

# Kvazi Monte Carlo metoda za numeričku integraciju

---

**Turčić, Luka**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:724450>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-30**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Luka Turčić

**KVAZI MONTE CARLO METODA ZA**  
**NUMERIČKU INTEGRACIJU**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Izv.prof.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, srpanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Mojim roditeljima.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Monte Carlo metoda i kvazi Monte Carlo metoda</b>	<b>3</b>
1.1 Motivacija . . . . .	3
1.2 Monte Carlo metoda . . . . .	5
1.3 Uvod u kvazi Monte Carlo metodu . . . . .	12
<b>2 Kvazi Monte Carlo za integraciju</b>	<b>14</b>
2.1 Diskrepancija . . . . .	14
2.2 Ocjene greške kvazi Monte Carlo metode . . . . .	19
2.3 Uvod u nizove niske diskrepancije . . . . .	23
2.4 Klasične konstrukcije nizova niske diskrepancije . . . . .	24
2.5 Neke praktičnije ocjene diskrepancije . . . . .	33
<b>3 Primjeri i primjene</b>	<b>38</b>
3.1 Nizovi niske diskrepancije i pseudoslučajan niz . . . . .	38
3.2 Neki primjeri kvazi Monte Carlo metode . . . . .	41
3.3 Primjeri iz financijske matematike . . . . .	48
<b>Bibliografija</b>	<b>56</b>

# Uvod

Monte Carlo metoda je vjerojatnosna metoda uz pomoć koje, koristeći slučajne uzorke, aproksimacijom možemo rješavati razne determinističke probleme. Razvijena je početkom 1940-ih godina od strane Stanislaw Ulama i implementirana na slavni ENIAC od strane Johna von Neumanna. Ulam i Von Neumann su, radeći na nuklearnom naoružanju u Los Alamosu Monte Carlo metodom procjenjivali udaljenosti koje neutroni prolaze kroz razne materijale (za više informacija, vidjeti [2]). Sama ideja statističkog uzorkovanja je bila poznata i prije, no ona je doživjela procvat dolaskom računala koja su bila sposobna odrađivati veliki broj računskih operacija u kratkome vremenu. Metoda zahtijeva generiranje slučajnih uzoraka koje nije jednostavno, stoga se paralelno uz Monte Carlo razvilo i područje generiranja slučajnih brojeva. Kvazi Monte Carlo metoda je, najjednostavnije rečeno, determinističko poboljšanje Monte Carlo metode gdje uzorci nisu slučajni, već su odabrani pametno, u svrhu minimiziranja greške aproksimacije. Jedna od klasičnih upotreba kvazi Monte Carlo metode jest u svrhu numeričke integracije, što će biti glavna tema ovog rada. Rad se uvelike bazira na knjigama [14] i [10], s tim da je glavnina iznesenih dokaza preuzeta iz prve knjige.

Prvo poglavlje započinje motivacijskim primjerom i kratkom povijesti Monte Carlo metode za numeričku integraciju. Iznosi se opis te metode i pokazuje se da je greška metode usko povezana s varijancom generiranog slučajnog uzorka. Shodno tome se navodi par uobičajenih metoda koje služe za redukciju varijance. Na kraju poglavlja se daje kratak uvod u kvazi Monte Carlo metodu.

Glavni dio rada čini drugo poglavlje u kojem se detaljno opisuje kvazi Monte Carlo metoda za numeričku integraciju. Definira se diskrepancija – kvantitativna mjera odstupanja nekog niza od uniformne distribucije te se pokazuje da je to glavni kriterij determinističkog odabira točaka kvazi Monte Carlo metode. Uz diskrepanciju se prirodno veže i pojam uniformno distribuiranog niza. Nakon dokaza da će nizovi koji imaju nisku diskrepanciju garantirati manju grešku aproksimacije, prelazi se na konstrukciju takvih nizova. Dane su (s dokazima da to stvarno jesu nizovi niske diskrepancije) neke osnovne konstrukcije, a neke dodatne se mogu pronaći u [8] ili [14]. Na kraju poglavlja su dane i neke praktičnije ocjene diskrepancije, odnosno ocjene za nizove točaka racionalnih koordinata s kakvima računalo radi.

U posljednjem poglavlju su, koristeći program R, grafički prikazani neki od nizova niske diskrepancije koji su uvedeni u drugom poglavlju. Navedena su i dva primjera numeričke integracije u svrhu usporedbe Monte Carlo i kvazi Monte Carlo metode. Na kraju su iznesena i dva primjera iz financijske matematike, jedan čisto teorijski, a drugi preuzet iz [12]. Drugi primjer je od povijesnog značaja, s obzirom da je to jedna od prvih upotreba kvazi Monte Carlo metode u visoko dimenzionalnim problemima numeričke integracije, gdje se pokazalo da, usprkos očekivanjima i uvriježenom mišljenju, za probleme visokih dimenzija kvazi Monte Carlo u nekim slučajevima daje bolje rezultate od Monte Carlo metode.

# Poglavlje 1

## Monte Carlo metoda i kvazi Monte Carlo metoda

U ovom ćemo poglavlju dati neke osnovne pojmove i rezultate koji nam trebaju da bismo detaljno opisali kvazi Monte Carlo metodu za numeričku integraciju. O kvazi Monte Carlo metodi je nemoguće pričati bez barem osnovnih činjenica o Monte Carlo metodi. Idealan problem u kojem te dvije metode možemo uvesti i usporediti je problem numeričke integracije.

### 1.1 Motivacija

Za neke je funkcije integral teško egzaktno izračunati, a neke ni nemaju primitivnu funkciju (klasičan primjer je funkcija gustoće standardne normalne razdiobe  $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ) pa se njihov integral nad nekom domenom aproksimira raznim numeričkim metodama. To nazivamo numeričkom integracijom.

Promatramo problem numeričke integracije u dimenziji  $s$ . Za  $s = 1$  postoje klasične metode kao što su Simpsonova ili trapezna metoda. Promotrimo trapeznu metodu na segmentu  $[0, 1]$ . Ona daje aproksimaciju

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{n=1}^m w_n f\left(\frac{n}{m}\right) \quad (1.1)$$

gdje je  $m$  prirodan broj te su ponderi (težine)  $w_n$  dani s  $w_0 = w_m = \frac{1}{2m}$  i  $w_n = \frac{1}{m}$  za  $1 \leq n \leq m - 1$ . Dobro je poznato (vidjeti [5]) da greška  $R$  pri ovoj metodi numeričke integracije (za općenitu domenu integracije  $[a, b]$  uz uvjet postojanja druge derivacije od  $f$ ) iznosi

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\psi) \quad \text{za neki } \psi \in [a, b].$$



Riječima, ukoliko je  $f''$  omeđena, greška se u najgorem slučaju (asimptotski) ponaša kao  $m^{-2}$ , za  $m \rightarrow \infty$ . U budućnosti ćemo za to koristiti standardnu notaciju  $O(m^{-2})$ , odnosno rekli bismo da je greška u ovoj aproksimaciji  $O(m^{-2})$ .

U višedimenzionalnom slučaju, za  $s \geq 2$  klasične metode numeričke integracije pomoću Kartezijevog produkta koriste pravila integracije iz jedne dimenzije. Točnije, skup čvorova je tada Kartezijev produkt svih jednodimenzionalnih čvorova, a skup pondera odgovarajući produkt pondera iz jednodimenzionalnih pravila. Pokažimo ovo prvo na slučaju  $s = 2$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \approx \int_0^1 \left( \sum_{n_1=0}^m w_{n_1} f\left(\frac{n_1}{m}, x_2\right) \right) dx_2 \\ &= \sum_{n_1=0}^m w_{n_1} \int_0^1 f\left(\frac{n_1}{m}, x_2\right) dx_2 = \sum_{n_1=0}^m w_{n_1} \sum_{n_2=0}^m w_{n_2} f\left(\frac{n_1}{m}, \frac{n_2}{m}\right) = \sum_{n_1=0}^m \sum_{n_2=0}^m w_{n_1} w_{n_2} f\left(\frac{n_1}{m}, \frac{n_2}{m}\right). \end{aligned}$$

Suma može ulaziti i izlaziti iz integrala jer je konačna.

Neka  $I^s$  označava  $s$ -dimenzionalnu jediničnu kocku  $[0, 1]^s$ . Tada je  $s$ -dimenzionalni analogon jednadžbe (1.1) za proizvoljan prirodan broj  $s$

$$\int_{I^s} f(x) dx \approx \sum_{n_1=0}^m \dots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \dots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right), \quad (1.2)$$

gdje su  $w_{n_i}$  dani istom formulom kao i u (1.1),  $1 \leq i \leq s$ . Ukupan broj čvorova je  $N = (m + 1)^s$ . Uz analognu pretpostavku postojanja druge parcijalne derivacije po  $i$ -toj varijabli na  $I^s$ , za svaki  $1 \leq i \leq s$  može se pokazati da je greška ove aproksimacije i dalje  $O(m^{-2})$ . Da greška nužno ne mora biti manja od one u (1.1) odmah vidimo fiksiranjem svih osim jedne varijable, onda (1.2) zapravo postaje (1.1). Kako je  $m = N^{\frac{1}{s}} - 1$ , odmah vidimo da greška ove aproksimacije u odnosu na ukupan broj čvorova  $N$  iznosi  $O(N^{-\frac{2}{s}})$ .

Povećanjem dimenzije  $s$  raste i izraz  $N^{-\frac{2}{s}}$  pa korisnost ovakve aproksimacije s greškom  $O(N^{-\frac{2}{s}})$  drastično pada. Preciznije, ako npr. želimo da nam apsolutna vrijednost greške bude najviše  $\leq 10^{-2}$ , treba nam ugrubo  $N = 10^s$  čvorova, odnosno potreban broj čvorova raste eksponencijalno s brojem dimenzija. Ova pojava se naziva “kletvom dimenzionalnosti”. Kletva dimenzionalnosti se javlja kod svih metoda koje analogno preko Kartezijevog produkta proširuju pravila jednodimenzionalne numeričke integracije.

Važan napredak u odnosu na klasične metode numeričke integracije je bio razvitak Monte Carlo metode 1940-ih. U par riječi, Monte Carlo je numerička metoda koja se oslanja na upotrebu slučajnih uzoraka za rješavanje raznih problema. Mi ćemo se u ovom radu baviti numeričkom integracijom, no Monte Carlo metoda je primjenjiva na brojna i raznolika područja (zato se često kaže “Monte Carlo metode”). Jedno od najvažnijih obilježja Monte Carlo metode numeričke integracije jest da je ocjena greške u smislu broja potrebnih čvorova neovisna o dimenziji  $s$ , što je očita prednost nad klasičnim metodama.

Kako se metoda bazira na slučajnim uzorcima, ona je vjerojatnosne prirode pa je odmah važno napomenuti da Monte Carlo metoda tu grešku ne može garantirati.

U primjeni Monte Carlo metode izrazito je važno generirati “prave” slučajne uzorke, odnosno uzorke koji su uistinu slučajni. Uspjeh Monte Carla ovisi o kvaliteti slučajnih uzoraka, odnosno odražavaju li oni uistinu nasumičnost. Taj ćemo uvjet u daljnjim razmatranjima preciznije izreći i dati konkretne uvjete na slučajan uzorak. Radi važne uloge koju ovdje igraju slučajni uzorci, uz Monte Carlo metodu se kao važna tema razvilo i generiranje slučajnih brojeva. Na samim začecima, nakon što je uvidio značajnost Monte Carlo metode, Von Neumann je isprogramirao ENIAC tako da vrši Monte Carlo simulacije (vidjeti [13]). Međutim, kako je teško doći do “pravih” nasumičnih brojeva (postojale su knjige nasumičnih brojeva dobivenih preko igara na sreću) uvidio je kako bi lakše bilo koristiti pseudoslučajne brojeve pošto ni ovi “pravi” ne mogu biti uistinu nasumični. Osmislio je i jednostavan algoritam poznat kao Von Neumannova metoda srednjih kvadrata. Recimo da želimo generirati šesteroznamenaste brojeve; izaberemo prvi broj proizvoljno (početnu vrijednost), kvadriramo ga i uzmemo srednjih šest znamenki od dobivenog kvadrata. Tih srednjih šest znamenki su output i njih uzimamo za novu početnu vrijednost. Dobro svojstvo algoritamski generiranih (pseudoslučajnih) brojeva je što su reproducibilni, ako znamo početnu vrijednost možemo rekonstruirati cijeli niz. Očit problem može biti ulazak u petlju, kao i eventualne korelacije koje mogu proizlaziti iz samog algoritma.

Monte Carlo metoda ima i nekih nedostataka koji slijede iz njene stohastičke prirode. Za početak, ona nam daje samo vjerojatnosnu ocjenu greške. Međutim, pokazat ćemo da nije nužno da uzorci budu slučajni, već je uvjet koji ćemo tražiti njihova uniformna distribuiranost duž domene (u našem kontekstu pod time ne mislimo na uniformnu vjerojatnosnu distribuciju već na numeričku definiciju koju ćemo i formalizirati, no te dvije definicije su suštinski slične). Nadalje, pokazat ćemo da deterministički izbor uzoraka vuče determinističku ocjenu greške, odnosno grešku koju možemo garantirati. To nas prirodno vodi ideji uzimanja uzoraka koji će nam garantirati što manju grešku, što je osnovni princip kvazi Monte Carlo metode. Najjednostavnije rečeno, kvazi Monte Carlo metoda je determinističko profinjenje Monte Carlo metode u kojoj slučajne uzorke mijenjamo dobro odabranim determinističkim uzorcima. Što znači dobro odabranim i kako to postići ćemo pokazati nakon davanja nekih osnovnih činjenica o samoj Monte Carlo metodi.

## 1.2 Monte Carlo metoda

Kao što smo već rekli, Monte Carlo metoda klasično ima brojne primjene: u optimizaciji, numeričkoj analizi pri rješavanju velikih sustava jednadžbi, rješavanju parcijalnih diferencijalnih i integralnih jednadžbi, fizici, mehanici, teoriji pouzdanosti i sl. Glavna i osnovna ideja Monte Carlo metode je procjenjivanje neke vrijednosti iz generiranih slučajnih uzoraka. To ćemo ilustrirati na problemu numeričke integracije. Promatramo problem aprok-

simacije integrala  $\int_B f(x)dx$  gdje je  $B \subseteq \mathbb{R}^s$  Borelov skup takav da je  $0 < \lambda_s(B) < \infty$ , gdje  $\lambda_s$  označava  $s$ -dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru.  $B$  pretvaramo u vjerojatnosni prostor s prirodnom Borelovom  $\sigma$ -algebrom uvođenjem vjerojatnosne mjere  $\mu$  dane s  $d\mu = \frac{dx}{\lambda_s(B)}$ . Tada, za  $f \in L^1(\mu)$  imamo

$$\int_B f(x)dx = \int_B f(x)\lambda_s(B)\frac{dx}{\lambda_s(B)} = \lambda_s(B) \int_B f d\mu = \lambda_s(B)\mathbb{E}(f(X)) \quad (1.3)$$

gdje je  $X$  uniformno distribuirana slučajna varijabla na  $B$ , što se vidi iz same definicije vjerojatnosne mjere  $\mu = \frac{\lambda_s}{\lambda_s(B)}$ . Problem numeričke integracije se tako sveo na problem određivanja očekivanja slučajne varijable  $f(X)$  koju ćemo u daljnjem tekstu radi jednostavnosti zapisa označavati samo s  $f$ . Motivirani statistikom, tu ćemo vrijednost procjenjivati aritmetičkom sredinom uzorka. Ovo možemo proširiti na proizvoljan vjerojatnosni prostor.

Neka je  $f$  slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Tada se Monte Carlo procjena za očekivanje  $\mathbb{E}(f)$  dobije uzimanjem  $N$  nezavisnih  $\mathbb{P}$ -distribuiranih slučajnih uzoraka  $a_1, \dots, a_N \in \Omega$ ,

$$\mathbb{E}(f) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n). \quad (1.4)$$

Jaki zakon velikih brojeva nam kaže da će uz tako odabrane slučajne uzorke ovo konvergirati gotovo sigurno, tj.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) = \mathbb{E}(f) \quad \mathbb{P}^\infty - g.s.,$$

gdje  $\mathbb{P}^\infty$  označava prebrojivo beskonačnu produktnu mjeru od  $\mathbb{P}$ . Kako bismo mogli nešto reći o brzini konvergencije, odnosno greški u (1.4), uvodimo pojam varijance

$$\sigma^2(f) = \int_{\Omega} (f - \mathbb{E}(f))^2 d\mathbb{P},$$

što je konačno za sve  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Teorem 1.2.1.** *Neka su  $a_1, \dots, a_N$  kao u (1.4). Ako je  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , tada za sve  $N \geq 1$  imamo*

$$\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) - \mathbb{E}(f) \right)^2 d\mathbb{P}(a_1) \dots d\mathbb{P}(a_N) = \frac{\sigma^2(f)}{N}.$$

*Dokaz.* Radi jednostavnosti zapisa stavljamo  $g = f - \mathbb{E}(f)$ ; tada je  $\int_{\Omega} g d\mathbb{P} = 0$  i

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) - \mathbb{E}(f) = \frac{1}{N} \left( \sum_{n=1}^N f(a_n) - N\mathbb{E}(f) \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f(a_n) - \mathbb{E}(f)) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(a_n).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) - \mathbb{E}(f) \right)^2 d\mathbb{P}(a_1) \cdots d\mathbb{P}(a_N) \\
 &= \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(a_n) \right)^2 d\mathbb{P}(a_1) \cdots d\mathbb{P}(a_N) \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} g(a_n)^2 d\mathbb{P}(a_1) \cdots d\mathbb{P}(a_N) \\
 &+ \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq m < n \leq N} \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} g(a_m)g(a_n) d\mathbb{P}(a_1) \cdots d\mathbb{P}(a_N) \\
 &= \frac{1}{N} \int_{\Omega} g^2 d\mathbb{P} = \frac{\sigma^2(f)}{N},
 \end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti kod prve sume koristili Fubinijev teorem i jednaku distribuiranost uzoraka, a kod druge činjenicu da je  $\int_{\Omega} \int_{\Omega} g(a_m)g(a_n) d\mathbb{P}(a_n)d\mathbb{P}(a_m) = 0$ , što je jasna posljedica nezavisnosti  $a_1, \dots, a_N$ .  $\square$

Kako interpretirati ovaj teorem? Ovime smo zapravo izmjerili očekivanje srednjekvadratne greške, odnosno možemo reći da će apsolutna vrijednost greške procjene (1.4) u prosjeku biti  $\sigma(f)N^{-\frac{1}{2}}$ , gdje je  $\sigma(f) = (\sigma^2(f))^{\frac{1}{2}}$ . Daljnje informacije o greški možemo dobiti preko centralnog graničnog teorema koji kaže sljedeće: ako za slučajnu varijablu  $f$  vrijedi  $0 < \sigma(f) < \infty$  i vrijede gornji uvjeti na slučajne uzorke, tada je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{\sigma(f)c_1}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) - \mathbb{E}(f) \leq \frac{\sigma(f)c_2}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_1}^{c_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

za bilo koje konstante  $c_1 < c_2$ . Ako još primijenimo procjenu (1.4) na originalan problem aproksimacije integrala  $\int_B f(x)dx$ , tada koristeći (1.3) dobivamo Monte Carlo procjenu

$$\int_B f(x)dx = \lambda_s(B)\mathbb{E}(f) \approx \frac{\lambda_s(B)}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \tag{1.5}$$

gdje su  $x_1, \dots, x_N$   $N$  nezavisnih  $\mathbb{P}$ -distribuiranih slučajnih uzoraka iz  $B$ . Shodno gornjem računu, apsolutna greška (1.5) je u prosjeku  $\lambda_s(B)\sigma(f)N^{-\frac{1}{2}}$ . Koristeći taj rezultat ili centralni granični teorem možemo zaključiti da Monte Carlo metoda za numeričku integraciju daje vjerojatnosnu ocjenu greške oblika  $O(N^{-\frac{1}{2}})$ , gdje je  $N$  ukupan broj čvorova. Uočimo da ovdje red veličine greške uistinu ne ovisi o dimenziji  $s$ . Prisjetimo se da su klasična

pravila integracije davale ocjenu greške reda veličine  $O(N^{-\frac{2}{s}})$ . Dakle, Monte Carlo metoda je prihvatljivija od klasičnih metoda numeričke integracije za dimenzije  $s \geq 5$ .

