SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Vidović

SKUPOVI KAO TEMELJNI MATEMATIČKI KONCEPT

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv.prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ___________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. __________________________, predsjednik
2. __________________________, član
3. __________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. __________________________
2. __________________________
3. __________________________

Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima zbog neizmjerne ljubavi i podrške koju mi pružaju.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavaju se elementarni aspekti teorije skupova. Rad je podijeljen na tri poglavlja. U prvom poglavlju Relacije i funkcije opisuju se osnovna svojstva skupa koja su potrebna za daljnu analizu u radu. Proučavaju se relacije između skupova te uređene trojke dva skupa i funkcijske relacije odnosno funkcije.
U drugom poglavlju uvodi se pojam Peanova trojka i opisuje princip definicije indukcijom. Nakon toga, definira se izomorfizam Peanovih trojki i pokazuje postojanje jedinstvenog izomorfizma između dvije Peanove trojke.
U trećem poglavlju Beskonačnost definiraju se i karakteriziraju beskonačni skupovi. Pokazuje se egzistencija Peanove trojke i na kraju egzistencija beskonačnog skupa.

Poglavlje 1

Relacije i funkcije

1.1 Osnovna svojstva skupova

Osnovni pojmovi koje proučavamo su pojam skupa te pojam "*biti element*" skupa. Činjenicu da je x element skupa S označavamo sa $x \in S$. Smatramo da je skup potpuno određen svojim elementima. Precizni smisao ovoga sadržan je u sljedećem: ako su S i T skupovi takvi da za svaki x vrijedi

$$x \in S \Leftrightarrow x \in T, \tag{1.1}$$

onda je $S = T$. Uočimo da (1.1) znači sljedeće:

$$(x \in S \text{ i } x \in T) \text{ ili } (x \notin S \text{ i } x \notin T).$$

Pri tome $x \notin S$ označava da x nije element skupa S.

Za skup koji nema nijedan element kažemo da je prazan skup. Drugim riječima skup S je prazan, ako za svaki x vrijedi $x \notin S$. Uočimo da takav skup mora biti jedinstven, tj. ako su S i T prazni skupovi, onda je $S = T$.

Smatramo da postoji prazan skup i za njega kostimo oznaku $\emptyset$.

Nadalje, smatramo da vrijedi sljedeće: ako su x i y neki objekti, onda postoji skup kojem su oni jedini elementi, tj. postoji skup S takav da za svaki z vrijedi

$$z \in S \Leftrightarrow z = x \text{ ili } z = y.$$

Uočimo da je skup S s tim svojstvom jedinstven. Za njega koristimo oznaku $\{x, y\}$. Očito je da za bilo koje x i y vrijedi

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

Za bilo koji x postoji skup S koji sadrži samo x, tj. takav da za svaki z vrijedi

$$z \in S \Leftrightarrow z = x. \tag{1.2}$$

Naime, skup $\{x, x\}$ ima traženo svojstvo. Skup S sa svojstvom (1.2) je očito jedinstven. Za njega koristimo oznaku $\{x\}$.

Ako su x i y neki objekti, onda ćemo skup

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

označavati sa (x, y). Za (x, y) kažemo da je uređeni par kojemu je na prvom mjestu x, a na drugom y.

Lema 1.1.1. *Pretpostavimo da su u, v i w takvi da je $\{u, v\} = \{u, w\}$. Tada je $v = w$*

Dokaz. Imamo $v \in \{u, w\}$ pa je

$$v = u \text{ ili } v = w.$$

S druge strane iz $w \in \{u, v\}$ slijedi

$$w = u \text{ ili } w = v.$$

Dakle

$$(v = u \text{ ili } v = w) \text{ i } (w = u \text{ ili } w = v)$$

pa direktno slijedi $w = v$.

□

Propozicija 1.1.2. *Za sve x, y, a, b vrijedi*

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \text{ i } y = b.$$

Dokaz. Jasno je da $x = a$ i $y = b$ povlači $(x, y) = (a, b)$.

Obratno, pretpostavimo da je $(x, y) = (a, b)$. Dakle

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}. \tag{1.3}$$

Slijedi $\{x\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$ pa je

$$\{x\} = \{a\} \text{ ili } \{x\} = \{a, b\}.$$

U oba slučaja imamo $a \in \{x\}$ pa je $a = x$. Sada prema (1.3) vrijedi

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, b\}\}.$$

Iz prethodne leme slijedi $\{x, y\} = \{x, b\}$, pa ponovna primjena leme daje $y = b$. Prema tome $x = a$ i $y = b$.

□

Ako je dan skup S, onda postoji skup svih $x \in S$ s nekim unaprijed zadanim svojstvom P i taj skup označavamo

$$\{x \in S \,:\, x \text{ ima svojstvo } P\}.$$

Općenito, ne mora postojati skup svih x s nekim zadanim svojstvom (ako se ne ograničimo na one x koji su u nekom unaprijed zadanom skupu S).

Primjer 1.1.3. *Pretpostavimo da postoji skup S koji se sastoji od svih skupova X takvih da $X \notin X$. Dakle $S = \{X \text{ skup } : X \notin X\}$.*

Pretpostavimo da je $S \in S$. Tada iz definicije skupa S slijedi da $S \notin S$, kontradikcija. Prema tome $S \notin S$, pa iz definicije skupa S slijedi $S \in S$, kontradikcija.

Primjer 1.1.4. *Ne postoji skup svih skupova*

Naime pretpostavimo da postoji takav skup i označit ćemo ga s $\mathcal{S}$. Tada postoji skup

$$\{X \in \mathcal{S} : X \notin S\},$$

tj. skup

$$\{X \text{ skup } : X \notin X\}.$$

No u prethodnom primjeru smo vidjeli da takav skup ne postoji.
Pretpostavimo da su A i B skupovi. Smatramo da postoji skup svih x takvih da je $x \in A$ ili $x \in B$. Uočimo da je taj skup jedinstven. Označavamo ga s $A \cup B$ i nazivamo unija skupova A i B. Dakle

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}.$$

Ako su A i B skupovi, definiramo

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}.$$

Uočimo da je

$$A \cap B = \{x \in B : x \in A\}$$

te

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}.$$

Neka su S i T skupovi. Kažemo da je S podskup od T i pišemo $S \subseteq T$, ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \in T$. Uočimo da za svaki skup S vrijedi $S \subseteq S$ i $\emptyset \subseteq S$.
Za skupove A i B definiramo skup

$$A \setminus B = \{x \in A : x \neq B\}.$$

Za $A \setminus B$ kažemo da je razlika skupova A i B.
Neka su S i T skupovi. Tada iz (1.1) dobivamo sljedeću ekvivalenciju:

$$S = T \Leftrightarrow S \subseteq T \text{ i } T \subseteq S.$$

Neka je S skup. Smatramo da tada postoji skup svih T takvih da je $T \subseteq S$, tj. skup

$$\{T : T \subseteq S\}.$$

Taj skup označavamo sa $\mathcal{P}(S)$ i nazivamo partitivni skup od S. Dakle $\mathcal{P}(S)$ je skup svih podskupova od S.

Propozicija 1.1.5. *Neka su S i T skupovi. Tada postoji skup svih uređenih parova (x, y) takvih da je $x \in S$ i $y \in T$.*

Dokaz. Neka su $x \in S$ i $y \in T$. Tada je $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Očito je $\{x\} \subseteq S \cup T$, pa je $\{x\} \in \mathcal{P}(S \cup T)$. Isto tako imamo $\{x, y\} \in \mathcal{P}(S \cup T)$. Prema tome

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(S \cup T).$$

Dakle $(x, y) \subseteq \mathcal{P}(S \cup T)$. Prema tome

$$(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S \cup T)).$$

Definirajmo

$$\Phi = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S \cup T)) : \exists x \in T, \exists x \in T \text{ takav da je } z = (x, y)\}$$

(znamo da takav skup postoji). Ako je $z \in \Phi$, onda je $z = (x, y)$ za neke $x \in S$ i $y \in T$. Obratno, ako su $x \in S$ i $y \in T$, onda razmatranje provedeno na početku ovog dokaza pokazuje da je $(x, y) \in \Phi$. Prema tome Φ je skup svih (x, y) takvih da je $x \in S$ i $y \in T$. Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Ako su S i T skupovi onda skup svih (x, y) takvih da je $x \in S$ i $y \in T$ (čiju smo egzistenciju dokazali u prethodnoj propoziciji) označavamo sa $S \times T$ i nazivamo Kartezijev produkt skupova S i T. Dakle

$$S \times T = \{(x, y) : x \in S, y \in T\}.$$

Napomena 1.1.6. *Neka su S i T skupovi. Ako je $x \in S$ i $y \in T$, onda je očito*

$$(x, y) \in S \times T.$$

Obratno, ako su x i y takvi da je $(x, y) \in S \times T$, onda je

$$x \in S \text{ i } y \in T.$$

Naime iz $(x, y) \in S \times T$ slijedi da postoje

$$a \in S \text{ i } b \in T$$

takvi da je

$$(x, y) = (a, b).$$

Slijedi $x = a$ i $y = b$ pa je $x \in S$ i $y \in T$.

1.2 Relacije

Definicija 1.2.1. *Neka su S i T skupovi. Tada za svaki podskup od $S \times T$ kažemo da je relacija između S i T.*

Definicija 1.2.2. *Neka su S i T skupovi te neka je ρ relacija između S i T. Pretpostavimo da za svaki $x \in S$ postoji jedinstveni $y \in T$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Tada za ρ kažemo da je funkcijska relacija između S i T.*

Primjer 1.2.3. *Neka je T bilo koji skup. Tada je*

$$\emptyset \times T = \emptyset.$$

Stoga je $\emptyset$ jedina relacija između $\emptyset$ i T. Uočimo da je $\emptyset$ funkcijska relacija između $\emptyset$ i T. Neka je S skup. Tada je

$$S \times \emptyset = \emptyset.$$

Dakle $\emptyset$ je jedina relacija između S i $\emptyset$. Ako je $S \neq \emptyset$, onda $\emptyset$ nije funkcijska relacija između S i $\emptyset$.

Primjer 1.2.4. *Neka su S i T skupovi te neka je $y_0 \in T$. Neka je*

$$\rho = \{z \in S \times T : \exists x \in S \text{ takav da je } z = (x, y_0)\}.$$

Tada je ρ funkcijska relacija između S i T.

Očito je $\rho \subseteq S \times T$, dakle ρ je relacija između S i T. Neka je $x \in S$. Iz definicije od ρ je jasno da je $(x, y_0) \in \rho$. Pretpostavimo da je $y \in T$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Iz definicije od ρ slijedi da postoji $x' \in S$ takav da je

$$(x, y) = (x', y_0).$$

Iz ovoga slijedi da je $y = y_0$. Prema tome postoji jedinstveni $y \in T$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Prema tome ρ je funkcijska relacija između S i T.
Za x, y i z definiramo

$$(x, y, z) = ((x, y), z).$$

Iz ove definicije je jasno da za sve x, y i z, te a, b i c vrijedi

$$(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow x = a \text{ i } y = b \text{ i } z = c.$$

Napomena 1.2.5. *Neka su S, T, S', T' skupovi takvi da je $S \subseteq S'$ i $T \subseteq T'$. Tada je očito*

$$S \times T \subseteq S' \times T'.$$

Stoga vrijedi:

ako je ρ relacija između S i T, onda je ρ relacija između S' i T'.

