SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Alena Protulipac

ELEMENTARNI ASPEKTI DIFERENCIJABILNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svome mentoru prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću na strpljenju, razumijevanju i pomoći tijekom izrade ovog rada. Zahvaljujem svojoj mami i Marku kao i svojoj obitelji i prijateljima na podršci i ljubavi.

Sadržaj

Uvod

Svrha ovog diplomskog rada je proučiti neke aspekte diferencijabilnosti. Prvo će se proučiti neprekidnost funkcije te limes funkcije, nakon toga će se reći nešto općenito o nizovima i konvergenciji nizova, zatim o derivaciji funkcije, tj. derivaciji zbroja, umnoška, kvocijenta i kompozicije funkcija te derivaciji inverzne funkcije.

Poglavlje 1

Neprekidnost i limes funkcije

1.1 Neprekidnost

Definicija 1.1.1 (Neprekidnost funkcije u točki)**.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je $x_0 \in S$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in S$ vrijedi:*

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \text{, onda je } f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle .$$

Primjer 1.1.2. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Tvrdimo da funkcija f nije neprekidna u točki 2. Pretpostavimo suprotno. Tada za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } x \in \langle 2 - \delta, 2 + \delta \rangle \text{, onda je } f(x) \in \langle f(2) - \varepsilon, f(2) + \varepsilon \rangle .$$

Budući da je $f(2) = 1$ i $\varepsilon = 1$, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi sljedeće:

$$\text{ako je } x \in \langle 2 - \delta, 2 + \delta \rangle \text{, onda je } f(x) \in \langle 0, 2 \rangle .$$

Neka je $x = 2 - \frac{\delta}{2}$. Tada je

$$x \in \langle 2 - \delta, 2 + \delta \rangle$$

pa iz prethodne implikacije slijedi da je $f(x) \in \langle 0, 2 \rangle$. Po definiciji funkcije f vrijedi da je $f(x) = -1$ (jer je $x < 2$). Kontradikcija. Prema tome funkcija f nije neprekidna u točki 2.

Definicija 1.1.3 (Neprekidna funkcija)**.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f neprekidna funkcija ako je f neprekidna u točki x_0 za svaki $x_0 \in S$.*

Primjer 1.1.4. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, *te neka je* $K \in \mathbb{R}$. *Neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = K$, *za svaki* $x \in S$. *Tada je f neprekidna funkcija. Dokažimo to.*
Neka je $x_0 \in S$. *Neka je* $\varepsilon > 0$. *Odaberimo bilo koji* $\delta > 0$. *Tada za svaki* $x \in S$ *takav da je* $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ *vrijedi*

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$$

jer je $f(x_0) = K$ *i* $f(x) = K$ *za svaki* $x \in S$. *Prema tome funkcija f je neprekidna u točki* x_0. *Dakle f je neprekidna.*

Primjer 1.1.5. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, *te neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = x$, *za svaki* $x \in S$. *Tvrdimo da je f neprekidna funkcija. Neka je* $x_0 \in S$ *te neka je* $\varepsilon > 0$. *Odaberimo bilo koji* $\delta \in \langle 0, \varepsilon]$. *Tada je*

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \subseteq \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$$

pa za svaki $x \in S$ *takav da je* $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ *vrijedi* $x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$, *tj.*

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$$

(jer je $f(x) = x$ *i* $f(x_0) = x_0$*). Prema tome funkcija f je neprekidna u* x_0. *Dakle funkcija f je neprekidna.*

1.2 Limes funkcije

Definicija 1.2.1 (Limes funkcije)**.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, *neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija te neka su* $x_0 \in \mathbb{R}$ *i* $L \in \mathbb{R}$. *Kažemo da je L limes funkcije f u točki* x_0 *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za svaki* $x \in S$, $x \neq x_0$ *vrijedi:*

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle, \text{ onda je } f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle .$$

Definicija 1.2.2 (Gomilište)**.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, *te neka je* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Kažemo da je* x_0 *gomilište skupa S ako za svaki* $\delta > 0$ *postoji* $x \in S$ *tako da je* $x \neq x_0$ *i* $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.

Primjer 1.2.3. *Neka je* $S = \langle 0, 1 \rangle$. *Tada* $-\frac{1}{2}$ *nije gomilište skupa S. Naime neka je* $\delta = \frac{1}{2}$. *Tada je*

$$\left\langle -\frac{1}{2} - \delta, -\frac{1}{2} + \delta \right\rangle = \langle -1, 0 \rangle$$

pa je očito

$$\left\langle -\frac{1}{2} - \delta, -\frac{1}{2} + \delta \right\rangle \cap S = \emptyset.$$

Prema tome ne postoji $x \in S$ takav da je

$$x \in \left\langle -\frac{1}{2} - \delta, -\frac{1}{2} + \delta \right\rangle \text{ } i \text{ } x \neq -\frac{1}{2}.$$

Tvrdimo da je 0 gomilište skupa S. Neka je $\delta > 0$.
Ako je $\delta < 1$ definirajmo $x = \frac{\delta}{2}$. Tada je

$$x \in \langle -\delta, \delta \rangle \text{ te } x \in \langle 0, 1 \rangle \text{ tj. } x \in S.$$

Očito je $x \neq 0$.
Ako je $\delta \geq 1$ definirajmo $x = \frac{1}{2}$. Tada je

$$x \in \langle -\delta, \delta \rangle, x \in S \text{ } i \text{ } x \neq 0.$$

U svakom slučaju postoji $x \in S$ takav da je

$$x \neq 0 \text{ } i \text{ } x \in \langle 0 - \delta, 0 + \delta \rangle.$$

Prema tome 0 je gomilište skupa $\langle 0, 1 \rangle$.

Napomena 1.2.4. *Ako je x_0 gomilište skupa S te ako je $T \subseteq \mathbb{R}$ tako da je $S \subseteq T$, onda je x_0 gomilište skupa T.*

Propozicija 1.2.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada za svaki $x_0 \in [a, b]$ vrijedi da je x_0 gomilište skupa $\langle a, b \rangle$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in [a, b]$.

1\. slučaj $x_0 = a$

Neka je $\delta > 0$. Vrijedi $a < \min\{a + \delta, b\}$ pa postoji $x \in \mathbb{R}$ tako da je

$$a < x < \min\{a + \delta, b\}.$$

Slijedi

$$a < x < b \text{ i } a < x < a + \delta$$

pa zaključujemo da je

$$x \in \langle a, b \rangle \text{ i } x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle.$$

Očito je $x \neq a$. Prema tome a je gomilište skupa $\langle a, b \rangle$.

2. slučaj $x_0 = b$

Neka je $\delta > 0$. Vrijedi $\max\{a, b - \delta\} < b$ pa postoji $x \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\max\{a, b - \delta\} < x < b.$$

Slijedi

$$a < x < b \text{ i } b - \delta < x < b$$

pa zaključujemo da je

$$x \in \langle a, b \rangle \text{ i } x \in \langle b - \delta, b + \delta \rangle .$$

Očito je $x \neq b$. Prema tome b je gomilište skupa $\langle a, b \rangle$.

3. slučaj $x_0 \in \langle a, b \rangle$

Tada je $a < x_0 < b$. Prema dokazanom (1. slučaj) x_0 je gomilište od $\langle x_0, b \rangle$. No

$$\langle x_0, b \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$$

pa iz napomene 1.2.4 slijedi da je x_0 gomilište od $\langle a, b \rangle$.