Uočimo da (1.5) nije povoljna za izračun ako je domena  $B$  takva da je teško izračunati  $\lambda_s(B)$ . No, i tada se možemo poslužiti alternativnom Monte Carlo procjenom. Pretpostavimo da je  $B$  podskup jedinične  $s$ -dimenzionalne kocke  $I^s$ . Ako nije, odgovarajućom promjenom varijabli do toga možemo doći. Tada vrijedi

$$\int_B f(x)dx = \int_{I^s} f(x)\mathbb{1}_B(x)dx,$$

gdje je  $\mathbb{1}_B$  karakteristična funkcija skupa  $B$ . Ako procjenjujemo ovaj integral kao (1.5), dobivamo Monte Carlo procjenu

$$\int_B f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1, x_n \in B}^N f(x_n), \quad (1.6)$$

gdje su  $x_1, \dots, x_N$   $N$  nezavisnih slučajnih uzoraka iz uniformne distribucije na  $I^s$ . Dakle, ne trebamo izračunati Lebesgueovu mjeru skupa  $B$ , već možemo uzimati uzorke iz nekog 'zgodnijeg' nadskupa (u ovom slučaju  $I^s$ ) te u obzir uzimati samo one koje upadaju u našu domenu  $B$ . Kako je (1.6) dobiven iz (1.5) vrijedi ista vjerojatnosna ocjena greške  $O(N^{-\frac{1}{2}})$ .

Iz dosadašnjeg opisa imamo neku sliku o tome koji su osnovni elementi svake Monte Carlo metode. Prvo problem treba vjerojatnosno formulirati, odnosno preformulirati ga u smislu slučajnih varijabli. Kod numeričke integracije je taj korak trivijalan jer se integral jasno interpretira kao očekivanje dane slučajne varijable. Drugi važan korak je generiranje slučajnih uzoraka koji će u sebi sadržavati potrebna vjerojatnosna svojstva. Preporuča se ne stati na jednoj Monte Carlo simulaciji, već ih odvtiti više i svaki put s novim slučajnim uzorcima kako bismo statistički bili sigurniji.

Argumentirali smo da Monte Carlo metoda nudi način zaobilazjenja važnog problema u numeričkoj integraciji – kletve dimenzionalnosti. Međutim, ona nije odgovor na svaki problem. Prvo, pri numeričkoj integraciji nudi ocjenu greške koja je vjerojatnosna. Dakle, nema garancije da će greška aproksimacije uistinu biti tog reda veličine u svakom konkretnom izračunu što nam u nekim slučajevima sigurno neće odgovarati.

Uočimo također da smo ocjenu greške  $O(N^{-\frac{1}{2}})$  dobili uz "slabi" uvjet kvadratne integrabilnosti, no ne možemo dobiti ništa bolje uz neke jače uvjete. Klasična numerička matematika nas uči da su "regularnije funkcije" lakše za numerički integrirati u smislu da njihove aproksimacije brže konvergiraju. Činjenicu da Monte Carlo metoda ne daje nikakve bolje rezultate uz jače uvjete tada interpretiramo kao nedostatak.

Fundamentalni problem kojeg smo se već par puta dotakli je zahtjev da čvorovi budu nezavisni i slučajni. Automatski se nameće pitanje kako konkretno generirati nezavisne slučajne uzorke. U praksi se to izbjegava korištenjem pseudoslučajnih uzoraka, odnosno

deterministički generiranih uzoraka koji dobro “oponašaju” slučajnost. Da rezimiramo, tri glavna nedostatka Monte Carlo metode su:

- sve ocjene greške su vjerojatnosne;
- dodatna regularnost integranda ne utječe na metodu;
- teško je generirati slučajne uzorke.

U teoremu 1.2.1 smo pokazali da je srednjekvadratna greška Monte Carlo metode  $\frac{\sigma^2(f)}{N}$ . Taj izraz možemo smanjiti na dva načina: povećanjem broja čvorova  $N$  ili smanjenjem varijance  $\sigma^2(f)$ . To nas vodi do iduće klasične teme koja se veže uz Monte Carlo metodu – redukcije varijance. Jedna od metoda koja nam u tome može poslužiti je **stratificirano (slojevito) uzorkovanje**.

Neka je  $f$  slučajna varijabla na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Partitionirajmo  $\Omega$  na disjunktne  $\Omega_1, \dots, \Omega_k \subseteq \Omega$  takve da je  $\lambda(\Omega_j) > 0$  za sve  $1 \leq j \leq k$ ,  $\cup_{j=1}^k \Omega_j = \Omega$ . Za svaki  $j$  iz  $1 \leq j \leq k$  odaberemo  $N_j$  slučajnih  $\mu_j$ -distribuiranih slučajnih uzoraka  $a_1^{(j)}, \dots, a_{N_j}^{(j)} \in \Omega_j$  gdje je  $\mu_j = \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}(\Omega_j)}$  vjerojatnost na  $\Omega_j$  inducirana mjerom  $\mathbb{P}$ . Uočimo da je

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{j=1}^k \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\Omega_j) \int_{\Omega_j} f d\mu_j \approx \sum_{j=1}^k \frac{\mathbb{P}(\Omega_j)}{N_j} \sum_{n=1}^{N_j} f(a_n^{(j)}).$$

Srednjekvadratna greška se može izračunati slično kao u teoremu 1.2.1 i umjesto  $\frac{\sigma^2(f)}{N}$  se dobije izraz

$$\sum_{j=1}^k \frac{\mathbb{P}(\Omega_j)}{N_j} \int_{\Omega_j} \left( f - \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 d\mathbb{P}.$$

Brojevi  $N_j$  se moraju birati na način da se postigne redukcija varijance. Neka je  $N = \sum_{j=1}^k N_j$  ukupan broj točaka u uzorku. Tada odabir  $N_j$  iz iskaza iduće propozicije postiže redukciju varijance.

**Propozicija 1.2.2.** *Ako su brojevi  $N_j = \mathbb{P}(\Omega_j)N$ ,  $1 \leq j \leq k$  cijeli brojevi, tada vrijedi*

$$\sum_{j=1}^k \frac{\mathbb{P}(\Omega_j)}{N_j} \int_{\Omega_j} \left( f - \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 d\mathbb{P} \leq \frac{\sigma^2(f)}{N}$$

*Dokaz.* Pošto je  $N_j = \mathbb{P}(\Omega_j)N$ , dovoljno je pokazati

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Omega_j} \left( f - \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} (f - \mathbb{E}(f))^2 d\mathbb{P}.$$

Kad se raspišu kvadrati s lijeve i desne strane, dobije se

$$\mathbb{E}(f^2) - 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} f \left( \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right) d\mathbb{P} + \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j^2)} \int_{\Omega_j} \left( \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}(f^2) - \mathbb{E}(f)^2$$

što se pojednostavni u

$$\mathbb{E}(f^2) - 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \left( \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \left( \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 \leq \mathbb{E}(f^2) - \mathbb{E}(f)^2.$$

Dakle, početna nejednakost je ekvivalentna s

$$\mathbb{E}(f)^2 \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \left( \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2.$$

Ova nejednakost je posljedica Cauchy-Schwarz nejednakosti jer je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f)^2 &= \left( \sum_{j=1}^k \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 = \left( \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\Omega_j)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\Omega_j) \right) \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \left( \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2 = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_j)} \left( \int_{\Omega_j} f d\mathbb{P} \right)^2. \end{aligned}$$

□

Pri redukciji varijance se možemo koristiti i **metodom antitetičkih varijabli**. Objasniti ćemo ju na jednostavnom primjeru

$$\mathbb{E}(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Definiramo pomoćnu funkciju

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(1-x)) \quad (1.7)$$

za  $0 \leq x \leq 1$  i koristimo procjenu

$$\mathbb{E}(f) = \mathbb{E}(g) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n) = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N (f(x_n) + f(1-x_n))$$

s  $N$  nezavisnih i uniformno distribuiranih slučajnih uzoraka  $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]$ . Po teoremu 1.2.1 srednjekvadratna greška ove procjene je  $\frac{\sigma^2(g)}{N}$ . Pošto smo u ovoj procjeni funkciju  $f$  izvrjednili  $2N$  puta, srednjekvadratnu grešku  $\frac{\sigma^2(g)}{N}$  treba usporediti s  $\frac{\sigma^2(f)}{2N}$ . Sljedeći rezultat nam daje slučaj u kojem je varijanca reducirana.

**Propozicija 1.2.3.** *Ako je  $f$  neprekidna monotona funkcija na  $[0, 1]$  i  $g$  definirana s (1.7), tada vrijedi*

$$\sigma^2(g) \leq \frac{1}{2}\sigma^2(f)$$

*Dokaz.* Imamo

$$\begin{aligned} \sigma^2(g) &= \int_0^1 (g(x) - \mathbb{E}(g))^2 dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(1-x) - \mathbb{E}(f) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{4} \int_0^1 f^2(1-x) dx + \mathbb{E}(f)^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)f(1-x) dx - 2\mathbb{E}(f)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)f(1-x) dx - \mathbb{E}(f)^2. \end{aligned}$$

Tražena nejednakost je stoga ekvivalentna s

$$\int_0^1 f(x)f(1-x) dx \leq \mathbb{E}(f)^2.$$

Možemo pretpostaviti da je  $f$  rastuća (ako nije stavimo  $-f$  umjesto  $f$ ). Tada funkcija

$$F(x) = \int_0^x f(1-t) dt - \mathbb{E}(f)x$$

na  $[0, 1]$  ima padajuću derivaciju  $F'(x) = f(1-x) - \mathbb{E}(f)$ . Pošto je  $F(0) = F(1) = 0$  slijedi da je  $F(x) \geq 0$  za sve  $x \in [0, 1]$ . To implicira

$$\int_0^1 F(x) df(x) \geq 0.$$

Slijedi da je

$$\int_0^1 f(x) dF(x) = \int_0^1 f(x) F'(x) dx = \int_0^1 f(x) (f(1-x) - \mathbb{E}(f)) dx$$



$$= \int_0^1 f(x)f(1-x)dx - \mathbb{E}(f) \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)f(1-x)dx - \mathbb{E}(f)^2.$$

Po formuli za parcijalnu integraciju vrijedi

$$0 \leq \int_0^1 F(x)df(x) = F(1)f(1) - F(0)f(0) - \int_0^1 f(x)dF(x) = - \int_0^1 f(x)dF(x)$$

to jest,

$$\int_0^1 f(x)dF(x) = \int_0^1 f(x)f(1-x)dx - \mathbb{E}(f)^2 \leq 0$$

što je nejednakost koju smo htjeli dokazati.  $\square$

Za kraj ćemo napomenuti da se pri redukciji varijance možemo poslužiti i **uvjetovanjem**, odnosno uvjetnim očekivanjem. Prisjetimo se dvije jednostavne formule za proizvoljne slučajne varijable  $X$  i  $Z$ :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)), \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}(\text{Var}(X|Z)) + \text{Var}(\mathbb{E}(X|Z)).$$

Kako je  $\text{Var}(X|Z)$  nenegativna, njeno očekivanje je nenegativno pa jasno vrijedi

$$\text{Var}(\mathbb{E}(X|Z)) \leq \text{Var}(X).$$

Redukcija varijance je postignuta, a ova je metoda pogodna ukoliko imamo neki način izračuna  $\mathbb{E}(X|Z)$ .

### 1.3 Uvod u kvazi Monte Carlo metodu

Kod Monte Carlo metode s  $N$  slučajnih čvorova apsolutna greška je u prosjeku reda veličine  $N^{-\frac{1}{2}}$ . Očito, postoji  $N$  čvorova kod kojih apsolutna greška nije veća od one u prosjeku. Kvazi Monte Carlo metoda traži čvorove koji će davati znatno bolje rezultate od prosjeka. Integracijska pravila za kvazi Monte Carlo metodu uzimamo iz Monte Carlo procjene. Na primjer, na normaliziranoj integracijskoj domeni  $I^s$  imamo kvazi Monte Carlo aproksimaciju

$$\int_{I^s} f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \tag{1.8}$$

što izgleda isto kao Monte Carlo aproksimacija, ali sada imamo determinističke čvorove  $x_1, \dots, x_N \in I^s$ . Ti čvorovi bi trebali biti birani tako da garantiraju malu pogrešku u (1.8). Analogno prijašnjoj diskusiji kod Monte Carla, za općenitiju aproksimaciju imamo

$$\int_B f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1, x_n \in B}^N f(x_n), \tag{1.9}$$

gdje je  $B \subseteq I^s$  te su  $x_1, \dots, x_N \in I^s$  determinističke točke.

U idućim ćemo poglavljima dati analizu greške u (1.8) i (1.9) te ćemo dati eksplisicne konstrukcije determinističkih čvorova koji će garantirati male greške. Ako pretpostavimo (1.8) za standardan slučaj, Monte Carlo greška je vjerojatnosna, reda veličine  $O(N^{-\frac{1}{2}})$ . Kvazi Monte Carlo metoda će davati puno bolji rezultat, determinističku grešku  $O(N^{-1}(\log N)^{s-1})$  za dobro izabrane čvorove. Uočimo, uz pomoć L'Hopitalovog pravila

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{-1}(\log N)^{s-1}}{N^{-\frac{1}{2}}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\log N)^{s-1}}{N^{\frac{1}{2}}} = (L'H) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2(s-1)N^{-1}(\log N)^{s-2}}{N^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{-1}2^{s-1}(s-1)!}{N^{\frac{1}{2}}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2^{s-1}s!}{N^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{za svaki } s \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Razmislimo sada o prednostima kvazi Monte Carlo metode u odnosu na Monte Carlo. Prva i očita slijedi iz determinističke prirode metode, dobivamo determinističku i garantiranu ocjenu greške. Nadalje, uz korištenje istih računskih resursa (računanja funkcijskih vrijednosti) pokazat ćemo da kvazi Monte Carlo metoda daje bolju preciznost nego Monte Carlo metoda. Dakle, u dva bitna aspekta, determinizmu i preciznosti je kvazi Monte Carlo metoda superiornija.

Pokazat ćemo da kvazi Monte Carlo daje grešku  $O(N^{-1}(\log N)^{s-1})$ . Teoretski, kako bi kvazi Monte Carlo metoda bila efektivnija od Monte Carlo metode, broj dimenzija  $s$  treba biti malen, a broj čvorova  $N$  velik. Međutim, empirijski se pokazalo da kvazi Monte Carlo metoda daje bolje rezultate od Monte Carlo metode čak i u slučaju gdje je  $s$  velik broj. Klasična primjena kvazi Monte Carlo metode je u financijama, gdje se računaju integrali koji se često sastoje od stotina i tisuća varijabli. Iako je to i dalje otvoren problem, jedno od danih objašnjenja za veću efektivnost kvazi Monte Carlo metode od Monte Carlo metode u financijama jest da se u financijama budući novčani tokovi diskontiraju (vidi [4]). Drugim riječima, što je buduća isplata vremenski dalja to je manji njen utjecaj pa je kod integracije manja važnost viših dimenzija. Neke nedostatke kvazi Monte Carlo metode ćemo opisati nakon što rigorozno damo način na koji ćemo birati čvorove.

## Poglavlje 2

# Kvazi Monte Carlo metoda za numeričku integraciju

Ključna ideja kvazi Monte Carlo metode je zamijeniti slučajne uzorke dobro odabranim determinističkim. Kriterij odabira točaka kod numeričke integracije bit će diskrepancija, koju možemo shvatiti kao kvantitativnu mjeru odstupanja nekog niza od uniformne distribucije. Definirat ćemo i dati svojstva nekoliko vrsta diskrepancija i proučiti njihovu ulogu u kvazi Monte Carlo integraciji. Također ćemo uvesti pojam uniformno distribuiranog niza koji se prirodno veže uz ovu problematiku. Nakon toga ćemo jasno pokazati vezu diskrepancije i greške pri kvazi Monte Carlo metodi te dati neke osnovne konstrukcije nizova niske diskrepancije koji će nam služiti kao čvorovi i garantirati malu grešku numeričke integracije.

### 2.1 Diskrepancija

Zadržat ćemo se na integracijskoj domeni  $I^s = [0, 1]^s$ , zatvorenoj  $s$ -dimenzionalnoj kocki ( $s \geq 1$ ). Za integrand  $f$ , koristimo kvazi Monte Carlo aproksimaciju

$$\int_{I^s} f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \quad (2.1)$$

uz  $x_1, \dots, x_N \in I^s$ . Kako bismo to lakše matematički opisali, niz čvorova  $x_1, \dots, x_N \in I^s$  ćemo zamijeniti beskonačnim nizom  $x_1, x_2, \dots \in I^s$ . Osnovni zahtjev na ovaj niz je da daje konvergentnu metodu na (2.1). Dakle, želimo niz  $x_1, x_2, \dots \in I^s$  za koji će vrijediti

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_{I^s} f(x) dx \quad (2.2)$$

za neku razumnu klasu funkcija  $f$ , na primjer za sve neprekidne  $f$  na  $I^s$ . Po standardnoj definiciji tog pojma, to će značiti da je niz  $x_1, x_2, \dots \in I^s$  **uniformno distribuiran**. Ekvivalentna definicija kaže da je  $x_1, x_2, \dots \in I^s$  uniformno distribuiran ako je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_J(x_n) = \lambda_s(J) \quad (2.3)$$

za sve podintervale  $J$  iz  $I^s$ , gdje je  $\mathbb{1}_J$  karakteristična funkcija od  $J$  i  $\lambda_s(J)$   $s$ -dimenzionalna Lebesgueova mjera. Mi ćemo se zadržati na prvoj definiciji koja nam je za ovaj rad prirodnija. Ona nam sugerira da su čvorovi koji bi nam odgovarali u (2.1) oni čija je empirijska distribucija slična onoj uniformne (vjerojatnosne) distribucije na  $I^s$ , odnosno intuitivno želimo da nam čvorovi budu “jednako” (uniformno, ekvidistantno) razdijeljeni duž  $I^s$ . Naime,

$\int_{I^s} f(x) dx = \int_{I^s} f(x) \frac{1}{1-0} dx = \mathbb{E}(f(X))$ , za  $X \sim Unif(0, 1)$ , pošto je  $x \mapsto \frac{1}{1-0}$ ,  $x \in [0, 1]$  funkcija gustoće uniformne distribucije na  $[0, 1]$ .

