$.
Dakle, $x_0 \notin f(x_0)$, a to znači da je $x_0 \in A$. Kontradikcija.

U oba slučaja smo dobili kontradikciju. Zaključujemo da ne postoji surjekcija $S \to \mathcal{P}(S)$. □

Za skup S kažemo da je dvočlan ako postoje a i b takvi da je $a \neq b$ i $S = \{a, b\}$.
Ako su S i T skupovi takvi da je S dvočlan, onda je $S \cong T$ ako i samo ako je T dvočlan skup. Stoga je kardinalni broj bilo kojeg dvočlanog skupa klasa svih dvočlanih skupova. Tu klasu označavamo s $\mathbf{2}$. Dakle, $\mathbf{2} = \operatorname{card} S$ za svaki dvočlani skup.

Neka su k_1 i k_2 kardinalni brojevi takvi da je $k_1 \leq k_2$ i $k_1 \neq k_2$. Tada pišemo $k_1 < k_2$.

Propozicija 2.3.26. *Za bilo koji kardinalni broj k vrijedi $k < \mathbf{2}^k$.*

Dokaz. Neka je k kardinalni broj. Neka je A skup takav da je $k = \operatorname{card} A$.
Vrijedi

$$\mathbf{2}^k = \operatorname{card} \{0, 1\}^A$$

pa iz propozicije 2.3.24 slijedi $\mathbf{2}^k = \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$.
Treba dokazati da je

$$\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} \mathcal{P}(A) \text{ i } \operatorname{card} A \neq \operatorname{card} \mathcal{P}(A).$$

Prema propoziciji 2.3.25 ne postoji surjekcija $A \to \mathcal{P}(A)$ pa ne postoji ni bijekcija $A \to \mathcal{P}(A)$, što znači da skupovi A i $\mathcal{P}(A)$ nisu ekvipotentni, a to povlači $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$.
Definirajmo funkciju $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ s

$$f(x) = \{x\} \text{ za svaki } x \in A.$$

Neka su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Očito je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dakle, f je injekcija.
Time smo pokazali da je $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$.
Dakle, $k < \mathbf{2}^k$. □

Propozicija 2.3.27. *Neka su S i T neprazni skupovi takvi da postoji injekcija $S \to T$. Tada postoji surjekcija $T \to S$.*

Dokaz. Neka je $f\colon S \to T$ injekcija. Odaberimo $s_0 \in S$.
Definirajmo $g\colon T \to S$ na sljedeći način: neka je $y \in T$. Ako $y \notin f(S)$ onda definiramo $g(y) = s_0$. Ako je $y \in f(S)$ onda postoji jedinstveni $x \in S$ takav da je $f(x) = y$ pa definiramo $g(y) = x$.
Na taj način smo definirali funkciju $g\colon T \to S$ za koju očito vrijedi $g(f(x)) = x$ za svaki $x \in S$, a što povlači da je g surjekcija. □

Propozicija 2.3.28. *Neka su k_1, k_2 i k_3 kardinalni brojevi takvi da je $k_1 \leq k_2$. Tada vrijedi:*

(1) $k_3^{k_1} \leq k_3^{k_2}$ *ako je* $k_1 \neq \mathbf{0}$,

(2) $k_1^{k_3} \leq k_2^{k_3}$.

Dokaz. Neka su A, B i C skupovi takvi da je $k_1 = \operatorname{card} A$, $k_2 = \operatorname{card} B$ i $k_3 = \operatorname{card} C$.

(1) Iz $k_1 \leq k_2$ slijedi da postoji injekcija $A \to B$. Pretpostavimo da je $k_1 \neq \mathbf{0}$. Prema propoziciji 2.3.27 postoji surjekcija $\varphi\colon B \to A$ (skup A je neprazan jer je $k_1 \neq \mathbf{0}$).
Uočimo sljedeće: ako je $f \in C^A$, onda je $f \circ \varphi \in C^B$.
Definirajmo funkciju $h\colon C^A \to C^B$ sa

$$h(f) = f \circ \varphi.$$

Tvrdimo da je h injekcija.
Neka su $f_1, f_2 \in C^A$ takvi da je $f_1 \neq f_2$. To znači da postoji $x \in A$ takav da je

$f_1(x) \neq f_2(x)$. Kako je φ surjekcija postoji $z \in B$ takav da je $\varphi(z) = x$.
Dakle,

$$f_1(\varphi(z)) \neq f_2(\varphi(z)) \text{ tj. } (f_1 \circ \varphi)(z) \neq (f_2 \circ \varphi)(z).$$

Stoga je

$$f_1 \circ \varphi \neq f_2 \circ \varphi \text{ tj. } h(f_1) \neq h(f_2).$$

Time smo pokazali da je $h\colon C^A \to C^B$ injekcija.
Prema tome, $k_3^{k_1} \leq k_3^{k_2}$.

(2) Znamo da postoji injekcija $\psi\colon A \to B$.
Definirajmo funkciju $h\colon A^C \to B^C$ sa

$$h(f) = \psi \circ f \text{ za svaki } f \in A^C.$$

Dokažimo da je h injekcija. Neka su $f_1, f_2 \in A^C$ takvi da je $f_1 \neq f_2$. Tada postoji $x \in C$ takav da je $f_1(x) \neq f_2(x)$.
Budući da je funkcija ψ injekcija slijedi da je $\psi(f_1(x)) \neq \psi(f_2(x))$.
Dakle,

$$\psi \circ f_1 \neq \psi \circ f_2 \text{ tj. } h(f_1) \neq h(f_2)$$

pa je $h\colon A^C \to B^C$ injekcija. Iz toga zaključujemo da vrijedi $k_1^{k_3} \leq k_2^{k_3}$.

$\square$

Poglavlje 3

Kontinuum

3.1 Omeđeni skupovi

Definicija 3.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $M \in \mathbb{R}$. Kažemo da je M* ***gornja međa*** *skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq M$.*

Analogno definiramo pojam donje međe skupa.

Definicija 3.1.2. *Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ te ako S ima barem jednu gornju među onda kažemo da je S* ***odozgo omeđen*** *skup.*

Analogno definiramo pojam odozdo omeđenog skupa.

Definicija 3.1.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $M \in S$ takav da je M gornja međa skupa S. Tada za M kažemo da je* ***maksimum*** *skupa S.*

Analogno definiramo pojam minimuma skupa.

Definicija 3.1.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $A \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi sljedeće:*
1) A je gornja međa od S,
2) $A \leq M$ za svaku gornju među M od S.
Tada za A kažemo da je ***supremum*** *skupa S.*

Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{R}$ i da su A i B supremumi od S. Tada su A i B gornje međe od S pa imamo da je $A \leq B$ (jer je A supremum) te $B \leq A$ (jer je B supremum).
Stoga je $A = B$. Prema tome, supremum skupa ako postoji mora biti jedinstven.

Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{R}$ te da je M maksimum skupa S. Tada je M gornja međa od S (očito) te za svaku gornju među N od S vrijedi $M \leq N$ (jer je $M \in S$).
Dakle, M je supremum skupa S.
Obratno, supremum skupa ne mora biti maksimum skupa, naime supremum skupa ne mora

biti element tog skupa.
Naprimjer, neka je $S = \langle -\infty, 1\rangle$. Očito je 1 gornja međa od S, a kada bi postojala gornja međa M od S takva da je $M < 1$, onda bi postojao $x \in \mathbb{R}$ takav da je $M < x < 1$, a to bi značilo da je x koji je element skupa S veći od gornje međe M, što nije moguće. Prema tome, 1 je supremum skupa S. Očito $1 \notin S$.