□

Propozicija 1.2.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da je x_0 gomilište skupa S te da su L_1 i L_2 limesi funkcije f u x_0. Tada je $L_1 = L_2$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $L_1 \neq L_2$. Možemo pretpostaviti da je $L_1 < L_2$. Neka je $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{2}$. Tada je $\varepsilon > 0$ te je $2\varepsilon = L_2 - L_1$ pa je $L_1 + \varepsilon = L_2 - \epsilon$. Iz zadnje jednakosti slijedi

$$\langle L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon \rangle \cap \langle L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon \rangle = \emptyset. \tag{1.1}$$

Budući da je L_1 limes funkcije f u x_0, postoji $\delta_1 > 0$ tako da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi:

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1 \rangle \text{ onda je } f(x) \in \langle L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon \rangle . \tag{1.2}$$

Također, budući da je L_2 limes funkcije f u x_0, postoji $\delta_2 > 0$ tako da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2 \rangle \text{ onda je } f(x) \in \langle L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon \rangle . \tag{1.3}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Budući da je x_0 gomilište skupa S postoji $x \in S$ tako da je $x \neq x_0$ i $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Budući da je $\delta \leq \delta_1$, vrijedi $x \in \langle x_0 + \delta_1, x_0 + \delta_1 \rangle$ pa iz (1.2) slijedi $f(x) \in \langle L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon \rangle$.
Isto tako $\delta \leq \delta_2$ povlači da je $x \in \langle x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2 \rangle$ pa iz (1.3) slijedi $f(x) \in \langle L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon \rangle$.
Dakle

$$f(x) \in \langle L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon \rangle \text{ i } f(x) \in \langle L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon \rangle ,$$

no to je u kontradikciji sa (1.1).
Prema tome $L_1 = L_2$. □

Napomena 1.2.7. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *te* $L \in \mathbb{R}$. *Pretpostavimo da* x_0 *nije gomilište skupa* S. *Tada je* L *limes funkcije* f *u* x_0.
Naime, iz činjenice da x_0 *nije gomilište od* S *slijedi da postoji* $\delta > 0$ *za kojeg ne postoji* $x \in S$ *tako da*

$$x \neq x_0 \text{ i } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle .$$

Ako je $\varepsilon > 0$, *onda za svaki* $x \in S$ *tako da je* $x \neq x_0$ *implikacija*

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle, \text{tada je } f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$$

trivijalno vrijedi.

Primjer 1.2.8. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. *Neka je* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tako da* $x_0 \notin [a, b]$. *Tada* x_0 *nije gomilište od* $[a, b]$. *Dokažimo to.*
Iz $x_0 \notin [a, b]$ *slijedi*

$$x_0 < a \text{ ili } b < x_0.$$

Ako je $x_0 < a$, *definirajmo* $\delta = a - x_0$ *te imamo*

$$\delta > 0 \text{ i } x_0 + \delta = a,$$

iz čega slijedi

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \cap [a, b] = \emptyset$$

pa je očito da x_0 *nije gomilište od* $[a, b]$.
Ako je $b < x_0$, *definirajmo* $\delta = x_0 - b$ *pa imamo*

$$\delta > 0 \text{ i } x_0 - \delta = b,$$

što povlači

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \cap [a, b] = \emptyset,$$

dakle x_0 *nije gomilište od* $[a, b]$.

Primjer 1.2.9. *Neka je* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \neq 2$. *Tvrdimo da je 0 limes od* f *u* x_0. *Promotrimo prvo slučaj kad je* $x_0 < 2$. *Neka je* $\varepsilon > 0$. *Definirajmo* $\delta = 2 - x_0$. *Tada je*

$$\delta > 0 \text{ i } x_0 + \delta = 2$$

pa slijedi da

$$2 \notin \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle .$$

Stoga za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ *vrijedi* $f(x) = 0$ *pa je*

$$f(x) \in \langle 0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon \rangle .$$

Prema tome 0 je limes od f *u* x_0*. Do istog zaključka dolazimo kada je* $2 < x_0$.
No tvrdimo da je 0 limes od f *i u točki 2. Neka je* $\varepsilon > 0$*. Uzmimo bilo koji* $\delta > 0$*. Tada za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *tako da je* $x \neq 2$ *vrijedi:*

$$\text{ako je } x \in \langle 2 - \delta, 2 + \delta \rangle \text{ tada je } f(x) \in \langle 0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon \rangle$$

jer za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, *vrijedi* $f(x) = 0$.

Lema 1.2.10. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *te neka su* $x, y \in [a, b]$*. Tada je* $|x - y| \leq b - a$.

Dokaz. Promotrimo prvo slučaj kada je $x \leq y$.
Imamo $a \leq x \leq y \leq b$. Iz $a \leq x$ slijedi $-x \leq -a$ pa je

$$y - x \leq y - a. \tag{1.4}$$

S druge strane iz $y \leq b$ slijedi

$$y - a \leq b - a. \tag{1.5}$$

Iz (1.4) i (1.5) slijedi $y - x \leq b - a$. No

$$|x - y| = y - x \text{ jer je } x \leq y.$$

Prema tome

$$|x - y| \leq b - a.$$

U slučaju $y \leq x$ analogno dolazimo do istog zaključka. □

Primjer 1.2.11. *Neka je* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [2, 3] \\ 1, & x \in [2, 3] . \end{cases}$$

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \notin [2, 3]$*. Tada je 0 limes od* f *u* x_0*. Naime, vrijedi* $x_0 < 2$ *ili* $3 < x_0$*, a u oba slučaja vidimo da tvrdnja vrijedi analogno kao u prethodnom primjeru.*
Neka je $x_0 \in \langle 2, 3 \rangle$*. Tada je*

$$2 < x_0 < 3.$$

Definirajmo
$$\delta = \min\{x_0 - 2, 3 - x_0\}.$$
Tada je $\delta > 0$. *Iz* $\delta \leq x_0 - 2$ *slijedi*
$$2 \leq x_0 - \delta,$$
a iz $\delta \leq 3 - x_0$ *slijedi*
$$x_0 + \delta \leq 3.$$
Dakle $2 \leq x_0 - \delta$ *i* $x_0 + \delta \leq 3$. *Stoga je*
$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \subseteq \langle 2, 3\rangle$$
pa za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ *vrijedi* $f(x) = 1$. *Iz ovoga je jasno da je 1 limes od* f *u* x_0.
Neka je $x_0 = 2$. *Tvrdimo da ne postoji limes od* f *u* x_0.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $L \in \mathbb{R}$ *tako da je* L *limes od* f *u* x_0. *Neka je* $\varepsilon > 0$. *Tada postoji* $\delta > 0$ *tako da za svaki* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ *vrijedi:*
$$\textit{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \textit{, onda je } f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle . \tag{1.6}$$
Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ *takav da je*
$$x_0 - \delta < x < x_0.$$
Slijedi
$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$
pa je
$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle .$$
Nadalje očito je $x \neq x_0$. *Iz (1.6) slijedi*
$$f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle .$$
No $x < x_0$, *tj.* $x < 2$ *povlači da je* $f(x) = 0$. *Dakle,* $0 \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle$.
Očito je
$$x_0 < min\{x_0 + \delta, 3\}$$
pa postoji $x \in \mathbb{R}$ *takav da je*
$$x_0 < x < min\{x_0 + \delta, 3\}.$$
Slijedi
$$x_0 < x < x_0 + \delta \text{ i } x < 3.$$
Stoga je
$$x_0 \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle ,$$

$x \neq x_0$ *i* $x \in \langle 2, 3\rangle$ *(jer je* $x_0 = 2$*) . Iz (1.6) slijedi*

$$f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle .$$

Zbog $x \in \langle 2, 3\rangle$ *vrijedi* $f(x) = 1$*. Dakle*

$$1 \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle .$$

Prema tome

$$0, 1 \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle$$

pa iz leme 1.2.10 slijedi

$$|0 - 1| \leq L + \varepsilon - L + \varepsilon, \text{ tj. } 1 \leq 2\varepsilon.$$

Dokazali smo da je $1 \leq 2\varepsilon$ *za bilo koji* $\varepsilon > 0$*. To je očito nemoguće.*
Zaključak: funkcija f *nema limes u 2.*
Analogno dobivamo da f *nema limes u točki 3.*

Propozicija 1.2.12. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$*, te* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$*. Tada je* f *neprekidna u točki* x_0 *ako i samo ako je* $f(x_0)$ *limes od* f *u* x_0*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u točki x_0. Želimo dokazati da je $f(x_0)$ limes od f u x_0. Dakle, želimo dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$, vrijedi:

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \text{, onda je } f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle . \tag{1.7}$$