Pretpostavimo sada dodatno da je ρ funkcijska relacija između S i T. Tada je ρ funkcijska relacija između S i T'. Naime, neka je $x \in S$. Tada postoji $y \in T$ takav da je

$$(x, y) \in \rho.$$

Očito je $y \in T'$. Pretpostavimo da su $y_1, y_2 \in T'$ takvi da je

$$(x, y_1) \in \rho \text{ i } (x, y_2) \in \rho.$$

Zbog $\rho \subseteq S \times T$ vrijedi

$$(x, y_1) \in S \times T \text{ i } (x, y_2) \in S \times T,$$

pa slijedi $y_1, y_2 \in T$. Budući da je ρ funkcijska relacija između S i T, vrijedi $y_1 = y_2$. Zaključak ρ je funkcijska relacija između S i T'.

Propozicija 1.2.6. *Neka su S, T, S', T' skupovi. Pretpostavimo da je ρ funkcijska relacija između S i T, te da je ρ u isto vrijeme funkcijska relacija između S' i T'. Tada je $S = S'$.*

Dokaz. Neka je $x \in S$. Budući da je ρ funkcijska relacija između S i T postoji $y \in T$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Prema pretpostavci propozicije vrijedi

$$\rho \subseteq S' \times T',$$

pa je

$$(x, y) \in S' \times T'$$

iz čega slijedi $x \in S'$. Dakle ako je $x \in S$, onda je $x \in S'$. Prema tome $S \subseteq S'$. Analogno zaključujemo da je $S' \subseteq S$. Stoga je $S = S'$. $\square$

1.3 Funkcije

Neka su S i T skupovi te neka je ρ funkcijska relacija između S i T. Za uređenu trojku (S, T, ρ) kažemo da je funkcija sa S u T, pišemo

$$f : S \to T.$$

Pretpostavimo da je f funkcija sa S u T. Tada je $f = (S, T, \rho)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T. Pretpostavimo da su $x \in S$ i $y \in T$ takvi da je $(x, y) \in \rho$. Tada y označavamo sa $f(x)$.

Ako je f funkcija sa S u T, onda za S kažemo da je domena funkcije f, a za T kažemo da je kodomena funkcije f.

Neka su S i T skupovi, te neka je ρ relacija između S i T. Kažemo da je ρ injektivna relacija ako za sve x_1, x_2, y_1, y_2 takve da je

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \rho \text{ i } x_1 \neq x_2$$

vrijedi

$$y_1 \neq y_2.$$

Definicija 1.3.1. *Neka su S i T skupovi te neka je $f : S \to T$. Tada je $f = (S, T, \rho)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T. Kažemo da je funkcija f injektivna ako je relacija ρ injektivna.*

Propozicija 1.3.2. *Neka su S, T, S', T' skupovi te neka su $f : S \to T$ i $g : S' \to T'$ funkcije. Tada je*

$$f = g \Leftrightarrow S = S',\ T = T' \text{ i } f(x) = g(x)\ \forall x \in S.$$

Dokaz. Imamo

$$f = (S, T, \rho) \text{ i } g = (S', T', \psi),$$

gdje je ρ funkcijska relacija između S i T i ψ funkcijska relacija između S' i T'. Pretpostavimo da je $f = g$. Tada je

$$S = S', T = T' \text{ i } \rho = \psi.$$

Neka je $x \in S$. Tada je $(x, f(x)) \in \rho$. Slijedi

$$(x, f(x)) \in \psi.$$

Nadalje, zbog $x \in S'$ vrijedi $(x, g(x)) \in \psi$. Iz činjenice da je ψ polufunkcijska relacija slijedi

$$f(x) = g(x).$$

Dakle

$$f(x) = g(x) \text{ za svaki } x \in S.$$

Pretpostavimo da je

$$S = S', T = T' \text{ i } f(x) = g(x) \text{ za svaki } x \in S.$$

Dokažimo da je

$$\rho = \psi.$$

Neka je $a \in \rho$. Znamo da je $\rho \subseteq S \times T$ pa je $a \in S \times T$, što povlači

$$a = (x, y) \text{ za neki } x \in S \text{ i neki } y \in T.$$

Znamo da je $(x, f(x)) \in \rho$. Iz činjenice da je ρ polufunkcijska relacija slijedi $y = f(x)$. Prema tome

$$a = (x, f(x)).$$

Znamo da je $f(x) = g(x)$ pa slijedi

$$a = (x, g(x)).$$

S druge strane $x \in S'$, slijedi

$$(x, g(x)) \in \psi.$$

Prema tome $a \in \psi$. Time smo dokazali da je $\rho \subseteq \psi$. Analogno dobivamo da je $\psi \subseteq \rho$ pa zaključujemo da je $\rho = \psi$.

Dakle $(S, T, \rho) = (S', T', \psi)$, tj. $f = g$. □

Neka su S i T skupovi te neka je

$$f : S \to T$$

funkcija. Imamo $f = (S, T, \rho)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T. Pretpostavimo da je f injekcija. Neka su

$$x_1, x_2 \in S \text{ takvi da je } x_1 \neq x_2.$$

Imamo

$$(x_1, f(x_1)) \in \rho \text{ i } (x_2, f(x_2)) \in \rho$$

pa iz činjenice da je relacija ρ injektivna slijedi da je

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Dakle ako je f injekcija onda za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da je $x_1 \neq x_2$ vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$. Obratno, pretpostavimo da za sve $x_1, x_2 \in S$ takve da je $x_1 \neq x_2$ vrijedi

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Tvrdimo da je f injekcija. Pretpostavimo da su x_1, x_2, y_1, y_2 takvi da je

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \rho \text{ i } x_1 \neq x_2.$$

Budući da je $\rho \subseteq S \times T$ imamo

$$x_1, x_2 \in S \text{ i } y_1, y_2 \in T.$$

Iz $(x_1, y_1) \in \rho$ slijedi $y_1 = f(x_1)$ te analogno $y_2 = f(x_2)$. Prema pretpostavci vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$, tj. $y_1 \neq y_2$. Prema tome relacija ρ je injektivna, pa slijedi da je f injekcija.

Kažemo da je ρ relacija ako postoje skupovi S i T takvi da je ρ relacija između S i T.

Neka je ρ relacija. Tada postoji skup

$$\{y : \exists x \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}.$$

Naime, ako su S i T takvi da je ρ relacija između S i T, navedeni skup je upravo skup

$$\Omega = \{y \in T : \exists x \in S \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\},$$

za kojeg znamo da postoji. Dakle tvrdimo da za svaki y vrijedi ekvivalencija

$$y \in \Omega \Leftrightarrow \exists x \text{ takav da je } (x, y) \in \rho. \tag{1.4}$$

Implikacija $\Rightarrow$ očito vrijedi.

Obratno, ako je y' takav da postoji x sa svojstvom $(x, y) \in \rho$, onda zbog $\rho \subseteq S \times T$ imamo $(x, y) \in S \times T$ pa je $x \in S$ i $y \in T$ te je $y \in \Omega$.

Dakle vrijedi (1.4), prema tome postoji skup

$$\{y : \exists x \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}.$$

Za taj skup kažemo da je slika relacije ρ i označavamo ga sa $\operatorname{Im} \rho$.

Iz dokazanog zaključujemo sljedeće: ako je ρ relacija između S i T, onda je $\operatorname{Im} \rho \subseteq T$.

Napomena 1.3.3. *Neka je ρ relacija između S i T. Tada je ρ relacija između S i $\operatorname{Im} \rho$. Naime, neka je $z \in \rho$. Tada je $z \in S \times T$ pa je $z = (x, y)$ za neke $x \in S$ i $y \in T$. Iz $(x, y) \in \rho$ slijedi $y \in \operatorname{Im} \rho$. Prema tome*

$$(x, y) \in S \times \operatorname{Im} \rho,$$

tj. $z \in S \times \operatorname{Im}\rho$*, čime smo dokazali da je*

$$\rho \subseteq S \times \operatorname{Im}\rho.$$

Definicija 1.3.4. *Neka su* S *i* T *skupovi te neka je* $f : S \to T$ *funkcija. Tada postoji funkcijska relacija* ρ *između* S *i* T *takva da je* $f = (S, T, \rho)$*. Za* $\operatorname{Im}\rho$ *kažemo da je slika funkcije* f*. Sliku funkcije* f *označavamo sa* $\operatorname{Im} f$*.*

Uočimo da je

$$\operatorname{Im} f = \{y \in T : \exists x \in S \text{ takav da je } y = f(x)\}.$$

Naime, ako je $y \in \operatorname{Im} f$ onda je $y \in \operatorname{Im}\rho$ pa slijedi da je $y \in T$ te da postoji $x \in S$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Slijedi $y = f(x)$.
Obratno, ako je $y \in T$ takav da postoji $x \in S$ sa svojstvom $y = f(x)$, onda je $(x, y) \in \rho$ pa je $y \in \operatorname{Im}\rho$, tj. $y \in \operatorname{Im} f$.

Definicija 1.3.5. *Za funkciju* $f : S \to T$ *kažemo da je surjekcija ako je* $\operatorname{Im} f = T$*.*

Uočimo da vrijedi sljedeće

$$f \text{ surjekcija } \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{T}\ \exists x \in S \text{ takav da je } y = f(x).$$

Neka je ρ relacija. Tada postoji skup

$$\{x : \exists y \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}.$$

Naime, ako je ρ relacija između S i T to je upravo skup

$$\{x \in S : \exists y \in T \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}.$$

Za skup

$$\{x : \exists y \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}$$

kažemo da je domena relacije ρ i označavamo ga sa $\operatorname{Dom}\rho$.
Uočimo sljedeće: ako je ρ funkcijska relacija između S i T onda je $\operatorname{Dom}\rho = S$.
Ako je ρ relacija između S i T, onda je očito ρ relacija između $\operatorname{Dom}\rho$ i T. Posebno ρ je relacija između $\operatorname{Dom}\rho$ i $\operatorname{Im}\rho$.

Neka je ρ relacija. Tada postoji skup

$$\{(y, x) : (x, y)\}.$$

Naime, ako je ρ relacija između S i T, onda definiramo

$$\rho' = \{z \in T \times S : \exists x \in S \text{ i } \exists y \in T \text{ takav da je } z = (y, x) \text{ i } (x, y) \in \rho\}.$$

Očito, ako je $z \in \rho'$, onda je $z = (y, x)$, gdje su x i y takvi da je $(x, y) \in \rho$. Obratno, ako su x i y takvi da je $(x, y) \in \rho$, onda je $x \in S$ i $y \in T$, pa je $(y, x) \in \rho'$. Prema tome postoji skup

$$\{(y, x) : (x, y)\}.$$

Taj skup označavamo sa ρ^{-1} i nazivamo inverzna relacija od ρ.
Uočimo da smo dokazali sljedeće: ako je ρ relacija između S i T, onda je ρ^{-1} relacija između T i S.
Za svaku relaciju ρ očito vrijedi

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho.$$

Neka je ρ relacija. Tada je

$$\operatorname{Im}\rho = \{y : \exists y \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}$$

i

$$\operatorname{Dom}\rho^{-1} = \{y : \exists x \text{ takav da je } (y, x) \in \rho^{-1}\}$$

pa je

$$\operatorname{Im}\rho = \operatorname{Dom}\rho^{-1}. \tag{1.5}$$

Kada u (1.5) umjesto ρ stavimo ρ^{-1} dobivamo

$$\operatorname{Im}\rho^{-1} = \operatorname{Dom}\rho.$$

Primjer 1.3.6. *Neka je* $S = \{a, b, c\}, T = \{1, 2, 3\}$ *te*

$$\rho = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3)\}.$$

Tada je ρ *(na trivijalan način) injektivna relacija. No* ρ^{-1} *nije injektivna relacija jer je*

$$\rho^{-1} = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}.$$

Neka je ρ relacija. Kažemo da je ρ polufunkcijska relacija ako za sve x, y_1, y_2 takve da je $(x, y_1), (x, y_2) \in \rho$ vrijedi $y_1 = y_2$.