Ako skup ima supremum, onda je očito odozgo omeđen (i neprazan, naime prazan skup nema supremum jer je svaki realan broj gornja međa od $\emptyset$ pa ne postoji najmanja gornja međa od $\emptyset$). Obratno, svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum i to je posljedica sljedeće tvrdnje.
Aksiom potpunosti. *Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za svaki $x \in A$ i svaki $y \in B$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in A$ i svaki $y \in B$.*

Propozicija 3.1.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neprazan odozgo omeđen skup. Tada S ima supremum.*

Dokaz. Neka je G skup svih gornjih međa skupa S. Tada za svaki $x \in S$ i svaki $y \in G$ vrijedi $x \leq y$.
Nadalje, $G \neq \emptyset$ jer je S odozgo omeđen. Prema aksiomu potpunosti postoji $A \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq A \leq y$ za svaki $x \in S$ i svaki $y \in G$. Očito je A supremum skupa S. □

Definicija 3.1.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $B \in \mathbb{R}$. Kažemo da je B* ***infimum*** *skupa S ako vrijedi sljedeće:*
1) B je donja međa skupa S,
2) $B \geq m$ za svaku donju među m skupa S.

Analogno, kao i u slučaju supremuma vidimo da infimum skupa, ako postoji, mora biti jedinstven.
Nadalje, ako je m minimum skupa S, onda je m i infimum skupa S.

Sljedeća propozicija se dokazuje analogno kao prethodna.

Propozicija 3.1.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neprazan odozdo omeđen skup. Tada S ima infimum.*

Definicija 3.1.8. *Za skup $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je* ***omeđen*** *ako je omeđen odozgo i odozdo.*

3.2 Niz i red

Definicija 3.2.1. *Neka je S skup te neka je $x\colon \mathbb{N} \to S$. Tada za x kažemo da je* ***niz*** *u S. Za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo x_n. Funkciju x označavamo i s $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili (x_n).*

Definicija 3.2.2. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz (x_n)* ***teži*** *ili* ***konvergira*** *prema a i pišemo $x_n \to a$ ako za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $\forall n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. U tom slučaju za a kažemo da je* ***limes*** *niza (x_n).*

Definicija 3.2.3. *Za niz* (x_n) *u* $\mathbb{R}$ *kažemo da je* ***konvergentan*** *ako postoji* $a \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to a$.

Primjer 3.2.4. Neka je $c \in \mathbb{R}$ te neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je očito da $x_n \to c$.

Definicija 3.2.5. *Za niz* (x_n) *u* $\mathbb{R}$ *kažemo da je* ***omeđen*** *ako je* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *omeđen skup u* $\mathbb{R}$.

Definicija 3.2.6. *Za niz* (x_n) *u* $\mathbb{R}$ *kažemo da je* ***rastući*** *ako za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $x_n \leq x_{n+1}$.

Definicija 3.2.7. *Za niz* (x_n) *u* $\mathbb{R}$ *kažemo da je* ***padajući*** *ako za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $x_n \geq x_{n+1}$.

Lema 3.2.8. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$.

(1) *Pretpostavimo da je* (x_n) *rastući niz. Tada za sve* $n, m \in \mathbb{N}$ *takve da je* $n \leq m$ *vrijedi* $x_n \leq x_m$.

(2) *Pretpostavimo da je* (x_n) *padajući niz. Tada za sve* $n, m \in \mathbb{N}$ *takve da je* $n \leq m$ *vrijedi* $x_n \geq x_m$.

Dokaz.

(1) Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom da za svaki $m \geq n$ vrijedi $x_n \leq x_m$.
Tvrdnja je očita za $m = n$.
Pretpostavimo da za neki $m \geq n$ vrijedi $x_n \leq x_m$.
Prema pretpostavci imamo $x_m \leq x_{m+1}$ stoga je $x_n \leq x_{m+1}$. Time je tvrdnja dokazana.

(2) Tvrdnju dokazujemo analogno.

□

Propozicija 3.2.9. *Neka je* (x_n) *rastući niz, te neka je a supremum skupa* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Tada* $x_n \to a$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon < x_{n_0}$. U suprotnom bi za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedilo $x_n \leq a - \varepsilon$, što bi značilo da je $a - \varepsilon$ gornja međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, a to nije moguće jer je a najmanja gornja međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon < x_{n_0}$. Neka je $n \geq n_0$.
Tada je

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$$

pa je

$$x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \text{ tj. } |x_n - a| < \varepsilon.$$

Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Prema tome, $x_n \to a$. □

Propozicija 3.2.10. *Neka je (x_n) padajući niz, te neka je a infimum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{n_0} < a + \varepsilon$. U suprotnom bi za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedilo $x_n \geq a + \varepsilon$, što bi značilo da je $a + \varepsilon$ donja međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, a ovo je u kontradikciji s činjenicom da je a infimum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{n_0} < a + \varepsilon$.
Sada, analogno kao u dokazu prethodne propozicije dobivamo da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Prema tome, $x_n \to a$. □

Primjer 3.2.11. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$. Tada $x_n \to 0$.*

Dokaz. Dokažimo to. Očito je (x_n) padajući niz. Prema prethodnoj propoziciji dovoljno je dokazati da je 0 infimum skupa $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Očito je 0 donja međa skupa $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pretpostavimo da postoji donja međa B ovog skupa, takva da je $0 < B$. Odaberimo prirodan broj n takav da je $\frac{1}{B} < n$. Slijedi $\frac{1}{n} < B$, što je u kontradikciji s činjenicom da je B donja međa skupa $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Prema tome, 0 je infimum danog skupa. □

Korolar 3.2.12.

(1) Neka je (x_n) rastući i omeđen niz. Tada je (x_n) konvergentan.

(2) Neka je (x_n) padajući i omeđen niz. Tada je (x_n) konvergentan.

Dokaz.

(1) Skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen pa ima supremum (prema propoziciji 3.1.5). Iz propozicije 3.2.9 slijedi da (x_n) teži tom supremumu. Dakle, (x_n) je konvergentan niz.

(2) Tvrdnju dokazujemo analogno.

□

Propozicija 3.2.13. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. $a \neq b$.
Definirajmo
$$\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}.$$
Kako $x_n \to a$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$.
Kako $x_n \to b$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - b| < \varepsilon$.
Neka je $n = \max\{n_\varepsilon, n_0\}$.
Imamo
$$2\varepsilon = |b-a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |b - x_n| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Dakle, $2\varepsilon < 2\varepsilon$ što je nemoguće. Zaključujemo da je $a = b$. □

Definicija 3.2.14. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Za uređeni par nizova $((x_n), (s_n))$ kažemo da je **red** i označavamo ga s $\sum x_n$.*

Definicija 3.2.15. *Ako je $n \in \mathbb{N}$, onda za s_n kažemo da je **n-ta pracijalna suma** reda $\sum x_n$.*

Definicija 3.2.16. *Neka je $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ red te $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a **suma reda** $\sum x_n$ ako je a limes niza parcijalnih suma tog reda.*

Sumu reda (koja je, ako postoji, jedinstvena prema propoziciji 3.2.13) označavamo sa

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Definicija 3.2.17. *Ako suma reda $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ postoji (tj. ako je niz parcijalnih suma ovog reda konvergentan), onda za red $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ kažemo da je **konvergentan**.*

Propozicija 3.2.18. *Neka su x_n i y_n nizovi realnih brojeva, te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

(1) $\lambda x_n \to \lambda a$,

(2) $-x_n \to -a$,

(3) $x_n + y_n \to a + b$.

Dokaz.

(1) Možemo pretpostaviti da je $\lambda \neq 0$. Kako $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.
Za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|\lambda x_n - \lambda a| = |\lambda||x_n - a| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Dakle, $|\lambda x_n - \lambda a| < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Time je tvrdnja dokazana.

(2) Tvrdnja slijedi iz (*1*) za $\lambda = -1$.

(3) Neka je $\varepsilon > 0$.
Zbog $x_n \to a$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Također, zbog $y_n \to b$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Neka je

$$n_1 = \max\{n_\varepsilon, n_0\}.$$

Tada za svaki $n \geq n_1$ vrijedi

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, $|(x_n + y_n) - (a+b)| < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_1$ pa vrijedi $x_n + y_n \to a + b$.