No ovo očito vrijedi jer je f neprekidna u x_0.
Obratno, pretpostavimo da je $f(x_0)$ limes od f u x_0. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$, vrijedi (1.7). No očito je da (1.7) vrijedi i za

$$x = x_0 \text{ (za bilo koje } \varepsilon > 0 \text{ i } \delta > 0) .$$

Prema tome f je neprekidna u x_0. □

Propozicija 1.2.13. *Neka su* S *i* T *podskupovi od* $\mathbb{R}$ *te neka su* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcije. Pretpostavimo da su* $x_0 \in \mathbb{R}$ *i* $r > 0$ *takvi da je*

$$S \cap (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) = T \cap (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\})$$

i $f(x) = g(x)$ *za svaki* $x \in S \cap (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\})$ *. Pretpostavimo da je* L *limes od* f *u* x_0*. Tada je* L *limes od* g *u* x_0*.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je L limes od f u x_0, postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in S$, $x \neq x_0$, vrijedi

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \text{, onda je } f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle . \tag{1.8}$$

Neka je $\delta' = min\{\delta, r\}$. Tada je $\delta' > 0$. Iz $\delta' \leq r$ slijedi

$$x_0 - r \leq x_0 - \delta' \leq x_0 + \delta' \leq x_0 + r$$

pa je

$$\langle x_0 - \delta', x_0 + \delta' \rangle \subseteq \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle . \tag{1.9}$$

Analogno zaključujemo da je

$$\langle x_0 - \delta', x_0 + \delta' \rangle \subseteq \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle . \tag{1.10}$$

Tvrdimo da za svaki $x \in T$, $x \neq x_0$, vrijedi

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta', x_0 + \delta' \rangle \text{, onda je } g(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle . \tag{1.11}$$

Neka je $x \in T$ tako da je $x \neq x_0$ i $x \in \langle x_0 - \delta', x_0 + \delta' \rangle$.
Iz (1.9) slijedi $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle$. Stoga je

$$x \in (\langle x_0 - r, x_0 + r \rangle \setminus \{x_0\}) \cap T.$$

Iz pretpostavke propozicije slijedi

$$x \in (\langle x_0 - r, x_0 + r \rangle \setminus \{x_0\}) \cap S$$

i $g(x) = f(x)$. Nadalje, iz (1.10) slijedi $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ pa iz (1.8) zaključujemo da je

$$f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle, \text{ tj. } g(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle .$$

Time smo dokazali da za svaki $x \in T$ takav da je $x \neq x_0$ vrijedi (1.11).
Zaključak: L je limes od g u x_0. □

Propozicija 1.2.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je L limes od f u x_0. Definirajmo funkciju $g : S \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ L, & x = x_0. \end{cases}$$

Tada je funkcija g neprekidna u x_0.

Dokaz. Odaberemo bilo koji $r > 0$. Očito je

$$(\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap S \subseteq (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap (S \cup \{x_0\}).$$

Obratno ako je

$$x \in (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap (S \cup \{x_0\})$$

onda je $x \neq x_0$ pa iz $x \in S \cup \{x_0\}$ slijedi $x \in S$. Stoga je

$$x \in (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap S.$$

Prema tome

$$(\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap S = (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap (S \cup \{x_0\}).$$

Nadalje, za svaki $x \in (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap S$ vrijedi $f(x) = g(x)$ (prema definiciji funkcije g).
Iz propozicije 1.2.13 slijedi da je L je limes od g u x_0. No $L = g(x_0)$, dakle $g(x_0)$ je limes od g u x_0. Iz propozicije 1.2.12 slijedi da je g neprekidna u x_0. □

1.3 Konvergencija niza

Definicija 1.3.1 (Niz u $\mathbb{R}$)**.** *Za svaku funkciju $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je niz u $\mathbb{R}$.*
Ako je x niz u $\mathbb{R}$ (tj. $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$), onda za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo i x_n, a funkciju x označavamo i s (x_n) ili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 1.3.2 (Konvergencija niza)**.** *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka je $l \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema l i pišemo $x_n \longrightarrow l$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi*

$$x_n \in \langle l - \varepsilon, l + \varepsilon\rangle .$$

Primjer 1.3.3. *Neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran s*

$$x_n = a \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Tada $x_n \longrightarrow a$. Naime, za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$.

Primjer 1.3.4. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran s*

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Tada $x_n \longrightarrow 0$.
Dokažimo to. Neka je $\varepsilon > 0$. *Odaberimo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je* $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. *Neka je* $n \geq n_0$. *Tada je* $\frac{1}{\varepsilon} < n$ *pa je*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ tj. } x_n < \varepsilon$$

što povlači

$$x_n \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \, (\text{očito je } x_n > 0), \text{ tj. } x_n \in \langle 0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon \rangle \, .$$

Dakle, za svaki $n \geq n_0$ *vrijedi* $x_n \in \langle 0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon \rangle$. *Prema tome* (x_n) *teži prema* 0.

Definicija 1.3.5 (Limes niza)**.** *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *te neka je* $l \in \mathbb{R}$ *tako da* $x_n \longrightarrow l$. *Tada za* l *kažemo da je limes niza* (x_n).

Propozicija 1.3.6. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *te neka su* l_1 *i* l_2 *limesi niza* (x_n). *Tada je* $l_1 = l_2$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $l_1 \neq l_2$. Možemo pretpostaviti da je $l_1 < l_2$. Kao u dokazu propozicije 1.2.6 zaključujemo da postoji $\varepsilon > 0$ tako da je

$$\langle l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon \rangle \cap \langle l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon \rangle = \emptyset \tag{1.12}$$

Iz $x_n \longrightarrow l_1$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon \rangle$.
Iz $x_n \longrightarrow l_2$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $x_n \in \langle l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon \rangle$.
Neka je $n = \max\{n_0, m_0\}$. Tada je

$$n \geq n_0 \text{ i } n \geq m_0$$

pa je

$$x_n \in \langle l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon \rangle \text{ i } x_n \in \langle l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon \rangle \, ,$$

tj.

$$x_n \in \langle l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon \rangle \cap \langle l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon \rangle \, .$$

Ovo je u kontradikciji s (1.12). Prema tome $l_1 = l_2$. □

Propozicija 1.3.7. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija te* $l \in S$. *Pretpostavimo da je funkcija* f *neprekidna u* l *te da je* (x_n) *niz realnih brojeva koji teži prema* l *te takav da je* $x_n \in S$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada niz* $(f(x_n))$ *teži prema* $f(l)$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $z \in S$ vrijedi

$$\text{ako je } z \in \langle l - \delta, l + \delta \rangle \, , \text{onda je } f(z) \in \langle f(l) - \varepsilon, f(l) + \varepsilon \rangle \, . \tag{1.13}$$

Budući da $x_n \rightarrow l$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle l - \delta, l + \delta \rangle \, .$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n \geq n_0$. Tada je

$$x_n \in \langle l - \delta, l + \delta \rangle$$

pa iz $x_n \in S$ i (1.13) slijedi

$$f(x_n) \in \langle f(l) - \varepsilon, f(l) + \varepsilon \rangle \,.$$

Time smo dokazali da $f(x_n) \to f(l)$. □

Propozicija 1.3.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da je L limes funkcije f u točki a te da je (x_n) niz realnih brojeva koji teži prema a te takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada niz $(f(x_n))$ teži prema L.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $z \in S$, $z \neq a$ vrijedi

$$\text{ako je } z \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle \text{, onda je } f(z) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle \,. \tag{1.14}$$

Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle \,.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n \geq n_0$. Tada je

$$x_n \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$$

pa iz $x_n \in S$, $x_n \neq a$ i (1.14) slijedi

$$f(x_n) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle \,.$$

Time smo dokazali da je $f(x_n) \to L$. □

Lema 1.3.9. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$ tako da je*

$$x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right\rangle \textit{za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Tada $x_n \to a$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$. Neka je $n \geq n_0$. Tada je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ pa je $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Iz ovoga slijedi

$$a - \varepsilon \leq a - \frac{1}{n} \text{ i } a + \frac{1}{n} \leq a + \varepsilon.$$