Propozicija 1.3.7. *Neka je* ρ *relacija između* S *i* T*. Tada je* ρ *polufunkcijska relacija ako i samo ako je* ρ *funkcijska relacija između* $\operatorname{Dom}\rho$ *i* T*.*

Dokaz. Tvrdnja očito vrijedi.

□

Propozicija 1.3.8. *Neka je* ρ *relacija. Tada je* ρ *polufunkcijska relacija ako i samo ako je* ρ^{-1} *injektivna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je ρ polufunkcijska relacija. Neka su x_1, x_2, y_1, y_2 takvi da je

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \rho^{-1} \text{ i } x_1 \neq x_2.$$

Tvrdimo da je $y_1 \neq y_2$. Vrijedi

$$(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in \rho$$

pa iz činjenice da je ρ polufunkcijska relacija, te da je $x_1 \neq x_2$ slijedi

$$y_1 \neq y_2.$$

Time smo dokazali da je ρ^{-1} injektivna relacija.

Obratno, pretpostavimo da je ρ^{-1} injektivna relacija. Dokažimo da je ρ polufunkcijska. Pretpostavimo da su x_1, x_2, y_1, y_2 takvi da je

$$(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in \rho \text{ i } y_1 = y_2.$$

Želimo dokazati da je $x_1 = x_2$. Imamo

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \rho^{-1}$$

pa iz činjenice $y_1 = y_2$ i činjenice da je ρ^{-1} injektivna slijedi

$$x_1 = x_2.$$

Zaključak ρ je polufunkcijska relacija.

□

Korolar 1.3.9. *Neka je ρ relacija. Tada je ρ injektivna ako i samo ako je ρ^{-1} polufunkcijska.*

Dokaz. Ovo slijedi iz prethodne propozicije i činjenice da je $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

□

Definicija 1.3.10. *Za funkciju f kažemo da je bijekcija ako je f injekcija i surjekcija.*

Pretpostavimo da je $f : S \to T$ bijekcija. Imamo

$$f = (S, T, \rho),$$

pri čemo je ρ funkcijska relacija između S i T. Očito je ρ^{-1} relacija između T i S, a prema prethodnoj propoziciji vrijedi da je ρ^{-1} polufunkcijska relacija (jer je f injektivna). Prema propoziciji 1.3.7 ρ^{-1} je funkcijska relacija između $\operatorname{Dom}\rho^{-1}$ i S. Koristeći (1.5) i činjenicu da je f surjekcija dobivamo

$$\operatorname{Dom}\rho^{-1} = \operatorname{Im}\rho = T.$$

Prema tome ρ^{-1} je funkcijska relacija između T i S. Stoga je (T, S, ρ^{-1}) funkcija. Tu funkciju označavamo sa f^{-1} i nazivamo inverzna funkcija od f. Uočimo da je ρ^{-1} injektivna relacija (jer je ρ polufunkcijska) te da je $\operatorname{Im} \rho^{-1} = \operatorname{Dom} \rho = S$. Prema tome f^{-1} je injekcija i surjekcija, dakle bijekcija. Uočimo da je

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

1.4 Kompozicija relacija

Definicija 1.4.1. *Neka su ρ i ψ relacije. Tada postoji skup*

$$\{(x, z) : \exists y \text{ takav da je } (x, y) \in \rho \text{ i } (y, z) \in \psi\}. \tag{1.6}$$

Naime, ako je ρ relacija između S i T i ψ relacija između A i B onda je skup s navedenim svojstvom upravo skup

$$\{u \in S \times B : \exists x, y, z \text{ takvi da je } u = (x, z), (x, y) \in \rho \text{ i } (y, z) \in \psi\}.$$

Skup (1.6) označavamo sa $\rho * \psi$ i zovemo kompozicija relacija ρ i ψ.

Propozicija 1.4.2. *Neka su ρ, ψ i ω relacije. Tada je*

$$(\rho * \psi) * \omega = \rho * (\psi * \omega).$$

Dokaz. Neka je $u \in (\rho * \psi) * \omega$. Tada postoje x, y, z takvi da je

$$u = (x, z), (x, y) \in \rho * \psi \text{ i } (y, z) \in \omega.$$

Nadalje postoji z' takav da je $(x, z') \in \rho$ i $(z', y) \in \psi$. Iz

$$(z', y) \in \psi \text{ i } (y, z) \in \omega$$

slijedi $(z', z) \in \psi * \omega$. Ovo, zajedno sa $(x, z') \in \rho$, povlači

$$(x, z) \in \rho * (\psi * \omega),$$

tj. $u \in \rho * (\psi * \omega)$. Time smo dokazali da je

$$(\rho * \psi) * \omega \subseteq \rho * (\psi * \omega).$$

Analogno dobivamo

$$\rho * (\psi * \omega) \subseteq (\rho * \psi) * \omega.$$

Time smo dokazali tvrdnju propozicije.

□

Propozicija 1.4.3. *Neka su ρ i ψ relacije. Tada je*

$$(\rho * \psi)^{-1} = \psi^{-1} * \rho^{-1}.$$

Dokaz. Neka je $u \in (\rho * \psi)^{-1}$. Tada je $u = (z, x)$, pri čemu su z i x takvi da je

$$(x, z) \in \rho * \psi.$$

Slijedi da postoji y takav da je

$$(x, y) \in \rho \text{ i } (y, z) \in \psi.$$

Stoga je $(y, x) \in \rho^{-1}$ i $(z, y) \in \psi^{-1}$ pa slijedi

$$(z, x) \in \psi^{-1} * \rho^{-1},$$

tj. $u \in \psi^{-1} * \rho^{-1}$. Prema tome

$$(\rho * \psi)^{-1} \subseteq \psi^{-1} * \rho^{-1}.$$

Obratno, neka je $u \in \psi^{-1} * \rho^{-1}$. Tada postoje x, y, z takvi da je

$$u = (x, z), (x, y) \in \psi^{-1} \text{ i } (y, z) \in \rho^{-1}.$$

Slijedi $(y, x) \in \psi$ i $(z, y) \in \rho$ pa je $(z, x) \in \rho * \psi$. Stoga je

$$(x, z) \in (\rho * \psi)^{-1}$$

tj. $u \in (\rho * \psi)^{-1}$. Dakle

$$\psi^{-1} * \rho^{-1} \subseteq (\rho * \psi)^{-1}.$$

□

Propozicija 1.4.4. *Neka su ρ i ψ injektivne relacije. Tada je $\rho * \psi$ injektivna relacija.*

Dokaz. Neka su x_1, x_2, y_1, y_2 takvi da je

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \rho * \psi \text{ i } x_1 \neq x_2.$$

Tada postoje z_1 i z_2 takvi da je

$$(x_1, z_1) \in \rho \text{ i } (z_1, y_1) \in \psi \text{ te } (x_2, z_2) \in \rho \text{ i } (z_2, y_2) \in \psi.$$

Budući da je ρ injektivna relacija i $x_1 \neq x_2$ vrijedi $z_1 \neq z_2$. Sada iz činjenice da je ψ injektivna slijedi da je $y_1 \neq y_2$. Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Korolar 1.4.5. *Neka su ρ i ψ polufunkcijske relacije. Tada je $\rho * \psi$ polufunkcijska relacija.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.3.8 dovoljno je dokazati da je $(\rho * \psi)^{-1}$ injektivna. Prema propoziciji 1.4.3 vrijedi

$$(\rho * \psi)^{-1} = \psi^{-1} * \rho^{-1},$$

pa injektivnost relacije $(\rho * \psi)^{-1}$ slijedi iz propozicije 1.4.4 i propozicije 1.3.8.

□

Propozicija 1.4.6. *Neka je ρ funkcijska relacija između S i T te neka je ψ funkcijska relacija između T i V. Tada je $\rho * \psi$ funkcijska relacija između S i V.*

Dokaz. Iz korolara 1.4.5 slijedi da je $\rho * \psi$ polufunkcijska relacija. Nadalje, $\rho * \psi$ je očito relacija između S i V. Prema tome za svaki $x \in S$ postoji najviše jedan $z \in V$ takav da je

$$(x, z) \in \rho * \psi.$$

Preostaje dokazati da za svaki $x \in S$ postoji $z \in V$ takav da je

$$(x, z) \in \rho * \psi.$$

Neka je $x \in S$. Tada postoji $y \in T$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Nadalje, postoji $z \in V$ takav da je $(y, z) \in \psi$. Slijedi $(x, z) \in \rho * \psi$.

□

Definicija 1.4.7. *Neka su S, T i V skupovi te neka su $f : S \to T$ i $g : T \to V$ funkcije. Imamo $f = (S, T, \rho)$ i $g = (T, V, \psi)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T te ψ funkcijska relacija između T i V. Definirajmo*

$$g \circ f = (S, V, \rho * \psi).$$

Prema prethodnoj propoziciji $g \circ f$ je funkcija sa S u V. Za $g \circ f$ kažemo da je kompozicija funkcija f i g.

Vezano za prethodnu definciju uočimo sljedeće. Neka je $x \in S$. Tada je $(x, f(x)) \in \rho$ te $(f(x), g(f(x))) \in \psi$ iz čega slijedi

$$(x, g(f(x))) \in \rho * \psi.$$

Stoga je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Neka je ρ relacija te neka je A skup. Tada postoji skup

$$\{y : \exists x \in A \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}.$$

Naime to je skup

$$\{y \in T : \exists x \in A \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\},$$

pri čemu je T skup takav da je ρ relacija između S i T (za neki skup S). Za skup

$$\{y : \exists x \in A \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}$$

koristimo oznaku $A\rho$. Za $A\rho$ kažemo da je slika skupa A pri relaciji ρ.
Uočimo sljedeće: ako je ρ relacija između S i T onda je $S\rho = \operatorname{Im}\rho$.

Propozicija 1.4.8. *Neka su ρ i ψ relacije te neka je A skup. Tada je*

$$(A\rho)\psi = A(\rho * \psi).$$

Dokaz. Neka je $z \in (A\rho)\psi$. Tada postoji $y \in A\rho$ takav da je $(y, z) \in \psi$. Iz $y \in A\rho$ slijedi da postoji $x \in A$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Zaključujemo da je $(x, z) \in \rho * \psi$ pa zbog $x \in A$ vrijedi $z \in A(\rho * \psi)$.
Obratno, neka je $z \in A(\rho * \psi)$. Tada postoji $x \in A$ takav da je $(x, z) \in \rho * \psi$. Ovo povlači da postoji y takav da je

$$(x, y) \in \rho \text{ i } (y, z) \in \psi.$$

Iz $x \in A$ slijedi $y \in A\rho$ pa zaključujemo da je $z \in (A\rho)\psi$. Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Neka je ρ relacija te neka je A skup. Tada postoji skup

$$\{x : \exists y \in A \text{ takav da je } (x, y) \in \rho\}$$

(što vidimo slično kao u slučaju slike skupa pri relaciji). Taj skup označavamo ρA i nazivamo praslika skupa A pri relaciji ρ.