□

Lema 3.2.19. *Neka je $q \in \langle 0, 1\rangle$. Tada vrijedi $q^n \to 0$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$.
Imamo

$$q^{n+1} = q^n \cdot q < q^n.$$

Dakle, niz $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ je padajući. Stoga je dovoljno, prema propoziciji 3.2.10, dokazati da je 0 infimum skupa $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ovaj skup je očito odozdo omeđen pa prema propoziciji 3.1.7 postoji infimum od $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, označimo ga s m. Očito je 0 donja međa skupa $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pa vrijedi $0 \leq m$.
Pretpostavimo da je $0 < m$. Tada je $m < \frac{1}{q}m$ iz čega zaključujemo da $\frac{1}{q}m$ nije donja međa skupa $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (jer je m najveća donja međa tog skupa). Stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $q^n < \frac{1}{q}m$, iz čega slijedi da je $q^{n+1} < m$ a to je u kontradikciji s činjenicom da je m infimum skupa $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Dakle, $m = 0$. □

Primjer 3.2.20. *Neka je $q \in \langle 0, 1\rangle$. Red $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ je konvergentan i $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.*

Dokaz. Dokažimo to.
Neka je (s_n) niz parcijalnih suma ovog reda. Neka je $n \in \mathbb{N}$.
Vrijedi

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} q^i \\ &= q + q^2 + \ldots + q^n \\ &= q\left(1 + q + \ldots q^{n-1}\right) \\ &= q\frac{1-q^n}{1-q} \\ &= \frac{q}{1-q} + q^n\frac{-q}{1-q}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$s_n = \frac{q}{1-q} + q^n\frac{-q}{1-q} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Iz leme 3.2.19 i prve tvrdnje iz propozicije 3.2.18 slijedi da s_n teži u $\frac{q}{1-q}$. □

Propozicija 3.2.21. *Neka je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ red takav da je $x_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da postoji $A \in \mathbb{R}$ takav da je $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq A$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan i $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq A$.*

Dokaz. Neka je (s_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Prema pretpostavci za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $s_n \leq A$.
Dakle, A je gornja međa skupa $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Neka je
$$a = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Očito je $0 \leq a \leq A$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i = s_{n+1}$$
pa zaključujemo da je niz (s_n) rastući. Prema propoziciji 3.2.9 vrijedi $s_n \to a$.
Dakle, red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentan i
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a$$
pa je
$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq A.$$
□

Lema 3.2.22. *Neka je (x_n) rastući niz te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Tada je $x_n \leq a$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $a < x_N$. Tada za svaki $n \geq N$ vrijedi $x_n \geq x_N$.
Neka je $\varepsilon = x_N - a$. Tada je $\varepsilon > 0$ i $a + \varepsilon = x_N$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi
$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ tj. } x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle.$$
Slijedi da je $x_n < a + \varepsilon$ tj. $x_n < x_N$ za svaki $n \geq n_0$.
Neka je $n = \max\{n_0, N\}$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq N$ tj. $x_n < x_N$ i $x_n \geq x_N$, a to je očito nemoguće. □

Propozicija 3.2.23. *Neka je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan red takav da je $x_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\sum_{n=1}^{k} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je (s_k) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Imamo
$$s_k \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$
a iz dokaza propozicije 3.2.21 slijedi da je niz (s_k) rastući.
Prema prethodnoj lemi vrijedi
$$s_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$
□

Propozicija 3.2.24. *Neka je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan red te neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} cx_n$ konvergentan i $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Dokaz. Neka je (s_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ te neka je (z_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} cx_n$. Neka je $n \in \mathbb{N}$.
Imamo
$$z_n = \sum_{k=1}^{n} cx_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k = c \cdot s_n.$$
Dakle, $z_n = c \cdot s_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Imamo
$$s_n \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$
pa iz prve tvrdnje propozicije 3.2.18 slijedi
$$c \cdot s_n \to c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \text{ tj. } z_n \to c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 3.2.25. *Neka su $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ i $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ redovi takvi da je $0 \leq x_n \leq y_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ Pretpostavimo da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ konvergentan. Tada je konvergentan i red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ te vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.*

Dokaz. Neka je (s_k) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ te neka je (z_k) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$. Neka je $k \in \mathbb{N}$.
Iz činjenice da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \leq y_n$ i propozicije 3.2.23 slijedi
$$s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n \leq \sum_{n=1}^{k} y_n = z_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$
Dakle, $s_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Iz propozicije 3.2.21 slijedi tvrdnja leme. □

3.3 Decimalni prikaz realnog broja

Propozicija 3.3.1. *Neka je* (a_n) *niz u* $\{0, \ldots, 9\}$*. Tada je red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n}$ *konvergentan i* $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq 1$.

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi

$$0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}.$$

Red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{9}{10^n}$ je konvergentan prema primjeru 3.2.20 i propoziciji 3.2.24 te vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} &= 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &= 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Iz prethodne leme slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n}$ konvergentan i

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1.$$

□

Teorem 3.3.2. *Neka je* $x \in [0, 1\rangle$*. Tada postoji niz* (a_n) *u* $\{0, \ldots, 9\}$ *takav da je* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Dokaz. Definirajmo niz realnih brojeva (γ_n) induktivno na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 10x - \lfloor 10x \rfloor, \\ \gamma_{n+1} &= 10\gamma_n - \lfloor 10\gamma_n \rfloor \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Uočimo da je $\gamma_n \in [0, 1\rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Stoga je

$$0 \leq 10\gamma_n < 10$$

pa je

$$\lfloor 10\gamma_n \rfloor \in \{0, \ldots, 9\}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Također, $\lfloor 10x \rfloor \in \{0, \dots, 9\}$.
Definirajmo niz (a_n) u $\{0, \dots, 9\}$ na sljedeći način:

$$a_1 = \lfloor 10x \rfloor, \ a_{n+1} = \lfloor 10\gamma_n \rfloor \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Iz (3.1) slijedi $\gamma_{n+1} = 10\gamma_n - a_{n+1}$ pa je

$$\frac{\gamma_{n+1}}{10^{n+1}} = \frac{\gamma_n}{10^n} - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Tvrdimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{\gamma_n}{10^n} = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}. \tag{3.3}$$

Dokažimo ovo indukcijom po n.
Imamo

$$\gamma_1 = 10x - \lfloor 10x \rfloor = 10x - a_1$$

pa slijedi

$$\frac{\gamma_1}{10} = x - \frac{a_1}{10}.$$

Dakle, (3.3) vrijedi za $n = 1$.
Pretpostavimo da (3.3) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Iz (3.2) i (3.3) slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{n+1}}{10^{n+1}} &= \frac{\gamma_n}{10^n} - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \\
&= x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \\
&= x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k}.
\end{aligned}$$

Dakle, (3.3) vrijedi za $n + 1$. Time smo dokazali da (3.3) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$.
Vrijedi

$$\left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right| = \left| \frac{\gamma_n}{10^n} \right| = \frac{\gamma_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}.$$

Dakle,

$$\left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right| < \left(\frac{1}{10} \right)^n \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema lemi 3.2.19 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\left(\frac{1}{10}\right)^n < \varepsilon$.
Iz (3.4) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right| < \varepsilon.$$

Prema tome niz parcijalnih suma reda $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n}$ teži prema x.
Dakle,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

□

Definicija 3.3.3. *Neka je $\sum x_n$ konvergentan red. Za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ definiramo*

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{k-1} x_n.$$

Dakle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{k-1} x_n + \sum_{n=k}^{\infty} x_n. \tag{3.5}$$

Propozicija 3.3.4. *Neka je $\sum x_n$ konvergentan red te neka su $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $k \leq l$. Tada je*

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n = \sum_{n=k}^{l} x_n + \sum_{n=l+1}^{\infty} x_n.$$

Dokaz. Za $k = 1$ tvrdnja vrijedi prema (3.5).
Pretpostavimo da je $k \geq 2$. Neka je $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.
Imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{l} x_n + \sum_{n=l+1}^{\infty} x_n &= \sum_{n=k}^{l} x_n + \sigma - \sum_{n=1}^{l} x_n \\
&= \sum_{n=k}^{l} x_n + \sigma - \left(\sum_{n=1}^{k-1} x_n + \sum_{n=k}^{l} x_n \right) \\
&= \sigma - \sum_{n=1}^{k-1} x_n \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} x_n.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\sum_{n=k}^{l} x_n + \sum_{n=l+1}^{\infty} x_n = \sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