Stoga je

$$\left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right\rangle \subseteq \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$$

pa iz (1.15) slijedi

$$x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \,.$$

Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \,.$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Teorem 1.3.10. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, $a \in \mathbb{R}$ te $L \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da za svaki niz (x_n) takav da $x_n \to a$ i takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(x_n) \to L$. Tada je L limes od f u a.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S \setminus \{a\}$ tako da je

$$x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$$

i

$$f(x) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle \,.$$

Posebno za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in S \setminus \{a\}$ takav da je

$$x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right\rangle$$

i

$$f(x_n) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle \,.$$

Iz leme 1.3.10 slijedi da $x_n \to a$. Prema pretpostavci teorema vrijedi $f(x_n) \to L$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$f(x_n) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle \,.$$

No ovo je u kontradikciji s činjenicom da

$$f(x_n) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ (prema konstrukciji niza (x_n)). Prema tome L je limes od f u a. □

Napomena 1.3.11. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ te $\varepsilon > 0$. Tada je*

$$|b - a| < \varepsilon \Leftrightarrow b \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \,.$$

Naime vrijedi

$$|b - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < b - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < b < a + \varepsilon \Leftrightarrow b \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \,.$$

Propozicija 1.3.12. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada niz*

$$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ teži prema } a + b,$$

(tj. $x_n + y_n \to a + b$).

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \left\langle a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle,$$

tj. prema napomeni 1.3.11 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Također postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je

$$n \geq \max\{n_0, m_0\}.$$

Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$ pa je

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Imamo

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

za svaki $n \geq \max\{n_0, m_0\}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 1.3.13. *Neka su $u, v \in \mathbb{R}$. Tada je $||u| - |v|| \leq |u - v|$.*

Dokaz. Imamo

$$|u| = |u - v + v| \leq |u - v| + |v|$$

pa je

$$|u| - |v| \leq |u - v|\,. \tag{1.16}$$

Imamo

$$|v| = |v - u + u| \leq |v - u| + |u|$$

pa je

$$|v| - |u| \leq |v - u|\,, \text{ tj. } -(|u| - |v|) \leq |u - v|\,. \tag{1.17}$$

Iz (1.16) i (1.17) slijedi

$$||u| - |v|| \leq |u - v|\,.$$

□

Propozicija 1.3.14. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Tada $-x_n \to -a$ i $|x_n| \to |a|$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|(-x_n) - (-a)| = |x_n - a|.$$

Dakle, $|(-x_n) - (-a)| < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$.
Nadalje, prema lemi 1.3.13 za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$$

pa za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $||x_n| - |a|| < \varepsilon$. Prema tome $-x_n \to -a$ i $|x_n| \to |a|$. □

Definicija 1.3.15 (Konvergencija niza)**.** *Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je konvergentan ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$.*

Lema 1.3.16. *Neka je (x_n) konvergentan niz. Tada postoji $M > 0$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Prema pretpostavci postoji $a \in \mathbb{R}$ tako da $x_n \to a$. Iz propozicije 1.3.14 slijedi da $|x_n| \to |a|$. Iz ovoga (za $\varepsilon = 1$) slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n| \in \langle |a| - 1, |a| + 1 \rangle .$$

Posebno

$$|x_n| < |a| + 1 \text{ za svaki } n \geq n_0. \tag{1.18}$$

Neka je

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, |a| + 1\}.$$

Tada za svaki $n \leq n_0$ vrijedi $|x_n| \leq M$. Nadalje vrijedi $|a| + 1 \leq M$ pa iz (1.18) slijedi $|x_n| < M$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome $|x_n| \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$0 < |a| + 1 \leq M$$

pa je $M > 0$. □

Teorem 1.3.17. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada*

$$x_n \cdot y_n \to a \cdot b.$$

Dokaz. Prema lemi 1.3.16 postoji $M > 0$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b| \\ &= |x_n(y_n - b) + b(x_n - a)| \leq |x_n(y_n - b)| + |b(x_n - a)| \\ &= |x_n|\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a| \leq M \cdot |y_n - b| + |b|\,|x_n - a|\,. \end{aligned}$$

Dakle,

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leq M \cdot |y_n - b| + |b|\,|x_n - a| \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\,(|b| + 1)}. \tag{1.20}$$

Nadalje zbog $y_n \to b$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{1.21}$$

Neka je

$$n \geq \max\{m_0, n_0\}.$$

Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$ pa vrijedi (1.20) i (1.21). Sada iz (1.19) slijedi

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - a \cdot b| &< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2\,(|b| + 1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|b|}{|b| + 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \varepsilon \text{ za svaki } n \geq \max\{m_0, n_0\}.$$

Time je tvrdnja teorema dokazana.

□

Lema 1.3.18. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je $a \neq 0$ te da je $x_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $r \leq |x_n|$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Iz propozicije 1.3.14 slijedi da $|x_n| \to |a|$. Neka je $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Tada je $\varepsilon > 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n| \in \langle |a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon \rangle .$$

Posebno

$$|a| - \varepsilon < |x_n| \text{ za svaki } n \geq n_0, \text{ tj.}$$

$$\frac{|a|}{2} < |x_n| \text{ za svaki } n \geq n_0.$$

Neka je

$$r = \min\{|x_1|, |x_2|, ..., \left|x_{n_0}\right|, \frac{|a|}{2}\}.$$

Tada je $r = |x_i|$ za neki $i \leq n_0$ ili $r = \frac{|a|}{2}$. U svakom slučaju $r > 0$ (jer je $x_i \neq 0$). Nadalje, očito je $r \leq |x_n|$ za svaki $n \leq n_0$. Za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$r \leq \frac{|a|}{2} < |x_n|, \text{ tj. } r < |x_n| .$$

Prema tome,

$$r \leq |x_n| \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

□

Propozicija 1.3.19. *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva te neka je* $a \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to a$. *Pretpostavimo da je* $x_n \neq 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *te da je* $a \neq 0$. *Tada niz*

$$\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \in N} \textit{ teži prema } \frac{1}{a}.$$

Dokaz. Prema lemi 1.3.18 postoji $r > 0$ tako da je $r \leq |x_n|$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{r} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x_n}{x_n \cdot a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|x_n| \cdot |a|} = |a - x_n| \frac{1}{|x_n|} \frac{1}{|a|} \leq |a - x_n| \frac{1}{r} \frac{1}{|a|}.$$

Dakle

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| \leq |a - x_n| \frac{1}{r \cdot |a|} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|a - x_n| < \varepsilon r\, |a|\,.$$

Slijedi

$$|a - x_n| \frac{1}{r \cdot |a|} < \varepsilon \text{ za svaki } n \geq n_0.$$

Iz ovoga i (1.22) slijedi

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon \text{ za svaki } n \geq n_0.$$

Zaključak: $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$. □

Korolar 1.3.20. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Pretpostavimo da je $y_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $b \neq 0$. Tada*

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}.$$

Dokaz. Prema propoziciji 1.3.19 slijedi

$$\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}.$$

Iz teorema 1.3.17 sada slijedi

$$x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot \frac{1}{b}.$$

Dakle,

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}.$$

□

Propozicija 1.3.21. *Neka su $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije te neka je $a \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je L limes od f u a te da je K limes od g u a. Tada vrijedi sljedeće:*

1. *$L + K$ je limes od $f + g$ u a*
2. *$L \cdot K$ je limes od $f \cdot g$ u a*

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da $x_n \to a$ i $x_n \in S \setminus \{a\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 1.3.8 vrijedi

$$f(x_n) \to L \text{ i } g(x_n) \to K.$$

Iz propozicije 1.3.12 slijedi

$$f(x_n) + g(x_n) \to L + K,$$

a iz teorema 1.3.17

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \to L \cdot K.$$

Prema tome

$$(f + g)(x_n) \to L + K \text{ i } (f \cdot g)(x_n) \to L \cdot K.$$

Iz teorema 1.3.10 slijedi da je $L + K$ limes funkcije $f + g$ u a te da je $L \cdot K$ limes funkcije $f \cdot g$ u a. □

Propozicija 1.3.22. *Neka su* $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcije neprekidne u točki* $x_0 \in S$. *Tada su funkcije* $f + g, f \cdot g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *također neprekidne u* x_0.