Razni pojmovi diskrepancije koje ćemo uvesti su kvantitativne mjere za devijaciju od uniformne distribucije. Kasnije će nam pojam diskrepancije postati od velike važnosti jer ćemo pokazati da je ocjena greške pri kvazi Monte Carlo aproksimaciji direktno vezana uz diskrepanciju čvorova.

Valja napomenuti i kako se pojmovi diskrepancije i uniformno distribuiranog niza mogu definirati i na općenitijim domenama od  $I^s$ , na primjer na  $\mathbb{R}^s$ . Tada se ti brojevi/vektori promatraju modulo 1 (ako su vektori po koordinatama) i za niz onda kažemo da je uniformno distribuiran modulo 1. I tada postoje slične ocjene za diskrepanciju kao one koje ćemo uskoro iskazati i dokazati.

Neka je  $P$  skup točaka koji se sastoji od  $x_1, \dots, x_N \in I^s$ .  $P$  možemo shvatiti kao multiskup, bitno nam je ponavljaju li se točke više puta. Za proizvoljan  $B \subseteq I^s$  definiramo

$$A(B; P) = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_B(x_n)$$

Riječima,  $A(B; P)$  je brojeća funkcija koja nam kaže koliko se točaka iz skupa točaka  $P$  nalazi u skupu  $B$ . U literaturi se često koristi i oznaka  $A(B, N, x_n)$ . Ako je  $\mathcal{B}$  neprazna familija Lebesgue-izmjerivih podskupova od  $I^s$ , općeniti pojam diskrepancije je dan s

$$D_N(\mathcal{B}; P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \frac{A(B; P)}{N} - \lambda_s(B) \right|. \quad (2.4)$$

Uočimo da uvijek vrijedi  $0 \leq D_N(\mathcal{B}; P) \leq 1$ . Donja međa je jasna, a gornja slijedi jer oduzimamo dva pozitivna broja manja ili jednaka 1. Ovisno o tome kakvu familiju  $\mathcal{B}$  odaberemo, dobivamo različite koncepte (i definicije) diskrepancije.

**Definicija 2.1.1.** Z-diskrepancija  $D_N^*(P) = D_N^*(x_1, \dots, x_N)$  skupa točaka  $P$  je definirana s  $D_N^*(P) = D_N(\mathcal{J}^*; P)$ , gdje je  $\mathcal{J}^*$  familija svih podintervala od  $[0, 1]^s$  oblika  $\prod_{i=1}^s [0, u_i]$ .

**Definicija 2.1.2.** (Ekstremna) diskrepancija  $D_N(P) = D_N(x_1, \dots, x_N)$  skupa točaka  $P$  je definirana s  $D_N(P) = D_N(\mathcal{J}; P)$ , gdje je  $\mathcal{J}$  familija svih podintervala od  $[0, 1]^s$  oblika  $\prod_{i=1}^s [u_i, v_i]$ .

**Napomena 2.1.1.** Ako su točke od  $P$  unutar  $I^s$ , a u praksi većinom jesu, tada je  $D_N^*(P) = D_N(\mathcal{J}_c^*; P)$  i  $D_N(P) = D_N(\mathcal{J}_c; P)$ , gdje je  $\mathcal{J}_c^*$  familija svih podintervala  $I^s$  oblika  $\prod_{i=1}^s [0, u_i]$ , a  $\mathcal{J}_c$  familija svih zatvorenih podintervala od  $I^s$ .

Z-diskrepancija se može interpretirati i kao supremum (ili  $L^\infty$ ) norma funkcije

$$g(y) = \frac{A([0, y]; P)}{N} - \lambda_s([0, y]).$$

Stoga, na prirodan način možemo definirati i  $L^p$ -diskrepanciju za  $0 < p < \infty$  kao

$$D_N^{(p)}(x_n) = \left( \int_{I^s} \left| \frac{A([0, y]; P)}{N} - \lambda_s([0, y]) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Sada ćemo dati neke odnose između najbitnijih vrsta diskrepancije.

**Propozicija 2.1.2.** Za svaki skup  $P$  kojeg čine točke iz  $I^s$  vrijedi

$$D_N^*(P) \leq D_N(P) \leq 2^s D_N^*(P).$$

*Dokaz.* Prva nejednakost je očita iz same definicije ( $\mathcal{J}^* \subseteq \mathcal{J}$ ). Za  $s = 1$  druga nejednakost slijedi iz

$$A([u, v]; P) = A([0, v]; P) - A([0, u]; P), \quad \lambda_1([u, v]) = \lambda_1([0, v]) - \lambda_1([0, u]);$$

$$\left| \frac{A([u, v]; P)}{N} - \lambda_s([u, v]) \right| = \left| \left( \frac{A([0, v])}{N} - \lambda_s([0, v]) \right) - \left( \frac{A([0, u])}{N} - \lambda_s([0, u]) \right) \right| \leq$$

$$\left| \frac{A([0, v])}{N} - \lambda_s([0, v]) \right| + \left| \frac{A([0, u])}{N} - \lambda_s([0, u]) \right| \leq D_N^*(P) + D_N^*(P),$$

dok za  $s \geq 2$  rezultat slijedi iz analognih nejednakosti. □

Pokažimo da su  $D_N^*$  i  $D_N$  neprekidne funkcije točaka iz  $P$ .

**Lema 2.1.3.** Ako su  $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N \in [0, 1]$  takve da je  $|x_n - y_n| \leq \epsilon$  za  $1 \leq n \leq N$ , tada vrijedi

$$|D_N^*(x_1, \dots, x_N) - D_N^*(y_1, \dots, y_N)| \leq \epsilon,$$

$$|D_N(x_1, \dots, x_N) - D_N(y_1, \dots, y_N)| \leq 2\epsilon.$$

*Dokaz.* Neka se  $P$  sastoji od  $x_1, \dots, x_N$  i  $Q$  od  $y_1, \dots, y_N$ . Neka je  $J$  proizvoljan interval oblika  $[0, u] \subseteq [0, 1]$ . Kada je  $y_n \in J$ , tada je  $x_n \in J_1 := [0, u + \epsilon) \cap [0, 1]$ ; stoga vrijedi

$$\frac{A(J; Q)}{N} - \lambda_1(J) \leq \frac{A(J_1; Q)}{N} - \lambda_1(J_1) + \epsilon \leq D_N^*(P) + \epsilon$$

Kada je  $x_n \in J_2 = [0, u - \epsilon)$ , tada je  $y_n \in J$ ; stoga vrijedi

$$\frac{A(J; Q)}{N} - \lambda_1(J) \geq \frac{A(J_2; Q)}{N} - \lambda_1(J_2) - \epsilon \geq -D_N^*(P) - \epsilon.$$

Slijedi  $D_N^*(Q) \leq D_N^*(P) + \epsilon$ . Zamjenom uloga  $P$  i  $Q$ , dobivamo  $D_N^*(P) \leq D_N^*(Q) + \epsilon$  pa je  $|D_N^*(P) - D_N^*(Q)| \leq \epsilon$ . Drugi dio leme se pokaže slično.  $\square$

Kad je  $s = 1$ , točke  $x_1, \dots, x_N$  možemo jednostavno poredati u rastućem (neopadajućem) poretku. Tada vrijede iduća dva bitna rezultata koji nam daju način kako relativno jednostavno izračunati diskrepanciju.

**Teorem 2.1.4.** (*Niederreiter*) *Ako je  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq 1$ , tada vrijedi*

$$D_N^*(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2N} + \max_{1 \leq n \leq N} \left| x_n - \frac{2n-1}{2N} \right|.$$

*Dokaz.* Pošto je  $D_N^*$  neprekidna funkcija po  $x_1, \dots, x_N$  možemo pretpostaviti stroge nejednakosti  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < 1$ . Radi zapisa stavimo  $x_0 = 0$  i  $x_{N+1} = 1$ . Ako je  $P$  skup točaka sastavljen od  $x_1, \dots, x_N$ , vrijedi

$$\begin{aligned} D_N^*(P) &= \max_{0 \leq n \leq N} \sup_{x_n < u \leq x_{n+1}} \left| \frac{A([0, u]; P)}{N} - u \right| = \max_{0 \leq n \leq N} \sup_{x_n < u \leq x_{n+1}} \left| \frac{n}{N} - u \right| \\ &= \max_{0 \leq n \leq N} \max \left( \left| \frac{n}{N} - x_n \right|, \left| \frac{n}{N} - x_{n+1} \right| \right) = \max_{1 \leq n \leq N} \max \left( \left| \frac{n}{N} - x_n \right|, \left| \frac{n-1}{N} - x_n \right| \right) \\ &= \frac{1}{2N} + \max_{1 \leq n \leq N} \left| x_n - \frac{2n-1}{2N} \right|. \end{aligned}$$

$\square$

**Teorem 2.1.5.** (*de Clerck*) *Ako je  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq 1$ , tada vrijedi*

$$D_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} + \max_{1 \leq n \leq N} \left( \frac{n}{N} - x_n \right) - \min_{1 \leq n \leq N} \left( \frac{n}{N} - x_n \right).$$

*Dokaz.* Kao i u prošlom teoremu, pretpostavljamo  $x_0 := 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < 1 = x_{N+1}$ . Ako je  $P$  skup točaka sastavljen od  $x_1, \dots, x_N$ , vrijedi

$$\begin{aligned} D_N(P) &= \max_{0 \leq i \leq j \leq N} \sup_{x_i < u \leq x_{i+1}, x_j < v \leq x_{j+1}, u < v} \left| \frac{A([u, v]; P)}{N} - (v - u) \right| \\ &= \max_{0 \leq i \leq j \leq N} \sup_{x_i < u \leq x_{i+1}, x_j < v \leq x_{j+1}, u < v} \left| \frac{j - i}{N} - (v - u) \right| \\ &= \max_{0 \leq i \leq j \leq N} \max \left( \left| \frac{j - i}{N} - (x_{j+1} - x_i) \right|, \left| \frac{j - i}{N} - (x_j - x_{i+1}) \right| \right) \end{aligned}$$

Radi jednostavnosti stavimo  $r_n = \frac{n}{N} - x_n$  za  $0 \leq n \leq N + 1$ ; tada

$$D_N(P) = \max_{0 \leq i \leq j \leq N} \max \left( \left| r_{j+1} - r_i - \frac{1}{N} \right|, \left| r_j - r_{i+1} + \frac{1}{N} \right| \right) = \max_{0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N+1} \left| \frac{1}{N} + r_i - r_j \right|.$$

Ako zadnji maksimum restringiramo na  $1 \leq i, j \leq N$ , tada je njegova vrijednost dana izrazom  $D_N(P)$  iz iskaza teorema. Iskoristimo li

$$\max_{1 \leq n \leq N} r_n \geq r_N \geq 0, \quad \min_{1 \leq n \leq N} r_n \leq r_1 \leq \frac{1}{N}$$

vidimo da su u zadnjem izrazu za  $D_N(P)$  brojevi u maksimumu za  $i = 0$  ili  $j = N + 1$  strogo dominirani izrazom za  $D_N(P)$  iz iskaza teorema.  $\square$

Uočimo da nam ova dva teorema daju i donju među za diskrepanciju (po veličini poređanog jednodimenzionalnog niza), točnije  $D_N^*(P) \geq \frac{1}{2N}$  i  $D_N(P) \geq \frac{1}{N}$ , za svaki  $P$ . Uočimo također da je definicija diskrepancije uzimala supremum nad beskonačno mnogo intervala što je nemoguće izvesti u računalu dok nam ova dva teorema daju način izračuna diskrepancije u konačno mnogo koraka.

Za niz  $S$  elemenata iz  $I^s$  pišemo  $D_N(S)$  za diskrepanciju i  $D_N^*(S)$  za Z-diskrepanciju prvih  $N$  članova tog niza. Klasičan rezultat teorije uniformno distribuiranih nizova (dat ćemo ga bez dokaza) je da su iduća svojstva ekvivalentna:

- $S$  je uniformno distribuiran u  $I^s$ ;
- $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(S) = 0$ ;
- $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N^*(S) = 0$ .

U tom smislu, diskrepancija i Z-diskrepancija su kvantitativni načini definiranja uniformno distribuiranog niza na  $I^s$ . Za općenitije domene integriranja od  $I^s$  trebamo uvesti druge tipove diskrepancije. Idući pojam je najpovoljniji za rad s proizvoljnim konveksnim skupovima umjesto intervalima.

**Definicija 2.1.3.** Izotropna diskrepancija  $J_N(P) = J_N(x_1, \dots, x_N)$  niza točaka  $P$  je definirana s  $J_N(P) = D_N(C; P)$ , gdje je  $C$  familija svih konveksnih podskupa od  $I^s$ .

Vrijedi idući rezultat koji dajemo bez dokaza (može ga se pronaći u [7]).

**Teorem 2.1.6.** (Niederreiter) Za svaki skup  $P$  koji čine točke iz  $I^s$  vrijedi

$$D_N(P) \leq J_N(P) \leq 4sD_N(P)^{\frac{1}{s}}$$

Kombinacijom ovog teorema i gornje karakterizacije uniformno distribuiranih nizova odmah vidimo da vrijedi iduća ekvivalencija:  $S$  je uniformno distribuiran na  $I^s$  ako i samo ako je  $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(S) = 0$ , gdje je  $J_N(S)$  izotropna diskrepancija prvih  $N$  članova niza  $S$ .

Sad kad imamo neke rezultate vezane uz diskrepanciju, možemo preći na analizu greške kvazi Monte Carlo metode za numeričku integraciju.

## 2.2 Ocjene greške kvazi Monte Carlo metode

U ovom ćemo poglavlju dati najvažnije ocjene greške za kvazi Monte Carlo aproksimaciju (2.1), a dat ćemo i analogne ocjene za nešto općenitije domene integracije. Za sve te ocjene će nam biti važan pojam diskrepancije obrađen u prošlom poglavlju. Krenut ćemo s jednodimenzionalnim slučajevima u kojima su dokazi nešto jednostavniji. Prisjetimo se prvo pojma varijacije funkcije. Neka je  $\Pi = \{a_0 < a_1 < \dots < a_k\}$  neka subdivizija intervala  $[0, 1]$ . Varijaciju (prvog reda) funkcije  $f$ , u oznaci  $V(f)$ , klasično definiramo na sljedeći način:

$$V(f) = \sup_{\Pi} \sum_{j=0}^{k-1} |f(a_{j+1}) - f(a_j)|,$$

gdje supremum uzimamo po svim subdivizijama  $\Pi$  segmenta  $[0, 1]$ . Ovime smo definirali varijaciju funkcije na segmentu  $[0, 1]$ , a pojam se analogno može redefinirati za općenitije domene.

**Teorem 2.2.1.** (Koksma) Ako je  $f$  ograničene varijacije  $V(f)$  na  $[0, 1]$ , tada za svake  $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]$  vrijedi

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq V(f) D_N^*(x_1, \dots, x_N).$$

*Dokaz.* Možemo pretpostaviti  $x_1 \leq \dots \leq x_N$ . Stavimo  $x_0 = 0$  i  $x_{N+1} = 1$ . Uočimo da je

$$f(1) = f(x_{N+1}) = \sum_{n=0}^N \frac{n}{N} f(x_{n+1}) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{N} f(x_{n+1}) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{n}{N} f(x_{n+1}) - \frac{n-1}{N} f(x_n) \right)$$



$$= \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{N} f(x_n) + \frac{n}{N} f(x_{n+1}) - \frac{n}{N} f(x_n) \right)$$

Također, iz formule za parcijalnu integraciju jasno slijedi

$$\int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 x df(x)$$

pa kombinacijom te dvije jednačbe imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_0^1 f(x) dx &= - \sum_{n=0}^N \frac{n}{N} (f(x_{n+1}) - f(x_n)) + \int_0^1 x df(x) \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( u - \frac{n}{N} \right) df(x) \leq D_N^*(x_1, \dots, x_N) \sum_{n=0}^N \int_{x_n}^{x_{n+1}} df(x) \leq V(f) D_N^*(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Zadnju nejednakost smo dobili jer za fiksni  $n$  iz  $0 \leq n \leq N$  po teoremu 2.1.4 imamo

$$\left| u - \frac{n}{N} \right| \leq D_N^*(x_1, \dots, x_N), \quad x_n \leq u \leq x_{n+1}.$$

□

Kasnije ćemo pokazati da je Koksmina nejednakost zapravo najbolja moguća, čak i za funkcije klase  $C^\infty$ . Sada ćemo se prisjetiti pojma modula neprekidnosti pomoću kojeg ćemo dati još jedan rezultat. Za neprekidnu funkciju  $f$  na  $[0, 1]$  njen modul neprekidnosti je definiran s

$$\omega(f; t) = \sup_{u, v \in [0, 1], |u-v| \leq t} |f(u) - f(v)|, \quad \text{za svaki } t \geq 0.$$

Uočimo da je za  $s \leq t$  i  $\omega(f; s) \leq \omega(f; t)$ , budući da se uzima supremum razlika nad manjim skupom točaka. Iz tog razloga slijedi funkcionalnost idućeg teorema: smanjivanjem diskrepancije se smanjuje i modul neprekidnosti, a njime i greška.