□

Lema 3.3.5. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je (y_n) niz realnih brojeva definiran s $y_n = x_{n+N}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $y_n \to a$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Ako je $n \geq n_0$, onda je $n + N \geq n_0$ pa je $|x_{n+N} - a| < \varepsilon$, tj. $|y_n - a| < \varepsilon$. Dakle, $y_n \to a$. □

Propozicija 3.3.6. *Neka je $\sum x_n$ konvergentan red te neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.*
Definirajmo niz

$$(y_n), \; y_n = x_{n+(k-1)}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je red $\sum y_n$ konvergentan i vrijedi

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Dokaz. Neka je (s_i) niz parcijalnih suma reda $\sum y_n$ te neka je (t_i) niz parcijalnih suma reda $\sum x_n$. Neka je $i \in \mathbb{N}$.
Imamo

$$\begin{aligned} s_i &= \sum_{n=1}^{i} y_n \\ &= \sum_{n=1}^{i} x_{n+(k-1)} \\ &= \sum_{n=k}^{i+(k-1)} x_n \\ &= \sum_{n=1}^{i+(k-1)} x_n - \sum_{n=1}^{k-1} x_n \\ &= t_{i+(k-1)} - \sum_{n=1}^{k-1} x_n. \end{aligned}$$

Dakle,

$$s_i = t_{i+(k-1)} - \sum_{n=1}^{k-1} x_n \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Znamo da $t_i \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pa iz prethodne leme slijedi da

$$t_{i+(k-1)} \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Iz (3.6), treće tvrdnje iz propozicije 3.2.18 i primjera 3.2.4 slijedi da

$$s_i \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{k-1} x_n, \text{ tj. } s_i \to \sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 3.3.7. *Neka su $\sum x_n$ i $\sum y_n$ konvergentni redovi takvi da je $0 \leq x_n \leq y_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takvi da je $x_k < y_k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Dokaz. Prema lemi 3.2.25 vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Pretpostavimo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{3.7}$$

Neka je (s_i) niz parcijalnih suma reda $\sum x_n$ te neka je (t_i) niz parcijalnih suma reda $\sum y_n$.
Označimo $\lambda = y_k - x_k$. Očito je $\lambda > 0$.
Neka je $i \in \mathbb{N}$.
Imamo

$$\begin{aligned} t_{i+k} - s_{i+k} &= \sum_{n=1}^{i+k} y_n - \sum_{n=1}^{i+k} x_n \\ &= \sum_{n=1}^{i+k} (y_n - x_n) \geq y_k - x_k = \lambda. \end{aligned}$$

Dakle,

$$t_{i+k} - s_{i+k} \geq \lambda \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Definirajmo niz (z_i) sa $z_i = t_{i+k} - s_{i+k}$.
Prema lemi 3.3.5 vrijedi

$$t_{i+k} \to \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ i } s_{i+k} \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

pa iz (3.7) i propozicije 3.2.18 slijedi $z_i \to 0$. Prema (3.8) vrijedi $z_i \geq \lambda$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Kako $z_i \to 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq n_0$ vrijedi da je $|z_i - 0| < \lambda$. Slijedi $z_i < \lambda$ za svaki $i \geq n_0$ što je u kontradikciji s činjenicom da je $z_i \geq \lambda$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.
Zaključak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

□

Lema 3.3.8. *Neka su* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *konvergentni redovi. Pretpostavimo da je* $k \in \mathbb{N}$ *takav da je* $0 \leq a_n \leq b_n$*, za svaki* $n \geq k$ *te takav da je* $a_m < b_m$ *za neki* $m \geq k$.
Tada je

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n < \sum_{n=k}^{\infty} b_n.$$

Dokaz. Za $k = 1$ tvrdnja vrijedi prema prethodnoj lemi. Pretpostavimo da je $k \geq 2$. Definirajmo nizove (x_n) i (y_n) s

$$x_n = a_{n+(k-1)}$$

$$y_n = b_{n+(k-1)} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji 3.3.6 vrijedi

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ i } \sum_{n=k}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{3.9}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n + (k-1) = (n-1) + k \geq k$ pa je prema pretpostavci leme

$$0 \leq a_{n+(k-1)} \leq b_{n+(k-1)}, \text{ tj. } 0 \leq x_n \leq y_n.$$

Definirajmo $n = m - k + 1$. Zbog $m \geq k$ imamo $n \in \mathbb{N}$.
Vrijedi

$$x_n = a_{(m-k+1)+(k-1)} = a_m < b_m = b_{(m-k+1)+(k-1)} = y_n.$$

Dakle, $x_n < y_n$.
Prema prethodnoj lemi vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Iz ovoga i (3.9) slijedi tvrdnja leme. □

Lema 3.3.9. *Neka je $\sum a_n$ konvergentan red takav da je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$a_k \leq \sum_{n=k}^{\infty} a_n. \tag{3.10}$$

Dokaz. Za $k = 1$ tvrdnja slijedi iz propozicije 3.2.23.
Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Definirajmo niz (x_n) s $x_n = a_{n+(k-1)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \geq 0$ pa iz propozicije 3.2.23 slijedi da je $x_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.
Imamo

$$a_k = x_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n,$$

tj. (3.10) vrijedi. □

Lema 3.3.10. *Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^k}.$$

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $a_n = \frac{9}{10^n}$ i $x_n = a_{n+k}$. Dakle, $x_n = \frac{9}{10^{n+k}}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Koristeći propoziciju 3.3.6, propoziciju 3.2.24 i primjer 3.2.20 dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} &= \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^{n+k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} \cdot \frac{1}{10^n} \\
&= \frac{9}{10^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \\
&= \frac{9}{10^k} \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{9}{10^k} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10^k}.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 3.3.11. *Neka su (a_n) i (b_n) nizovi u $\{0, 1, \ldots, 9\}$ takvi da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{10^n}. \tag{3.11}$$

Pretpostavimo da ne postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n = 9$ za svaki $n \geq n_0$ te da ne postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $b_n = 9$ za svaki $n \geq n_0$. Tada je $a_n = b_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$.
Tvrdimo da je

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}. \tag{3.12}$$

(3.12) je očito za $k = 1$. Pretpostavimo da je $k \geq 2$.
Iz propozicije 3.3.4 slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \tag{3.13}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n}{10^n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}. \tag{3.14}$$

Iz definicije broja k slijedi da je $a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$.
Stoga je

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n}{10^n}. \tag{3.15}$$

Iz (3.13), (3.14) i (3.11) slijedi

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n}{10^n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} \text{ pa iz (3.15) slijedi (3.12).}$$

Vrijedi $a_k \neq b_k$. Pretpostavimo da je $a_k < b_k$. Tada je $a_k + 1 \leq b_k$. Prema pretpostavci propozicije postoji $n \geq k + 1$ takav da je $a_n \neq 9$ pa slijedi $a_n < 9$ pa iz leme 3.3.8 slijedi

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^n}.$$

Stoga je, prema lemi 3.3.10

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^k}. \tag{3.16}$$

Koristeći propoziciju 3.3.4, (3.16) i lemu 3.3.9 dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} &= \frac{a_k}{10^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \\ &= \frac{a_k + 1}{10^k} \leq \frac{b_k}{10^k} \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}.\end{aligned}$$

Dakle,
$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$$
što je u kontradikciji s (3.12).
Analogno dobivamo da pretpostavka $b_k < a_k$ vodi na kontradikciju. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

3.4 Kardinalni brojevi nekih skupova

Definicija 3.4.1. *Definirajmo* $\aleph_0 = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Propozicija 3.4.2. *Vrijedi* $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Dokaz. Iz propozicije 1.2.4 i teorema 1.1.15 slijedi da postoji surjekcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Iz korolara 2.3.3 slijedi da je $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0$.
S druge strane, iz $\mathbf{1} \leq \aleph_0$ i propozicije 2.3.13 slijedi da je $\mathbf{1} \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0$, tj. $\aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0$ (propozicija 2.3.12).
Dakle, $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ prema teoremu 2.2.5. □

Propozicija 3.4.3. *Vrijedi* $\mathbf{2}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$.