Dokaz. Prema propoziciji 1.2.12 imamo da je $f(x_0)$ limes od f u x_0 i $g(x_0)$ limes od g u x_0. Prema propoziciji 1.3.21 imamo da je $f(x_0) + g(x_0)$ limes od $f + g$ u x_0, tj. $(f + g)(x_0)$ je limes od $f + g$ u x_0. Prema propoziciji 1.2.12 vrijedi da je $f + g$ neprekidna u točki x_0. Analogno dobivamo da je funkcija $f \cdot g$ neprekidna u točki x_0. □

Korolar 1.3.23. *Neka su* $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidne funkcije. Tada su i funkcije* $f + g, f \cdot g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidne.*

Poglavlje 2

Diferencijabilnost

2.1 Derivacija funkcije

Definicija 2.1.1 (Derivacija)**.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da je $x_0 \in S$ te da je x_0 gomilište skupa S. Neka je $F : S \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pretpostavimo da je L limes funkcije F u x_0. Tada za L kažemo da je derivacija funkcije f u točki x_0. Također kažemo da je f derivabilna u x_0. Broj L označavamo s $f'(x_0)$.
Uočimo da je derivacija funkcije f u x_0, ako postoji, jedinstvena. Naime, to slijedi iz propozicije 1.2.6, te iz činjenice da je x_0 gomilište od $S \setminus \{x_0\}$ ako je x_0 gomilište od S.

Napomena 2.1.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = a$, za svaki $x \in S$. Tada za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi da je a limes od f u x_0. Naime neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svaki $x \in S$ očito vrijedi $f(x) \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$ pa stoga za bilo koji $\delta > 0$ i za svaki $x \in S$ takav da je $x \neq x_0$ vrijedi implikacija:*

$$\textit{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle, \textit{onda je } f(x) \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle.$$

Primjer 2.1.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te neka je $x_0 \in S$ takav da je x_0 gomilište od S. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Definirajmo funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ s $f(x) = c$ za svaki $x \in S$. Tada je f derivabilna u x_0 i $f'(x_0) = 0$.*

Definirajmo $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ s

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Očito je $F(x) = 0$ *za svaki* $x \in S \setminus \{x_0\}$*. Iz napomene 2.1.2 slijedi da je* 0 *limes funkcije* F *u* x_0*. Stoga je po definiciji* 0 *derivacija od* f *u* x_0*.*

Primjer 2.1.4. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$*, te neka je* $x_0 \in S$ *takav da je* x_0 *gomilište od* S*. Neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = x$ *za svaki* $x \in S$*. Tada je* f *derivabilna u* x_0 *i* $f'(x_0) = 1$*.*

Definirajmo $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *s*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Očito je $F(x) = 1$ *za svaki* $x \in S \setminus \{x_0\}$*. Iz napomene 2.1.2 slijedi da je* 1 *limes funkcije* F *u* x_0*. Stoga je po definiciji* 1 *derivacija od* f *u* x_0*.*

Definicija 2.1.5 (Derivabilna funkcija)**.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija. Kažemo da je* f *derivabilna ako je* f *derivabilna u* x_0 *za svaki* $x_0 \in S$*.*

Propozicija 2.1.6. *Neka su* $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcije derivabilne u točki* x_0*. Tada je funkcija* $f + g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabilne u* x_0 *i*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dokaz. Neka su $F, G : S \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije definirane s

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ i } G(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Znamo da je $f'(x_0)$ limes od F u x_0 i $g'(x_0)$ limes od G u x_0. Prema propoziciji 1.3.21 znamo da je $f'(x_0) + g'(x_0)$ limes od $F + G$ u x_0. Neka je $H : S \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$H(x) = \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0}.$$

Uočimo da je $H = F + G$. Dakle $f'(x_0) + g'(x_0)$ je limes od H u x_0.
Zaključak: Funkcija $f + g$ je derivabilna u x_0 i

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

□

Propozicija 2.1.7. *Neka je* $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija derivabilna u točki* x_0*. Tada je* f *neprekidna u* x_0*.*

Dokaz. Neka je $F : S \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tada je $f'(x_0)$ limes funkcije F u x_0.
Uočimo da je $(S \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\} = S$. Iz propozicije 1.2.14 slijedi da je funkcija $\tilde{F} : S \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), & x \in S \setminus \{x_0\} \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

neprekidna u x_0. Iz definicije funkcije F slijedi da je $f(x) - f(x_0) = F(x)(x - x_0)$, tj.

$$f(x) = F(x)(x - x_0) + f(x_0) \text{ za svaki } x \in S \setminus \{x_0\}.$$

Budući da je $\tilde{F}$ proširenje od F, imamo

$$f(x) = \tilde{F}(x)(x - x_0) + f(x_0) \text{ za svaki } x \in S \setminus \{x_0\}. \tag{2.1}$$

Ova jednakost očito vrijedi i za $x = x_0$, dakle vrijedi za svaki $x \in S$. Neka su $h, v : S \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s

$$h(x) = x - x_0 \text{ i } v(x) = f(x_0) \text{ za svaki } x \in S.$$

Funkcija v je neprekidna prema primjeru 1.1.4, a funkcija h je neprekidna kao zbroj dvije neprekidne funkcije prema korolaru 1.3.23 i primjeru 1.1.5.
Iz (2.1) slijedi

$$f = \tilde{F} \cdot h + v.$$

Funkcija $\tilde{F} \cdot h$ je neprekidna u x_0 prema propoziciji 1.3.22 pa je i funkcija $\tilde{F} \cdot h + v$ neprekidna u x_0 prema istoj propoziciji. Dakle, f je neprekidna u x_0. □

Propozicija 2.1.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ te $L \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je L limes funkcije f u a. Tada je $-L$ limes funkcije $-f$ u a te je $|L|$ limes funkcije $|f|$ u a.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva koji teži prema a i $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada prema propoziciji 1.3.8 imamo $f(x_n) \to L$ pa iz propozicije 1.3.14 slijedi $-f(x_n) \to -L$, tj. $(-f)(x_n) \to -L$. Iz teorema 1.3.10 slijedi da je $-L$ limes od $-f$ u a. Analogno dokazujemo da je $|L|$ limes funkcije $|f|$ u a. □

Korolar 2.1.9. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Tada su i funkcije $-f$ i $|f|$ neprekidne u x_0.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.2.12 $f(x_0)$ je limes od f u x_0. Prema propoziciji 2.1.8 $(-f)(x_0)$ je limes funkcije $-f$ u x_0. Iz propozicije 1.2.12 slijedi da je $-f$ neprekidna u x_0. Analogno dokazujemo da je $|f|$ neprekidna u x_0. □

Korolar 2.1.10. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada su funkcije $-f, |f| : S \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne.*

Primjer 2.1.11. *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = |x|$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Funkcija $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$ je neprekidna prema primjeru (1.1.5) pa iz korolara 2.1.10 slijedi da je $|g|$ neprekidna funkcija. No, $|g| = f$, prema tome f je neprekidna funkcija. No f nije derivabilna u točki 0. Definirajmo*

$$F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ s } F(x) = \frac{f(x) - 0}{x - 0}.$$

Pretpostavimo da postoji $L \in \mathbb{R}$ tako da je L limes funkcije F u 0. Uočimo da je

$$F(x) = \frac{|x|}{x} \text{ za svaki } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Definirajmo niz (x_n) u $\mathbb{R}$,

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Prema primjeru 1.3.4 vrijedi da je 0 limes tog niza. Uočimo da je $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz propozicije 1.3.8 slijedi da je L limes niza $(F(x_n))$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $F(x_n) = 1$ pa iz primjera 1.1.4 slijedi da je 1 limes niza $(F(x_n))$. Iz propozicije 1.3.6 slijedi $L = 1$.
Definirajmo niz (y_n) u $\mathbb{R}$,

$$y_n = -\frac{1}{n} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.3.14 slijedi da $y_n \to 0$. Zaključujemo da je $(F(y_n)) \to L$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $F(y_n) = -1$ pa iz primjera 1.1.4 slijedi da $F(y_n) \to -1$. Slijedi $L = -1$. Kontradikcija.
Funkcija F nema limes u točki 0 pa funkcija f nije derivabilna u 0.