Propozicija 1.4.9. *Neka je ρ relacija te neka je A skup. Tada je*

$$1)\ \rho A = A\rho^{-1} \tag{1.7}$$

$$2)\ \rho^{-1} A = A\rho. \tag{1.8}$$

Dokaz. Za svaki x vrijedi

$$x \in \rho A \Leftrightarrow \exists y \in A \text{ takav da je } (x, y) \in \rho \Leftrightarrow \exists y \in A \text{ takav da je } (y, x) \in \rho^{-1} \Leftrightarrow x \in A\rho^{-1}.$$

Prema tome (1.7) vrijedi. Ako u (1.7) umjesto ρ stavimo ρ^{-1}, onda dobivamo (1.8).

□

Propozicija 1.4.10. *Neka su ρ i ψ relacije te neka je A skup. Tada je*

$$\rho(\psi A) = (\rho * \psi)A.$$

Dokaz. Koristeći propozicije 1.4.9, 1.4.3 i 1.4.8 dobivamo

$$\rho(\psi A) = \rho(A\psi^{-1}) = (A\psi^{-1})\rho^{-1} = A(\psi^{-1} * \rho^{-1}) = A(\rho * \psi)^{-1} = (\rho * \psi)A.$$

Time je propozicija dokazana. □

1.5 Familija skupova

Definicija 1.5.1. *Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ skup takav da je svaki element od $\mathcal{F}$ također skup. Tada za $\mathcal{F}$ kažemo da je familija skupova.*

Ako je $\mathcal{F}$ familija skupova, onda smatramo sljedeće: postoji skup svih x takvih da je $x \in S$ za neki $S \in \mathcal{F}$. Taj skup nazivamo unija familije $\mathcal{F}$ i označavamo

$$\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \text{ ili } \bigcup \mathcal{F}.$$

Dakle

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S = \{x : \exists S \in \mathcal{F} \text{ takav da je } x \in S\}.$$

Neka su A i B skupovi te neka je $\mathcal{F} = \{A, B\}$. Tada je $\mathcal{F}$ familija skupova te je

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x : \exists S \in \{A, B\} \text{ takav da je } x \in S\} = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\} = A \cup B,$$

dakle $\bigcup \mathcal{F} = A \cup B$.

Napomena 1.5.2. *Neka su A i B skupovi takvi da je $A \subseteq B$ te neka je ρ relacija. Tada je*

$$A\rho \subseteq B\rho \text{ i } \rho A \subseteq \rho B.$$

Napomena 1.5.3. *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova te neka je ρ relacija. Tada postoji skup*

$$\{S\rho : S \in \mathcal{F}\}.$$

Naime, ako je $S \in \mathcal{F}$, onda je očito $S \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ pa je $S\rho \subseteq (\bigcup \mathcal{F})\rho$ (napomena 1.5.2 *pa je $S\rho \in \mathcal{P}((\bigcup \mathcal{F})\rho)$. Stoga je skup s navedenim svojstvom upravo skup*

$$\{z \in \mathcal{P}((\bigcup \mathcal{F})\rho) : \exists S \in \mathcal{F} \text{ takav da je } z = S\rho\}.$$

Pod

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} (S\rho)$$

podrazumjevamo uniju familije

$$\{S\rho : S \in \mathcal{F}\}.$$

Propozicija 1.5.4. *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova te neka je ρ relacija. Tada je*

$$(\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S)\rho = \bigcup_{S\in\mathcal{F}} (S\rho).$$

Dokaz. Za svaki y vrijedi

$$y \in (\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S)\rho \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S \text{ takav da je } (x,y) \in \rho \Leftrightarrow \exists S \in \mathcal{F} \text{ i } \exists x \in S \text{ takav da je } (x,y) \in \rho \Leftrightarrow$$

$$\exists S \in \mathcal{F}, y \in S\rho \Leftrightarrow y \in \bigcup_{S\in\mathcal{F}} (S\rho).$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Korolar 1.5.5. *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova te neka je ρ relacija. Tada je*

$$\rho(\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S) = \bigcup_{S\in\mathcal{F}} (\rho S).$$

Pri tome

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} (\rho S)$$

shvaćamo kao uniju familije

$$\{\rho S : S \in \mathcal{F}\}$$

(za koju vidimo da postoji na isti način kao što smo vidjeli da postoji familija $\{S\rho : S \in \mathcal{F}\}$).

Dokaz. Koristeći prethodnu propoziciju dobivamo

$$\rho(\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S) = (\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S)\rho^{-1} = \bigcup_{S\in\mathcal{F}} (S\rho^{-1}) = \bigcup_{S\in\mathcal{F}} (\rho S).$$

□

Napomena 1.5.6. *Neka su A i B skupovi te neka je ρ relacija. Tada, koristeći propoziciju* 1.5.4*, dobivamo*

$$(A \cup B)\rho = (\cup\{A, B\})\rho = \bigcup\{A\rho, B\rho\} = A\rho \cup B\rho.$$

Dakle

$$(A \cup B)\rho = A\rho \cup B\rho.$$

Analogno dobivamo

$$\rho(A \cup B) = \rho A \cup \rho B.$$

Ako su A i B skupovi te ρ relacija, onda ne vrijedi općenito

$$(A \cap B)\rho = A\rho \cap B\rho,$$

što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1.5.7. *Neka je* $\rho = \{(1, 3), (2, 3)\}$, $A = \{1\}$ *i* $B = \{2\}$. *Tada je* $(A \cap B)\rho = \emptyset\rho = \emptyset$. *S druge strane vrijedi* $A\rho = \{3\}$ *i* $B\rho = \{3\}$, *pa je* $A\rho \cap B\rho = \{3\}$. *Prema tome*

$$(A \cap B)\rho \neq A\rho \cap B\rho.$$

Neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija skupova. Tada postoji skup svih x takvih da je $x \in F$ za svaki $F \in \mathcal{F}$. Naime odaberimo neki $F_0 \in \mathcal{F}$. Traženi skup je upravo skup

$$\{x \in F_0 : x \in F, \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

Taj skup označavamo sa

$$\bigcap \mathcal{F} \text{ ili } \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

i nazivamo presjek familije $\mathcal{F}$.

Primjer 1.5.8. *Neka su A i B skupovi te* $\mathcal{F} = \{A, B\}$. *Tada je*

$$\bigcap \mathcal{F} = A \cap B.$$

Propozicija 1.5.9. *Neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija skupova te ρ relacija. Tada je*

$$(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho \subseteq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho. \tag{1.9}$$

Dokaz. Neka je

$$y \in (\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho.$$

Tada postoji

$$x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$$

takav da $(x, y) \in \rho$. Za svaki $F \in \mathcal{F}$ vrijedi $x \in F$ pa iz $(x, y) \in \rho$ zaključujemo da je $y \in F\rho$ za svaki $F \in \mathcal{F}$. Prema tome

$$y \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho.$$

□

Jednakost u (1.9) ne vrijedi što pokazuje primjer 1.5.7.

Korolar 1.5.10. *Neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija skupova te ρ relacija. Tada je*

$$\rho(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) \subseteq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \rho F.$$

Dokaz. Koristeći propozicije 1.4.9 i 1.5.9 dobivamo

$$\rho(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) = (\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho^{-1} \subseteq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho^{-1} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \rho F.$$

□

Propozicija 1.5.11. *Neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija skupova te neka je ρ injektivna relacija. Tada je*

$$(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho.$$

Dokaz. Prema propoziciji 1.5.9 vrijedi

$$(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho \subseteq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho.$$

Dokažimo da je

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho \subseteq (\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho. \tag{1.10}$$

Neka je

$$y \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho.$$

Tada je $y \in F\rho$ za svaki $F \in \mathcal{F}$. Odaberimo neki $F_0 \in \mathcal{F}$. Iz $y \in F_0\rho$ slijedi da postoji $x_0 \in F_0$ takav da je $(x_0, y) \in \rho$. Neka je $F \in \mathcal{F}$. Iz $y \in F\rho$ slijedi da postoji $x \in F$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Iz činjenice da je ρ injektivna relacija slijedi da je $x = x_0$. Prema tome $x_0 \in F$. Dakle $x_0 \in F$ za svaki $F \in \mathcal{F}$, tj.

$$x_0 \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F.$$

Iz ovoga i $(x_0, y) \in \rho$ slijedi

$$y \in (\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho.$$

Time smo dokazali da (1.10) vrijedi, pa slijedi tvrdnja propozicije.

□

Korolar 1.5.12. *Neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija skupova te neka je ρ polufunkcijska relacija. Tada je*

$$\rho(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \rho F$$

.

Dokaz. Prema propziciji 1.3.8 ρ^{-1} je injektivna relacija. Koristeći prethodnu propoziciju dobivamo

$$\rho(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) = (\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho^{-1} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho^{-1} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \rho F.$$

Prema tome je tvrdnja korolara dokazana.

□

Propozicija 1.5.13. *Neka su ρ i ψ relacije takve da je $\rho \subseteq \psi$.*

$$\text{1) Za svaki skup } S \text{ vrijedi } S\rho \subseteq S\psi. \tag{1.11}$$

$$\text{2) Za svaki skup } S \text{ vrijedi } \rho S \subseteq \psi S. \tag{1.12}$$

$$\text{3) Vrijedi } \rho^{-1} \subseteq \psi^{-1}. \tag{1.13}$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (1.13). Neka je $z \in \rho^{-1}$. Tada je $z = (y, x)$ gdje su x i y takvi da je $(x, y) \in \rho$. Slijedi $(x, y) \in \psi$ pa je $z \in \psi^{-1}$. Dakle tvrdnja (1.13) vrijedi.

1) Neka je $y \in S\rho$. Tada postoji $x \in S$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Slijedi $(x, y) \in \psi$ pa je $y \in S\psi$. Dakle tvrdnja (1.11) vrijedi.

2) Koristeći tvrdnje (1.11) i (1.13) dobivamo

$$\rho S = S\rho^{-1} \subseteq S\psi^{-1} = \psi S.$$

Dakle tvrdnja (1.12) vrijedi.

□

Neka su ρ i ψ relacije. Tada je $\rho \cup \psi$ relacija. Naime imamo $\rho \subseteq A \times B$ i $\psi \subseteq C \times D$, gdje su A, B, C, D neki skupovi. Očito je

$$A \times B \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D) \text{ i } C \times D \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

pa zaključujemo da je

$$\rho \cup \psi \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$$

Prema tome $\rho \cup \psi$ je relacija.