Dokaz. Imamo $\mathbf{2} \leq \aleph_0$ pa prema drugoj tvrdnji iz propozicije 2.3.28 vrijedi $\mathbf{2}^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$.
S druge strane, iz propozicije 2.3.26 slijedi $\aleph_0 < \mathbf{2}^{\aleph_0}$ pa koristeći propozicije 2.3.28, 2.3.24 i 3.4.2 dobivamo
$$\aleph_0^{\aleph_0} \leq \left(\mathbf{2}^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = \mathbf{2}^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$
dakle $\aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathbf{2}^{\aleph_0}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 3.4.4. *Definirajmo* $c = \operatorname{card} \mathbb{R}$. *Ovaj kardinalni broj nazivamo* ***kontinuum***.

Propozicija 3.4.5. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Tada je* $\operatorname{card}\langle a, b\rangle = c$.

Dokaz. Neka su $u, v \in \mathbb{R}$, $u < v$.
Dokažimo da je
$$\langle a, b\rangle \cong \langle u, v\rangle. \tag{3.17}$$
Definirajmo $f \colon \langle a, b\rangle \to \langle u, v\rangle$ sa
$$f(x) = (x - a)\frac{v - u}{b - a} + u.$$

Dokažimo prvo da je funkcija f dobro definirana, tj. da je $f(x) \in \langle u, v\rangle$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Neka je $x \in \langle a, b\rangle$. Tada je $a < x < b$ pa je $0 < x-a < b-a$. Množenjem ovih nejednakosti s $\frac{v-u}{b-a}$ dobivamo

$$0 < (x-a)\frac{v-u}{b-a} < v-u \text{ tj. } 0 < f(x)-u < v-u \text{ pa je } u < f(x) < v.$$

Očito je f injekcija.
Neka je $y \in \langle u, v\rangle$. Tada je $0 < y-u < v-u$ pa je

$$0 < (y-u)\frac{b-a}{v-u} < b-a, \text{ tj. } a < (y-u)\frac{b-a}{v-u} + a < b.$$

Definirajmo

$$x = (y-u)\frac{b-a}{v-u} + a.$$

Tada je $x \in \langle a, b\rangle$ i vrijedi $f(x) = y$. Prema tome, f je surjekcija.
Dakle, vrijedi $\langle a, b\rangle \cong \langle u, v\rangle$.
Posebno $\langle a, b\rangle \cong \langle -1, 1\rangle$. Dokažimo sada da je $\langle -1, 1\rangle \cong \mathbb{R}$. Definirajmo $f\colon \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ sa

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}.$$

Tvrdimo da je f bijekcija. Pretpostavimo da su $x, y \in \langle -1, 1\rangle$ takvi da je $f(x) = f(y)$. Imamo

$$\frac{x}{1-|x|} = \frac{y}{1-|y|} \tag{3.18}$$

pa je

$$x - x|y| = y - y|x|. \tag{3.19}$$

Iz $1-|x| > 0, 1-|y| > 0$ i (3.18) slijedi da su x i y istog predznaka. Sada lako slijedi da je $x|y| = y|x|$ pa iz (3.19) zaključujemo da je $x = y$. Time smo dokazali da je f injekcija.
Neka je $y \in \mathbb{R}$.
Definirajmo

$$x = \frac{y}{1+|y|}.$$

Vrijedi $|x| = \frac{|y|}{1+|y|}$ pa je očito $|x| < 1$, tj. $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Vrijedi

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1+|y|}\right) = \frac{\dfrac{y}{1+|y|}}{1-\dfrac{|y|}{1+|y|}} = \frac{\dfrac{y}{1+|y|}}{\dfrac{1}{1+|y|}} = y.$$

Dakle, $f(x) = y$. Prema tome f je surjekcija. Time smo dokazali da vrijedi $\langle -1, 1\rangle \cong \mathbb{R}$.
Iz $\langle a, b\rangle \cong \langle -1, 1\rangle$ slijedi $\langle a, b\rangle \cong \mathbb{R}$ pa je

$$\operatorname{card}\langle a, b\rangle = \operatorname{card}\mathbb{R} \text{ tj. } \operatorname{card}\langle a, b\rangle = c.$$

□

Teorem 3.4.6. *Vrijedi* $\mathbf{2}^{\aleph_0} = c$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $\mathbf{2}^{\aleph_0} \leq c$ i $c \leq \mathbf{2}^{\aleph_0}$.
Imamo

$$\mathbf{2}^{\aleph_0} = \operatorname{card}\left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right) \text{ i } c = \operatorname{card}\mathbb{R}$$

pa je za $\mathbf{2}^{\aleph_0} \leq c$ dovoljno dokazati da postoji injekcija $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. Neka je $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$f\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Pretpostavimo da su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ takvi da je

$$f\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = f\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n},$$

pa iz propozicije 3.3.11 slijedi da je $a_n = b_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Prema tome f je injekcija pa slijedi $\mathbf{2}^{\aleph_0} \leq c$. Prema propoziciji 3.4.3 vrijedi $\mathbf{2}^{\aleph_0} = \operatorname{card}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Nadalje, prema propoziciji 3.4.5 vrijedi da je $\operatorname{card}\langle 0, 1\rangle = c$.

Definirajmo funkciju $g\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ na sljedeći način: za $x \in \langle 0,1\rangle$ neka je $g(x) = (a_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemu je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\{0,\dots,9\}$ takav da je

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

(takav niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ postoji prema teoremu 3.3.2).
Pretpostavimo da su $x, y \in \langle 0,1\rangle$ takvi da je $g(x) = g(y)$. Imamo da je $g(x) = (a_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ i $g(y) = (b_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ gdje su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u $\{0,\dots,9\}$ takvi da je

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \text{ i } y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$

Iz $g(x) = g(y)$ slijedi da je $a_n = b_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Stoga je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}, \text{ tj. } x = y.$$

Time smo dokazali da je g injekcija pa zaključujemo da je $c \leq \mathbf{2}^{\aleph_0}$. Iz $\mathbf{2}^{\aleph_0} \leq c$ i $c \leq \mathbf{2}^{\aleph_0}$ slijedi tvrdnja teorema. □

Primjer 3.4.7.

(1) Vrijedi

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \mathbf{1}\aleph_0 + \mathbf{1}\aleph_0 = (\mathbf{1}+\mathbf{1})\,\aleph_0 = \mathbf{2}\aleph_0.$$

Nadalje, vrijedi

$$\aleph_0 = \mathbf{1}\aleph_0 \leq \mathbf{2}\aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Stoga je $\mathbf{2}\aleph_0 = \aleph_0$. Dakle, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

(2) Imamo

$$c \cdot c = \mathbf{2}^{\aleph_0} \cdot \mathbf{2}^{\aleph_0} = \mathbf{2}^{\aleph_0+\aleph_0} = \mathbf{2}^{\aleph_0} = c.$$

Dakle, $c \cdot c = c$.

(3) Vrijedi

$$c + c = \mathbf{2}c \leq c \cdot c = c.$$

Dakle, $c + c \leq c$. S druge strane $c = c + \mathbf{0} \leq c + c$. Stoga je $c + c = c$.

(4) Imamo

$$c^c = \left(\mathbf{2}^{\aleph_0}\right)^c = \mathbf{2}^{\aleph_0 \cdot c}.$$

Vrijedi $c \leq \aleph_0 \cdot c \leq c \cdot c = c$. Stoga je $\aleph_0 \cdot c = c$. Dakle, $c^c = \mathbf{2}^c$.

Poglavlje 4

Usporedivost kardinalnih brojeva

4.1 Dobro uređeni skupovi

Definicija 4.1.1. *Neka je S skup. Za svaki podskup od $S \times S$ kažemo da je **binarna relacija** na skupu S. Ako je ρ binarna relacija na skupu S, onda za $x, y \in S$ umjesto $(x, y) \in \rho$ pišemo i $x\rho y$.*

Neka je $\leq$ binarna relacija na skupu S. Za $\leq$ kažemo da je

1) **refleksivna** relacija na S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq x$.