Lema 2.1.12. *Neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u točki x_0. Pretpostavimo da je (x_n) niz realnih brojeva takvih da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Tada niz*

$$\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ teži prema } f'(x_0).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Znamo da je $f'(x_0)$ limes funkcije F u x_0. Prema propoziciji 1.3.8

$$F(x_n) \to f'(x_0).$$

Uočimo da je

$$F(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, tvrdnja leme je dokazana. □

Lema 2.1.13. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in S$ gomilište skupa S. Pretpostavimo da je $D \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi sljedeće*
ako je x_n niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ onda

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to D.$$

Tada je funkcija derivabilna u x_0 i $f'(x_0) = D$.

Dokaz. Definirajmo $F : S \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ s

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Želimo dokazati da je D limes funkcije F u x_0. U tu svrhu iskoristit ćemo teorem 1.3.10. Pretpostavimo da je (x_n) niz realnih brojeva takvih da $x_n \to x_0$ te takvih da je $x_n \in (S \setminus \{x_0\}) \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ (tj. $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$). Prema pretpostavci leme vrijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to D.$$

Dakle

$$F(x_n) \to D.$$

Iz teorema 1.3.10 slijedi da je D limes od F u x_0. Prema tome f je derivabilna u x_0 i $f'(x_0) = D$. □

Propozicija 2.1.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te neka su $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki x_0. Tada je funkcija $f \cdot g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna u x_0 te vrijedi*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takvih da

$$x_n \to x_0 \text{ i } x_n \in S \setminus \{x_0\} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo da

$$\frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Ako to dokažemo onda će tvrdnja propozicije slijediti iz leme 2.1.13. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(x_0) \cdot g(x_n) + f(x_0) \cdot g(x_n) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{(f(x_n) - f(x_0))g(x_n) + f(x_0)(g(x_n) - g(x_0))}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} g(x_n) + f(x_0) \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Prema lemi 2.1.12 vrijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0)$$

i

$$\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \to g'(x_0).$$

Prema propoziciji 1.3.7 vrijedi

$$g(x_n) \to g(x_0).$$

Prema teoremu 1.3.17 i propoziciji 1.3.12 vrijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} g(x_n) + f(x_0) \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Dakle,

$$\frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.1.15. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$. Pretpostavimo da je f derivabilna u x_0. Tada je funkcija $\frac{1}{f} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna u x_0 i vrijedi*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takvih da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takvih da $x_n \to x_0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x_n) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\frac{1}{f(x_n)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x_n - x_0} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x_n)}{f(x_n)f(x_0)}}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{1}{f(x_n)} \cdot \frac{-1}{f(x_0)} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Iz propozicije 2.1.7, propozicije 1.3.7 i propozicije 1.3.19 slijedi da

$$\frac{1}{f(x_n)} \to \frac{1}{f(x_0)}.$$

Iz leme 2.1.12 slijedi

$$\frac{1}{f(x_n)} \cdot \frac{-1}{f(x_0)} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Dakle

$$\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x_n) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x_n - x_0} \to \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Iz leme 2.1.13 slijedi da je funkcija $\frac{1}{f}$ derivabilna u x_0 i vrijedi

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

□

Korolar 2.1.16. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije takve da je $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$. Pretpostavimo da su f i g derivabilne u x_0. Tada je funkcija $\frac{f}{g} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna u x_0 i vrijedi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2.}$$

Dokaz. Vrijedi
$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}.$$
Prema propoziciji 2.1.15 funkcija $\frac{1}{g}$ je derivabilna u x_0 i
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$
Stoga je prema teoremu 1.3.17 funkcija $f \cdot \frac{1}{g}$ derivabilna u x_0 i vrijedi
$$\begin{aligned}\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g}(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\\ &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.\end{aligned}$$
Dakle, $\frac{f}{g}$ je derivabilna u x_0 i vrijedi
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$
□

Klasične kompozicije $g \circ f$ funkcija f i g definiramo u slučaju kad je kodomena funkcije f jednaka domeni funkcije g. Sada ćemo proširiti pojam kompozicije funkcija.

2.2 Derivacija kompozicije

Definicija 2.2.1 (Kompozicija funkcija)**.** *Neka su A, B, C i D skupovi te neka su $f : A \to B$ i $g : C \to D$ funkcije takve da je $f(A) \subseteq C$. Tada definiramo funkciju $g \circ f : A \to D$,*
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ za svaki } x \in A.$$
Za $g \circ f$ kažemo da je kompozicija funkcija f i g.

Propozicija 2.2.2. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f : S \to \mathbb{R}$ i $g : T \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(S) \subseteq T$. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0 te da je g neprekidna u $f(x_0)$. Tada je funkcija $g \circ f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je funkcija g neprekidna u $f(x_0)$ postoji $\delta_0 > 0$ tako da za svaki $y \in T$ vrijedi

$$\text{ako je y } \in \langle f(x_0) - \delta_0, f(x_0) + \delta_0\rangle \text{ onda je } g(y) \in \langle g(f(x_0)) - \varepsilon, g(f(x_0)) + \varepsilon\rangle\,. \tag{2.2}$$

Budući da je funkcija f neprekidna u x_0 postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \text{ onda je } f(x) \in \langle f(x_0) - \delta_0, f(x_0) + \delta_0\rangle\,. \tag{2.3}$$

Neka je $x \in S$ takav da je

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle\,.$$

Tada je prema (2.3)

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \delta_0, f(x_0) + \delta_0\rangle\,.$$

Vrijedi $f(x) \in T$ (jer je $f(S) \subseteq T$). Prema (2.2) (za $y = f(x)$) vrijedi

$$g(f(x)) \in \langle g(f(x_0)) - \varepsilon, g(f(x_0)) + \varepsilon\rangle\,.$$

Time smo dokazali da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$\text{ako je } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \text{ onda je } g(f(x)) \in \langle g(f(x_0)) - \delta_0, g(f(x_0)) + \delta_0\rangle\,.$$

Prema tome funkcija $g \circ f$ je neprekidna u x_0.

□

Propozicija 2.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je x_0 gomilište od S.*

1. *Pretpostavimo da je f derivabilna u x_0. Tada postoji funkcija $\varphi : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0 takva da je*
$$f(x) = \varphi(x)(x - x_0) + f(x_0) \textit{ za svaki } x \in S.$$

2. *Pretpostavimo da postoji funkcija $\varphi : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0 takva da je*
$$f(x) = \varphi(x)(x - x_0) + f(x_0) \textit{ za svaki } x \in S.$$
Takva da je f derivabilna u x_0 i $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Dokaz. 1. Ova tvrdnja slijedi iz dokaza propozicije 2.1.7. (stavimo $\varphi = \tilde{F}(x)$).

2. Definirajmo $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ za svaki } x \in S \setminus \{x_0\}.$$

Želimo dokazati da je $\varphi(x_0)$ limes od F u x_0. Iz pretpostavke slijedi da je

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ za svaki } x \in S \setminus \{x_0\}.$$

Prema tome

$$\varphi(x) = F(x) \text{ za svaki } S \setminus \{x_0\}. \tag{2.4}$$

Prema propoziciji 1.2.12 $\varphi(x_0)$ je limes od φ u x_0. Odaberimo bilo koji $r > 0$. Domena funkcije φ je S, domena funkcije F je $S \setminus \{x_0\}$, vrijedi

$$(\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap S = (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \setminus \{x_0\}) \cap (S \setminus \{x_0\})$$

te za svaki

$$x \in (\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \cap S) \text{ vrijedi } \varphi(x) = F(x)$$

prema (2.4). Sada iz propozicije 1.2.13 slijedi da je $\varphi(x_0)$ limes od F u x_0. Prema tome f je derivabilna u x_0 i

$$f'(x_0) = \varphi(x_0).$$

Definicija 2.2.4. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to T$ funkcija. Neka je $\tilde{f} : S \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ za svaki } x \in S.$$

Neka je $x_0 \in S$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u x_0 ako je funkcija $\tilde{f}$ neprekidna u x_0. Kažemo da je funkcija f derivabilna u x_0 ako je funkcija $\tilde{f}$ derivabilna u x_0 te u tom slučaju broj $\left(\tilde{f}\right)'(x_0)$ nazivamo derivacija od f u x_0 i označavamo $f'(x_0)$. Za funkciju f kažemo da je derivabilna ako je derivabilna u svakoj točki $x \in S$. Kažemo da je funkcija f neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki $x \in S$.

Teorem 2.2.5. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, neka je $f : S \to T$ funkcija derivabilna u x_0 te takvi da je $f(S) \subseteq T$. Neka je $g : T \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u $f(x_0)$. Tada je funkcija $g \circ f : S \to \mathbb{R}$ derivabilna u x_0 i*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dokaz. Prema propoziji 2.2.3 postoji funkcija $\varphi : S \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna u x_0 te takva da je

$$f(x) = \varphi(x)(x - x_0) + f(x_0) \text{ za svaki } x \in S.$$

Uočimo da je prema propoziciji 2.2.3 $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. Analogno, postoji funkcija $\psi : T \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna u $f(x_0)$ takva da je

$$g(y) = \psi(y)(y - f(x_0)) + g(f(x_0)) \text{ za svaki } y \in T$$

i

$$\psi(f(x_0)) = g'(f(x_0)).$$

Neka je $x \in S$. Imamo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) + g(f(x_0)) = \psi(f(x))\varphi(x)(x - x_0) + g(f(x_0)).$$

Dakle,

$$(g \circ f)(x) = (\psi(f(x)) \cdot \varphi(x))(x - x_0) + (g \circ f)(x_0). \tag{2.5}$$

Definirajmo funkciju $H : S \to \mathbb{R}$ sa

$$H(x) = \psi(f(x)) \cdot \varphi(x) \text{ za svaki } x \in S.$$

Uočimo da je $H = (\psi \circ f) \cdot \varphi$. Funkcija f je neprekidna u x_0 (jer je derivabilna u x_0), a ψ je neprekidna u $f(x_0)$. Prema propoziciji 2.2.2 $\psi \circ f$ je neprekidna u x_0. Prema propoziciji 1.3.22 H je neprekidna u x_0. Prema (2.5) slijedi

$$(g \circ f)(x) = H(x)(x - x_0) + (g \circ f)(x_0) \text{ za svaki } x \in S.$$

Prema propoziciji 2.2.3 slijedi da je $(g \circ f)$ derivabilno u x_0 i

$$(g \circ f)'(x_0) = H(x_0).$$

Vrijedi

$$H(x_0) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. □

2.3 Derivacija inverzne funkcije

Lema 2.3.1. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Pretpostavimo da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$. Tada je funkcija $\frac{1}{f} : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takvih da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takvih da $x_n \to x_0$. Prema propoziciji 1.3.8 $f(x_n) \to f(x_0)$. Prema pretpostavci leme imamo

$$f(x_n) \neq 0 \text{ i } f(x_0) \neq 0 \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Iz propozicije 1.3.19 slijedi
$$\frac{1}{f(x_n)} \to \frac{1}{f(x_0)},$$
tj.
$$\frac{1}{f}(x_n) \to \frac{1}{f}(x_0).$$
Iz teorema 1.3.10 slijedi da je $\frac{1}{f}(x_0)$ limes od $\frac{1}{f}$ u x_0. Iz propozicije 1.2.12 slijedi da je $\frac{1}{f}$ neprekidna u točki x_0. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Teorem 2.3.2. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$. Neka je $g : S \to T$ bijekcija te neka je $g : T \to S$ inverzna funkcija od f. Neka je $x_0 \in S$ te neka je $y_0 = f(x_0)$. Pretpostavimo da je f derivabilna u x_0 te da je $f'(x_0) \neq 0$ te da je y_0 gomilište skupa T. Nadalje, pretpostavimo da je g neprekidna u y_0. Tada je g derivabilna u y_0 i $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.2.3 postoji funkcija $\varphi : S \to \mathbb{R}$ takva da je
$$f(x) = \varphi(x)(x - x_0) + f(x_0) \tag{2.6}$$
za svaki $x \in S$ te takva da je
$$\varphi(x_0) = f'(x_0).$$
Neka je $y \in T$. Tada je $g(y) \in S$ pa iz (2.6) slijedi, imajući na umu da je
$$f(x_0) = y_0 \text{ i } g(y_0) = x_0,$$
da je
$$f(g(y)) = \varphi(g(y))(g(y) - g(y_0)) + y_0.$$
S obzirom na to da je g inverzna funkcija od f slijedi da je
$$f(g(y)) = y.$$
Stoga je
$$y = \varphi(g(y))(g(y) - g(y_0)) + y_0, \text{ tj.}$$
$$y - y_0 = (\varphi \circ g)(y)(g(y) - g(y_0)). \tag{2.7}$$
Dakle, (2.7) vrijede za svaki $y \in T$. Tvrdimo da je $(\varphi \circ g)(y) \neq 0$ za svaki $y \in T$. Za svaki $y \in T$ takav da je $y \neq y_0$ to slijedi iz (2.7). Imamo
$$(\varphi \circ g)(y_0) = \varphi(g(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0.$$
Dakle
$$(\varphi \circ g)(y) \neq 0 \text{ za svaki } y \in T.$$

Imamo da je funkcija g neprekidna u y_0, a φ neprekidna u $x_0 = g(y_0)$. Prema propoziciji 2.2.2 $\varphi \circ g$ je neprekidna u y_0. Iz leme 2.3.1 slijedi da je funkcija $\frac{1}{\varphi \circ g} : T \to \mathbb{R}$ neprekidna u y_0. Neka je $y \in T$. Iz (2.7) slijedi

$$\frac{1}{(\varphi \circ g)(y)} \cdot (y - y_0) = g(y) - g(y_0)$$

pa je

$$g(y) = \frac{1}{(\varphi \circ g)}(y) \cdot (y - y_0) + g(y_0).$$

Iz propozicije 2.2.3 slijedi da je g derivabilna u y_0 i

$$g'(y_0) = \frac{1}{\varphi \circ g}(y_0).$$

Imamo

$$\frac{1}{\varphi \circ g}(y_0) = \frac{1}{(\varphi \circ g)(y_0)} = \frac{1}{\varphi(g(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dakle

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Primjer 2.3.3. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. *Tvrdimo da funkcija* f *nije derivabilna u točki* 0. *Pretpostavimo suprotno. Označimo* $D = f'(0)$. *Definirajmo niz realnih brojeva* (x_n) *sa*

$$x_n = \frac{1}{n^3} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Očito je $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Prema primjeru 1.3.4* $\frac{1}{n} \to 0$ *pa iz teorema 1.3.17 lako zaključujemo da*

$$\frac{1}{n^3} \to 0, \text{ tj. } x_n \to 0.$$

Iz leme 2.1.13 slijedi da

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \to f'(0),$$

tj.

$$\frac{\sqrt[3]{x_n}}{x_n} \to D.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\frac{\sqrt[3]{x_n}}{x_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = n^2.$$

Dakle, $n^2 \to D$*. Prema lemi 1.3.16 postoji* $M > 0$ *takav da je* $n^2 \leq M$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Slijedi da je* $n \leq \sqrt{M}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, što je očito nemoguće. Prema tome* f *nije derivabilna u točki* 0*.*

Propozicija 2.3.4. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *neka je* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s*

$$f_n(x) = x^n \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi da je* f_n *derivabilna funkcija i*

$$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n. Imamo $f_1(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, a iz primjera 2.1.4 slijedi da je f_1 derivabilna funkcija i

$$f_1'(x) = 1 \text{ za svaki } x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$f_1'(x) = 1 \cdot x^{1-1} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Dakle, tvrdnja propozicije vrijedi za $n = 1$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x = f_n(x) \cdot f_1(x) = (f_n \cdot f_1)(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Dakle

$$f_{n+1} = f_n \cdot f_1.$$

Prema induktivnoj pretpostavci f_n je derivabilna funkcija, a znamo da je f_1 derivabilna funkcija, pa prema propoziciji 2.1.14 slijedi da je f_{n+1} derivabilna funkcija i

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x) \cdot f_1(x) + f_n(x) \cdot f_1'(x).$$

Prema pretpostavci indukcije vrijedi

$$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} f_{n+1}'(x) &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 \\ &= n \cdot x^n + x^n \\ &= (n+1)x^n \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$f_{n+1}'(x) = (n+1)\, x^{(n+1)-1} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Time smo dokazali da tvrdnja vrijedi za $n + 1$ pa je propozicija dokazana. □

Definicija 2.3.5 (Monotona funkcija)**.** *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to T$ funkcija. Kažemo da je f rastuća funkcija ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x \leq y$ vrijedi*

$$f(x) \leq f(y).$$

Kažemo da je f padajuća funkcija ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x \leq y$ vrijedi

$$f(x) \geq f(y).$$

Za funkciju f kažemo da je monotona ako je f padajuća ili rastuća.

Lema 2.3.6. *Neka su $x_0, u, v \in \mathbb{R}$ takvi da je $u < x_0 < v$. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi*

$$u < x < v.$$

Dokaz. Imamo $x_0 - u > 0$ i $v - x_0 > 0$. Definirajmo

$$\delta = \min\{x_0 - u, v - x_0\}.$$

Očito je $\delta > 0$. Iz

$$\delta \leq x_0 - u \text{ slijedi } u \leq x_0 - \delta.$$

Iz

$$\delta \leq v - x_0 \text{ slijedi } \delta + x_0 \leq v.$$

Dakle,

$$u \leq x_0 - \delta \text{ i } x_0 + \delta \leq v.$$

Očito je da definirani broj δ zadovoljava tvrdnju leme. □

Propozicija 2.3.7. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to T$ monotona bijekcija. Pretpostavimo da za svaki $y \in T$ i svaki $r > 0$ postoje $y_1, y_2 \in T$ takvi da je*

$$y - r < y_1 < y < y_2 < y + r.$$

Tada je f neprekidna funkcija.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f rastuća. Neka je $x_0 \in S$. Neka je $\varepsilon > 0$. Imamo $f(x_0) \in T$ pa prema pretpostavci propozicije postoje $y_1, y_2 \in T$ tako da je

$$f(x_0) - \varepsilon < y_1 < f(x_0) < y_2 < f(x_0) + \varepsilon. \tag{2.8}$$

Budući da je f bijekcija postoje $u, v \in S$ takvi da je

$$f(u) = y_1 \text{ i } f(v) = y_2.$$

Vrijedi $u < x_0$. Naime, u suprotnom bismo imali $x_0 \leq u$ pa bi slijedilo $f(x_0) \leq f(u)$, tj. $f(x_0) \leq y_1$ što je nemoguće prema (2.8). Dakle, $u < x_0$, a analogno dobivamo da je $x_0 < v$. Prema lemi 2.3.6 postoji $\delta > 0$ tako da

$$\text{za svaki } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \text{ vrijedi } u < x < v.$$

Neka je $x \in S$ tako da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Slijedi da je $u < x < v$ pa je

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v), \text{ tj. } y_1 \leq f(x) \leq y_2.$$

Imamo

$$f(x_0) - \varepsilon < y_1 \leq f(x) \leq y_2 < f(x_0) + \varepsilon$$

pa je

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle .$$

Zaključak: Funkcija f je neprekidna u točki x_0. Dakle, funkcija f je neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je f padajuća funkcija. Neka je $x_0 \in S$. Neka je $\varepsilon > 0$. Postoje $y_1, y_2 \in T$ takvi da vrijedi (2.8). Neka su $u, v \in S$ takvi da je

$$f(u) = y_1 \text{ i } f(v) = y_2.$$

Lako se dobiva da je $v < x_0 < u$. Prema lemi 2.3.6 postoji $\delta > 0$ takav da

$$\text{za svaki } x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \text{ vrijedi } v < x < u.$$

Lako se provjeri da za svaki $x \in S$ takav da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$. Prema tome, funkcija f je neprekidna u x_0, tj. funkcija f je neprekidna. □

Primjer 2.3.8. *Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Tada je g rastuća bijekcija. Očito za svaki $y \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ postoje $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$y - r < y_1 < y < y_2 < y + r.$$

Iz propozicije 2.3.7 slijedi da je g neprekidna funkcija.

Primjer 2.3.9. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$f(x) = x^3 \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$g(y) = \sqrt[3]{y} \text{ za svaki } y \in \mathbb{R}.$$

Neka je $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \neq 0$. *Neka je* $x_0 = g(y_0)$. *Tada je* $x_0 \neq 0$ *i* $f(x_0) = y_0$. *Prema propoziciji 2.3.4 vrijedi*

$$f'(x_0) = 3x_0^2$$

pa je

$$f'(x_0) \neq 0.$$

Imamo: funkcija f *je bijekcija, funkcija* g *je inverzna funkcija od* f, $f'(x_0) \neq 0$, *funkcija* g *je neprekidna u* y_0 *(prema primjeru 2.3.8) i* y_0 *je gomilište od* $\mathbb{R}$ *(očito). Iz teorema 2.3.2 slijedi da je funkcija* g *derivabilna u* y_0 *i*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dakle,

$$g'(y_0) = \frac{1}{3x_0^2} = \frac{1}{3(g(y_0))^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y_0})^2} = \frac{1}{3y_0^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}y_0^{-\frac{2}{3}}.$$

Bibliografija

[1] S. Kurepa, Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.*

[2] S. Mardešić, Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.*

[3] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.*

Sažetak

U prvom poglavlju se definira neprekidnost funkcije u točki te je dan primjer funkcije koja je neprekidna u svakoj točki osim u jednoj. Zatim se definira gomilište skupa i limes funkcije te su navedeni primjeri vezani uz to. Navedeni su rezultati koji povezuju neprekidnost funkcije i limes funkcije. Zatim se definira niz u $\mathbb{R}$ *te konvergencija nizova. Iskazane su i dokazane neke propozicije vezane uz konvergenciju nizova. Na kraju poglavlja dokazano je da su zbroj i umnožak neprekidnih funkcija neprekidne funkcije. Drugo poglavlje počinje definicijom i primjerima derivabilnosti funkcije. Slijede iskazi i dokazi propozicija o derivaciji zbroja, umnoška i kvocijenta funkcija te iskazi i dokazi propozicija koje povezuju neprekidnost i derivabilnost funkcija te konvergenciju nizova. Nakon toga se dokažu propozicije o neprekidnosti i derivabilnosti kompozicije funkcija. Zatim slijede svojstva inverznih funkcija.*

Summary

In the first chapter we study the notion of continuous function. Then we examine accumulation points of a set and limits of function. We also give results about the relationship between the continuity of a function and a limit of a function. We study convergent sequences in $\mathbb{R}$*. At the end of the first chapter we prove that the sum and the product of continuous functions are continuous functions. In the second chapter we study derivable functions. We examine derivability of the sum, the product and the quotient of the functions and we prove some results which connect continuity and derivability of functions and convergent sequences. We examine continuity and derivability of the composition of functions. We also examine derivability of inverse functions.*

Životopis

Zovem se Alena Protulipac. Rođena sam 27. studenog 1990. godine u Karlovcu. Pohađala sam OŠ Grabrik u Karlovcu, a zatim sam upisala Gimnaziju Karlovac koju sam završila 2009. godine. Iste godine sam upisala preddiplomski studij matematike; smjer: nastavnički na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu koji sam završila 2015. godine te upisala na istom smjeru diplomski studij. Bavila sam se tenisom i plesala sam u Plesnom centru "Tango" u Karlovcu.