**Teorem 2.2.2.** (Niederreiter) *Ako je funkcija  $f$  neprekidna na  $[0, 1]$ , tada za sve  $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]$  vrijedi*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \omega(f; D_N^*(x_1, \dots, x_N)).$$

*Dokaz.* Ponovno možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti  $x_1 \leq \dots \leq x_N$ . Po teoremu srednje vrijednosti (za integrale) imamo

$$\int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} f(x) dx = f(t_n) \left( \frac{n}{N} - \frac{n-1}{N} \right) = \frac{1}{N} f(t_n)$$

za neki  $\frac{n-1}{N} < t_n < \frac{n}{N}$  pa slijedi

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} f(x)dx = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(t_n).$$

Nadalje,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f(x_n) - f(t_n)).$$

Sada po teoremu 2.1.4 vrijedi  $|x_n - t_n| \leq D_N^*(x_1, \dots, x_N)$ . Tvrdnja odmah slijedi iz definicije modula neprekidnosti  $\omega$ .  $\square$

Koksminu nejednakost možemo proširiti i na višedimenzionalan slučaj, s tim da trebamo uvesti odgovarajući pojam varijacije funkcije više varijabli. Za funkciju  $f$  na  $I^s$  i podinterval  $J$  od  $I^s$ , neka je  $\Delta(f; J)$  alternirajuća suma vrijednosti funkcije  $f$  na vrhovima od  $J$  (funkcijskim vrijednostima susjednih vrhova dajemo suprotan predznak). Varijaciju funkcije  $f$  na  $I^s$  u smislu Vitalija definiramo s

$$V^{(s)}(f) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{J \in \mathcal{P}} |\Delta(f; J)|,$$

gdje uzimamo supremum po svim particijama  $\mathcal{P}$  od  $I^s$  u podintervale. Nešto zgodnija formula nam je

$$V^{(s)}(f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \frac{\partial^s f}{\partial u_1 \dots \partial u_s} \right| du_1 \dots du_s$$

koja je točna dokle god je dana parcijalna derivacija neprekidna na  $I^s$ . Za  $1 \leq k \leq s$  i  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s$ , neka je  $V^{(k)}(f; i_1, \dots, i_k)$  varijacija u smislu Vitalija restrikcije funkcije  $f$  na  $k$ -dimenzionalni potprostor  $\{(u_1, \dots, u_k) \in I^s : u_j = 1, j \neq i_1, \dots, i_k\}$ . Tada se

$$V(f) = \sum_{k=1}^s \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} V^{(k)}(f; i_1, \dots, i_k)$$

naziva **varijacija funkcije  $f$  na  $I^s$  u smislu Hardyja i Krausa**, a  $f$  je ograničene varijacije ako je  $V(f) < \infty$ . Uz ovakav pojam varijacije, imamo iduću nejednakost koju je dokazao Hlawka, a često se naziva Koksma-Hlawkinom nejednakosti.

**Teorem 2.2.3.** (Koksma-Hlawkina nejednakost) *Ako je funkcija  $f$  ograničene varijacije  $V(f)$  na  $I^s$  u smislu Hardyja i Krausa, tada za sve  $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]^s$  imamo*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{I^s} f(x)dx \right| \leq V(f) D_N^*(x_1, \dots, x_N).$$

Ovo je generalizacija Koksminine nejednakosti iz jedne dimenzije i nećemo ju dokazati, no zato ćemo dokazati rezultat koji nam kaže da je ta nejednakost ujedno i najbolja moguća.

**Teorem 2.2.4.** *Za svake  $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]^s$  i svaki  $\epsilon > 0$ , postoji funkcija  $f \in C^\infty(I^s)$  čija je varijacija  $V(f) = 1$  i*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{I^s} f(x) dx \right| > D_N^*(x_1, \dots, x_N) - \epsilon.$$

*Dokaz.* Po definiciji  $D_N^*(P) = D_N^*(x_1, \dots, x_N)$ , postoji interval  $J = \prod_{i=1}^s [0, v_i]$  s  $0 < v_i \leq 1$  za  $1 \leq i \leq s$  i

$$\left| \frac{A(J; P)}{N} - \lambda_s(J) \right| > D_N^*(P) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Nadalje, postoji interval  $K = \prod_{i=1}^s [0, t_i]$  s  $0 \leq t_i < v_i$  i  $v_i - t_i < \frac{\epsilon}{2s}$  takav da  $J \setminus K$  ne sadrži niti jedan  $x_n$ . Za bilo koje  $0 \leq t < v \leq 1$  možemo konstruirati opadajuću (nerastuću) funkciju  $f_{t,v} \in C^\infty([0, 1])$  s  $f_{t,v}(u) = 1$  za  $0 \leq u \leq t$  i  $f_{t,v}(u) = 0$  za  $v \leq u \leq 1$ . Tada je

$$f(u) = f(u_1, \dots, u_s) = \prod_{i=1}^s f_{t_i, v_i}(u_i)$$

funkcija iz  $C^\infty(I^s)$  s  $0 \leq f(u) \leq 1$  za sve  $u \in I^s$ ,  $f(u) = 1$  za  $u \in K$  i  $f(u) = 0$  za sve  $u \notin J$ . Iz definicije dobijemo  $V^{(s)}(f) = 1$ . Pošto je  $f(u) = 0$  kad god je neka od koordinati  $u$  jednaka 1, imamo  $V^{(k)}(f; i_1, \dots, i_k) = 0$  kad god je  $1 \leq k < s$ . Ukupno, imamo  $V(f) = 1$ . Jasno je da vrijedi

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \frac{A(J; P)}{N}$$

i da je

$$\lambda_s(K) \leq \int_{I^s} f(x) dx \leq \lambda_s(J).$$

Pošto je  $\lambda_s(J) - \lambda_s(K) \leq \sum_{i=1}^s (v_i - t_i) < \frac{\epsilon}{2}$ , slijedi da je

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{I^s} f(x) dx \right| > \left| \frac{A(J; P)}{N} - \lambda_s(J) \right| - \frac{\epsilon}{2} > D_N^*(P) - \epsilon.$$

□

Postoji i višedimenzionalno poopćenje modula neprekidnosti, gdje se apsolutna vrijednost mijenja normom. Tada se teorem 2.2.2 također može poopćiti.

**Teorem 2.2.5.** *Ako je  $f$  neprekidna funkcija na  $I^s$ , tada za sve  $x_1, \dots, x_N \in I^s$  vrijedi*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{I^s} f(x) dx \right| \leq 4\omega(f; D_N^*(x_1, \dots, x_N))^{\frac{1}{s}}.$$

Svi ovi teoremi vode prema istom zaključku. Skupovi (nizovi) točaka s malom diskrepancijom garantiraju male greške kvazi Monte Carlo metode integracije nad  $I^s$ . U idućem ćemo poglavlju opisati konstrukcije nekih takvih skupova. Sad ćemo samo navesti još dva rezultata za nešto općenitije domene integracije. Translacijom i/li kontrakcijom svaku ograničenu integracijsku domenu  $B$  možemo pomaknuti i skupiti u neki podskup od  $I^s$  i stoga se možemo ograničiti na podskupe od  $I^s$ .

**Teorem 2.2.6.** *Ako je  $B \subseteq I^s$  konveksan i  $f$  funkcija ograničene varijacije na  $I^s$  u smislu Hardyja i Krausa, tada za svaki skup točaka  $P$  kojeg čine  $x_1, \dots, x_N \in I^s$  imamo*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1, x_n \in B}^N f(x_n) - \int_B f(x) dx \right| \leq (V(f) + |f(1, \dots, 1)|) J_N(P).$$

Najopćenitiji slučaj koji ćemo nakratko razmotriti je familija Jordan-izmjerivih skupova (u oznaci  $\mathcal{M}$ ), tj. familija svih skupova čija je karakteristična funkcija Riemann-integrabilna. Tada vrijedi idući rezultat.

**Teorem 2.2.7.** *(Niederreiter, de Clerck) Ako je  $B \in \mathcal{M}$  i funkcija  $f$  ima ograničenu varijaciju na  $I^s$  u smislu Hardyja i Krausa, tada za svaki skup točaka  $P$  koji se sastoji od  $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]^s$  vrijedi*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1, x_n \in B}^N f(x_n) - \int_B f(x) dx \right| \leq (V(f) + |f(1, \dots, 1)|) D_N(\mathcal{M}; P).$$

## 2.3 Uvod u nizove niske diskrepancije

Prijašnje poglavlje nam sugerira da će male greške kvazi Monte Carlo metode biti garantirane u slučaju da izaberemo nizove koji imaju malu diskrepanciju (tzv. nizovi niske diskrepancije). To je točno kako za normaliziranu integracijsku domenu  $I^s$  tako i za širu klasu skupova koji su sadržani u  $I^s$ , a spominju se u zadnja dva teorema prošlog poglavlja. Skup točaka  $P$  koji se sastoji od  $N$  elemenata iz  $I^s$  zovemo skup niske diskrepancije ako je  $D_N^*(P)$  ili  $D_N(P)$  malen broj. U ovom ćemo poglavlju dati neke metode konstrukcije nizova niske diskrepancije te ćemo obraditi neke osnovne principe dobivanja gornjih i donjih ograda na diskrepanciju.

U jednodimenzionalnom slučaju lako je odrediti minimume diskrepancija  $D_N^*(x_1, \dots, x_N)$  i  $D_N(x_1, \dots, x_N)$  ako je  $N$  fiksiran. Iz teorema 2.1.4 odmah slijedi

$$D_N^*(x_1, \dots, x_N) \geq \frac{1}{2N}.$$

Jednakost se postiže za  $x_n = \frac{2n-1}{2N}$  za  $1 \leq n \leq N$ . Kvazi Monte Carlo aproksimacija tada glasi

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{2n-1}{2N}\right)$$

i to je zapravo klasično pravilo numeričke integracije s kojim smo se već susretali. Slično, po teoremu 2.1.5 uvijek imamo

$$D_N(x_1, \dots, x_N) \geq \frac{1}{N}.$$

I tu se jednakost postiže za čvorove oblika  $x_n = \frac{2n-1}{2N}$  za  $1 \leq n \leq N$ .

Iako je  $D_N(P) = O(N^{-1})$  moguća za  $N$ -člani skup točaka  $P$  iz  $[0, 1]$ , ne postoji niz  $S$  točaka iz  $[0, 1]$  za koji bi  $D_N(S) = O(N^{-1})$  vrijedilo za svaki  $N \geq 1$ , već će diskrepancija  $D_N(S)$  biti beskonačno većeg reda veličine. Schmidt je pokazao da postoji konstanta  $c > 0$  takva da za svaki niz točaka  $S$  iz  $[0, 1]$  imamo

$$D_N(S) \geq cN^{-1} \log N,$$

za beskonačno mnogo  $N \geq 0$ . Bejian je 1982. dao dotad najbolji mogući rezultat,  $c = 0.12$ . Pomoću propozicije 2.1.2 dobijemo da za svaki niz  $S$  iz  $[0, 1]$  imamo

$$D_N^*(S) \geq (0.06)N^{-1} \log N$$

za beskonačno mnogo  $N \geq 0$ . Larcher i Puchhammer su u [6] pokazali da je moguće izabrati  $c = 0.065664679 \dots$ . Dakle, za skupove niske diskrepancije u jednodimenzionalnom slučaju, ne možemo očekivati ništa bolje od  $D_N^*(S) = O(N^{-1} \log N)$ , za sve  $N \geq 2$ . Taj red veličine se može postići brojnim konstrukcijama. Iako kvazi Monte Carlo (pa i Monte Carlo) metode nisu važne za male dimenzije (do  $s \leq 5$ ) radi jednostavnosti ćemo prvo dati par konstrukcija u jednodimenzionalnim slučajevima, koji onda daju bazu za proširenje na višedimenzionalne.

## 2.4 Klasične konstrukcije nizova niske diskrepancije

Za cijeli broj  $b \geq 2$  stavljamo  $Z_b = \{0, 1, \dots, b-1\}$ , tj.  $Z_b$  je skup ostataka pri dijeljenju s  $b$ . Svaki cijeli broj  $n \geq 0$  ima jedinstven raspis u bazi  $b$  oblika

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n)b^j, \quad (2.5)$$

gdje su  $a_j(n) \in Z_b$  za sve  $j \geq 0$  i  $a_j(n) = 0$  za sve dovoljno velike  $j$ , tj. suma (2.5) je zapravo konačna.

**Definicija 2.4.1.** Za cijeli broj  $b \geq 2$ , funkcija obrtanja znamenaka  $\phi_b$  u bazi  $b$  je definirana s

$$\phi_b(n) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n)b^{-j-1}, \quad \text{za svaki } n \geq 0.$$

Dakle,  $\phi_b(n)$  se dobiva iz raspisa broja  $n$  u bazi  $b$ . Uočimo da uvijek vrijedi  $\phi_b(n) \in I := [0, 1)$ , za sve  $n \geq 0$ . Za diskrepanciju prvih  $N$  članova niza  $S$  ćemo po dosadašnjem dogovoru pisati  $D_N(S) = D_N(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ . Ovo je dovoljno da bismo mogli konstruirati prvi niz.

**Definicija 2.4.2.** Za cijeli broj  $b \geq 2$ , van der Corputov niz u bazi  $b$  je niz  $x_0, x_1, \dots$  takav da je  $x_n = \phi_b(n)$ , za sve  $n \geq 0$ .

Ako je  $S_b$  van der Corputov niz u bazi  $b$ , tada je  $D_N^*(S_b) = O(N^{-1} \log N)$  za sve  $N \geq 2$  s konstantom koja ovisi samo o bazi  $b$ . To će biti posljedica općenitijeg rezultata kojeg ćemo pokazati u teoremu 2.4.4. Faure je u [3] dao precizniji rezultat:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N^*(S_b)}{\log N} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(S_b)}{\log N} = \begin{cases} \frac{b^2}{4(b+1)\log b} & \text{za parne } b, \\ \frac{b-1}{4\log b} & \text{za neparne } b. \end{cases}$$

Iz toga se lako pokaže da je  $S_3$  asimptotski najbolji van der Corputov niz. Slučaj za  $b = 2$  je važan jer je  $S_2$  niz koji je van der Corput originalno uveo 1935. godine. U tom slučaju, Bejjan i Faure su u [11] pokazali

$$ND_N^*(S_2) = ND_N(S_2) \leq \frac{\log N}{\log 8} + 1 \quad \text{za sve } N \geq 1$$

te

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left( ND_N(S_2) - \frac{\log N}{\log 8} \right) = \frac{4}{9} + \frac{\log 3}{\log 8}.$$

Daljnja poboljšanja u smislu asimptotskog ponašanja van der Corputovog niza u bazi  $b$  se mogu dobiti definiranjem

$$x_n = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma(a_j(n))b^{-j-1} \quad \text{za sve } n \geq 0,$$

gdje je  $n$  dan formulom (2.5), a  $\sigma$  je neka permutacija skupa  $Z_b$ . Ovaj niz možemo generirati i rekurzivno

$$x_0 = \frac{\sigma(0)}{b-1}, \quad x_{bn+r} = \frac{1}{b}(x_n + \sigma(r)) \quad \text{za sve } n \geq 0 \quad \text{i} \quad 0 \leq r \leq b-1.$$

Faure je u [3] pokazao da za  $b = 36$  i određenu permutaciju  $\sigma$  dani van der Corputov niz  $S$  zadovoljava

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(S)}{\log N} = \frac{23}{35 \log 36} = 0.366 \dots$$

Još jedan klasičan način dobivanja jednodimenzionalnog niza niske diskrepancije se dobije promatranjem višekratnika nekog iracionalnog broja modulo 1. Za  $u \in \mathbb{R}$  definiramo  $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$ ; to ćemo zvati decimalni dio broja  $u$ . Za iracionalan broj  $z$ , neka je  $S(z)$  niz  $x_0, x_1, \dots$  definiran s

$$x_n = \{nz\} \quad \text{za sve } n \geq 0.$$

Neka je  $z = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  verižni razlomak od  $z$ , gdje su parcijalni kvocijenti  $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{Z}$  takvi da je  $a_i \geq 1$  za  $i \geq 1$ . Nazivnike konvergenata prema  $z$  ćemo označiti s  $q_0, q_1, \dots$ . Drugim riječima, koristit ćemo standardnu notaciju za konvergente  $r_i = \frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \dots, a_i]$ , za svaki  $i \geq 0$ . Sada ćemo dokazati teorem koji će povezati verižni razlomak iracionalnog broja s diskrepancijom te ćemo uz korolar koji će ga slijediti pokazati da je  $S(z)$  niz niske diskrepancije.

**Teorem 2.4.1.** *Neka je  $z$  iracionalan broj i  $N \geq 1$ . Tada se  $N$  može zapisati kao*

$$N = \sum_{i=0}^{l(N)} c_i q_i,$$

gdje je  $l(N)$  jedinstven nenegativan cijeli broj za koji vrijedi  $q_{l(N)} \leq N < q_{l(N)+1}$  te su  $c_i$  cijeli brojevi takvi da vrijedi  $0 \leq c_i \leq a_{i+1}$  za  $0 \leq i \leq l(N)$ . Nadalje, imamo

$$D_N(S(z)) < \frac{1}{N} \sum_{i=0, c_i \neq 0}^{l(N)} (c_i + 1) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{l(N)+1} a_i.$$

*Dokaz.* Budući da vrijedi  $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots$  broj  $l(N)$  sigurno postoji i jedinstven je jer ćemo zbrajajući pozitivne prirodne brojeve  $q_i$  i množeći ih s  $c_i$  kad tad dođi do prirodnog broja  $N$ . Sada možemo zapisati  $N = c_{l(N)} q_{l(N)} + r$  s cijelim brojevima  $c_{l(N)} \geq 1$  i  $0 \leq r < q_{l(N)}$ . Kada bi vrijedilo  $c_{l(N)} > a_{l(N)+1}$ , tada bismo imali kontradikciju:

$$N \geq c_{l(N)} q_{l(N)} \geq a_{l(N)+1} q_{l(N)} + q_{l(N)} \geq q_{l(N)+1}.$$

Dakle,  $c_{l(N)} \leq a_{l(N)+1}$ . Ako je  $r > 0$ , ponavljamo ovaj postupak na  $r$  umjesto  $N$  i analognim nastavljanjem tog postupka dobivamo željeni zapis. Neka je  $S_N(z)$  skup prvih  $N$  točaka niza  $S(z)$ . Obzirom na novi zapis, možemo dekomponirati  $S_N(z)$  u  $c_i$  blokova duljine  $q_i$  za  $0 \leq i \leq l(N)$  (prvo  $c_1$  blokova duljine  $q_1$ , onda  $c_2$  blokova duljine  $q_2$  i tako dalje do  $l(N)$ ). Promotrimo jedan blok duljine  $q_i$  za neki fiksni  $i$ . To je skup točaka  $P_i$  koji se sastoji od

decimalnih dijelova brojeva  $\{nz\}$ ,  $n = n_i, n_i + 1, \dots, n_i + q_i - 1$  za neki  $n_i \geq 0$ . Neka je  $\frac{p_i}{q_i}$   $i$ -ta konvergenta prema  $z$ . Tada, iz teorije verižnih razlomaka znamo da vrijedi

$$z = \frac{p_i}{q_i} + \frac{\delta_i}{q_i q_{i+1}}, \quad \text{uz } |\delta_i| < 1.$$

Stoga, ako je  $n = n_i + j$ ,  $j \in Z_{q_i}$  tada po jednadžbi iznad slijedi

$$\{nz\} = \left\{ n_i z + \frac{jp_i}{q_i} + \frac{j\delta_i}{q_i q_{i+1}} \right\}.$$

Pošto je  $\text{NZD}(p_i, q_i) = 1$ , decimalni dijelovi  $\{n_i z + \frac{jp_i}{q_i}\}$ ,  $j \in Z_{q_i}$  formiraju skup točaka  $Q_i$  s  $q_i$  ekvidistantnih točaka iz  $[0, 1]$  s međusobnom udaljenosti  $\frac{1}{q_i}$  i te točke po teoremu 2.1.5 imaju diskrepanciju  $\frac{1}{q_i}$ . Pošto vrijedi

$$\left| \frac{j\delta_i}{q_i q_{i+1}} \right| < \frac{1}{q_{i+1}}, \quad \text{za } j \in Z_{q_i},$$

skup točaka  $P_i$  se dobije pomicanjem modulo 1 elemenata iz  $Q_i$  u jednome smjeru (ovisnom samo o predznaku  $\delta_i$ ) za udaljenosti manje od  $\frac{1}{q_{i+1}}$ . Stoga vrijedi

$$D_{q_i}(P_i) < \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_{i+1}}.$$

Iz nejednakosti trokuta za diskrepanciju (vidjeti [9]) i dekompozicije  $S_N(z)$ , slijedi

$$ND_N(S(z)) < \sum_{i=0}^{l(N)} c_i \left( 1 + \frac{q_i}{q_{i+1}} \right) \leq \sum_{i=0, c_i \neq 0}^{l(N)} \left( c_i + \frac{a_{i+1} q_i}{q_{i+1}} \right) \leq \sum_{i=0, c_i \neq 0}^{l(N)} (c_i + 1),$$

što je prva nejednakost za  $D_N(S(z))$  iz teorema. Druga nejednakost slijedi iz svojstava  $c_i$  dobivenih iz algoritma na početku dokaza,  $c_0 < q_1 = a_1$  i toga da  $c_i = a_{i+1}$  implicira  $c_{i-1} = 0$ . Za dokaz drugog svojstva valja uočiti: ako je  $q_i \leq N < q_{i+1}$  i  $c_i = a_{i+1}$ , tada je  $N - c_i q_i = N - a_{i+1} q_i < q_{i+1} - a_{i+1} q_i = q_{i-1}$ .  $\square$

**Korolar 2.4.2.** *Ako za iracionalan broj  $z$  vrijedi  $\sum_{i=1}^m a_i = O(m)$ , tada je  $D_N(S(z)) = O(N^{-1} \log N)$ , za sve  $N \geq 2$ .*

*Dokaz.* Iznad dokazani teorem i pretpostavka impliciraju  $D_N(S(z)) = O(N^{-1}(l(N) + 1))$ . Indukcija pokazuje da je  $q_i \geq \alpha^{i-1}$  za sve  $i \geq 0$ , gdje je  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Dakle,  $N \geq q_{l(N)} \geq \alpha^{l(N)-1}$  iz čega slijedi tvrdnja.  $\square$

Teorem 2.4.1 i korolar 2.4.2 nam kažu da je  $S(z)$  niz niske diskrepancije ako su parcijalni kvocijenti  $a_i$ ,  $i \geq 1$  verižnog razlomka od  $z$  mali brojevi. U jednom specifičnom slučaju možemo reći i nešto više.