2) **antisimetrična** relacija na S ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x \leq y$ i $y \leq x$ vrijedi $x = y$.

3) **tranzitivna** relacija na S ako za sve $x, y, z \in S$ takve da je $x \leq y$ i $y \leq z$ vrijedi $x \leq z$.

Definicija 4.1.2. *Pretpostavimo da je S skup te da je $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na S. Za $\leq$ kažemo da je **uređaj** na S ako za sve $x, y \in S$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. U tom slučaju za uređeni par $(S, \leq)$ kažemo da je **uređen skup**.*

Definicija 4.1.3. *Neka je $(S, \leq)$ uređen skup. Neka je $A \subseteq S$ te $a_0 \in A$. Kažemo da je a_0 **najmanji element** od A u $(S, \leq)$ ako za svaki $x \in A$ vrijedi $a_0 \leq x$. Najmanji element od A označavati ćemo s* $\min A$.

Definicija 4.1.4. *Neka je $(S, \leq)$ uređen skup takav da za svaki $A \subseteq S$ takav da je $A \neq \emptyset$ vrijedi da A ima najmanji element u $(S, \leq)$. Tada za $(S, \leq)$ kažemo da je **dobro uređen skup**.*

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza, a dokaz se može naći u [3].

Teorem 4.1.5. *Neka je S skup. Tada postoji uređaj $\leq$ na S takav da je $(S, \leq)$ dobro uređen skup.*

Definicija 4.1.6. *Neka su $(S, \leq)$ i $(T, \leq')$ uređeni skupovi te neka je $f \colon S \to T$. Za f kažemo da je rastuća funkcija (s obzirom na $\leq$ i $\leq'$) ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x \leq y$ vrijedi $f(x) \leq' f(y)$.*

Definicija 4.1.7. *Neka je $(S, \leq)$ uređen skup te neka je $T \subseteq S$. Definirajmo binarnu relaciju $\leq'$ na T tako da za t_1, $t_2 \in T$ stavimo $t_1 \leq' t_2$ ako je $t_1 \leq t_2$.*
Dakle,

$$\leq' = \{(t_1, t_2) \in T \times T \mid (t_1, t_2) \in \leq\} \text{ tj. } \leq' = (T \times T) \cap \leq .$$

Uočimo da je $(T, \leq')$ uređen skup. Za $\leq'$ kažemo da je uređaj na T induciran uređajem $\leq$.

Definicija 4.1.8. *Neka je $(S, \leq)$ uređen skup. Za $x_0 \in S$ definiramo*

$$p_{(S,\leq)}(x_0) = \{x \in S \mid x \leq x_0\}.$$

Za $p_{(S,\leq)}(x_0)$ kažemo da je ***početni dio*** *od x_0 u $(S, \leq)$.*

Neka je $(S, \leq)$ uređen skup. Ako su $x, y \in S$ takvi da je $x \leq y$ i $x \neq y$, onda pišemo $x < y$. Uočimo sljedeće: ako je $x < y$, onda ne vrijedi $y \leq x$ (tj. $y \nleq x$). Obratno, ako ne vrijedi da je $y \leq x$, onda je $x < y$ (imamo $y \nleq x$, a to znači da je $x \leq y$ te također $x \neq y$ zbog $y \nleq x$). Pretpostavimo da su x,y i z takvi da je $x \leq y$ i $y < z$. Tada je $x < z$. Naime, imamo $x \leq z$ (zbog tranzitivnosti relacije $\leq$). Kada bi vrijedilo $x = z$ onda bismo imali da je $y < x$, što je nemoguće zbog $x \leq y$, stoga je $x \neq z$.

Propozicija 4.1.9. *Neka su $(S, \leq)$ i $(T, \leq')$ dobro uređeni skupovi. Ako su $x_0 \in S$ i $y_1, y_2 \in T$ takvi da postoje rastuće bijekcije $f \colon p_{(S,\leq)}(x_0) \to p_{(T,\leq')}(y_1)$ i $g \colon p_{(S,\leq)}(x_0) \to p_{(T,\leq')}(y_2)$ (pri tome na zadanim uređajima gledamo inducirane uređaje), tada je $y_1 = y_2$ i $f = g$.*

Dokaz. Neka je A skup svih $x_0 \in S$ koje imaju sljedeće svojstvo: ako su y_1, $y_2 \in T$ takvi da postoje rastuće bijekcije

$$f \colon p_{(S,\leq)}(x_0) \to p_{(T,\leq')}(y_1)$$

i

$$g \colon p_{(S,\leq)}(x_0) \to p_{(T,\leq')}(y_2)$$

onda je $y_1 = y_2$ i $f = g$. Želimo dokazati $A = S$, ako to dokažemo onda smo gotovi.
Pretpostavimo suprotno tj. da je $A \neq S$. Tada je $S \setminus A \neq \emptyset$ pa budući da je $(S, \leq)$ dobro uređen skup, $S \setminus A$ ima najmanji element u $(S, \leq)$.
Neka je

$$\alpha = \min(S \setminus A).$$

Neka su $y_1, y_2 \in T$ te neka su

$$f\colon p_{(S,\leq)}(\alpha) \to p_{(T,\leq')}(y_1) \text{ i } g\colon p_{(S,\leq)}(\alpha) \to p_{(T,\leq')}(y_2)$$

rastuće bijekcije. Neka je $x_0 \in S$ takav da je $x_0 < \alpha$.
Tada je

$$p_{(S,\leq)}(x_0) \subseteq p_{(S,\leq)}(\alpha).$$

Također iz $x_0 \in p_{(S,\leq)}(\alpha)$ slijedi

$$f(x_0) \in p_{(T,\leq')}(y_1) \text{ pa je } f(x_0) \leq' y_1.$$

Tvrdimo da je

$$f\left(p_{(S,\leq)}(x_0)\right) = p_{(T,\leq')}(f(x_0)). \tag{4.1}$$

Neka je $y \in f\left(p_{(S,\leq)}(x_0)\right)$. Tada postoji $x \in p_{(S,\leq)}(x_0)$ takav da je $f(x) = y$. Slijedi da je $x \leq x_0$ pa je

$$f(x) \leq' f(x_0) \text{ tj. } y \leq' f(x_0).$$

Dakle $y \in p_{(T,\leq')}(f(x_0))$.
Prema tome,

$$f\left(p_{(S,\leq)}(x_0)\right) \subseteq p_{(T,\leq')}(f(x_0)).$$

Obratno, neka je $y \in p_{(T,\leq')}(f(x_0))$. Očito je $y \in p_{(T,\leq')}(y_1)$ pa budući da je f bijekcija postoji $x \in p_{(S,\leq)}(\alpha)$ takav da je $f(x) = y$. Tvrdimo da je $x \leq x_0$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $x_0 < x$ pa je $f(x_0) \leq' f(x)$ (jer je f rastuća), no imamo i $f(x_0) \neq f(x)$ (jer je f injekcija).
Dakle,

$$f(x_0) <' f(x) \text{ tj. } f(x_0) <' y$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je $y \in p_{(T,\leq')}(f(x_0))$. Prema tome, $x \leq x_0$ pa je $x \in p_{(S,\leq)}(x_0)$. Iz ovoga i $y = f(x)$ slijedi $y \in f\left(p_{(S,\leq)}(x_0)\right)$.
Dakle,

$$p_{(T,\leq')}(f(x_0)) \subseteq f\left(p_{(S,\leq)}(x_0)\right).$$

Time smo pokazali da vrijedi (4.1).
Definirajmo funkciju

$$f'\colon p_{(S,\leq)}(x_0) \to p_{(T,\leq')}(f(x_0)),\ f'(x) = f(x).$$

Funkcija f' je injekcija jer je f injekcija. Nadalje, f' je surjekcija zbog (4.1). Također, imamo da je f' rastuća funkcija. Dakle, f' je rastuća bijekcija.
Posve analogno dobivamo da postoji rastuća bijekcija

$$g'\colon p_{(S,\leq)}(x_0) \to p_{(T,\leq')}(g(x_0)).$$

Znamo da je $x_0 < \alpha$ i $\alpha = \min(S \setminus A)$ pa slijedi da $x_0 \notin S \setminus A$. Dakle, $x_0 \in A$.
Iz definicije skupa A slijedi da je $f(x_0) = g(x_0)$. Prema tome, za svaki $x_0 \in S$ takav da je $x_0 < \alpha$ vrijedi