Propozicija 1.5.14. *Neka su ρ i ψ relacije te neka je S skup. Tada je*

$$S(\rho \cup \psi) = S\rho \cup S\psi.$$

Dokaz. Očito je $\rho \subseteq \rho \cup \psi$ pa iz propozicije 1.5.13 slijedi $S\rho \subseteq S(\rho \cup \psi)$. Analogno dobivamo $S\psi \subseteq S(\rho \cup \psi)$. Stoga je

$$S\rho \cup \psi \subseteq S(\rho \cup \psi).$$

Obratno, neka je $y \in S(\rho \cup \psi)$. Tada postoji $x \in S$ takav da je $(x, y) \in \rho \cup \psi$. Slijedi $(x, y) \in \rho$ ili $(x, y) \in \psi$. Ako je $(x, y) \in \rho$, onda je $y \in S\rho$, a ako je $(x, y) \in \psi$, onda je $y \in S\psi$. U oba slučaja vrijedi $y \in S\rho \cup S\psi$. Time smo dokazali da je

$$S(\rho \cup \psi) \subseteq S\rho \cup \psi.$$

Prema tome

$$S(\rho \cup \psi) = S\rho \cup \psi.$$

□

Propozicija 1.5.15. *Neka su ρ i ψ relacije. Tada je*

$$(\rho \cup \psi)^{-1} = \rho^{-1} \cup \psi^{-1}.$$

Dokaz. Neka je $z \in (\rho \cup \psi)^{-1}$. Tada je $z = (y, x)$, gdje su x i y takvi da je $(x, y) \in \rho \cup \psi$. Slijedi $(x, y) \in \rho$ ili $(x, y) \in \psi$. Stoga je $z \in \rho^{-1}$ ili $z \in \psi^{-1}$, dakle $z \in \rho^{-1} \cup \psi^{-1}$. Time smo dokazali da je

$$(\rho \cup \psi)^{-1} \subseteq \rho^{-1} \cup \psi^{-1}.$$

Iz $\rho \subseteq \rho \cup \psi$ i propozicije 1.5.14 slijedi $\rho^{-1} \subseteq (\rho \cup \psi)^{-1}$. Analogno zaključujemo da je $\psi^{-1} \subseteq (\rho \cup \psi)^{-1}$. Prema tome $\rho^{-1} \cup \psi^{-1} \subseteq (\rho \cup \psi)^{-1}$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Korolar 1.5.16. *Neka su ρ i ψ relacije i neka je S skup. Tada je*

$$(\rho \cup \psi)S = \rho S \cup \psi S.$$

Dokaz. Koristeći propozicije 1.5.14 i 1.5.15 dobivamo

$$(\rho \cup \psi)S = S(\rho \cup \psi)^{-1} = S(\rho^{-1} \cup \psi^{-1}) = S\rho^{-1} \cup S\psi^{-1} = \rho S \cup \psi S.$$

□

Lema 1.5.17. *Neka su ρ, ψ_1 i ψ_2 relacije takve da je $\psi_1 \subseteq \psi_2$. Tada je*

$$\rho * \psi_1 \subseteq \rho * \psi_2.$$

Dokaz. Neka je $u \in \rho * \psi_1$. Tada postoje x, y, z takvi da je

$$u = (x, z), (x, y) \in \rho \text{ i } (y, z) \in \psi_1.$$

Budući da je $\psi_1 \subseteq \psi_2$ imamo $(y, z) \in \psi_2$. Slijedi $u \in \rho * \psi_2$. Time je tvrdnja leme dokazana.

□

Propozicija 1.5.18. *Neka su ρ, ψ_1, ψ_2 relacije. Tada je*

$$\rho * (\psi_1 \cup \psi_2) = (\rho * \psi_1) \cup (\rho * \psi_2).$$

Dokaz. Iz prethodne leme i činjenice da je $\psi_1 \subseteq \psi_1 \cup \psi_2$ slijedi

$$\rho * \psi_1 \subseteq \rho * (\psi_1 \cup \psi_2).$$

Analogno dobivamo $\rho * \psi_2 \subseteq \rho * (\psi_1 \cup \psi_2)$. Stoga je

$$(\rho * \psi_1) \cup (\rho * \psi_2) \subseteq \rho * (\psi_1 \cup \psi_2).$$

Obratno, neka je $u \in \rho * (\psi_1 \cup \psi_2)$. Tada postoje x, y, z takvi da je $u = (x, z), (x, y) \in \rho$ i $(y, z) \in (\psi_1 \cup \psi_2)$. Slijedi

$$(y, z) \in \psi_1 \text{ ili } (y, z) \in \psi_2.$$

U prvom slučaju zaključujemo da je $u \in \rho * \psi_1$, a u drugom da je $u \in \rho * \psi_2$. U svakom slučaju $u \in (\rho * \psi_1) \cup (\rho * \psi_2)$. Prema tome

$$\rho * (\psi_1 \cup \psi_2) \subseteq (\rho * \psi_1) \cup (\rho * \psi_2).$$

Time je propozicija dokazana.

$\square$

Ako su ρ, ψ_1, ψ_2 relacije onda je

$$\rho * (\psi_1 \cap \psi_2) \subseteq (\rho * \psi_1) \cap (\rho * \psi_2),$$

što lako slijedi iz leme 1.5.17. Općenito ne vrijedi

$$\rho * (\psi_1 \cap \psi_2) = (\rho * \psi_1) \cap (\rho * \psi_2)$$

što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1.5.19. *Neka su a, b, c takvi da je $a \neq b$. Neka je $\rho = \{(1, a), (1, b)\}$, $\psi_1 = \{(a, c)\}$, $\psi_2 = \{(b, c)\}$. Tada je*

$$\rho * (\psi_1 \cap \psi_2) = \rho * \emptyset = \emptyset.$$

S druge strane imamo

$$(\rho * \psi_1) \cap (\rho * \psi_2) = \{(1, c)\} \cap \{(1, c)\} = \{(1, c)\}.$$

Propozicija 1.5.20. *Neka su ρ, ψ_1, ψ_2 relacije, pri čemu je ρ polufunkcijska relacija. Tada je*

$$\rho * (\psi_1 \cap \psi_2) = (\rho * \psi_1) \cap (\rho * \psi_2).$$

Dokaz. Znamo

$$\rho * (\psi_1 \cap \psi_2) \subseteq (\rho * \psi_1) \cap (\rho * \psi_2).$$

Neka je $u \in (\rho * \psi_1) \cap (\rho * \psi_2)$. Tada je $u \in (\rho * \psi_1)$ i $u \in (\rho * \psi_2)$. Slijedi da postoje x, y, z takvi da je $u = (x, z), (x, y) \in \rho$ i $(y, z) \in \psi_1$. Također postoje x', y', z' takvi da je

$$u = (x', z'), (x', y') \in \rho \text{ i } (y', z') \in \psi_2.$$

Očito je $x = x'$ i $z = z'$. Dakle $(x, y) \in \rho$ i $(x, y') \in \rho$ pa činjenica da je ρ polufunkcijska povlači da je $y = y'$. Imamo $(y, z) \in \psi_1$ i $(y, z) \in \psi_2$ pa slijedi $(y, z) \in \psi_1 \cap \psi_2$. Ovo, zajedno sa $(x, y) \in \rho$ daje $u \in \rho * (\psi_1 \cap \psi_2)$. Prema tome

$$(\rho * \psi_1) \cap (\rho * \psi_2) \subseteq \rho * (\psi_1 \cap \psi_2).$$

□

Propozicija 1.5.21. *Neka su S, T, V i W skupovi te neka su $f : S \to T$, $g : T \to V$ i $h : V \to W$ funkcije. Tada je*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Dokaz. Imamo $f = (S, T, \rho)$, $g = (T, V, \psi)$ i $h = (V, W, \omega)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T, ψ funkcijska relacija između T i V i ω funkcijska relacija između V i W. Imamo $g \circ f = (S, V, \rho * \psi)$ pa je

$$h \circ (g \circ f) = (S, W, (\rho * \psi) * \omega). \tag{1.14}$$

Imamo $h \circ g = (T, W, \psi * \omega)$ pa je

$$(h \circ g) \circ f = (S, W, \rho * (\psi * \omega)). \tag{1.15}$$

Iz (1.14) i (1.15) i propozicije 1.4.2 slijedi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$\square$

Definicija 1.5.22. *Neka je* $f : S \to T$ *funkcija te* $A \subseteq S$. *Imamo* $f = (S, T, \rho)$, *gdje je* ρ *funkcijska relacija između* S *i* T. *Definiramo* ***sliku skupa A pri funkciji f****, u oznaci* $f(A)$, *kao skup* $A\rho$. *Dakle*

$$f(A) = A\rho.$$

Napomena 1.5.23. *Uz oznake iz prethodne definicije vrijedi*

$$f(A) = \{y \in T : \exists x \in A \text{ takav da je } f(x) = y\}. \tag{1.16}$$

Naime neka je $y \in f(A)$. Tada je $y \in A\rho$ pa postoji $x \in A$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Slijedi $y \in T$ i $y = f(x)$. Obratno, ako je $y \in T$ i $y = f(x)$ za neki $x \in A$, onda je $(x, y) \in \rho$ pa je $y \in A\rho$ tj. $y \in f(A)$.

Uočimo da je prema (1.16)

$$f(A) \subseteq T.$$

Propozicija 1.5.24. *Neka su* $f : S \to T$ *i* $g : T \to V$ *funkcije te neka je* $A \subseteq S$. *Tada je*

$$g(f(A)) = (g \circ f)(A).$$

Dokaz. Imamo $f = (S, T, \rho)$ i $g = (T, V, \psi)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T i ψ funkcijska relacija između T i V. Imamo

$$g \circ f = (S, T, \rho * \psi)$$

pa koristeći propoziciju 1.4.8 dobivamo

$$g(f(A)) = g(A\rho) = (A\rho)\psi = A(\rho * \psi) = (g \circ f)(A).$$

$\square$

Neka je S skup te neka je $\mathcal{F}$ skup čiji elementi su podskupovi od S. Tada za $\mathcal{F}$ kažemo da je **familija podskupova od S**. Uočimo da je u tom slučaju

$$\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \subseteq S.$$

Uočimo sljedeće: ako je $f : S \to T$ funkcija i $\mathcal{F}$ familija podskupova od S, onda je $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ familija podskupova od T.

Propozicija 1.5.25. *Neka je $f : S \to T$ funkcija te neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od S. Tada je*

$$f(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F) = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} f(F).$$

Dokaz. Imamo $f = (S, T, \rho)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T. Koristeći propoziciju 1.5.4 dobivamo

$$f(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F) = (\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F)\rho = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F\rho = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} f(F).$$

□

Korolar 1.5.26. *Neka je $f : S \to T$ funkcija te neka su A i B podskupovi od S. Tada je*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije za $\mathcal{F} = \{A, B\}$.

□

Primjer 1.5.27. *Neka je $S = \{1, 2\}$, $T = \{3\}$ te neka je $f : S \to T$ funkcija definirana sa $f(1) = 3$ i $f(2) = 3$ (dakle $f = (S, T, \rho)$ gdje je $\rho = \{(1, 3), (2, 3)\}$). Neka je $A = \{1\}$ i $B = \{2\}$. Tada je*

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

a $f(A) \cap f(B) = \{3\}$, prema tome

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Propozicija 1.5.28. *Neka je $f : S \to T$ funkcija te neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija podskupova od S. Tada je*

$$f(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) \subseteq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} f(F).$$

Ako je f injekcija, onda je

$$f(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} f(F).$$

Dokaz. Imamo $f = (S, T, \rho)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T. Koristeći propoziciju 1.5.9 dobivamo

$$f(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) = (\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)\rho \subseteq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\rho = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} f(F).$$

Ako je f injekcija onda je ρ injektivna relacija pa koristeći propoziciju 1.5.11 dobivamo da vrijedi

$$f(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} f(F).$$

□

Definicija 1.5.29. *Neka je $f : S \to T$ funkcija te $A \subseteq T$. Imamo $f = (S, T, \rho)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T. Definiramo* ***prasliku skupa A pri funkciji f****, u oznaci $f^{\leftarrow}(A)$, kao skup ρA. Dakle*

$$f^{\leftarrow}(A) = \rho A.$$

Dokažimo da je

$$f^{\leftarrow}(A) = \{x \in S : f(x) \in A\}. \tag{1.17}$$

Neka je $x \in f^{\leftarrow}(A)$. Tada je $x \in \rho A$ pa postoji $y \in A$ takav da je $(x, y) \in \rho$. Slijedi $x \in S$ i $f(x) = y$ pa je $f(x) \in A$.

Obratno, pretpostavimo da je $x \in S$ takav da je $f(x) \in A$. Imamo $(x, f(x)) \in \rho$ i $f(x) \in A$ pa je $x \in \rho A$. Stoga je $x \in f^{\leftarrow}(A)$. Prema tome (1.17) vrijedi. Iz (1.17) slijedi da je $f^{\leftarrow}(A) \subseteq S$.

Propozicija 1.5.30. *Neka su $f : S \to T$ i $g : T \to V$ funkcije te neka je $A \subseteq V$. Tada je*

$$(g \circ f)^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(A)).$$

Dokaz. Imamo $f = (S, T, \rho)$ i $g = (T, V, \psi)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T i ψ funkcijska relacija između T i V. Imamo

$$g \circ f = (S, V, \rho * \psi)$$

pa koristeći propoziciju 1.4.10 dobivamo

$$f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(A)) = f^{\leftarrow}(\psi A) = \rho(\psi A) = (\rho * \psi)A = (g \circ f)^{\leftarrow}(A).$$

□

Propozicija 1.5.31. *Neka je $f : S \to T$ funkcija te neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od T. Tada je*

$$f^{\leftarrow}(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} f^{\leftarrow}(F).$$

Dokaz. Tvrdnja propozicije slijedi iz korolara 1.5.5.

□

Propozicija 1.5.32. *Neka je $f : S \to T$ funkcija te neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija podskupova od T. Tada je*

$$f^{\leftarrow}(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} f^{\leftarrow}(F).$$

Dokaz. Imamo $f = (S, T, \rho)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T. Slijedi da je ρ polufunkcijska relacija pa koristeći korolar 1.5.12 dobivamo

$$f^{\leftarrow}(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) = \rho(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \rho F = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} f^{\leftarrow}(F).$$

□

Poglavlje 2

Peanove trojke

Definicija 2.0.1. *Neka je M skup, $s : M \to M$ funkcija te $a \in M$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

$$\textit{1) s je injekcija i } a \notin \operatorname{Im} s, \tag{2.1}$$

$$\textit{2) ako je } S \subseteq M \textit{ takav da je } a \in S \textit{ i } s(x) \in S \textit{ za svaki } x \in S, \textit{ onda je } S = M. \tag{2.2}$$

Tada za uređenu trojku (M, s, a) kažemo da je Peanova trojka.

Propozicija 2.0.2. *Neka je (M, s, a) Peanova trojka. Tada je* $\operatorname{Im} s = M \setminus \{a\}$.

Dokaz. Očito je $\operatorname{Im} s \subseteq M$, a zbog $a \notin \operatorname{Im} s$ vrijedi

$$\operatorname{Im} s \subseteq M \setminus \{a\}.$$

Dokažimo da je $M \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Im} s$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\{a\} \cup \operatorname{Im} s = M. \tag{2.3}$$

Definirajmo

$$S = \{a\} \cup \operatorname{Im} s.$$

Očito je $S \subseteq M$ i $a \in S$. Neka je $x \in S$. Tada je $x \in M$ pa je $s(x) \in \operatorname{Im} s$, te je očito $s(x) \in S$. Iz svojstva (2.2) iz definicije Peanove trojke slijedi $S = M$. Dakle vrijedi (2.3). Time smo dokazali da je

$$M \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Im} s,$$

pa slijedi tvrdnja propozicije. □

2.1 Princip definicije indukcijom

Teorem 2.1.1. *Neka je (M, s, a) Peanova trojka. Neka je X skup, $g : X \to X$ funkcija te $b \in X$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : M \to X$ takva da je*

$$f(a) = b \text{ i } f(s(n)) = g(f(n)) \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Dokažimo prvo da takva funkcija, ako postoji, mora biti jedinstvena. Pretpostavimo da su $f_1, f_2 : M \to X$ funkcije takve da je

$$f_1(a) = b \text{ i } f_1(s(n)) = g(f_1(n)) \text{ za svaki } n \in M \tag{2.4}$$

te

$$f_2(a) = b \text{ i } f_2(s(n)) = g(f_2(n)) \text{ za svaki } n \in M. \tag{2.5}$$

Neka je

$$S = \{n \in M : f_1(n) = f_2(n)\}.$$

Očito je $a \in S$. Pretpostavimo da je $n \in S$. Tada je $f_1(n) = f_2(n)$. Tada iz (2.4) i (2.5) slijedi $f_1(s(n)) = f_2(s(n))$ pa je $s(n) \in S$. Prema definiciji Peanove trojke vrijedi $S = M$. Dakle

$$\text{za svaki } n \in M \text{ vrijedi } f_1(n) = f_2(n).$$

Iz propozicije 1.3.2 slijedi $f_1 = f_2$.

Dokažimo sada da je funkcija f s traženim svojstvima postoji. U tu svrhu dovoljno je dokazati da postoji funkcijska relacija ρ između M i X takva da je $(a, b) \in \rho$ te takva da vrijedi sljedeće:

$$\text{ako su } n \in M \text{ i } y \in X \text{ takvi da je } (n, y) \in \rho \text{ onda je } (s(n), g(y)) \in \rho. \tag{2.6}$$

Naime pretpostavimo da takva funkcijska relacija ρ postoji. Definirajmo

$$f = (M, X, \rho).$$

Očito je $f(a) = b$. Neka je $n \in M$. Tada je $(n, f(n)) \in \rho$ pa iz (2.6) slijedi

$$(s(n), g(f(n))) \in \rho,$$

tj. $f(s(n)) = g(f(n))$. Prema tome f zadovoljava uvjete iz iskaza teorema.

Dokažimo sada da postoji funkcijska relacija ρ s navedenim svojstvima. Neka je Ψ skup svih $\psi \subseteq M \times X$ takvih da vrijedi sljedeće:

- $(a, b) \in \psi$
- ako su $n \in M$ i $y \in X$ takvi da je $(n, y) \in \psi$ onda je $(s(n), g(y)) \in \psi$.

Vrijedi $M \times X \in \Psi$, dakle Ψ je neprazna familija skupova. Neka je

$$\rho = \bigcap_{\psi \in \Psi} \psi.$$

Očito je $\rho \subseteq M \times X$. Nadalje vrijedi $(a, b) \in \psi$ za svaki $\psi \in \Psi$ pa je $(a, b) \in \rho$. Pretpostavimo da su $n \in M$ i $y \in X$ takvi da je $(n, y) \in \rho$. Stoga je $(n, y) \in \psi$ za svako $\psi \in \Psi$ pa iz definicije od Ψ slijedi

$$(s(n), g(y)) \in \psi \text{ za svako } \psi \in \Psi.$$

Stoga je $(s(n), g(y)) \in \rho$. Zaključak: definirana relacija ρ zadovoljava (2.6).

Dokažimo još da je ρ funkcijska relacija između M i X. Definirajmo

$$S = \{n \in M : \exists!\ \mathrm{y} \in X \text{ takav da je } (n, y) \in \rho\}.$$

Želimo dokazati da je $S = M$; ako to dokažemo onda smo gotovi jer ćemo imati da je ρ funkcijska relacija. Očito je $S \subseteq M$. Dokažimo da je $a \in S$. Znamo da je $(a, b) \in \rho$. Preostaje dokazati da ne postoji $b' \in X$ takav da je $b' \neq b$ i $(a, b') \in \rho$. U tu svrhu definirajmo

$$\psi = \{(a, b)\} \cup ((M \setminus \{a\}) \times X).$$

Tvrdimo da je $\psi \in \Psi$. Očito je

$$\psi \subseteq M \times X \text{ i } (a, b) \in \psi.$$

Pretpostavimo da su $n \in M$ i $y \in X$ takvi da je $(n, y) \in \psi$. Vrijedi $s(n) \neq a$ prema definiciji Peanove trojke, dakle $s(n) \in M \setminus \{a\}$. Stoga je

$$(s(n), g(y)) \in (M \setminus \{a\}) \times X$$

pa je $(s(n), g(y)) \in \psi$. Time smo dokazali da je $\psi \in \Psi$. Prema definiciji od ρ vrijedi $\rho \subseteq \psi$. Kada bi postojao $b' \in X$ takav da je $b' \neq b$ i $(a, b') \in \rho$, onda bismo imali $(a, b') \in \psi$, a to je nemoguće prema definiciji od ψ. Zaključak $a \in S$.
Pretpostavimo da je $n \in S$. Tada postoji jedinstveni $y_0 \in S$ takav da je $(n, y_0) \in \rho$. Budući da za ρ vrijedi implikacija (2.6) imamo $(s(n), g(y_0)) \in \rho$. Tvrdimo da ne postoji $y \in X$ takav da je $y \neq g(y_0)$ i $(s(n), y) \in \rho$. U tu svrhu definirajmo

$$\psi = (((M \setminus \{s(n)\}) \times X) \cup \{(s(n), g(y_0))\}) \cap \rho.$$

Dokažimo da je $\psi \in \Psi$. Očito je $\psi \subseteq M \times X$. Zbog $s(n) \neq a$ imamo

$$(a, b) \in (M \setminus \{s(n)\}) \times X$$

pa je $(a, b) \in \psi$. Pretpostavimo da su $m \in M$ i $y \in X$ takvi da je $(m, y) \in \psi$. Iz $(m, y) \in \rho$ slijedi $(s(m), g(y)) \in \rho$. Promotrimo dva slučaja

1° $m \neq n$

Iz injektivnosti funkcije s slijedi da je $s(m) \neq s(n)$ pa je

$$(s(m), g(y)) \in (M \setminus \{s(n)\}) \times X.$$

Stoga je $(s(m), g(y)) \in \psi$.

2° $m = n$

Imamo

$$(n, y) = (m, y) \in \psi \subseteq \rho,$$

dakle $(n, y) \in \rho$ pa je $y = y_0$ (zbog jedinstvenosti od y_0). Stoga je

$$(s(m), g(y)) = (s(n), g(y_0))$$

pa je $(s(m), g(y)) \in \psi$.

U oba slučaja smo dobili da je $(s(m), g(y)) \in \rho$. Time smo pokazali da je $\psi \in \Psi$. Slijedi $\rho \subseteq \psi$. Kada bi postojao $y \in X$ takav da je

$$y \neq g(y_0) \text{ i } (s(n), y) \in \rho$$

onda bismo imali $(s(n), y) \in \psi$, a to je prema definiciji od ψ nemoguće. Zaključak: $s(n) \in S$.

Iz definicije Peanove trojke slijedi $S = M$. Time smo dokazali da je ρ funkcijska relacija između M i X, pa je time tvrdnja teorema dokazana.

$\square$

Neka je S skup. Za funkciju

$$S \times S \to S$$

kažemo da je binarna operacija na skupu S.

Ako je $*$ binarna operacija na nekom skupu S (tj. $* : S \times S \to S$), onda za $x, y \in S$ umjesto $*(x, y)$ pišemo i

$$x * y.$$

Primjer 2.1.2. *Neka je (M, s, a) Peanova trojka. Tada postoji jedinstvena binarna operacija $+$ na M takva da za svaki $x, y \in M$ vrijedi sljedeće*

- $x + a = s(x)$
- $x + s(y) = s(x + y)$.

Dokažimo prvo egzistenciju takve binarne operacije. Neka je $x \in M$. Iz prethodnog teorema (za $X = M, g = s, b = s(x)$) slijedi da postoji jedinstvena funkcija

$$f_x : M \to M$$

takva da je

$$f_x(a) = s(x) \text{ i } f_x(s(y)) = s(f_x(y)) \text{ za svaki } y \in M.$$

Definirajmo funkciju

$$+ : M \times M \to M$$

sa

$$+(x, y) = f_x(y).$$

Dakle $+$ je binarna operacija na M i za sve $x, y \in M$ vrijedi

$$x + y = f_x(y).$$

Za sve $x, y \in M$ vrijedi

$$x + a = f_x(a) = s(x) \text{ i } x + s(y) = f_x(s(y)) = s(f_x(y)) = s(x + y).$$

Prema tome postoji binarna operacija s traženim svojstvom.

Neka su $+$ i $*$ binarne opercije na M takve da za sve $x, y \in M$ vrijedi

$$x + a = s(x), x + s(y) = s(x + y)$$

i

$$x * a = s(x), x * s(y) = s(x + y).$$

Dokažimo da je $+ = *$. Fiksirajmo $x \in M$. Dokažimo da za svaki $y \in M$ vrijedi

$$x + y = x * y.$$

Neka je S skup svih $y \in M$ za koje dana jednakost vrijedi. Očito je

$$x + a = s(x) = x * a$$

dakle $a \in S$. Pretpostavimo da za neki y vrijedi da je $y \in S$. Pokažimo da je $s(y) \in S$. Imamo

$$x + s(y) = s(x + y) = s(x * y) = x * s(y).$$

Stoga je $s(y) \in S$. Iz definicije Peanove trojke slijedi $S = M$. Prema tome za sve $x, y \in M$ vrijedi

$$x + y = x * y.$$

Dakle $+ = *$.

2.2 Izomorfizam Peanovih trojki

Za binarnu operaciju $+$ na M s promatranim svojstvima kažemo da je zbrajanje u Peanovoj trojci (M, s, a).

Neka su (M, s, a) i (N, s', a') Peanove trojke. Za bijekciju $f : M \to N$ kažemo da je **izomorfizam** ovih Peanovih trojki ako je $f(a) = a'$ te ako za svaki $x \in M$ vrijedi

$$f(s(x)) = s'(f(x)).$$

Teorem 2.2.1. *Neka su (M, s, a) i (N, s', a') Peanove trojke. Tada postoji jedinstveni izomorfizam $f : M \to N$ ovih Peanovih trojki.*

Dokaz. Prema teoremu 2.1.1 postoji jedinstvena funkcija $f : M \to N$ takva da je

$$f(a) = a' \text{ i } f(s(x)) = s'(f(x))$$

za svaki $x \in M$. Preostaje dokazati da je f bijekcija. Dokažimo prvo da je f injekcija. Neka je

$$S = \{x \in M : \text{ ako je } y \in M \text{ i } x \neq y \text{ onda je } f(x) \neq f(y).$$

Tvrdimo da je $a \in S$. Pretpostavimo da je $y \in M$ takav da je $a \neq y$. Prema propoziciji 2.0.2 postoji $z \in M$ takav da je $y = s(z)$. Imamo

$$f(y) = f(s(z)) = s'(f(z)),$$

a $s'(f(z)) \neq a'$ prema definiciji Peanove trojke. Dakle

$$f(y) \neq a',$$

tj. $f(y) \neq f(a)$. Prema tome $a \in S$.

Pretpostavimo da je $x \in S$. Želimo dokazati da je $s(x) \in S$. Pretpostavimo da je $y \in M$ takav da je $s(x) \neq y$. Ako je $y = a$, onda je

$$f(s(x)) \neq f(y)$$

jer je $a \in S$. Ako je $y \neq a$, onda postoji $z \in M$ takav da je $y = s(z)$. Dakle $s(x) \neq s(z)$ što povlači da je $x \neq z$ pa iz činjenice da je $x \in S$ slijedi $f(x) \neq f(z)$. Budući da je s' injekcija slijedi

$$s'(f(x)) \neq s'(f(z)),$$

tj.

$$f(s(x)) \neq f(s(z)).$$

Dakle $f(s(x)) \neq f(y)$. Time smo dokazali da je $s(x) \in S$.

Prema definiciji Peanove trojke slijedi $S = M$, a to znači da je f injekcija.

Dokažimo sada da je f surjekcija, tj.

$$\mathrm{Im}\, f = N.$$

Očito je $\mathrm{Im}\, f \subseteq N$. Imamo $a' = f(a)$ pa je $a' \in \mathrm{Im}\, f$. Pretpostavimo da je $y \in \mathrm{Im}\, f$. Tada je $y = f(x)$ za neki $x \in M$. Imamo

$$s'(y) = s'(f(x)) = f(s(x)).$$

Slijedi $s'(y) \in \mathrm{Im}\, f$. Budući da je (N, s', a') Peanova trojka slijedi da je $N = \mathrm{Im}\, f$, a to znači da je f surjekcija. Dakle f je bijekcija i time je tvrdnja teorema dokazana.

□

Poglavlje 3

Beskonačnost

3.1 Ekvipotentnost

Definicija 3.1.1. *Neka su S i T skupovi takvi da postoji bijekcija $f : S \to T$. Tada za S i T kažemo da su ekvipotentni skupovi i pišemo $S \cong T$.*

Propozicija 3.1.2. *Neka su S, T i V skupovi te neka su $f : S \to T$ i $g : T \to V$ funkcije.*
1) *Ako su f i g injekcije, onda je $g \circ f$ injekcija.*
2) *Ako su f i g surjekcije, onda je $g \circ f$ surjekcija.*
3) *Ako su f i g bijekcije, onda je $g \circ f$ bijekcija.*

Dokaz. Imamo $f = (S, T, \rho)$ i $g = (T, V, \psi)$, gdje je ρ funkcijska relacija između S i T i ψ funkcijska relacija između T i V. Imamo

$$g \circ f = (S, V, \rho * \psi).$$

1) Pretpostavimo da su f i g injekcije. Tada su ρ i ψ injektivne relacije pa je prema propoziciji 1.4.4 $\rho * \psi$ injektivna relacija. Slijedi da je $g \circ f$ injekcija.
2) Pretpostavimo da su f i g surjekcije. Tada je $\operatorname{Im} f = T$ i $\operatorname{Im} g = V$, tj. $\operatorname{Im} \rho = T$ i

$\operatorname{Im}\psi = V$ pa je $S\rho = T$ i $T\psi = V$. Koristeći propoziciju 1.4.8 dobivamo:

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(\rho * \psi) = S(\rho * \psi) = (S\rho)\psi = T\psi = V.$$

Dakle

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = V$$

pa slijedi da je $g \circ f$ surjekcija.

3) Tvrdnja slijedi iz 1) i 2).

□

Propozicija 3.1.3. *Neka su S, T i V skupovi. Tada vrijedi:*

1) $S \cong S$

2) *ako je* $S \cong T$ *onda je* $T \cong S$

3) *ako je* $S \cong T$ *i* $T \cong V$ *onda je* $S \cong V$.

Dokaz. 1) Funkcija $f : S \to S$ definirana sa $f(x) = x$ je očito bijekcija.

2) Pretpostavimo da je $S \cong T$. Tada postoji bijekcija $f : S \to T$. Znamo da je

$$f^{-1} : T \to S$$

bijekcija. Prema tome $T \cong S$.

3) Pretpostavimo da je $S \cong T$ i $T \cong V$. Tada postoje bijekcije

$$f : S \to T$$

i

$$g : T \to V.$$

Prema prethodnoj propoziciji funkcija

$$g \circ f : S \to V$$

je bijekcija. □

3.2 Beskonačni skupovi

Definicija 3.2.1. *Neka su S i T skupovi takvi da je $S \subseteq T$ i $S \neq T$. Tada kažemo da je S pravi podskup od T.*

Definicija 3.2.2. *Za skup S kažemo da je beskonačan ako postoji pravi podskup T od S takav da vrijedi $S \cong T$.*

Definicija 3.2.3. *Za skup koji nije beskonačan kažemo da je konačan.*

Propozicija 3.2.4. *Neka je S skup. Tada je S beskonačan skup ako i samo ako postoji injekcija $g : S \to S$ takva da je* $\operatorname{Im} g \neq S$.

Dokaz. Pretpostavimo da je S beskonačan. Tada postoje pravi podskup T od S i bijekcija $f : S \to T$. Imamo

$$f = (S, T, \rho),$$

gdje je ρ funkcijska relacija između S i T. Prema napomeni 1.2.5 ρ je funkcijska relacija između S i S. Definirajmo

$$g = (S, S, \rho).$$

Tada je g funkcija sa S u S. Iz činjenice da je f injekcija slijedi da je ρ injektivna relacija pa je i g injekcija. Vrijedi

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} \rho = \operatorname{Im} f = T.$$

Dakle

$$\operatorname{Im} g \neq S.$$

Obratno, pretpostavimo da postoji injekcija $g : S \to S$ takva da je

$$\operatorname{Im} g \neq S.$$

Očito je ρ relacija između S i $\operatorname{Im}\rho$ (napomena 1.3.3). Neka je $x \in S$. Tada postoji $y \in S$ takav da je $(x, y) \in \rho$ (jer je ρ funkcijska relacija između S i S). Očito je $y \in \operatorname{Im}\rho$. Pretpostavimo da su y_1 i y_2 iz $\operatorname{Im}\rho$ takvi da je

$$(x, y_1), (x, y_2) \in \rho.$$

Iz $\operatorname{Im}\rho \subseteq S$ slijedi da su $y_1, y_2 \in S$ pa zaključujemo da je

$$y_1 = y_2$$

(jer je ρ funkcijska relacija između S i S). Time smo dokazali da je ρ funkcijska relacija između S i $\operatorname{Im}\rho$. Definirajmo

$$f = (S, \operatorname{Im}\rho, \rho).$$

Imamo da je f funkcija sa S u $\operatorname{Im}\rho$. Iz činjenice da je ρ injektivna relacija (što je posljedica injektivnosti funkcije g) slijedi da je f injekcija. Nadalje

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\rho$$

pa slijedi da je f surjekcija. Dakle f je bijekcija tj.

$$S \cong \operatorname{Im}\rho.$$

Imamo $\operatorname{Im}\rho \neq S$, a očito je $\operatorname{Im}\rho \subseteq S$. Prema tome $\operatorname{Im}\rho$ je pravi podskup od S. Zaključak: S je beskonačan skup.

$\square$

Uočimo sljedeće: ako je (M, s, a) Peanova trojka onda je M beskonačan skup, naime to slijedi iz prethodne propozicije i činjenice da je $s : M \to M$ injekcija takva da je $\operatorname{Im} s \neq M$.

3.3 Egzistencija Peanove trojke

Teorem 3.3.1. *Neka je A beskonačan skup. Tada postoji Peanova trojka (M, s, a) takva da je $M \subseteq A$.*

Dokaz. Prema propoziciji 3.2.4 postoji injekcija

$$g : A \to A$$

takva da je

$$\operatorname{Im} g \neq A.$$

Odaberimo $a \in A$ takav da $a \notin \operatorname{Im} g$. Za podskup S od A ćemo reći da je induktivan ako vrijedi sljedeće:

1) $a \in S$

2) ako je $x \in S$ onda je $g(x) \in S$.

Uočimo da je A induktivan podskup od A. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih induktivnih podskupova od A. Imamo $A \in \mathcal{F}$, dakle $\mathcal{F}$ je neprazna familija. Neka je

$$M = \bigcap \mathcal{F}.$$

Tvrdimo da je M induktivan podskup od A. Budući da je $A \in \mathcal{F}$ slijedi $M \subseteq A$. Za svaki $S \in \mathcal{F}$ vrijedi da je induktivan podskup od A pa je $a \in S$. Stoga je $a \in M$.