**Korolar 2.4.3.** *Ako je  $z$  iracionalan broj za koji postoji pozitivan cijeli broj  $K$  takav da je  $a_i \leq K$  za sve  $i \geq 1$ , tada vrijedi*

$$D_N(S(z)) < G(K)N^{-1}\log(N+1), \quad \text{za sve } N \geq 1,$$

gdje je  $G(K) = \frac{2}{\log 2}$  za  $K = 1, 2, 3$  i  $G(K) = \frac{K+1}{\log(K+1)}$  za sve  $K \geq 4$ .

Niz  $S(z)$  se na prirodan način da proširiti na višedimenzionalan slučaj  $s \geq 2$ . Prvo definiramo decimalni dio vektora  $u = (u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^s$  kao

$$\{u\} = (\{u_1\}, \dots, \{u_s\}) \in [0, 1)^s.$$

Sada, neka je  $z = (z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{R}^s$  takav da su brojevi  $1, z_1, \dots, z_s$  linearno nezavisni nad racionalnim brojevima i neka je  $S(z)$  niz  $x_0, x_1, \dots$  definiran kao

$$x_n = \{nz\}, \quad \text{za sve } n \geq 0.$$

Po klasičnom rezultatu teorije uniformno distribuiranih nizova (dokaz se može pronaći u [9]), niz  $S(z)$  je uniformno distribuiran u  $I^s$ . Za diskrepanciju  $S(z)$  Schmidt je dao vjerojatnosni rezultat koji kaže da za svaki  $\epsilon > 0$  imamo  $D_N(S(z)) = O(N^{-1}(1 + \log N)^{s+1+\epsilon})$  za  $\lambda_s$ -gotovo sve  $z \in \mathbb{R}^s$ . Za  $s \geq 2$ , ne zna se niti jedan  $z \in \mathbb{R}^s$  za koji bi vrijedilo  $D_N(S(z)) = O(N^{-1}(1 + \log N)^{s+1})$ . Ako su koordinate od  $z \in \mathbb{R}^s$  algebarski brojevi koji zadovoljavaju gore naveden uvjet linearne nezavisnosti, Niederreiter je pokazao da je  $D_N(S(z)) = O(N^{-1+\epsilon})$  za sve  $\epsilon > 0$ .

Nešto jednostavniji i (računalno) praktičniji način dobivanja višedimenzionalnih nizova niske diskrepancije se može dobiti poopćenjem van der Corputovih nizova. To vodi do familije Haltonovih nizova. Koristeći istu inverznu funkciju  $\phi_b$  kao i prije, Haltonov niz u bazi (bazama)  $b_1, \dots, b_s$  definiramo kao  $x_0, x_1, \dots$  za koje vrijedi

$$x_n = (\phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_s}(n)) \in I^s \quad \text{za sve } n \geq 0.$$

Za  $s = 1$  radi se o van der Corputovom nizu.

**Teorem 2.4.4.** *Ako je  $S$  Haltonov niz u bazama koje su međusobno (po parovima) relativno proste, tada vrijedi*

$$D_N^*(S) < \frac{s}{N} + \frac{1}{N} \prod_{i=1}^s \left( \frac{b_i - 1}{2 \log b_i} \log N + \frac{b_i + 1}{2} \right) \quad \text{za sve } N \geq 1.$$

*Dokaz.* Fiksiramo  $N \geq 1$  i uvodimo oznaku  $D(J) = A(J; S_N) - N\lambda_s(J)$  za interval  $J \subseteq I^s$ , gdje je  $S_N$  oznaka za prvih  $N$  članova Haltonovog niza  $S$ . Za  $1 \leq i \leq s$  i cijeli broj  $e \geq 0$ , neka je  $\mathcal{E}_i(e)$  familija svih intervala oblika  $[0, ab_i^{-e})$  uz  $a \in \mathbb{Z}, 0 < a < b_i^e$  i neka je  $\mathcal{F}_i(e)$

familija svih intervala oblika  $[cb_i^{-f}, (c+1)b_i^{-f}]$  gdje  $c, f \in \mathbb{Z}$  zadovoljavaju uvjete  $0 \leq f \leq e$  i  $0 \leq c < b_i^f$ . Za cijele brojeve  $e_1, \dots, e_s \geq 0$ , neka je  $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_s)$  familija svih intervala  $E = \prod_{i=1}^s E_i$  uz  $E_i \in \mathcal{E}_i(e_i) \cup \mathcal{F}_i(e_i)$  za  $1 \leq i \leq s$ . Mi tvrdimo

$$|D(E)| \leq \prod_{i=1, E_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)}^s \left( \frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1 \right) \quad \text{za sve } E = \prod_{i=1}^s E_i \in \mathcal{E}(e_1, \dots, e_s), \quad (2.6)$$

gdje prazan produkt interpretiramo kao broj (vrijednost) 1. Nejednakost (2.6) ćemo dokazati indukcijom po broju  $k$  indeksa  $i$  za koje  $E_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)$ . Prvo dokažimo bazu indukcije, neka je  $k = 0$ , odnosno ne postoji niti jedan  $i$  za koji vrijedi  $E_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)$  pa je

$$E = \prod_{i=1}^s [c_i b_i^{-f_i}, (c_i + 1) b_i^{-f_i}],$$

gdje su  $c_i, f_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq f_i \leq e_i, 0 \leq c_i < b_i^{f_i}$  za  $1 \leq i \leq s$ . Uočimo da je

$$x_n = (\phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_s}(n)) \in E$$

ako i samo ako, za  $1 \leq i \leq s$  prvih  $f_i$  znamenaka (u bazi  $b_i$ ) od  $\phi_{b_i}(n)$  nakon decimalne točke imaju određene vrijednosti (ovisne o  $c$  i mjestu na kojem se nalazi). Ekvivalentno, za  $1 \leq i \leq s$ ,  $f_i$  najmanje značajnih znamenki od  $n$  u bazi  $b_i$  moraju imati neke određene vrijednosti, odnosno drugim riječima,  $n$  mora ležati u određenoj klasi ostataka modulo  $b_i^{f_i}$ . Kako su  $b_1, \dots, b_s$  po parovima relativno prosti, iz Kineskog teorema o ostacima (za više informacija vidjeti [1]) slijedi da je zadnji uvjet ekvivalentan ležanju  $n$  u određenoj klasi ostataka modulo  $b_1 \cdots b_s$  (produkta djelitelja). Posljedično, među  $m$  uzastopnih elemenata od  $S$  točno jedan od njih leži u  $E$ . To implicira da je  $|D(E)| \leq 1$ .

Sada pretpostavimo da za neki  $k \geq 1$  tvrdnja vrijedi za  $k - 1$  i promatrajmo  $E = \prod_{i=1}^s E_i \in \mathcal{E}(e_1, \dots, e_s)$ , gdje bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $E_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)$  za  $1 \leq i \leq k$  i  $E_i \in \mathcal{F}_i(e_i)$  za  $k + 1 \leq i \leq s$  (samo smo ih poredali). Tada je  $E_1 = [0, ab_1^{-e_1})$  za neki  $a \in \mathbb{Z}, 0 < a < b_1^{e_1}$ . Neka je

$$ab_1^{-e_1} = \sum_{j=1}^{e_1} d_j b_1^{-j}$$

zapis u bazi  $b_1$ . Tada se  $E_1$  može zapisati kao disjunktna unija od  $d_1$  intervala iz  $\mathcal{F}_1(e_1)$  duljine  $b_1^{-1}$ , od  $d_2$  intervala iz  $\mathcal{F}_1(e_1)$  duljine  $b_1^{-2}$  i tako dalje. Stoga je

$$E_1 = \bigcup_{r=1}^{d_1} F_r$$

s po parovima disjunktima  $F_r \in \mathcal{F}_1(e_1)$  za  $1 \leq r \leq d := \sum_{j=1}^{e_1} d_j$  pa je  $E$  disjunktna unija

$$E = \bigcup_{r=1}^d (F_r \times E_2 \times \dots \times E_s).$$

Slijedi da je (radi disjunktosti i nejednakosti trokuta)

$$|D(E)| \leq \sum_{r=1}^d |D(F_r \times E_2 \times \dots \times E_s)| \leq d \prod_{i=2}^k \left( \frac{1}{2} (b_i - 1) e_i + 1 \right), \quad (2.7)$$

gdje druga nejednakost slijedi iz pretpostavke indukcije. Ako stavimo  $G = [ab_1^{-e_1}, 1)$ , imamo  $E_1 = [0, 1) \setminus G$  pa vrijedi

$$\begin{aligned} |D(E)| &\leq |D([0, 1) \times E_2 \times \dots \times E_s)| + |d(G \times E_2 \times \dots \times E_s)| \\ &\leq \prod_{i=2}^k \left( \frac{1}{2} (b_i - 1) e_i + 1 \right) + |D(G \times E_2 \times \dots \times E_s)|. \end{aligned}$$

Sada  $G$  možemo zapisati kao disjunktne uniju od  $(b_1 - 1)e_1 - d + 1$  intervala iz  $\mathcal{F}_1(e_1)$  pa je

$$|D(E)| \leq ((b_1 - 1)e_1 - d + 2) \prod_{i=2}^k \left( \frac{1}{2} (b_i - 1) e_i + 1 \right).$$

Ako dodamo tu nejednakost nejednakosti (2.7) i podijelimo s 2, dobijemo (2.6) za vrijednost  $k$ .

Sada, neka je  $J = \prod_{i=1}^s [0, u_i) \subseteq I^s$  proizvoljan. Za  $1 \leq i \leq s$ , neka je  $e_i$  najmanji cijeli broj s  $b_i^{e_i} \geq N$  i neka je  $a_i$  najmanji cijeli broj takav da je  $a_i b_i^{-e_i} \geq u_i$ . Stavimo  $E = \prod_{i=1}^s [0, a_i b_i^{-e_i})$ . Pošto su  $i$ -te koordinate svih točaka iz  $S_N$  racionalne s nazivnikom  $b_i^{e_i}$ , imamo  $A(J; S_N) = A(E; S_N)$ . Nadalje, imamo  $E \in \mathcal{E}(e_1, \dots, e_s)$  i

$$\begin{aligned} |D(J)| &\leq N(\lambda_s(E) - \lambda_s(J)) + |D(E)| \\ &\leq N \sum_{i=1}^s b_i^{-e_i} + |D(E)| \leq s + |D(E)| \\ &\leq s + \prod_{i=1}^s \left( \frac{1}{2} (b_i - 1) e_i + 1 \right) \end{aligned}$$

po (2.6). Za završetak dokaza valja uočiti da je  $e_i < 1 + \frac{\log N}{\log b_i}$  za  $1 \leq i \leq s$ .  $\square$

Za dimenziju  $s \geq 2$ , cijele brojeve  $N \geq 1$  i  $b_1, \dots, b_{s-1} \geq 2$ ,  $N$ -člani Hammersleyev skup točaka u bazama  $b_1, \dots, b_{s-1}$  je dan s

$$x_n = \left( \frac{n}{N}, \phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_{s-1}}(n) \right) \in I^s \quad \text{za sve } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Za ocjenu njegove greške ćemo iskoristiti teorem za Haltonov niz kojeg smo netom dokazali (očita je sličnost s Hammersleyevim) i generalni princip koji ćemo pokazati u idućoj lemi.

**Lema 2.4.5.** *Za  $s \geq 2$ , neka je  $S$  proizvoljan niz točaka  $x_0, x_1, \dots$  u  $I^{s-1}$ . Za  $N \geq 1$ , neka je  $P$  skup točaka oblika  $(\frac{n}{N}, x_n) \in I^s$  za  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Tada je*

$$ND_N^*(P) \leq \max_{1 \leq M \leq N} MD_M^*(S) + 1.$$

*Dokaz.* Za proizvoljan  $J = \prod_{i=1}^s [0, u_i] \subseteq I^s$ , imamo  $(\frac{n}{N}, x_n) \in J$  ako i samo ako je  $x_n \in J' := \prod_{i=2}^s [0, u_i]$  i  $n < Nu_1$ . Ako je  $M$  najveći cijeli broj manji od  $Nu_1 + 1$ , onda je  $A(J; P) = A(J'; S_M)$ , gdje je  $S_M$  skup točaka koji se sastoji od prvih  $M$  članova niza  $S$ . Stoga po nejednakosti trokuta vrijedi

$$\begin{aligned} |A(J; P) - N\lambda_s(J)| &\leq |A(J'; S_M) - M\lambda_{s-1}(J')| + |M\lambda_{s-1}(J') - N\lambda_s(J)| \\ &\leq MD_M^*(S) + |M\lambda_{s-1}(J') - N\lambda_s(J)|. \end{aligned}$$

Sada, s obzirom da je  $Nu_1 < M < Nu_1 + 1$ , vrijedi

$$0 \leq M\lambda_{s-1}(J') - N\lambda_s(J) \leq (Nu_1 + 1) \prod_{i=2}^s u_i - N \prod_{i=1}^s u_i \leq 1,$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

**Teorem 2.4.6.** *Ako je  $P$   $N$ -člani Hammersleyev skup točaka u po parovima relativno prostim bazama  $b_1, \dots, b_{s-1}$  vrijedi*

$$D_N^*(P) < \frac{s}{N} + \frac{1}{N} \prod_{i=1}^{s-1} \left( \frac{b_i - 1}{2 \log b_i} \log N + \frac{b_i + 1}{2} \right).$$

*Dokaz.* Slijedi izravno iz teorema 2.4.4 i leme 2.4.5. □

Iz teorema 2.4.4 slijedi, ako je  $S$  Haltonov niz u po parovima relativno prostim bazama, tada je

$$D_N^*(S) \leq A(b_1, \dots, b_s) N^{-1} (\log N)^s + O(N^{-1} (\log N)^{s-1}) \quad \text{za sve } N \geq 2,$$

gdje je vodeći koeficijent dan s

$$A(b_1, \dots, b_s) = \prod_{i=1}^s \frac{b_i - 1}{2 \log b_i}.$$

Minimalna vrijednost tog koeficijenta se dobije uzimanjem prvih  $s$  prostih brojeva ( $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_s$ ). U tom slučaju,

$$D_N^*(S) \leq A_s N^{-1} (\log N)^s + O(N^{-1} (\log N)^{s-1}) \quad \text{za sve } N \geq 2,$$

gdje je  $A_s = A(p_1, \dots, p_s)$ . Slično, za minimizaciju greške kod  $N$ -članog Hammersleyevog skupa  $P$  možemo uzeti prvih  $s - 1$  prostih brojeva i dobiti

$$D_N^*(P) \leq A_{s-1} N^{-1} (\log N)^{s-1} + O(N^{-1} (\log N)^{s-2}) \quad \text{za sve } N \geq 2.$$

Stoga je uobičajeno pričati o skupovima i nizovima niske diskrepancije kad im je  $Z$ -diskrepancija  $O(N^{-1} (\log N)^s)$ , gdje je  $s$  dimenzija. Ponovimo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{-1} (\log N)^s}{N^{-1/2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\log N)^s}{N^{1/2}} = (L'H) = \lim_{N \rightarrow \infty} 2s \frac{(\log N)^{s-1}}{N^{1/2}} = \dots = 0.$$

Riječima, Haltonov niz i Hammersleyev skup točaka predstavljaju drastično poboljšanje nad klasičnom Monte Carlo ocjenom  $O(N^{-1/2})$ .

Vjeruje se da u  $s$ -dimenzionalnom slučaju diskrepancija  $D_N^*$  bilo kojeg  $N$ -članog skupa točaka zadovoljava iduću relaciju

$$D_N^*(P) \geq B_s N^{-1} (\log N)^{s-1}, \quad (2.8)$$

gdje konstanta  $B_s$  ovisi samo o broju dimenzija  $s$ . To bi značilo da diskrepancija  $N$ -članog Hammersleyevog skupa točaka u po parovima relativno prostim bazama uistinu postiže najbolji mogući red veličine greške. Za  $s = 1$ , (2.8) je trivijalna posljedica teorema 2.1.5. Za  $s = 2$ , Schmidt je (2.8) dokazao, no za dimenzije  $s \geq 3$  je to i dalje otvoren problem. Roth je u [15] pokazao da za proizvoljan  $N$ -člani skup točaka  $P$  u dimenziji  $s$  vrijedi iduća relacija

$$D_N^*(P) \geq B_s N^{-1} (\log N)^{\frac{s-1}{2}}.$$

Kad bi relacija (2.8) bila točna, uz pomoć leme 2.4.5 bismo lako dobili da za svaki  $s$ -dimenzionalan niz  $S$  vrijedi

$$D_N^*(P) \geq B'_s N^{-1} (\log N)^s \quad \text{za beskonačno mnogo } N.$$

Tada bismo i za Haltonov niz u po parovima relativno prostim bazama mogli zaključiti da postiže najmanji mogući red greške, s tim da je ova nejednakost kod nizova dokazana samo u slučaju  $s = 1$ . Već za  $s = 2$  je to otvoren problem, iako su Roth i Beck pokazali rezultate slične gornjem Rothovom.