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Tvrdimo da je $f(\alpha) = y_1$.
Pretpostavimo da je $f(\alpha) \neq y_1$. Sigurno je

$$f(\alpha) \leq' y_1$$

(jer je $\alpha \in p_{(S,\leq)}(\alpha)$ i $f\colon p_{(S,\leq)}(\alpha) \to p_{(T,\leq')}(y_1)$) pa je $f(\alpha) <' y_1$.
Budući da je f bijekcija postoji $x \in p_{(S,\leq)}(\alpha)$ takav da je $y_1 = f(x)$.
Imamo

$$x \leq \alpha \text{ pa je } f(x) \leq' f(\alpha),$$

a iz ovoga i $f(\alpha) <' y_1$ slijedi $f(x) <' y_1$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $f(x) = y_1$.
Prema tome,

$$f(\alpha) = y_1.$$

Analogno dobivamo da je $g(\alpha) = y_2$.
Dokažimo da je $y_1 = y_2$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $y_1 <' y_2$ ili $y_2 <' y_1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $y_1 <' y_2$.
Vrijedi $y_1 \in p_{(T,\leq')}(y_2)$ pa budući da je $g\colon p_{(S,\leq)}(\alpha) \to p_{(T,\leq')}(y_2)$ bijekcija postoji $x \in p_{(S,\leq)}(\alpha)$ takav da je $g(x) = y_1$. Imamo $x \leq \alpha$, a kada bi vrijedilo $x = \alpha$ onda bismo imali da je $y_1 = g(\alpha) = y_2$, što je u kontradikciji s $y_1 <' y_2$.
Stoga je

$$x < \alpha \text{ pa imamo } y_1 = g(x) = f(x),$$

dakle $y_1 = f(x)$, a znamo da je $y_1 = f(\alpha)$ pa slijedi $f(x) = f(\alpha)$ što je u kontradikciji s činjenicom da je $x < \alpha$ te da je f injekcija.
Zaključak: $y_1 = y_2$. Također, slijedi i $f = g$.
Na temelju ovoga zaključujemo da je $\alpha \in A$. To je u kontradikciji s činjenicom da je $\alpha = \min(S \setminus A)$. Prema tome $A = S$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

Lema 4.1.10. *Neka su $(S, \leq)$ i $(T, \leq')$ uređeni skupovi te neka su $x_0 \in S$ i $y_0 \in T$. Neka je $f\colon p_{(S,\leq)}(x_0) \to p_{(T,\leq')}(y_0)$ rastuća bijekcija. Neka je $x \in p_{(S,\leq)}(x_0)$.*
Tada je

$$f\left(p_{(S,\leq)}(x)\right) = p_{(T,\leq')}(f(x)) \tag{4.2}$$

te je funkcija $g\colon p_{(S,\leq)}(x) \to p_{(T,\leq')}(f(x))$, $g(z) = f(z)$, rastuća bijekcija.

Dokaz. Neka je $z \in p_{(S,\leq)}(x)$. Tada je $z \leq x$ pa je

$$f(z) \leq' f(x)$$

tj.

$$f(z) \in p_{(T,\leq')}\left(f(x)\right).$$

Time smo dokazali da je

$$f\left(p_{(S,\leq)}(x)\right) \subseteq p_{(T,\leq')}\left(f(x)\right).$$

Obratno, neka je $w \in p_{(T,\leq')}\left(f(x)\right)$. Tada je $w \leq' f(x)$, a $f(x) \leq' f(x_0)$ (jer je $x \leq x_0$). Stoga je

$$w \leq' f(x_0).$$

No, očito $f(x_0) = y_0$ pa je

$$w \leq' y_0$$

tj.

$$w \in p_{(T,\leq')}\left(y_0\right).$$

Budući da je f bijekcija postoji $z \in p_{(S,\leq)}(x_0)$ takav da je $f(z) = w$. Dokažimo da je $z \leq x$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $x < z$ pa iz činjenice da je f rastuća injekcija slijedi da je

$$f(x) <' f(z) \text{ tj. } f(x) <' w,$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je $w \in p_{(T,\leq')}\left(f(x)\right)$.
Dakle,

$$z \leq x \text{ tj. } z \in p_{(S,\leq)}(x).$$

Odnosno, za svaki $w \in p_{(T,\leq')}\left(f(x)\right)$ postoji $z \in p_{(S,\leq)}(x)$ takav da je $w = f(z)$.
Prema tome,

$$p_{(T,\leq')}\left(f(x)\right) \subseteq f\left(p_{(S,\leq)}(x)\right).$$

Zaključujemo da (4.2) vrijedi.
Funkcija g očito je rastuća bijekcija. Time je tvrdnja leme dokazana. □

4.2 Hartogsov teorem

Kao što i sam naziv ovog potpoglavlja govori, teorem koji slijedi poznat je kao *Hartogsov teorem*.

Teorem 4.2.1. *Neka su k_1 i k_2 kardinalni brojevi. Tada je $k_1 \leq k_2$ ili $k_2 \leq k_1$.*

Dokaz. Neka su S i T skupovi takvi da je $k_1 = \text{card}\, S$ i $k_2 = \text{card}\, T$. Prema teoremu 4.1.5 postoje $\leq$ i $\leq'$ takvi da su $(S, \leq)$ i $(T, \leq')$ dobro uređeni skupovi.
Neka je

$$\Omega = \{x \in S \mid \exists y \in T \text{ i } \exists \text{ rastuća bijekcija } p_{(S,\leq)}(x) \to p_{(T,\leq')}(y)\}.$$

Uočimo da prema propoziciji 4.1.9 za svaki $x \in \Omega$ postoji jedinstveni $y \in T$ takav da postoji rastuća bijekcija $p_{(S,\leq)}(x) \to p_{(T,\leq')}(y)$.
Definirajmo funkciju $h\colon \Omega \to T$ na sljedeći način: za $x \in \Omega$ neka je $h(x) = y$, pri čemu je y (jedinstveni) element od T za kojeg postoji rastuća bijekcija $p_{(S,\leq)}(x) \to p_{(T,\leq')}(y)$.
Tvrdimo da je h rastuća injekcija. U tu svrhu dovoljno je dokazati sljedeće: ako su x_1, $x_2 \in \Omega$ takvi da je $x_1 < x_2$, onda je $h(x_1) <' h(x_2)$.
Neka su $x_1, x_2 \in \Omega$ takvi da je $x_1 < x_2$. Neka je $y_2 = h(x_2)$.
Tada postoji rastuća bijekcija

$$f\colon p_{(S,\leq)}(x_2) \to p_{(T,\leq')}(y_2).$$

Imamo

$$x_1 \in p_{(S,\leq)}(x_2)$$

pa prema lemi 4.1.10 postoji rastuća bijekcija

$$p_{(S,\leq)}(x_1) \to p_{(T,\leq')}(f(x_1)).$$

Iz definicije funkcije h slijedi da je $h(x_1) = f(x_1)$. Koristeći činjenicu da je f rastuća injekcija dobivamo

$$h(x_1) = f(x_1) <' f(x_2) = y_2 = h(x_2), \text{ tj. } h(x_1) <' h(x_2).$$

Prema tome, h je rastuća injekcija.
TVRDNJA 1: Ako su $x \in \Omega$ i $x' \in S$ takvi da je $x' \leq x$, onda je $x' \in \Omega$.
Dokažimo ovu tvrdnju.
Pretpostavimo da su $x \in \Omega$ i $x' \in S$ takvi da je $x' \leq x$. Kako je $x \in \Omega$ postoje $y \in T$ i rastuća bijekcija

$$f\colon p_{(S,\leq)}(x) \to p_{(T,\leq')}(y).$$

Imamo $x' \in p_{(S,\leq)}(x)$ pa prema lemi 4.1.10 postoji rastuća bijekcija

$$p_{(S,\leq)}(x') \to p_{(T,\leq')}(f(x')).$$

Stoga je $x' \in \Omega$.
TVRDNJA 2: Ako su $y \in h(\Omega)$ i $y' \in T$ takvi da je $y' \leq' y$, onda je $y' \in h(\Omega)$.
Dokažimo ovu tvrdnju.
Pretpostavimo da su $y \in h(\Omega)$ i $y' \in T$ takvi da je $y' \leq' y$.

Slijedi da postoji $x \in \Omega$ takav da je $h(x) = y$. Iz ovoga zaključujemo da postoji rastuća bijekcija

$$f\colon p_{(S,\leq)}(x) \to p_{(T,\leq')}(y)\,.$$

Imamo $y' \in p_{(T,\leq')}(y)$ pa budući da je f bijekcija postoji $x' \in p_{(S,\leq)}(x)$ takav da je $f(x') = y'$. Prema lemi 4.1.10 postoji rastuća bijekcija

$$p_{(S,\leq)}(x') \to p_{(T,\leq')}(f(x'))\,.$$

tj. postoji rastuća bijekcija

$$p_{(S,\leq)}(x') \to p_{(T,\leq')}(y')\,.$$

Iz ovoga je očito da je $x' \in \Omega$ te da je $h(x') = y'$.
Dakle, $y' \in h(\Omega)$. Time je **TVRDNJA 2** dokazana.

Dokažimo sada sljedeće: postoji injekcija $S \to T$ ili postoji injekcija $T \to S$.
Imamo dva slučaja.

(1) $\Omega = S$.
Prema dokazanom, $h\colon S \to T$ je injekcija.

(2) $\Omega \neq S$.
Tvrdimo da je $h(\Omega) = T$. Pretpostavimo suprotno tj. da je $h(\Omega) \neq T$.
Imamo da je $S \setminus \Omega$ neprazan podskup od S pa budući da je $(S, \leq)$ dobro uređen skup, $S \setminus \Omega$ ima najmanji element.
Neka je

$$x_0 = \min(S \setminus \Omega)\,.$$

Isto tako zaključujemo da skup $T \setminus h(\Omega)$ ima najmanji element (u $(T, \leq')$) pa neka je

$$y_0 = \min(T \setminus h(\Omega))\,.$$

Uočimo sljedeće: ako je $x \in S$ takav da je $x < x_0$, onda je $x \in \Omega$. Naime, u suprotnom bismo imali da je $x \in S \setminus \Omega$ što bi bilo u kontradikciji s činjenicom da je $x_0 = \min(S \setminus \Omega)$.
Nadalje, ako je $y \in h(\Omega)$, onda je $y <' y_0$ jer bismo u suprotnom imali $y_0 \leq' y$ pa bi **TVRDNJA 2** povlačila da je $y_0 \in h(\Omega)$, što je prema definiciji od y_0 nemoguće.
Dakle, ako je $x \in S$ takav da je $x < x_0$, onda je $x \in \Omega$ te je $h(x) \in h(\Omega)$ pa je $h(x) <' y_0$.
Možemo definirati funkciju

$$f\colon p_{(S,\leq)}(x_0) \to p_{(T,\leq')}(y_0)$$

na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x < x_0 \\ y_0, & x = x_0. \end{cases}$$

Tvrdimo da je f rastuća bijekcija.
Pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in p_{(S,\leq)}(x_0)$ takvi da je $x_1 < x_2$.
Ako je $x_2 < x_0$, onda imamo i $x_1 < x_0$ pa je

$$f(x_1) = h(x_1) <' h(x_2) = f(x_2) \text{ jer je } h \text{ rastuća injekcija,}$$

dakle $f(x_1) <' f(x_2)$.
Ako je $x_2 = x_0$, onda je $x_1 < x_0$ pa imamo

$$f(x_1) = h(x_1) <' y_0 = f(x_0) = f(x_2),$$

dakle $f(x_1) <' f(x_2)$.
Prema tome, za sve $x_1, x_2 \in p_{(S,\leq)}(x_0)$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi da je $f(x_1) <' f(x_2)$.
Time smo dokazali da je f rastuća injekcija.
Neka je

$$y \in p_{(T,\leq')}(y_0)\,.$$

Tvrdimo da postoji $x \in p_{(S,\leq)}(x_0)$ takav da je $f(x) = y$.
To je očito ako je $y = y_0$. Pretpostavimo da je $y <' y_0$. Tada je $y \in h(\Omega)$ (prema definiciji od y_0) pa postoji $x \in \Omega$ takav da je $h(x) = y$.
Vrijedi da je $x < x_0$, naime u suprotnom bismo imali $x_0 \leq x$ pa bi iz **TVRDNJE 1** slijedilo da je $x_0 \in \Omega$, a to je nemoguće prema definiciji od x_0.
Dakle,

$$x \in p_{(S,\leq)}(x_0) \text{ i } f(x) = h(x) = y.$$

Time smo dokazali da je f surjekcija.
Dakle, f je rastuća bijekcija pa je stoga $x_0 \in \Omega$. Kontradikcija.
Prema tome, $h(\Omega) = T$. To znači da je h surjekcija pa slijedi da je i bijekcija.
Postoji bijekcija $T \to \Omega$ pa postoji injekcija $T \to S$ (jer je $\Omega \subseteq S$).

Dokazali smo sljedeće:

$$\text{postoji injekcija } S \to T \text{ ili postoji injekcija } T \to S\,.$$

Prema tome,

$$k_1 \leq k_2 \text{ ili } k_2 \leq k_1.$$

□

Bibliografija

[1] S. Mardesić: *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[2] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[3] M. Vuković: *Teorija skupova*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2015.

Sažetak

Rad je podijeljen u četiri poglavlja. Prvo poglavlje je o konačnim i prebrojivim skupovima u kojem smo definirali neke pojmove te iskazali i dokazali neke tvrdnje koje predstavljaju osnovu za daljnje razumijevanje.

U drugom poglavlju govorimo o kardinalnim brojevima. Kako bismo definirali kardinalni broj, govorimo o nepostojanju skupa svih skupova i uvodimo pojam klase. Kao važniju tvrdnju ovog poglavlja dokazujemo *Cantor-Schröder-Bersteinov teorem* te iznosimo osnovne operacije s kardinalnim brojevima.

U trećem poglavlju definiramo neke osnovne matematičke pojmove i dokazujemo bitne tvrdnje iz matematičke analize koje su nam važne za ključne tvrdnje ovog poglavlja.

Za kraj, četvrto poglavlje započinje s definicijom binarne relacije. U njemu govorimo o dobro uređenim skupovima te dolazimo do usporedivosti kardinalnih brojeva, o kojoj nam govori zadnja važna tvrdnja ovog diplomskog rada.

Summary

This thesis is divided into four chapters. The first chapter deals with finite and infinite countable sets in which we defined some notions and stated and proved some statements which represent the foundation for the further understanding.

In the second chapter we are dealing with cardinal numbers. To define cardinal number, we are proving that set of all sets does not exist and we are introducing the notion of a class. As important statement of this chapter, we are proving the *Cantor-Schröder-Berstein theorem* and providing basic operations with cardinal numbers.

In the third chapter we are defining some basic mathematical notions and proving important statements from the field of mathematical analysis which are of great importance for this chapter.

In the end, the forth chapter starts with the definition of a binary relation. This chapter deals with well-ordered sets and comparability of cardinal numbers which is especially mentioned in the last important statement of this thesis.

Životopis

Rođena sam 8. rujna 1994. godine u Šibeniku. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 2001. godine u Osnovnoj školi Petar Krešimir IV. Godine 2009. upisujem se u Gimnaziju Antuna Vrančića; smjer: prirodoslovno - matematički i završavam 2013. godine položivši državnu maturu. Iste godine nastavljam daljnje visokoškolsko obrazovanje na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2016. završavam prediplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički, a potom upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički na istom fakultetu.