Neka je $x \in M$. Tada je $x \in S$ za svaki $S \in \mathcal{F}$. Iz činjenice da su elementi od $\mathcal{F}$ induktivni podskupovi od A slijedi da je $g(x) \in S$ za svaki $S \in \mathcal{F}$. Dakle $g(x) \in M$. Pokazali smo da je M induktivan podskup od A.

Definirajmo funkciju $s : M \to M$ sa

$$s(x) = g(x),$$

za svaki $x \in M$. Ako su $x_1, x_2 \in M$ takvi da je $x_1 \neq x_2$, onda je

$$g(x_1) \neq g(x_2)$$

(jer je g injekcija), dakle

$$s(x_1) \neq s(x_2).$$

Prema tome s je injekcija.

Pretpostavimo da je $a \in \operatorname{Im} s$. Tada postoji $x \in M$ takav da je $a = s(x)$. Slijedi $a = g(x)$, no ovo je u kontradikciji s činjenicom da $a \notin \operatorname{Im} g$. Prema tome $a \notin \operatorname{Im} s$.

Pretpostavimo da je $S \subseteq M$ takav da je $a \in S$ te da za svaki $x \in S$ vrijedi $s(x) \in S$. Dakle za svaki $x \in S$ vrijedi $g(x) \in S$. Prema tome S je induktivan podskup od A. Dakle $S \in \mathcal{F}$ pa iz definicije skupa M slijedi da je $M \subseteq S$. Ovo, zajedno sa $S \subseteq M$, daje $S = M$. Zaključak: (M, s, a) je Peanova trojka. Time je tvrdnja teorema dokazana.

□

3.4 Karakterizacija beskonačnosti

Neka je od sada pa nadalje $(\mathbb{N}, s, 1)$ jedna fiksirana Peanova trojka.

Propozicija 3.4.1. *Neka je A beskonačan skup. Tada postoji injekcija* $f : \mathbb{N} \to A$.

Dokaz. Prema prethodnom teoremu postoji Peanova trojka (M, s', a) takva da je $M \subseteq A$. Iz činjenice da su $(\mathbb{N}, s, 1)$ i (M, s', a) Peanove trojke i teorema 2.2.1 slijedi da postoji izomorfizam

$$f : \mathbb{N} \to M$$

ovih Peanovih trojki. Posebno f je bijekcija. Stoga je funkcija

$$\mathbb{N} \to A,\ x \mapsto f(x)$$

injekcija.

□

Lema 3.4.2. *Neka su X i Y skupovi te neka je $f : X \to Y$ injekcija. Tada za svaki $A \subseteq X$ vrijedi*

$$A \cong f(A).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju

$$g : A \to f(A)$$

takvu da je

$$g(x) = f(x)$$

za svaki $x \in A$. Vrijedi da je g injekcija, jer je f injekcija. Očito je da je g surjekcija. Time je tvrdnja leme dokazana.

□

Propozicija 3.4.3. *Neka su S i T skupovi takvi da je $S \cong T$. Pretpostavimo da je S beskonačan skup. Tada je T beskonačan skup.*

Dokaz. Budući da je $S \cong T$ postoji bijekcija $f : S \to T$. Iz činjenice da je S beskonačan slijedi da postoji pravi podskup S' od S takav da je $S' \cong S$. Definirajmo

$$T' = f(S').$$

Iz leme slijedi da je

$$S' \cong f(S'),$$

tj. $S' \cong T'$. Dakle

$$T' \cong S' \cong S \cong T$$

pa slijedi $T' \cong T$. Budući da je S' pravi podskup od S postoji $x \in S \setminus S'$. Tada je $f(x) \in T$. Tvrdimo da $f(x) \notin T'$. Pretpostavimo da je $f(x) \in T'$. Dakle $f(x) \in f(S')$ pa postoji $a \in S'$ takav da je

$$f(a) = f(x).$$

Injektivnost funkcije f povlači da je $a = x$ pa je $x \in S'$. Kontradikcija. Prema tome $f(x) \notin T'$ što znači da je T' pravi podskup od T. Ovo zajedno s $T' \cong T$ povlači da je T beskonačan.

$\square$

Propozicija 3.4.4. *Neka su S i T skupovi takvi da je T beskonačan te da je $T \subseteq S$. Tada je S beskonačan.*

Dokaz. Budući da je T beskonačan, postoji pravi podskup T' od T takav da je $T' \cong T$. Slijedi da postoji bijekcija $f : T \to T'$. Definirajmo $g : S \to S$ sa

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in S \setminus T \\ f(x), & x \in T \end{cases}$$

Uočimo da je $g(x) \in S \setminus T$, za svaki $x \in S \setminus T$ te $g(x) \in T$ za svaki $x \in T$. Neka su

$$x_1, x_2 \in S,\ x_1 \neq x_2.$$

Tvrdimo da je

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

To je očito ako je

$$x_1 \in S \setminus T \text{ i } x_2 \in T \text{ ili } x_1 \in T \text{ i } x_2 \in S \setminus T.$$

Pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in S \setminus T$. Tada je

$$g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2).$$

Pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in T$. Tada je

$$g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2),$$

jer je f injekcija. Zaključak: g je injekcija.

Uzmimo neki $y \in T \setminus T'$ (znamo da takav y postoji, jer je T' pravi podskup od T. Tvrdimo da $y \notin \operatorname{Im} g$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $y \in \operatorname{Im} g$. Tada je $y = g(x)$ za neki $x \in S$.

1° $x \in S \setminus T$

Slijedi

$$y = g(x) = x.$$

Ovo je nemoguće, jer je $x \in S \setminus T$, a $y \in T \setminus T'$.

2° $x \in T$

Slijedi $y = g(x) = f(x) \in T'$, što je u kontradikciji s činjenicom da $y \notin T'$ (jer je $y \in T \setminus T'$). Zaključujemo da pretpostavka $y \in \operatorname{Im} g$ vodi na kontradikciju. Dakle $y \notin \operatorname{Im} g$. Prema tome $\operatorname{Im} g \neq S$. Prema propoziciji 3.2.4 skup S je beskonačan.

□

Teorem 3.4.5. *Neka je S skup. Tada je S beskonačan ako i samo ako postoji injekcija $f : \mathbb{N} \to S$.*

Dokaz. Ako je S beskonačan, onda prema propoziciji 3.4.1 postoji injekcija $f : \mathbb{N} \to S$. Pretpostavimo da postoji injekcija $f : \mathbb{N} \to S$. Prema lemi 3.4.2 slijedi

$$\mathbb{N} \cong f(\mathbb{N}).$$

Skup $\mathbb{N}$ je beskonačan pa iz propozicije 3.4.3 slijedi da je $f(\mathbb{N})$ beskonačan. Iz $f(\mathbb{N}) \subseteq S$ i prethodne propozicije slijedi da je S beskonačan.

□

3.5 Egzistencija beskonačnog skupa

Cij nam je sada dokazati da postoji beskonačan skup koristeći neke dodatne pojmove i aksiome. Smatramo da imamo pojam **primitivnog skupa** i pojam "*bit element*" primitivnog skupa. Da je x element primitivnog skupa S označavamo

$$x \in_p S.$$

Smatramo da je primitivni skup potpuno određen svojim elementima, tj. ako su S i T primitivni skupovi takvi da za svaki x vrijedi

$$x \in_p S \Leftrightarrow x \in_p T,$$

onda je $S = T$.

Ako ne vrijedi $x \in_p S$, onda pišemo $x \notin_p S$.

Smatramo da postoji primitivni skup $\emptyset_p$ koji ne sadrži niti jedan element tj. takav da za svaki x vrijedi

$$x \notin_p \emptyset_p.$$

Za $\emptyset_p$ kažemo da je prazan primitivni skup.

Neka su S i T primitivni skupovi. Kažemo da je S podskup primitivnog skupa T i pišemo

$$S \subseteq_p T$$

ako za svaki x takav da je $x \in_p S$ vrijedi $x \in_p T$.

Uočimo da za svaki primitivni skup S vrijedi $S \subseteq_p S$ i $\emptyset_p \subseteq_p S$.

Uočimo da vrijedi sljedeće: ako su S i T primitivni skupovi takvi da je

$$S \subseteq_p T \text{ i } T \subseteq_p S,$$

onda je $S = T$.

Neka je S primitivni skup. Smatramo da postoji primitivni skup $\mathcal{F}$ takav da za svaki T vrijedi

$$T \in \mathcal{F} \Leftrightarrow T \subseteq_p S.$$

Uočimo da je takav primitivni skup $\mathcal{F}$ jedinstven; označavat ćemo ga sa $\mathcal{P}_p(S)$.

Smatramo da postoji skup svih primitivnih skupova.

Teorem 3.5.1. *Postoji beskonačan skup.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih primitivnih skupova. Definirajmo funkciju $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ sa

$$f(S) = \mathcal{P}_p(S)$$

za svaki $S \in \mathcal{S}$. Tvrdimo da je f injekcija. Pretpostavimo da su $S, T \in \mathcal{S}$ takvi da je

$$f(S) = f(T).$$

Tada je

$$\mathcal{P}_p(S) = \mathcal{P}_p(T).$$

Očito je $S \in_p \mathcal{P}_p(S)$ pa slijedi $S \in_p \mathcal{P}_p(T)$, što povlači $S \subseteq_p T$. Analogno $T \subseteq_p S$. Stoga je $T = S$. Prema tome f je injekcija.

Neka je $S \in \mathcal{S}$. Imamo $\emptyset_p \subseteq_p S$ pa je $\emptyset_p \in_p \mathcal{P}_p(S)$, tj. $\emptyset_p \in_p f(S)$. Stoga je

$$f(S) \neq \emptyset_p \text{ za svaki } S \in \mathcal{S}.$$

Prema tome $\emptyset_p \notin \operatorname{Im} f$, a očito je $\emptyset_p \in \mathcal{S}$. Dakle

$$\operatorname{Im} f \neq \mathcal{S}.$$

Prema propoziciji 3.2.4 $\mathcal{S}$ je beskonačan skup.

□

Bibliografija

[1] S. Mardešić, *Matematička analiza* 1, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika* 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavaju se osnovna svojstva skupa i familija skupova. Definira se relacija i funkcijska relacija između dva skupa. Zatim se opisuje funkcija i proučavaju njena svojstva. Uvodi se pojam Peanove trojke i pokazuje princip definicije indukcijom. Na kraju, definiraju se i karakteriziraju beskonačni skupovi te pokazuje egzistencija beskonačnog skupa.

Summary

In this Master's Thesis the basic properties of a set and a family of sets are studied. The notions of a relation and a function relation between two sets are defined. After that, functions and their properties are studied and described. Also, the notion of a Peano triple is introduced and the principle of the definition by induction is explained. In the end of the thesis, infinite sets are defined and characterized and the existence of an infinite set is presented.

Životopis

Rođena sam 7. travnja 1993. godine u Mostaru. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam 1999. godine u Drugoj osnovnoj školi u Širokom Brijegu. Nakon završetka osnovne škole 2007. godine upisala sam Gimnaziju fra Dominika Mandića u Širokom Brijegu; opći smjer. Godine 2012. upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički. Nakon završetka preddiplomskog sveučilišnog studija stekla sam titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike te 2015. godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.