## 2.5 Neke praktičnije ocjene diskrepancije

Radi konačne preciznosti aritmetike računala, u praksi će nas interesirati nizovi i skupovi točaka koji se sastoje samo od točaka racionalnih koordinata. U tom smislu praktičnije, u ovom ćemo poglavlju dati par važnih principa i rezultata o diskrepanciji nad takvim točkama. Posredno ćemo time govoriti i o samoj greški kvazi Monte Carlo metode koja je, pokazali smo u prijašnjim poglavljima, prirodno vezana uz pojam diskrepancije.

Za cijeli broj  $M \geq 2$ , neka je  $C(M) = (-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}] \cap \mathbb{Z}$  i  $C^*(M) = C(M) \setminus \{0\}$ . Riječima,  $C(M)$  će sadržavati sve cijele brojeve između  $-M/2$  i  $M/2$  ne uključujući  $-M/2$ , a  $C^*(M)$  će sadržavati te iste brojeve izuzev 0. Nadalje, neka je  $C_s(M)$  Kartezijev produkt koji se sastoji od  $s$  kopija  $C(M)$  i  $C_s^*(M) = C(M) \setminus (0, \dots, 0)$ . Staviti ćemo

$$r(h, M) = \begin{cases} M \sin \frac{\pi|h|}{M}, & \text{za } h \in C^*(M), \\ 1, & \text{za } h = 0. \end{cases}$$

Za  $h = (h_1, \dots, h_s) \in C_s(M)$  stavimo

$$r(h, M) = \prod_{i=1}^s r(h_i, M).$$

Koristit ćemo i poznate konvencije u zapisu  $e(x) = e^{2\pi xi}$  te  $x \cdot y$  za standardni skalarni produkt od  $x, y \in \mathbb{R}^s$ .

**Lema 2.5.1.** *Neka su  $t_i, u_i \in [0, 1]$  za  $1 \leq i \leq s$  i neka je  $v \in [0, 1]$  takav da vrijedi  $|t_i - u_i| \leq v$  za  $1 \leq i \leq s$ . Tada je*

$$\left| \prod_{i=1}^s t_i - \prod_{i=1}^s u_i \right| \leq 1 - (1 - v)^s.$$

*Dokaz.* Lemu ćemo dokazati indukcijom po  $s$ , gdje je baza  $s = 1$  očita. Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki  $s \geq 1$  i bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $t_{s+1} \geq u_{s+1}$ . Tada je po nejednakosti trokuta

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^{s+1} t_i - \prod_{i=1}^{s+1} u_i \right| &= \left| t_{s+1} \prod_{i=1}^s t_i - u_{s+1} \prod_{i=1}^s t_i + u_{s+1} \prod_{i=1}^s t_i - u_{s+1} \prod_{i=1}^s u_i \right| \\ &\leq (t_{s+1} - u_{s+1}) \prod_{i=1}^s t_i + u_{s+1} \left| \prod_{i=1}^s t_i - \prod_{i=1}^s u_i \right| \\ &\leq t_{s+1} - u_{s+1} + u_{s+1} (1 - (1 - v)^s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= t_{s+1}(1 - (1 - v)^s) + (t_{s+1} - u_{s+1})(1 - v)^s \\ &\leq 1 - (1 - v)^s + v(1 - v)^s = 1 - (1 - v)^{s+1}. \end{aligned}$$

□

**Teorem 2.5.2.** (Niederreiter) Za cijeli broj  $M \geq 2$  i  $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{Z}^s$  neka je  $P$  skup točaka koji se sastoji od decimalnih dijelova  $\{\frac{y_0}{M}\}, \dots, \{\frac{y_N}{M}\}$ . Tada je

$$D_N(P) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s + \sum_{h \in C_s^*(M)} \frac{1}{r(h, M)} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e\left(\frac{1}{M}h \cdot y_n\right) \right|.$$

*Dokaz.* Za  $k = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s$ , neka je  $A(k)$  broj  $n$ -ova za koje vrijedi  $0 \leq n \leq N - 1$  i  $y_n \equiv k \pmod{M}$ , gdje se kongruencija između vektora definira po komponentama. Tada je

$$A(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{M^s} \sum_{h \in C_s(M)} e\left(\frac{1}{M}h \cdot (y_n - k)\right),$$

budući da skalarni produkt ima vrijednost  $M^s$  ako vrijedi  $y_n \equiv k \pmod{M}$  i 0 ako to ne vrijedi. Stoga je

$$A(k) - \frac{N}{M^s} = \frac{1}{M^s} \sum_{h \in C_s^*(M)} e\left(-\frac{1}{M}h \cdot k\right) \sum_{n=0}^{N-1} e\left(\frac{1}{M}h \cdot y_n\right). \quad (2.9)$$

Sada, neka je  $J = \prod_{i=1}^s [u_i, v_i]$  podinterval od  $I^s$ . Za svaki  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$  biramo najveći podinterval od  $[u_i, v_i]$  oblika  $[\frac{a_i}{M}, \frac{b_i}{M}]$  s cijelim brojevima  $a_i \leq b_i$ . Kada bismo imali neki  $i$  za koji takav zatvoreni podinterval ne bi postojao, to nam ne bi bio problem s obzirom da tada imamo  $A(J; P) = 0$  i  $v_i - u_i < \frac{1}{M}$  te

$$\left| \frac{A(J; P)}{N} - \lambda_s(J) \right| = \lambda_s(J) < \frac{1}{M} \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s. \quad (2.10)$$

U svim ostalim slučajevima su  $a_i, b_i$ ,  $1 \leq i \leq s$  dobro definirani pa pomoću (2.9) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{A(J; P)}{N} - \lambda_s(J) &= \sum_{k, a_i \leq k_i \leq b_i} \left( \frac{A(k)}{N} - \frac{1}{M^s} \right) + \frac{1}{M^s} \prod_{i=1}^s (b_i - a_i + 1) - \lambda_s(J) \\ &= \frac{1}{M^s} \sum_{h \in C_s^*(M)} \left( \sum_{k, a_i \leq k_i \leq b_i} e\left(-\frac{1}{M}h \cdot k\right) \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e\left(\frac{1}{M}h \cdot y_n\right) \right) + \frac{1}{M^s} \prod_{i=1}^s (b_i - a_i + 1) - \lambda_s(J). \end{aligned}$$

Također,

$$\left| \frac{b_i - a_i + 1}{M} - (v_i - u_i) \right| < \frac{1}{M} \quad \text{za sve } 1 \leq i \leq s,$$

pa pomoću leme 2.5.1 imamo

$$\left| \frac{A(J; P)}{N} - \lambda_s(J) \right| < 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s + \frac{1}{M^s} \sum_{h \in C_s^*(M)} \left| \sum_{k, a_i \leq k_i \leq b_i} e\left(\frac{1}{M}h \cdot k\right) \right| \left| \frac{1}{N} \sum_1^M e(h \cdot y_n) \right|. \quad (2.11)$$

Za fiksni  $h = (h_1, \dots, h_s) \in C_s^*(M)$ , tada imamo

$$\left| \sum_{k, a_i \leq k_i \leq b_i} e\left(\frac{1}{M}h \cdot k\right) \right| = \left| \sum_{k, 0 \leq k_i \leq b_i - a_i} e\left(\frac{1}{M}h \cdot k\right) \right| = \prod_{i=1}^s \left| \sum_{k_i=0}^{b_i - a_i} e\left(\frac{1}{M}h_i k_i\right) \right|.$$

Ako je  $h_i = 0$ , tada vrijedi

$$\left| \sum_{k_i=0}^{b_i - a_i} e\left(\frac{1}{M}h_i k_i\right) \right| = b_i - a_i + 1 \leq M = \frac{M}{r(h_i, M)},$$

dok za  $h_i \in C^*(M)$  imamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k_i=0}^{b_i - a_i} e\left(\frac{1}{M}h_i k_i\right) \right| &= \left| \frac{e(h_i \frac{b_i - a_i + 1}{M}) - 1}{e(\frac{h_i}{M}) - 1} \right| = \left| \frac{\sin(\pi h_i \frac{b_i - a_i + 1}{M})}{\sin(\frac{\pi h_i}{M})} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin(\frac{\pi |h_i|}{M})} = \frac{M}{r(h_i, M)} \end{aligned}$$

Stoga vrijedi

$$\left| \sum_{k, a_i \leq k_i \leq b_i} e\left(\frac{1}{M}h \cdot k\right) \right| \leq \prod_{i=1}^s \frac{M}{r(h_i, M)} = \frac{M^s}{r(h, M)}.$$

To iskoristimo u (2.11); vrijedit će za sve  $J$  radi (2.10).  $\square$

Kako je ideja bila dati nešto praktičniju ocjenu diskrepancije za računalo, a ova ocjena iz iskaza ne izgleda previše iskoristivo, pomoću ovog teorema ćemo praktičniju ocjenu dati u idućem korolaru.

**Korolar 2.5.3.** *Neka je  $P$  kao u teoremu 2.5.2 i pretpostavimo da postoji realan broj  $B$  takav da je*

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} e\left(\frac{1}{M}h \cdot y_n\right) \right| \leq B \quad \text{za sve } h \in C_s^*(M).$$

Tada vrijedi

$$D_N(P) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s + \frac{B}{N} \left(\frac{4}{\pi^2} \log M + 1.72\right)^s.$$



*Dokaz.* Iz (2.11) dobijemo

$$\left| \frac{A(J; P)}{N} - \lambda_s(J) \right| < 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s + \frac{B}{M^s N} \sum_{h \in C_s^*(M)} \left| \sum_{k, a_i \leq k_i \leq b_i} e\left(\frac{1}{M} h \cdot k\right) \right|.$$

Iz dokaza teorema 2.5.2 dobijemo

$$\begin{aligned} \sum_{h \in C_s^*(M)} \left| \sum_{k, a_i \leq k_i \leq b_i} e\left(\frac{1}{M} h \cdot k\right) \right| &< \sum_{h \in C_s^*(M)} \prod_{i=1}^s \left| \sum_{k_i=0}^{b_i-a_i} e\left(\frac{1}{M} h_i k_i\right) \right| \\ &= \prod_{i=1}^s \left( \sum_{h \in C(M)} \left| \sum_{k_i=0}^{b_i-a_i} e\left(\frac{1}{M} h k_i\right) \right| \right) \\ &\leq \prod_{i=1}^s \left( M + \sum_{n=1}^{M-1} \left| \frac{\sin(\pi h \frac{b_i-a_i+1}{M})}{\sin(\frac{\pi h}{M})} \right| \right). \end{aligned}$$

Po nejednakosti koju je dokazao Cochrane, vrijedi

$$\sum_{h=1}^{M-1} \left| \frac{\sin(\frac{\pi h j}{M})}{\sin(\frac{\pi h}{M})} \right| < \frac{4}{\pi^2} M \log M + 0.41M + 0.61$$

za proizvoljan cijeli broj  $j$ , a to povlači

$$\left| \frac{A(J; P)}{N} - \lambda_s(J) \right| < 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s + \frac{B}{N} \left( \frac{4}{\pi^2} \log M + 1.41 + \frac{0.61}{M} \right)^s.$$

Ako dobiveno povežemo s (2.10), to vrijedi za sve  $J$  pa slijedi tvrdnja.  $\square$

Za kraj ćemo dati jednu elementarnu donju ocjenu za skupove koji se sastoje samo od točaka s racionalnim koordinatama.

**Teorem 2.5.4.** *Neka je  $M \geq 2$  cijeli broj i  $P$   $s$ -dimenzionalan skup točaka sa svojstvom da su sve njegove točke racionalni brojevi iz  $[0, 1)$  s nazivnikom  $M$ . Tada je*

$$D_N^*(P) \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s.$$

*Dokaz.* Uočimo da sve točke  $P$  leže na intervalu  $J = [0, 1 - \frac{1}{M}]^s \subseteq I^s$ . Slijedi

$$D_N^*(P) \geq \left| \frac{A(J; P)}{N} - \lambda_s(J) \right| = 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s,$$

gdje prva nejednakost slijedi iz definicije diskrepancije, odnosno uzimanja supremuma.  $\square$

**Napomena 2.5.5.** Za cijeli broj  $M \geq 2$  promatrajmo skup  $P$  koji se sastoji od  $N = M^s$  točaka  $(\frac{n_1}{M}, \dots, \frac{n_s}{M}) \in I^s$ . Tada je

$$D_N(P) \geq D_N^*(P) \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s$$

po gornjem teoremu. S druge strane, označimo li točke s  $\frac{y_n}{M}$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , tada, za svaki  $h = (h_1, \dots, h_s) \in C_s^*(M)$ , imamo

$$\sum_{n=0}^{N-1} e\left(\frac{1}{M}h \cdot y_n\right) = \sum_{n_1=0}^{M-1} \dots \sum_{n_s=0}^{M-1} e\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^s h_i n_i\right) = \prod_{i=1}^s \left(\sum_{n=0}^{M-1} e\left(\frac{h_i n}{M}\right)\right) = 0,$$

pa po teoremu 2.5.2 vrijedi  $D_N(P) \leq 1 - (1 - M^{-1})^s$ . Povežemo li to s gornjom nejednadžbom, imamo

$$D_N(P) = D_N^*(P) = 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s.$$

# Poglavlje 3

## Primjeri i primjene

U ovom ćemo poglavlju prvo grafički pokazati van der Corputov niz niske diskrepancije te ćemo ga usporediti s (pseudo)slučajnim nizom. Nakon toga ćemo kvazi Monte Carlo metodom aproksimirati dva integrala, jedan koristeći Haltonov niz, a drugi koristeći Hammersleyev niz točaka, pošto se ta primjena metode provlači kroz cijeli rad. Kao što smo spomenuli, kvazi Monte Carlo metoda se pokazala kao dobar alat u financijskoj matematici pa ćemo navesti i dva takva primjera.

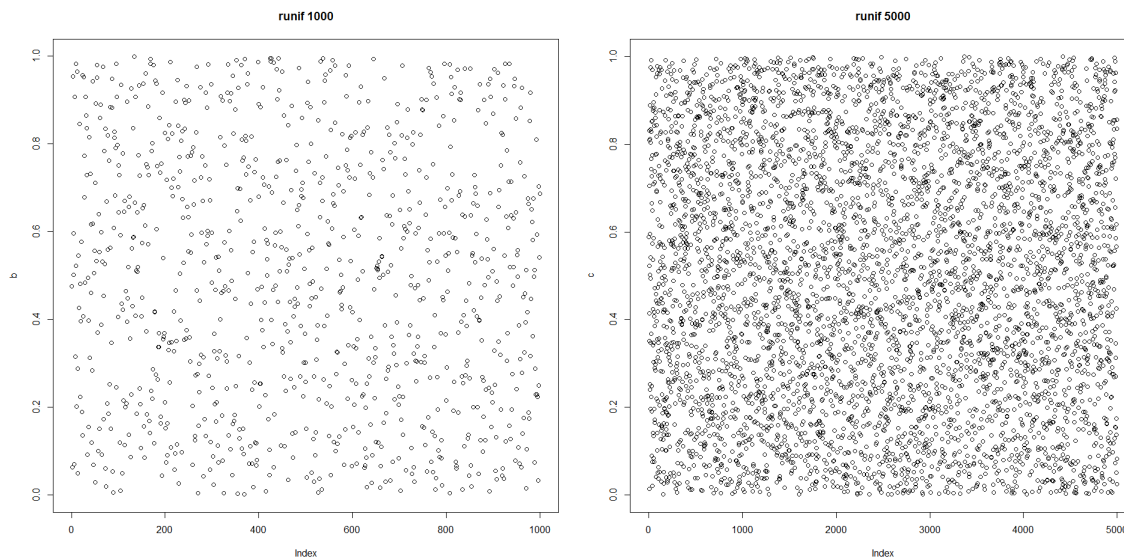
### 3.1 Nizovi niske diskrepancije i pseudoslučajan niz

U dimenziji smo  $s = 1$ . Svi nizovi su generirani u programu R preko funkcija koje su u njemu već implementirane. Pseudoslučajne brojeve smo generirali funkcijom 'runif()' koja uniformno generira slučajne brojeve između 0 i 1. Kako je van der Corputov niz asimptotski najbolji u bazi  $b = 3$ , kod njega ćemo uzeti baš tu bazu. Van der Corputov niz smo generirali R funkcijom 'vdCorput()' koja je dio paketa 'spatstat'. Naredbom 'par(mfrow=c(1,2))' prikazujemo dvije slike jednu uz drugu.

```
b<-runif(1000)
c<-runif(5000)

par(mfrow=c(1,2))
plot(b,main="runif 1000")
plot(c,main="runif 5000")
```

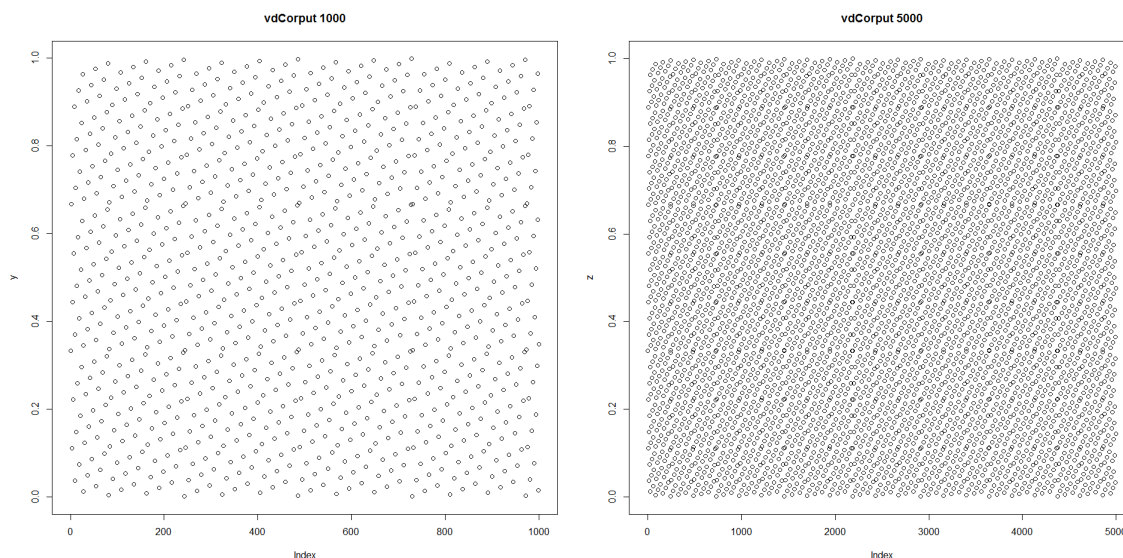
Na prve dvije slike su prikazani pseudoslučajni brojevi; na lijevoj strani je prikazan uzorak duljine 1000, a s desne strane je uzorak duljine 5000.



```
d<-vdCorput(1000,3)
e<-vdCorput(5000,3)
```

```
par(mfrow=c(1,2))
plot(d,main="vdCorput 1000")
plot(e,main="vdCorput 5000")
```

Kod druge dvije slike je s lijeve strane prikazan van der Corputov niz u bazi 3 duljine 1000, s druge 5000.



Iako je prvi niz generiran uzimanjem brojeva iz uniformne distribucije na  $[0, 1]$ , sa slika se vidi da intuitivno van der Corputov niz “uniformnije” ispunjava prostor, što se pogotovo vidi na manjem uzorku gdje se kod pseudoslučajnih brojeva daje naći par praznina kojih kod van der Corputovog niza nema.

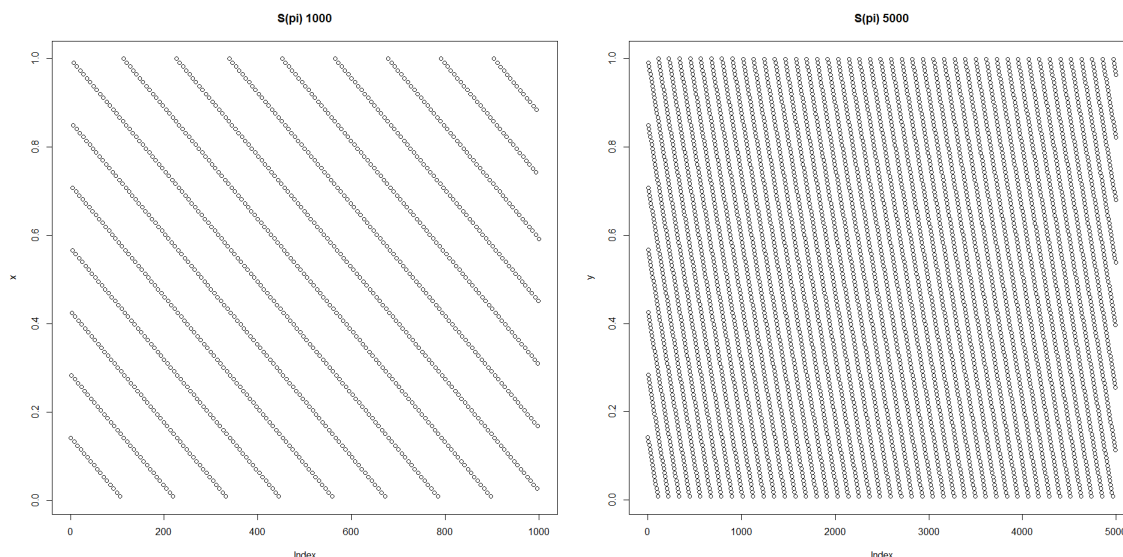
Iako se kod definiranja niza niske diskrepancije  $S(z)$  koristimo iracionalnim brojem kojeg računalo ne može (točno) prikazati, može ga prikazati prilično precizno pa ćemo grafički prikazati i njega, gdje ćemo za početnu vrijednost staviti  $z = \pi$  koji program R u sebi već ima spremljen (točan do na 15–16 decimala). Za taj niz ne postoji gotov programski kod u jeziku R, no nije ga teško implementirati jer postoji funkcija `'floor()'`. Ponovno prikazujemo dva uzorka duljina redom 1000 i 5000.

```
x<-numeric(1000)
for(i in 1:1000) {
x[i]<-i*pi-floor(i*pi)
}
```

```
y<-numeric(5000)
for(i in 1:5000) {
y[i]<-i*pi-floor(i*pi)
}
```

```
par(mfrow=c(1,2))
```

```
plot(x,main="S(pi) 1000")
plot(y,main="S(pi) 5000")
```



Pravilnost je jasna, no čak i za uzorak duljine 1000 vidimo da ovo nije baš dobra zamjena za pseudoslučajan niz, kod drugog uzorka je situacija već nešto bolja.

## 3.2 Neki primjeri kvazi Monte Carlo metode

Sad ćemo promotriti jedan integral u dimenziji  $s = 1$  koji nije teško egzaktno izračunati te ćemo ga i aproksimirati prvo Monte Carlo, a onda kvazi Monte Carlo metodom za numeričku integraciju. Koristit ćemo se sad već poznatom procjenom

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n).$$

Želimo izračunati integral  $\int_3^4 xe^x dx$ . Prvo ga pomičemo na jediničnu domenu kako bismo formulaciju problema prilagodili dosad uobičajenom zapisu

$$\int_3^4 xe^x dx = \int_0^1 (x+3)e^{x+3} dx = \int_0^1 f(x)dx,$$

uz  $f(x) = (x+3)e^{x+3}$ . Prvo ćemo integral izračunati egzaktno.

$$\int_3^4 xe^x dx = \int_0^1 (x+3)e^{x+3} dx = e^3 \int_0^1 xe^x dx + 3e^3 \int_0^1 e^x dx.$$

Prisjetimo se, po formuli parcijalne integracije vrijedi

$$\int_0^1 xe^x dx = 1 * e^1 - 0 * e^0 - \int_0^1 e^x dx = e^1 - e^1 + e^0 = 1,$$

pa, vrativši se na početni problem, imamo

$$\begin{aligned} \int_3^4 xe^x dx &= e^3 \int_0^1 xe^x dx + 3e^3 \int_0^1 e^x dx = e^3 + 3e^3(e^1 - e^0) = e^3 + 3e^4 - 3e^3 \\ &= 3e^4 - 2e^3 = 123.623376. \end{aligned}$$

Dakle, vrijednost koju aproksimiramo je 123.623376. Odredimo prvo Monte Carlo aproksimaciju. Generirat ćemo redom pseudoslučajne uzorke duljina 10, 100 i 1000 te ćemo funkciju  $f$  sami implementirati u programu R.

```
funkcija<-function(t) {
(t+3)*exp(t+3)
}
```

Sad ćemo u varijablu  $S$  spremati zbroj svih funkcijskih vrijednosti generiranih vrijednosti te ćemo ga na kraju uprosječiti.

```
x<-runif(10)
S<-0
for(i in 1:10) {
S<-S+funkcija(x[i])
}
S/10
```

Brojeve ćemo generirati pet puta (preporuča se više od jednom), pošto je uzorak malen i vidimo da je raspon vrijednosti dosta širok. Prosjek ovih pet vrijednosti ispada 118.871636.

```
> S/10
[1] 120.5889
> S/10
[1] 132.4317
> S/10
[1] 112.8168
> S/10
[1] 99.36978
> S/10
[1] 129.151
```

Za uzorak duljine 100 pišemo idući kod. Također ponavljamo pet puta. Prosjek ovdje ispada 124.16234.

```
y<-runif(100)
S<-0
for(i in 1:100) {
S<-S+funkcija(y[i])
}
S/100
```

```
> S/100
[1] 124.4008
> S/100
[1] 126.7671
> S/100
[1] 119.9199
> S/100
[1] 126.6675
> S/100
[1] 123.0564
```

Idući kod vrijedi za uzorak duljine 1000, prosjek pet ponavljanja iznosi 123.19162.

```
z<-runif(1000)
S<-0
for(i in 1:1000) {
S<-S+funkcija(z[i])
}
S/1000
```

```
> S/1000
[1] 122.4759
> S/1000
[1] 123.9871
> S/1000
[1] 122.9916
> S/1000
[1] 124.1318
> S/1000
[1] 122.3717
```



Uočavamo da se prosjek približava točnoj vrijednosti (bio bi i bliže da smo ponavljali više od 5 puta) kako povećavamo duljinu uzorka, iako skoro nijedna vrijednost zadnjeg uzorka nije bila unutar 1% točnosti. Za duljinu uzorka 100000 vrijednosti su redom is-pale 123.4507, 123.7601, 123.5808, 123.4341 i 123.6337 što je već prilično blizu traženoj vrijednosti 123.623376.

Sad ćemo integral aproksimirati kvazi Monte Carlo metodom gdje će nam točke uzorka biti van der Corputov niz u bazi  $b = 3$ . Kako je  $s$  malen, očekujemo (sukladno računu iz prijašnjih poglavlja) da će kvazi Monte Carlo metoda davati bolje procjene od Monte Carlo metode. Iz gornjeg koda možemo koristiti funkciju 'funkcija' koju smo već implementirali, a možemo koristiti i kod koji nam daje prosječnu vrijednost funkcije. Kako su točke van der Corputovog niza deterministički određene, nemamo potrebe postupak ponavljati više puta pošto će uvijek davati isti rezultat.

```
x<-vdCorput(10,3)
y<-vdCorput(100,3)
z<-vdCorput(1000,3)
```

Prisjetimo se, vrijednost koju aproksimiramo je 123.623376. Monte Carlo je (u prosjeku) redom dao vrijednosti 118.871636, 124.16234 i 123.19162 za uzorke duljina 10, 100 i 1000 te 123.57188 za uzorak duljine 100000. Kvazi Monte Carlo je redom dao vrijednosti 113.6413, 121.7685 i 123.3847 za uzorke duljine 10, 100 i 1000. Za uzorak duljine 100000 je metoda dala aproksimaciju 123.619. Iako je ova prva (najslabija) aproksimacija bila nešto slabija od Monte Carla, uočavamo da je u ostalima kvazi Monte Carlo dao bolje rezultate nego Monte Carlo metoda.

Kako smo dosta rezultata pokazali za  $s \geq 2$ , sada ćemo ove dvije metode usporediti i u višedimenzionalnom slučaju koristeći Haltonov niz niske diskrepancije. Neka je  $s = 4$ . Promatramo integral

$$\int_{[0,1]^4} tx^{\frac{1}{2}}y^2e^{t+3z+2}dxdydzdt$$

na jediničnoj četverodimenzionalnoj kocki. Koristeći Fubinijev teorem ovaj integral nije teško izračunati, vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^4} tx^{\frac{1}{2}}y^2e^{t+3z+2}dxdydzdt &= e^2 \int_0^1 te^t dt \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx \int_0^1 y^2 dy \int_0^1 e^{2z} dz \\ &= e^2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{e^3 - 1}{3} = 10.44623. \end{aligned}$$

Dakle, vrijednost integrala koju aproksimiramo je 10.44623. Implementiramo funkciju  $f$  u programu R.

```
funkcija<-function(t,x,y,z) {
t*sqrt(x)*(y^2)*exp(t+3*z+2)
}
```

Koristimo istu Monte Carlo procjenu kao i u prvom primjeru; prvo radimo to za (četvero-dimenzionalni) uzorak duljine 10.

```
a<-runif(40)
S<-0
i=1
while(i<38) {
S<-S+funkcija(a[i],a[i+1],a[i+2],a[i+3])
i<-i+4
}
S/10
```

Postupak smo ponovili 5 puta; prosječna vrijednost iznosi 12.338613. Uočimo da je treća vrijednost više nego duplo veća od one koju aproksimiramo. Ispod su pet vrijednosti koje nam je dala Monte Carlo metoda.

```
> S/10
[1] 10.1426
> S/10
[1] 9.043308
> S/10
[1] 23.4321
> S/10
[1] 11.20188
> S/10
[1] 7.873177
```

Sada radimo isto za uzorak duljine 100.

```
b<-runif(400)
S<-0
i=1
while(i<398) {
S<-S+funkcija(b[i],b[i+1],b[i+2],b[i+3])
i<-i+4
}
S/100
```

Prosječna vrijednost kod uzorka duljine 100 nakon pet ponavljanja iznosi 10.6279. Ispod je pet vrijednosti dobivenih iz Monte Carlo metode.

```
> S/100
[1] 10.30434
> S/100
[1] 10.41636
> S/100
[1] 9.337734
> S/100
[1] 12.37594
> S/100
[1] 10.70511
```

Radimo isto za uzorak duljine 1000.

```
c<-runif(4000)
S<-0
i=1
while(i<3998) {
S<-S+funkcija(c[i],c[i+1],c[i+2],c[i+3])
i<-i+4
}
S/1000
```

Prosječna vrijednost nakon pet ponavljanja kod uzorka duljine 1000 iznosi 10.327173.

```
> S/1000
[1] 9.951672
> S/1000
[1] 9.821444
> S/1000
[1] 11.17077
> S/1000
[1] 10.92814
> S/1000
[1] 9.763839
```

Uočimo opet da se aproksimacija približava traženoj vrijednosti (iako nužno nije moralo biti tako) kako povećavamo duljinu uzorka. Za uzorak duljine 100000 vrijednosti su

redom iznosile 10.41671, 10.46108, 10.5182, 10.45192 i 10.36344 što je opet dosta blizu traženoj vrijednosti od 10.44623.

Sada ćemo provesti kvazi Monte Carlo aproksimaciju koristeći Haltonov niz u dimenziji  $s = 4$ . Njega ćemo generirati korištenjem funkcije 'halton()' iz R paketa 'randtoolbox'. Za bazu ćemo koristiti prva 4 prosta broja:  $b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 7$ . Zadavši joj dimenziju  $n$ , funkcija 'halton()' sama uzima prvih  $n$  prostih brojeva za bazu Haltonovog niza. Kod Monte Carlo aproksimacije duljine  $N$ , generirali smo vektor od  $4N$  pseudoslučajnih brojeva te smo išli po njemu i uzimali po 4 broja zaredom i ubacivali ih u funkciju. Funkcija 'halton()' će nam vratiti matricu dimenzija  $N \times 4$  pa ćemo gornji kod trebati malo prilagoditi.

Prvo generiramo Haltonov niz duljine 10 i računamo kvazi Monte Carlo procjenu.

```
a<-halton(10,4)
S<-0
for(i in 1:10) {
S<-S+funkcija(a[i,1],a[i,2],a[i,3],a[i,4])
}
S/10

> S/10
[1] 1.527235
```

Uočavamo da je kvazi Monte Carlo procjena za takav mali uzorak prilično loša, što se poklapa s našim rezultatima o greški kvazi Monte Carlo metode.

```
b<-halton(100,4)
S<-0
for(i in 1:100) {
S<-S+funkcija(b[i,1],b[i,2],b[i,3],b[i,4])
}
S/100

> S/100
[1] 8.873919
```

Kod Haltonovog niza duljine 100 procjena je nešto bolja, iako je i dalje dosta daleko od tražene vrijednosti.

```
c<-halton(1000,4)
S<-0
```

```

for(i in 1:1000) {
S<-S+funkcija(c[i,1],c[i,2],c[i,3],c[i,4])
}
S/1000

> S/1000
[1] 10.10815

```

Kod uzorka duljine 1000 procjena počinje polako konvergirati prema točnoj vrijednosti.

```

d<-halton(100000,4)
S<-0
for(i in 1:100000) {
S<-S+funkcija(d[i,1],d[i,2],d[i,3],d[i,4])
}
S/100000

> S/100000
[1] 10.44306

```

Prisjetimo se da točna vrijednost iznosi 10.44623, procjena pomoću Haltonovog niza duljine 100000 je točna do na treću decimalu. Uočimo da je kod svih osim zadnje aproksimacije Monte Carlo metoda bila preciznija od kvazi Monte Carlo metode. To se slaže s rezultatima koje smo pokazali u prijašnjim poglavljima, kvazi Monte Carlo je asimptotski (po  $N$ ) preciznija, no da bi u praksi bila točnija potrebno je da veličina uzorka  $N$  bude velika, a dimenzija  $s$  mala. Ovdje je kvazi Monte Carlo metoda počela davati bolje rezultate od Monte Carlo metode tek kod uzorka duljine  $N = 100000 = 10^5$ .

### 3.3 Primjeri iz financijske matematike

Prvo ćemo pokazati jedan prilično općenit i jednostavan primjer kako izračunati vrijednost europske call opcije  $C$ . Više o samom primjeru, kao i dokaze rezultata koje ćemo koristiti se može pronaći u [18]. U Black-Scholes modelu smo (više o samom modelu se može pronaći u [16]), odnosno promatramo financijsko tržište na kojem postoje jedan rizičan i jedan nerizičan financijski instrument. Nerizičan instrument je novac koji se ukamaćuje po neprekidnoj kamatnoj stopi  $r$ , odnosno uložena 1 kuna nakon vremena  $t$  vrijedi  $e^{rt}$  kuna. Kamatu  $r$  nazivamo bezrizičnom kamatnom stopom. Rizičan financijski instrument, npr. dionica u trenutku  $t$  ima cijenu  $S(t)$  i modeliramo ju idućom stohastičkom diferencijalnom jednačinom,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

gdje je  $\mu$  srednja stopa povrata na dionicu,  $\sigma$  volatilnost dionice, a  $W = (W(t) : 0 \leq t \leq T)$  standardno jednodimenzionalno Brownovo gibanje.

Europska call opcija je financijska izvedenica koju modeliramo slučajnom varijablom  $C = (S(T) - K)^+$ , gdje je  $T$  vrijeme dospijea, a  $K$  cijena izvršenja te call opcije. Cijena opcije u trenutku  $t = 0$  je dana vrijednošću  $V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}^*(f(S(T)))$ , gdje se očekivanje uzima u odnosu na ekvivalentnu martingalnu mjeru  $\mathbb{P}^*$ , odnosno mjeru neutralnu na rizik po kojoj je drift  $\mu$  jednak nerizičnoj kamatnoj stopi  $r$ :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t).$$

To je jednadžba geometrijskog Brownovog gibanja, tj. vrijedi

$$\log S(t) = \log S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \sqrt{t} \cdot N(0, 1), \quad 0 \leq t \leq T,$$

odnosno, raspisavši po  $S(t)$ , dobije se

$$S(t) = S(0)e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \sqrt{t} \cdot N(0, 1)}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

i za  $t = T$

$$S(T) = S(0)e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \sqrt{T} \cdot N(0, 1)}.$$

Dakle, cijena opcije u trenutku  $t = 0$  nam je dana s

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}(f(S(T))) = e^{-rT} \mathbb{E}(f(S(0)e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \sqrt{T} \cdot N(0, 1)})).$$

U integralnom obliku, to je zapravo

$$V(0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} S(0) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \sqrt{T} \cdot z} e^{-z^2} dz,$$

što se transformacijom varijabli svede na integral nad  $[0, 1]$  (vidjeti kako u idućem primjeru) i onda vrijednost opcije možemo procijeniti Monte Carlo i kvazi Monte Carlo metodom. Ovo je bio jednostavan primjer koji se i egzaktno dao izračunati pošto je sama europska call opcija najjednostavnija moguća i služi samo ilustraciji metode, no princip se može poopćiti i na neke kompliciranije financijske izvedenice.

Početakom 1990-ih, znanstvenici su bili već dobro upoznati s Monte Carlo i kvazi Monte Carlo metodama te se vjerovalo da je kvazi Monte Carlo koristan samo kod integrala i funkcija koji nemaju preveliku dimenziju ( $s \leq 30$ ). Godine 1995., Paskov i Traub su u [12] pokazali da kvazi Monte Carlo metoda može davati preciznije rezultate od Monte Carlo metode unatoč visokom broju dimenzija ( $s = 360$ ). U svome su radu procjenjivali vrijednost kolateraliziranih hipotekarnih obveza (collateralized mortgage obligation, u

daljnjem tekstu CMO) uz empirijski opažene parametre dobivene od Goldman Sachsa. Za kraj ćemo iznijeti i taj primjer kao jedan od prvih primjera korištenja kvazi Monte Carlo metode u financijama, ali i jer se tim financijskim instrumentom i dalje trguje te su po samoj ideji dosta slični popularnim kolateraliziranim obvezama po dugovima (CDO, collateralized debt obligation) koji se znaju navoditi kao jedan od krivaca financijske krize 2008. Kako CMO funkcionira? Izdavač CMO-a, legalni vlasnik hipoteka kupljenih od banaka ili tvrtki koje hipoteke izdaju, stavlja hipoteke u grupu i one mu služe kao kolateral za izdavanje novih vrijednosnih papira. Kako hipotekarni dužnici uplaćuju novac, izdavač preusmjerava taj novac i kamatu na njega investitorima te zarađuje na naknadi koju uzima. Rizik izdavaču dolazi iz rizika da dužnici neće moći plaćati hipoteke (bankrot) ili da će ih platiti ranije pa će on prerano izgubiti novčani tok koji od njih dobiva. Većina banaka na papirima ne drži hipoteke već ih se nastoji što prije riješiti. Stvaranjem CMO-a, izdavač može ovisno o željama investitora hipoteke grupirati po kvaliteti i dužini otplate. CDO funkcionira slično, samo je razlika u kolateralu (jamstvu) — kod CDO-a jamstvo može biti bilo kakav novčani tok (kredit, dugovi na karticama, auto pozajmice i sl.).

Vratimo se na primjer. Promatramo CMO koji se sastoji od 10 tranši. Novčani tokovi koje izdavač prima od hipoteka se distribuiraju po svim tranšama kako bi izdavač što više minimizirao rizike. Oni se sastoje od kamate i otplate glavnice (hipoteke). Važno je napomenuti kako vrijednost skupljenih novčanih tokova ovisi i o budućim kamatnim stopama (diskontiranje). Promatramo jednu tranšu CMO-a, nazovimo ju A i želimo procijeniti njenu vrijednost. Račun se može jednostavno iskoristiti i za ostale. Hipoteke kojima se u ovom primjeru bavimo imaju vrijeme dospeljeća 30 godina i novčane uplate koje stižu mjesečno, dakle imamo 360 uplata. Mjesečne uplate se distribuiraju duž tranši po nekim predodređenim pravilima. Za  $1 \leq k \leq 360$  označavamo:  $C$  - mjesečna uplata,  $i_k$  - kamatna stopa u mjesecu  $k$ ,  $w_k$  - postotak otplate hipoteke u mjesecu  $k$ ,  $a_{360-k+1}$  - preostali anuitet nakon mjeseca  $k$ . Preostali anuitet nakon mjeseca  $k$  je dan formulom

$$a_k = 1 + v_0 + \dots + v_0^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, 360,$$

uz  $v_0 = \frac{1}{1+i_0}$  te je  $i_0$  trenutna mjesečna kamatna stopa. Koristeći gornju notaciju,  $C$  i  $a_{360-k+1}$  su konstante dok su  $i_k$  i  $w_k$  slučajne varijable koje ćemo zadati. Opišimo prvo kamatnu stopu. Pretpostavljamo da je kamatna stopa  $i_k$  oblika

$$i_k = K_0 e^{\xi_k} i_{k-1} = K_0^k i_0 e^{\xi_1 + \dots + \xi_k},$$

gdje su  $\xi_1, \dots, \xi_{360}$  nezavisne jednako distribuirane normalne slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom  $\sigma^2$  te je  $K_0$  dana konstanta. U našem slučaju uzimamo  $\sigma^2 = 0.0004$ . Pretpostavimo da je  $w_k$  dan idućom jednadžbom kao funkcija od  $i_k$

$$\begin{aligned} w_k &= w_k(\xi_1, \dots, \xi_k) = K_1 + K_2 \arctan(K_3 i_k + K_4) \\ &= K_1 + K_2 \arctan(K_3 K_0^k i_0 e^{\xi_1 + \dots + \xi_k} + K_4), \end{aligned}$$

gdje su  $K_1, K_2, K_3, K_4$  dane konstante. Novčani tok u mjesecu  $k, k = 1, 2, \dots, 360$  je

$$M_k = M_k(\xi_1, \dots, \xi_k)$$

$$= C(1 - w_1(\xi_1)) \cdots (1 - w_{k-1}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}))(1 - w_k(\xi_1, \dots, \xi_k) + w_k(\xi_1, \dots, \xi_k)a_{360-k+1}).$$

Taj novčani tok se distribuira po tranšama CMO-a po njegovim pravilima. Neka je  $G_{k;T}(\xi_1, \dots, \xi_k)$  dio novčanog toka  $M_k$  koji je usmjeren prema tranši  $T$ . Njen oblik nećemo egzaktno dati pošto je dosta složen, dovoljno je reći da je to neprekidna funkcija sačinjena od komponiranja minimum funkcija i glatkih funkcija. Da bismo našli sadašnju vrijednost tranše  $T$  za mjesec  $k, G_{k;T}(\xi_1, \dots, \xi_k)$  moramo pomnožiti diskontnim faktorom

$$u_k(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = v_0 v_1(\xi_1) \cdots v_{k-1}(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}),$$

gdje je

$$v_j(\xi_1, \dots, \xi_j) = \frac{1}{1 + i_j(\xi_1, \dots, \xi_j)} = \frac{1}{1 + K_0^j i_0 e^{\xi_1 + \dots + \xi_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, 359.$$

Sumirajući sve sadašnje vrijednosti za svaki mjesec  $k, k = 1, 2, \dots, 360$  za tranšu  $T$  dobivamo sadašnju vrijednost  $PV_T$ :

$$PV_T(\xi_1, \dots, \xi_{360}) = \sum_{k=1}^{360} G_{k;T}(\xi_1, \dots, \xi_k) u_k(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}).$$

Mi želimo izačunati očekivanu vrijednost  $\mathbb{E}(PV_T) = \mathbb{E}(PV_T(\xi_1, \dots, \xi_{360}))$ . Zamjenom varijabli dobijemo

$$\mathbb{E}(PV_T) = \int_{[0,1]^{360}} PV_T(y_1(x_1), \dots, y_{360}(x_{360})) dx_1 \cdots dx_{360},$$

gdje je  $y_i = y_i(x_i)$  dan s

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{y_i} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} dt.$$

Dakle, početni problem procjene vrijednosti CMO-a smo sveli na problem računanja 10 multivarijantnih integrala preko 360-dimenzionalne jedinične kocke. Uočimo da nakon generiranja točke  $(x_1, \dots, x_{360})$  iz jedinične 360-dimenzionalne kocke moramo invertirati funkciju distribucije standardne normalne razdiobe kako bismo dobili točku  $(y_1, \dots, y_{360})$ .

Pošto se zadnja promjena varijabli bazirala na glatkoći funkcija,  $PV_T$  možemo promatrati kao funkciju  $y_1, \dots, y_{360}$ . Prisjetimo se da je

$$PV_T = \sum_{k=1}^{360} G_{k;T}(y_1, \dots, y_{360}) u_k(y_1, \dots, y_{360}).$$



Jasno,  $u_k$  je glatka funkcija. Rekli smo i da je  $G_{k;T}$  kompozicija minimum funkcija i glatkih funkcija. Zato vjerujemo da je funkcija  $PV_T$  konačne varijacije u smislu Hardyja i Krausa i zato ćemo ovaj integral procijeniti nizom niske diskrepancije. Prisjetimo se, uz funkciju  $PV_T$  konačne varijacije grešku aproksimacije možemo odozgo omeđiti umnoškom varijacije i diskrepancije. Zato bi bilo dobro imati i gornju ogradu na varijaciju funkcije  $PV_T$ . Međutim, pošto je  $PV_T$  prilično kompleksnog oblika takvu ogradu nije lako dobiti.

Kao što smo rekli, vjerovalo se da prednost nizova niske diskrepancije nestaje s povećanjem dimenzije te da su oni općenito korisni za  $s \leq 30$ . Međutim, jedno od pojašnjenja koje smo ponudili zašto tome nije tako jest da u financijama više dimenzije (budućnost) nisu toliko bitne kao one niže (sadašnjost). Općenito je tako radi diskontiranja, a ovdje imamo i dodatnu mogućnost ranije otplate hipoteke ili bankrota. Integrand  $PV_T$  tranše  $T$  ovisi o novčanom toku  $G_{k;T}$ . Novčani tok  $G_{k;T}$  ima važno svojstvo; ako se tranša  $T$  umirovi u mjesecu  $k_T$ , odnosno cijela glavnica bude otplaćena, tada je  $G_{k;T}$  nula za sve mjesece  $k \geq k_T$ . Točnije,

$$G_{k;T}(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0, \quad \text{za svaki } k > k_T = k_T(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

Paskov je generirao 3,000,000 slučajnih uzoraka te za svaku tranšu odredio maksimalni  $k_T$ . Prenosimo njegove rezultate u idućoj tablici. Vidimo da je samo kod jedne tranše dimenzija ostala 360. Međutim, kod svih drugih, iako manji od 360 broj dimenzija je i dalje ostao visok.

Tranša	Maksimum $k_T$
A	189
B	250
C	278
D	298
E	309
G	77
H	91
J	118
R	360
Z	167

Intuitivno, ako varijable  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{360}$  ne utječu puno na  $PV_T$ , tada samo varijable  $x_1, x_2, \dots, x_k$  imaju značajnog utjecaja na integral od  $PV_T$ . Imajući to na umu, možemo definirati koncept **efektivne dimenzije**.

Neka je  $f$  funkcija na domeni  $[0, 1]^d$  i neka je  $\varepsilon > 0$ . Efektivna dimenzija  $K(\varepsilon)$  od  $f$  je najmanji prirodan broj  $k \in [1, d]$  takav da vrijedi

$$\left| \int_{[0,1]^d} f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) dx_1 \cdots dx_k - \int_{[0,1]^d} f(x) dx \right| \leq \varepsilon \left| \int_{[0,1]^d} f(x) dx \right|.$$

Efektivna dimenzija je funkcija od  $\varepsilon$  i intuitivno možemo reći da nam taj  $\varepsilon$  označava točnost koju želimo postići. Ovu definiciju efektivne dimenzije možemo primijeniti na naš problem. Kod vrednovanja financijskih izvedenica se često traže algoritmi koji izvedenicu mogu evaluirati u roku od par minuta. Pri tome ne tražimo preveliku preciznost, često je dovoljna preciznost reda  $10^{-2}$  do  $10^{-4}$ . Zato ćemo ovdje uzeti  $\varepsilon = 0.001$ . Računalno je provjereno da su vrijednosti ovih integrala otprilike  $a \cdot 10^6$  uz  $a \in [2, 42]$ . Dakle, uz ovakav  $\varepsilon$  je apsolutna greška reda veličine par tisuća dolara. Paskov je procijenio efektivne dimenzije generiranjem 20,000,000 slučajnih uzoraka i dobio je iduće rezultate.

Tranša	$K(\varepsilon)$
A	131
B	175
C	212
D	239
E	261
G	42
H	63
J	84
R	338
Z	114

Iako smo ovime u prosjeku dimenzije smanjili za 40–50, i dalje su ovo relativno veliki brojevi za većinu tranši. Sada ćemo prenijeti rezultate usporedbe Monte Carlo i kvazi Monte Carlo metode kod ove numeričke integracije. Pri Monte Carlu, autor se poslužio metodom antitetičkih varijabli koje smo spomenuli u prvom poglavlju te je 20 puta odvratio Monte Carlo metodu. Kod kvazi Monte Carlo metode, autor je koristio niz niske diskrepancije koji se naziva Sobolov niz (za više informacija o Sobolovom nizu pogledati [17], knjigu u kojoj ga je Sobol originalno uveo). Rezultate prenosimo u idućim tablicama. Prvo ćemo pokazati rezultate obične Monte Carlo metode, a onda i rezultate dobivene korištenjem metode antitetičkih varijabli.

U idućoj tablici su brojevi pobjeda Monte Carlo algoritma i Sobolovog algoritma.

Tranša	Monte Carlo	Sobol
A	3	17
B	0	20
C	3	17
D	3	17
E	2	18
G	0	20
H	0	20
J	0	20
R	8	12
Z	4	16

U idućoj tablici su najmanja i najveća relativna greška 20 Monte Carlo rezultata te relativna greška Sobolovog niza korištenjem uzorka duljine 4000.

Tranša	Najmanja greška	Najveća greška	Sobolova greška
A	3.339877e-05	2.633738e-03	1.654482e-04
B	1.037307e-04	3.040330e-03	1.766718e-06
C	3.329284e-05	3.341837e-03	2.154940e-04
D	1.099033e-04	3.536105e-03	2.626482e-04
E	7.673315e-05	3.665118e-03	2.243416e-04
G	3.094756e-05	5.107036e-04	7.305784e-06
H	9.123779e-05	1.454661e-03	3.811441e-05
J	5.152820e-05	1.768061e-03	3.172316e-06
R	3.564157e-05	9.429284e-03	1.179118e-03
Z	5.896356e-05	3.749949e-03	3.784033e-04

U idućoj tablici je broj pobjeda antitetičkih varijabli nad Sobolovim algoritmom.

Tranša	Antitetičke varijable	Sobol
A	9	11
B	1	19
C	6	14
D	10	10
E	11	9
G	2	18
H	3	17
J	2	18
R	8	12
Z	9	11

U idućoj tablici su najmanja i najveća greška 20 ponavljanja antitetičkih varijabli i greška Sobolovog niza.

Tranša	Najmanja greška	Najveća greška	Sobolova greška
A	9.850831e-06	1.078310e-03	1.654482e-04
B	1.684136e-06	8.965597e-04	1.766718e-06
C	2.351182e-06	1.017674e-03	2.154940e-04
D	3.762572e-06	8.231360e-04	2.626482e-04
E	2.111560e-05	5.663271e-04	2.243416e-04
G	1.179616e-06	1.677086e-04	7.305784e-06
H	2.368361e-06	6.108946e-04	3.811441e-05
J	6.517283e-06	7.988188e-04	3.172316e-06
R	3.910856e-05	4.748614e-03	1.179118e-03
Z	1.456121e-05	1.979723e-03	3.784033e-04

Uočavamo da Sobolov niz pruža bolje rezultate od običnog Monte Carla i to najviše kod tranši čija je efektivna dimenzija manja. Međutim, metoda antitetičkih varijabli je prilično poboljšala samu Monte Carlo metodu i kod problema čija je efektivna dimenzija visoka pruža slične rezultate kao i Sobolov niz, eventualno malo slabije.

# Bibliografija

- [1] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva, skripta*, PMF - Matematički odsjek (27.06.2018.), <https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf>.
- [2] R. Eckhardt, *Stan Ulam, John von Neumann and the Monte Carlo method*, Los Alamos Science (1987).
- [3] H. Faure, *Discrepances de suites associees a un systeme de numeration (en dimenison un)*, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), 143–182.
- [4] R.E. Catflisch i dr., *Valuation of mortgage backed securities using Brownian bridges to reduce effective dimension*, Journal of Computational Finance **1** (1997), 89–93.
- [5] Zlatko Drmač i dr., *Numerička analiza, Predavanja i vježbe*, PMF - Matematički odsjek (27.06.2018.), 2003, [https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num\\_mat/num\\_anal.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/num_anal.pdf).
- [6] F. Puchhammer i G. Larcher, *An improved bound for the star discrepancy of sequences in the unit interval*, Unif. Distrib. Theory **1** (2016), 1–14 (27.06.2018.), <https://arxiv.org/abs/1511.03869>.
- [7] J.M. Wills i H. Niederreiter, *Diskrepanz und Distanz von Massen bezüglich konvexer und Jordanscher Mengen*, Math. Z. Berichtigung *ibid.*, 1976.
- [8] F. Pillichshammer i J. Dick, *Digital Nets and Sequences, Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration*, Cambridge University Press, 2010.
- [9] H. Niederreiter i L. Kuipers, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley, New York, 1974.
- [10] R. Tichy i M. Drmota, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
- [11] H. Faure i R. Bejjan, *Discrepance de la suite de van der Corput*, C.R.Acad.Sci.Paris Ser.A **285** (1977), 313–316.

- [12] J.F. Traub i S.H. Paskov, *Faster valuation of financial derivatives*, J. Portfolio Management **22** (1995), 113–120.
- [13] N. Metropolis, *The beginning of the Monte Carlo method*, Los Alamos Science (1987).
- [14] H. Niederreiter, *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [15] K.F. Roth, *On irregularities of distribution*, Mathematika **1** (1954), 73–79.
- [16] S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer Finance, 2004.
- [17] I.M. Sobol, *Multidimensional quadrature formulae and Haar functions*, Izdat. “Nauka”, Moscow, 1969.
- [18] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje, skripta*, PMF - Matematički odsjek (27.06.2018.), <https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/2fm18.htm>.

# Sažetak

Kvazi Monte Carlo metoda je determinističko poboljšanje Monte Carlo metode, vjerojatnosne metode koja se u rješavanju determinističkih problema oslanja na generiranje slučajnih uzoraka. Slučajni uzorci Monte Carlo metode su u kvazi Monte Carlo metodi zamijenjeni dobro odabranim determinističkim uzorcima, a idealan problem gdje se to može ilustrirati je problem numeričke integracije. Kriterij odabira determinističkih točaka je diskrepancija – kvantitativna mjera odstupanja od uniformne distribuiranosti niza. Glavni rezultati ovog rada dokazuju da je diskrepancija kriterij odabira točaka kvazi Monte Carlo metode, odnosno pokazuju da nizovi niske diskrepancije garantiraju manju grešku numeričke integracije. Potom rad daje neke konstrukcije takvih nizova, zajedno s dokazima da tako definirani nizovi jesu nizovi niske diskrepancije.

# Summary

Quasi Monte Carlo method is a deterministic refinement of the Monte Carlo method, a probabilistic method which uses random samples for solving deterministic problems. Random samples from the Monte Carlo method are replaced with well-chosen deterministic samples and an ideal problem where this can be shown is the problem of numerical integration. The criterion for choosing deterministic points is discrepancy – a quantitative measure of deviation from the uniform distribution of a sequence. The main results of this thesis prove that discrepancy is the criterion for choosing quasi Monte Carlo samples, that is, they show that sequences of low discrepancy guarantee smaller error of numerical integration. Moreover, the thesis gives several constructions of such sequences with proofs that the constructed sequences are sequences of low discrepancy.



# Životopis

Rođen sam 14. ožujka 1995. godine u Zagrebu. Godine 2009. upisujem Desetu gimnaziju u Zagrebu, opći smjer. Godine 2013. upisao sam Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje sam 2016. godine završio Preddiplomski sveučilišni studij Matematike, a nakon njega sam iste godine upisao Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike.