Kalmanovi filteri

Alapić, Mihael

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mihael Alapić

KALMANOVI FILTERI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Igor Velčić
Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, veljača, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Estimacija je proces procjene vrijednosti stanja na osnovi dostupnih mjerenja. Estimatori mogu biti prediktivni i neprediktivni. Prediktivni estimatori za estimaciju stanja u aktualnom koraku koriste samo podatke dobivene do prethodnog koraka, a neprediktivni estimatori za estimaciju stanja u aktualnom koraku, uz podatke dobivene do prethodnog koraka, koriste i mjerne vrijednosti iz aktualnog koraka. Pošto neprediktivni estimator koristi mjernu vrijednost iz aktualnog trenutka uzorkovanja, jasno je da će on imati generalno i manje pogreške nego prediktivni estimator. Međutim, njegov algoritam izvođenja može biti vremenski zahtjevniji za računala.

Veliki problem kod estimacija je pojavljivanje nepreciznih i netočnih mjerenja koja sadrže šum. Uz mjerni šum postoji i procesni šum zbog kojeg proces ne završi točno u onom stanju koje je predviđeno samim modelom procesa. Ovakav problem najčešće se javlja pri znanstvenim i edukacijskim pokusima, tehničkim i proizvodnim procesima. Također, nekad je teško u fizikalnim procesima izravno izmjeriti neku fizikalnu veličinu pa ovdje rješenje problema nudi *Kalmanov filter* koji je temeljen na poznatom modelu procesa i mjerenja. Rudolph Emil Kalman objavio je rekurzivni matematički algoritam za estimaciju stanja dinamičkih sustava sa zašumljenim mjernim signalima i varijablama stanja. Riječ *filter* koristi se ovdje zbog činjenice da se pri estimaciji stanja filtrira šum iz podataka.

Za korištenje Kalmanovog filtera promatramo određeni matematički model. Matematički modeli imaju više različitih podjela. Jedna moguća podjela je na dinamičke i statičke modele. Razlika između tih modela je da dinamički modeli, za razliku od statičkih, ovise o vremenu pa su promjene varijabli prikazane kao derivacije po vremenu odnosno kao diferencijalne jednažbe. Isto tako postoji podjela na linearne i nelinearne modele. Nelinearni modeli mogu se radi jednostavnosti linearizirati, ali tada gube na točnosti. Matematički modeli mogu se podijeliti i na stohastičke i determinističke modele. Za razliku od stohastičkih modela, deterministički modeli u sebi ne sadrže slučajnosti. Osnovna podjela matematičkih modela je na diskretne i kontinuirane. Iako se kontinuirani modeli prikazuju direktno kao funkcije vremena, nekad je korisno gledati i diskretne vrijednosti modela.

Kalman je svoju verziju algoritma objavio 1960. godine i od tada, usprkos munjevitom napretku raznih numeričkih postupaka, Kalmanov algoritam nije izgubio na značaju. Osnovni razlog leži u činjenici da Kalmanov filter omogućava procjenu prošlih, sadašnjih pa čak i budućih stanja sustava, čak i uz neprecizni matematički model. Algoritmi koji su se koristili prije Kalmanovog, za estimaciju stanja sustava u sljedećem koraku koristili su informacije iz svih prethodnih koraka. Za razliku od njih, prednost Kalmanovog filtera je *rekurzivnost* jer nije potrebno pamtiti sva prethodna mjerenja, već se u trenutnoj iteraciji koristi samo najbolja estimacija prethodnog stanja procesa koja je rekurzivno određena na temelju svih prethodnih mjerenja.

Nakon što je Kalman objavio svoj rad, znanstvenici iz NASA-e su prepoznali potencijalnu primjenu Kalmanovog filtera za njihov projekt. Radilo se o procjeni trajektorija i kotrolnog problema za *Apollo projekt* - misije do Mjeseca i natrag. To je bila prva potpuna implementacija Kalmanovog filtera jer je algoritam riješio problem raspoznjavanja valjanih podataka od nevaljanih. Kalmanov filter pronašao je veliku primjenu i kod digitalnih izračunavanja u sustavima upravljanja, navigaciji, praćenju i predviđanju putanje objekta, robotici...

Primjene	**Dinamički sustav**	**Tip senzora**
Kontrola procesa	Kemijska industrija	Tlak
		Temperatura
		Analizator zraka
		Protok
Zaštita od poplava	Riječni sustav	Razina vode
		Mjerenje količine padalina
		Vremenski radar
Praćenje položaja	Svemirska letjelica	Radar
		Sustav za snimanje
Navigacija	Brod	Žiroskop
		Akcelerometar
		GPS
		Log
		Sekstant

Slika 0.1: Neke primjene Kalmanovog filtera

Zbog mnogih prednosti ovog algoritma, postoje mnoge modifikacije originalnog diskretnog Kalmanovog filtera. Zasigurno treba spomenuti *kontinuirani Kalmanov filter* namijenjen kontinuiranim sustavima i *prošireni Kalmanov filter* koji rješava problem estimacije i kod nelinearnih sustava. Za objašnjenje Kalmanovog filtera i njegovih modifikacija u ovom radu, promatrat ćemo linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe s određenim *ulazom (kontrolom)* čija se rješenja nazivaju *stanja*. Pretpostavka algoritma je da je mjerenjima dostupna samo reducirana informacija o stanjima – određena linearna funckija koju nazivamo *izlazi*. Problem se svodi na traženje najboljeg linearnog procjenitelja slučajne varijable stanja uz poznate slučajne varijable izlaza na nekom vremenskom intervalu ili u skupu konačnih trenutaka.

Poglavlje 1

Deterministički linearni sustav

Matematički modeli mogu se prikazivati kao funkcije vremena. Prema tome, matematički modeli mogu biti kontinuirani i diskretni. U kontinuiranom slučaju ćemo promatrati matematički model dinamičkog sustava:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t) \\ z(t) = H(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

gdje je $u(t)$ vektor duljine r koji određuje varijable ulaza (*inputs*). Te varijable su pod našom kontrolom ili su nam barem poznate tj. možemo ih izmjeriti. Varijable stanja (*state variables*) bit će definirane vektorom $x(t)$ duljine n. Uglavnom nam nisu u potpunosti poznate, ali imaju određen zakon ponašanja. Vektor $z(t)$ duljine l određuje varijable izlaza (*outputs*). Navedeni vektor predstavlja dobiveno mjerenje. $F(t)$ je matrica dimenzije $n \times n$, $C(t)$ je matrica dimenzije $n \times r$, $H(t)$ je matrica dimenzije $l \times n$, a $D(t)$ je matrica dimenzije $l \times r$.

Ako se ipak radi o diskretnom slučaju, promatrat ćemo sustav:

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k-1} u_{k-1} \\ z_k = H_k x_k + D_k u_k \end{cases} \tag{1.2}$$

gdje će x_k označavati n-dimenzionalni vektor varijable stanja u trenutku t_k, Φ_{k-1} je $n \times n$ dimenzionalna matrica koja povezuje stanje u trenutku t_k sa stanjem u trenutku t_{k-1}, u_k je vektor ulaza duljine r u trenutku t_k i Γ_k je $n \times r$ dimenzionalna matrica koja povezuje opcionalni kontrolni signal u_{k-1} sa stanjem x_k. D_k je $l \times r$ dimenzionalna matrica u trenutku t_k, a H_k je $l \times n$ dimenzionalna matrica koja povezuje stanje x_k sa mjerenjem z_k. Vektor z_k je kao i u kontinuiranom slučaju duljine l, a označava varijable izlaza.

Definicija 1. *Kažemo da je kontinuirani model* (1.1) *vremenski invarijantan ako F, C, H i D ne ovise o t.*

Definicija 2. *Kažemo da je diskretni model* (1.2) *vremenski invarijantan ako* Φ, Γ, *H i D ne ovise o k.*

1.1 Kontinuirani linearni sustav

Rješenje sustava preko matrice prijelaza

Rješenje linearne diferencijalne jednadžbe $\dot{x}(t) = F(t)x(t){+}C(t)u(t)$ dobit ćemo rješavanjem *homogenog dijela jednadžbe*: $\dot{x}(t) = F(t)x(t)$ pa će to rješenje definirati naposlijetku generalno rješenje.

Matrica $\Phi(t)$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{nxn}$, naziva se *fundamentalno rješenje homogene jednadžbe* na intervalu $t \in [0, T]$ ako je $\dot{\Phi}(t) = F(t)\Phi(t)$ i $\Phi(0) = I_n$, gdje je I_n jedinična matrica dimenzije $n \times n$. Za dani vektor $x(0)$, vektor $x(t) = \Phi(t)x(0)$ zadovoljava jednadžbu:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}[\Phi(t)x(0)] \\
&= \left[\frac{d}{dt}\Phi(t)\right]x(0) \\
&= [F(t)\Phi(t)]x(0) \\
&= F(t)[\Phi(t)x(0)] \\
&= F(t)x(t)
\end{aligned}$$

Tako je $x(t) = \Phi(t)x(0)$ rješenje homogene jednadžbe $\dot{x}(t) = F(t)x(t)$ gdje je $x(0)$ inicijalna vrijednost.
Ako su elementi $F(t)$ neprekidni na intervalu $0 \leq t \leq T$ onda $\Phi(t)$ postoji i regularna je na intervalu $0 \leq t \leq \tau$ za neki $\tau > 0$. Zbog toga što je $\Phi(t)$ regularna definiramo *matricu prijelaza*:

$$\Phi(\tau, t) = \Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)$$

koja definira rješenje homogene jednadžbe $\dot{x}(t) = F(t)x(t)$, $x(t) = x_0$ u točki τ preko relacije $x(\tau) = \Phi(\tau, t)x_0$

Svojstva matrice prijelaza

Simbol (Φ) koristi se ujedno za fundamentalno rješenje homogene jednadžbe i za matricu prijelaza, ali razliku pravi broj argumenata funkcije. Po dogovoru vrijedi:

$$\Phi(\tau, 0) = \Phi(\tau)$$

Ostala svojstva matrice Φ su:

1. $\Phi(\tau, \tau) = \Phi(0) = I$
2. $\Phi^{-1}(\tau, t) = \Phi(t, \tau)$
3. $\Phi(\tau, \sigma)\Phi(\sigma, t) = \Phi(\tau, t)$
4. $\frac{\partial}{\partial \tau}\Phi(\tau, t) = F(\tau)\Phi(\tau, t)$
5. $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tau, t) = -\Phi(\tau, t)F(t)$

Rješenje nehomogene jednadžbe

Nehomogena jednadžba $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t), x(t_0) = x_0$ ima rješenje:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)C(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x(t_0) + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)C(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

gdje je $x(t_0)$ inicijalna vrijednost i $\Phi(t, t_0)$ je matrica prijelaza definirana preko $F(t)$.

Rješenje vremenski invarijatnog sustava

U slučaju vremenski invarijatnog sustava, matrica F je konstanta. Može se pokazati da, ako vrijedi da je $F(t) = F$, matrica prijelaza bit će jednaka:

$$\Phi(t, \tau) = e^{F(t-\tau)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^i}{i!} F^i$$

gdje po definiciji vrijedi $F^0 = I$. Tada će rješenje nehomogene jednadžbe biti:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{F(t-\tau)}x(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{F(t-\sigma)}Cu(\sigma)d\sigma \\ &= e^{F(t-\tau)}x(\tau) + e^{Ft} \int_{\tau}^{t} e^{-F\sigma}Cu(\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

Za računanje izraza e^{Ft} koriste se razne metode, a jedna od metoda je: $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI - F)^{-1}$, gdje je $\mathcal{L}^{-1}$ inverzna Laplaceova transformacija.

1.2 Diskretni linearni sustav

Diskretni linearni sustav imat će rješenje:

$$x(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})x(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \sigma)C(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

Ako je u konstanta intervalu $[t_{k-1}, t_k]$ tada možemo pisati:

$$x(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})x(t_{k-1}) + \Gamma(t_{k-1})u(t_{k-1})$$

gdje je

$$\Gamma(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \sigma)C(\sigma)d\sigma$$

Za diskretne sustave koristimo sljedeće oznake:

$$x_k \stackrel{\text{def}}{=} x(t_k), \quad z_k \stackrel{\text{def}}{=} z(t_k), \quad u_k \stackrel{\text{def}}{=} u(t_k),$$

$$H_k \stackrel{\text{def}}{=} H(t_k), \quad D_k \stackrel{\text{def}}{=} D(t_k), \quad \Phi_{k-1} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t_k, t_{k-1}), \quad \Gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(t_k)$$

Sustav jednadžbi u diskretnom sustavu je tada pomoću ovakvog definiranja:

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}u_{k-1} \\ z_k = H_k x_k + D_k u_k \end{cases}$$

Tada je rješenje rekurzije (vidi [1]):

$$x_k = (\Phi_{k-1} \ldots \Phi_0)x_0 + \sum_{i=1}^{k}(\Phi_{k-1} \ldots \Phi_{i-1})\Gamma_{i-1}u_{i-1}$$

Isto tako, ako je sustav vremenski invarijantan tj. ako su matrice Φ, Γ, H, i D konstante, tada se rješenje može zapisati u obliku:

$$x_k = \Phi^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1}\Gamma u_i$$

1.3 Observabilnost dinamičkog sustava

Observabilnost je svojstvo modela sustava. Linearni dinamički sustav sa zadanim ulazom i izlazom će biti *observabilan* ako i samo ako se stanja mogu jedinstveno odrediti iz definicije modela, njegovog ulaza tj. izlaza. Ako stanje nije moguće jedinstveno odrediti pomoću ulaza i izlaza, tada sustav nazivamo *neobservabilnim*. Sustav je zato observabilan ako je na osnovu mjerenja izlaza sustava u dovoljno dugom vremenskom intervalu moguće rekonstruisati proizvoljno početno stanje sustava. Tražimo rješenje sustava u trenutku t_f gdje je $t_f > t_0$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t) \\ z(t) = H(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

i pitamo se da li nam je poznato stanje u trenutku t_0 ukoliko su nam poznati F, C, H, D, u i z na intervalu $[t_0, t_f]$. Ako je H regularna u trenutku t_f to sigurno vrijedi zbog toga što bi tada x bio jedinstveno određen, ali sustav može biti observabilan i kad matrica H nije regularna. Zato definiramo *matricu observabilnosti*:

$$\mathcal{O}(H, F, t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t)H^T(t)H(t)\Phi(t)dt$$

i može se pokazati da je sustav observabilan ako i samo ako je matrica $\mathcal{O}(H, F, t_0, t_f)$ regularna, gdje je $\Phi(t)$ fundamentalno rješenje homogene jednadžbe.
Za diskretni sustav:

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}u_{k-1} \\ z_k = H_k x_k + D_k u_k \end{cases}$$

i zadani x_0 matrica observabilnosti je:

$$\mathcal{O}(H_k, \Phi_k, 1 \leq k \leq k_f) = \left\{ \sum_{k=1}^{k_f} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i} \right)^T H_k^T H_k \left(\prod_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i} \right) \right\}$$

gdje vrijeme između trenutaka t_0 i t_{k_f} u diskretnom slučaju odgovara indeksima: $0 \leq k \leq k_f$.

Treba napomenuti da observabilnost sustava ne ovisi ni o vektoru ulaza u, ni o matrici C, ni o matrici D iako vektor izlaza ovisi o njoj. Observabilnost ovisi samo o matricama F i H na intervalu $[t_0, t_f]$ tj. o matricama Φ_k i H_k u diskretnom slučaju.

Teorem 1. *Vremenski invarijantan i diskretan sustav je observabilan ako i samo ako vrijedi da matrica M ima puni rang n, gdje je M:*

$$M = \begin{bmatrix} H^T & \Phi^T H^T & (\Phi^T)^2 H^T & \dots & (\Phi^T)^{n-1} H^T \end{bmatrix}$$

Teorem 2. *Vremenski invarijantan i kontinuiran sustav je observabilan ako i samo ako vrijedi da matrica M ima puni rang n, gdje je M:*

$$M = \begin{bmatrix} H^T & F^T H^T & (F^T)^2 H^T & \dots & (F^T)^{n-1} H^T \end{bmatrix}.$$

1.4 Kontrolabilnost dinamičkog sustava

Osim observabilnosti sustava postoji još jedno svojstvo sustava koje se zove *kontrolabilnost sustava* čija definicija slijedi za kontinuiran i za diskretan sustav.

Definicija 3. *Sustav*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t) \\ z(t) = H(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

je kontrolabilan ukoliko za dani $x(t_0)$ i svaki $x(t_f)$ postoji po dijelovima neprekidni $u(t)$ koji vodi od $x(t_0)$ do $x(t_f)$ gdje je $t_f > t_0$.

Definicija 4. *Sustav*

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k-1} u_{k-1} \\ z_k = H_k x_k + D_k u_k \end{cases}$$

je kontrolabilan ukoliko za dani x_0 i svaki x_N postoji kontrolni signal u_k definiran na disrektnom intevalu $0 \leq k \leq N$ koji vodi od x_0 do x_N.

Teorem 3. *U slučaju kontinuiranog vremenski invarijantnog sustava*

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Cu(t),$$

sustav je kontrolabilan ako i samo ako S ima puni rang n, gdje je S:

$$S = \begin{bmatrix} C & FC & F^2 C & \dots & F^{n-1} C \end{bmatrix}.$$

Teorem 4. *U slučaju diskretnog vremenski invarijantnog sustava*

$$x_k = \Phi x_{k-1} + \Gamma u_{k-1},$$

sustav je kontrolabilan ako i samo ako S ima puni rang n, gdje je S :

$$S = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \Phi^2\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 2

Stohastički linearni sustav

Prošlo poglavlje opisivalo je dinamički deterministički sustav. Međutim, ponašanje realnog sustava nikada nije potpuno determinističko jer na njega djeluju različiti poremećaji - šumovi. Mjerenja određenih veličina stanja također su zašumljena i nepouzdana. Sve nas ovo vodi do zaključka da bi osim determinističkih, za predstavljanje dinamičkih sustava trebalo uvesti i stohastičke diferencijalne jednadžbe. Promatrat ćemo u ovom poglavlju linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe u kontinuiranom, ali isto tako i u diskretnom sustavu. Za definiranje Kalmanovog filtera trebat će nam definicije *bijelog šuma* i *matrice kovarijance*:

Definicija 5. *Slučajni proces* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *zovemo bijelim šumom, ako je* $E(X_t) = 0$ *i vrijedi:*

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2, & ako\ je\ h = 0 \\ 0, & inače \end{cases}$$

za svaki $t \in \mathbb{Z}$ *i* $\sigma^2 < \infty$.

Definicija 6. *Ako promatramo vektor slučajnih varijabli:*

$$X = [X_1 \quad ... \quad X_n]^T$$

gdje su $X_1, X_2, \ ...\ X_n$ *slučajne varijable sa konačnom varijancom, tada matricu kovarijance definiramo matricom* Σ *čiji element (i,j) je kovarijanca između* X_i *i* X_j*, odnosno*

$$\Sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

gdje je $\mu_i = E[X_i]$ *očekivanje i-tog elementa vektora X. U vektorskom obliku to možemo prikazati izrazom:*

$$\Sigma = E\left[(X - E[X])\,(X - E[X])^T\right] = E\left[XX^T\right] - \mu\mu^T$$

Diskretni Kalmanov filter podrazumijeva postojanje vremenski diskretnog procesa kojim se upravlja odnosno koji se nadzire. Vremenski diskretan linearan proces, koji nije potpuno deterministički, može biti opisan diferencijskom jednadžbom stanja i jednadžbom mjernog sustava:

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k-1} u_{k-1} + w_{k-1} \\ z_k = H_k x_k + D_k u_k + v_k \end{cases} \tag{2.1}$$

gdje je x_k n-dimenzionalni vektor stanja koji sadrži sve relevantne veličine u koraku k i pomnožen $n \times n$-dimenzionalnom matricom sustava Φ_{k-1} čini homogeni dio diferencijske jednadžbe stanja. u_k je r-dimenzionalni vektor ulaza u koraku k koji pomnožen s $n \times r$-dimenzionalnom matricom ulaza Γ_{k-1} i zajedno sa homogenim dijelom čini deterministički dio jednadžbe stanja. Procesni šum u koraku k je n-dimenzionalni slučajni vektor w_k i on čini stohastički dio jednadžbe stanja.

Jednadžba mjernog sustava pokazuje da je l-dimenzionalni vektor izlaza z_k također jednak zbroju determinističkog i stohastičkog dijela. Deterministički dio mjernog sustava čini zbroj $l \times n$ dimenzionalne matrice H_k pomnožene vektorom stanja x_k i $l \times r$ dimenzionalne matrice D_k pomnožene vektorom ulaza u_k, a stohastički dio čini l-dimenzionalni vektor v_k koji predstavlja mjerni šum u koraku k.

Kontinuirani Kalmanov filter također podrazumijeva postojanje linearnog procesa kojim se upravlja. On može biti opisan sustavom:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t) + w(t) \\ z(t) = H(t)x(t) + D(t)u(t) + v(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

gdje deterministički dio diferencijalne jednadžbe stanja čini zbroj matrice $F(t)$ dimenzije $n \times n$ pomnožene s vektorom stanja $x(t)$ duljine n i matrice $C(t)$ dimenzije $n \times r$ pomožene s vektorom ulaza $u(t)$ duljine r. Stohastički dio čini procesni šum - vektor $w(t)$ duljine n.

Vektor $z(t)$ duljine l određuje varijable izlaza. Jednadžbu mjernog sustava također čini deterministički i stohastički dio. Stohastički dio čini vektor $v(t)$ duljine l koji predstavlja mjerni šum. Deterministički dio opet čini zbroj matrice $H(t)$ dimenzije $l \times n$ pomnožene s vektorom stanja i matrice $D(t)$ dimenzije $l \times r$ pomožene s vektorom ulaza.

2.1 Diskretni Kalmanov filter

Pretpostavimo da ćemo u sustavu (2.1) zanemariti vektor ulaza u_k. Tada govorimo o diferencijskoj jednažbi stanja:

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k \tag{2.3}$$

gdje je x_k vrijednost stanja u trenutku k, Φ_k je tranzicijska matrica iz stanja u trenutku k do stanja u trenutku $k+1$ dimenzije $n \times n$ i w_k bijeli šum duljine n. Linearna stohastička jednadžba dobivanja mjernih rezultata je:

$$z_k = H_k x_k + v_k \tag{2.4}$$

gdje je mjerenje z_k vektor duljine l, matrica H_k opisuje poveznost između stanja i izlaza i dimenzije je $l \times n$, a v_k je mjerni šum koji je također vektor duljine l kao i mjerenje i nije koreliran sa vektorom w_k tj. procesnim šumom.

Pretpostavka je da su oba šuma Gaussovi bijeli šumovi nultih očekivanih vrijednosti i da vrijedi:

$$w_k \sim N(0, Q_k)$$

$$v_k \sim N(0, R_k)$$

$$E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_{k-j}$$

$$E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{k-j}$$

$$E[w_k v_j^T] = 0$$

Diskretni Kalmanov filter (DKF) rekurzivno procjenjuje očekivanu vrijednost i kovarijancu stanja linearnog stohastičkog dinamičkog sustava. Procjena koja se temelji samo na znanju procesa prije trenutka k naziva se *a priorna estimacija stanja* i označava sa $\hat{x}_k(-)$. Estimacija stanja koja je izračunata u koraku k uz poznavanje mjerenja z_k naziva se *a posteriorina estimacija stanja* i označava s $\hat{x}_k(+)$. Cilj Kalmanovog filtera je odrediti najbolju procjenu stanja x_k.

Kod estimacija nailazimo uvijek na pogreške pa zato definiramo dvije vrste grešaka:

- *Greška a priorne estimacije*:

$$e_k(-) = x_k - \hat{x}_k(-)$$

- *Greška a posteriorne estimacije*:

$$e_k(+) = x_k - \hat{x}_k(+)$$

Slično, definiramo i dvije matrice kovarijance grešaka:

- *Matrica kovarijance greške a priorne estimacije*:

$$P_k(-) = E[e_k(-)e_k^T(-)] \tag{2.5}$$

- *Matrica kovarijance greške a posteriorne estimacije*:

$$P_k(+) = E[e_k(+)e_k^T(+)] \tag{2.6}$$

Matrice kovarijance dvaju spomenutih šumova definiramo kao matrice:

$$Q_k = E[w_k w_k^T] \tag{2.7}$$

$$R_k = E[v_k v_k^T] \tag{2.8}$$

dimenzije $n \times n$ odnosno $l \times l$.

Princip ortogonalnosti Kalmanovog filtera

Neka je $Z_k = \{z_1, z_2, ..., z_k\}$ skup svih mjerenja do trenutka k. Cilj je pronaći najbolju procjenu stanja u trenutku k i ponoviti to također za sljedeći korak uz mjerenje z_{k+1}. Najbolju procjenu čini svojstvo minimalne varijance što možemo zapisati:

$$J(a) = E\left[(x_k - a)^T(x_k - a) \,\middle|\, Z_k\right]$$
$$\hat{x}_k(+) = argmin_a J(a)$$
$$J(\hat{x}_k(+)) = min_a J(a)$$

Može se pokazati da je optimalna procjena minimalne varijance za linearni sustav upravo uvjetno očekivanje:

$$\hat{x}_k(+) = E\left[x_k \,\middle|\, Z_k\right]$$

Skup slučajnih varijabli mjerenja $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ tvore vektorski prostor $\mathcal{Z}_k$ zajedno sa operacijom definiranom sljedećom formulom:

$$\langle z_i, z_j \rangle = E\left[z_i z_j^T\right]$$

Vektorski prostor $\mathcal{Z}_k$ sadrži sve linearne kombinacije n slučajnih varijabli:

$$\mathcal{Z}_k = \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i z_i \;\middle|\; \forall A_i \in \mathbb{R}^{lxl} \right\}$$

Na tom vektorskom prostoru također se može definirati skup vektora $\{o_1, o_2, ..., o_n\}$ koji čini ortonomiranu bazu:

$$\begin{aligned} \{o_1, o_2, ..., o_n\} \\ \langle o_i, o_j \rangle = E\left[o_i o_j^T\right] = 0 \\ \langle o_i, o_i \rangle = \|o_i\| = I \end{aligned}$$

Navedenu ortonomiranu bazu čine vektori o_i koji su nekorelirani. Baza se može dobiti različitim tehnikama, a jedna od njih je i *Gram-Smidthov postupak ortogonalizacije*. Kalmanov problem se svodi na projiciranje x_k u prostor $\mathcal{Z}_k$ tako da udaljenost bude minimalna. $\hat{x}_k(+)$ je odgovarajuća aproksimacija koja pripada prostoru $\mathcal{Z}_k$. Izraz $\hat{x}_k(+) - x_k$ mora zbog optimalnosti tada biti ortogonalan na prostor Z_k. Geometrijska interpretacija problema se svodi na to da je najbolja aproksimacija vektora u nekoj ravnini njegova ortogonalna projekcija na tu ravninu:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_k(+) - x_k, a \rangle = \langle e_k(+), a \rangle = 0, \forall a \in Z_k \Leftrightarrow \\ E\left[e_k(+) a^T\right] = 0, \forall a \in Z_k \end{aligned}$$

Drugim riječima, optimalna estimacijska pogreška $e_k(+)$ nije korelirana ni sa jednim mjerenjem $\{z_1, z_2, ..., z_k\}$, niti sa bilo kojom linearnom kombinacijom tih mjerenja. Kada promatramo nekoreliranost s obzirom na ortonomiranu bazu o_i slijedi također izraz:

$$\begin{aligned} E\left[(\hat{x}_k(+) - x_k) o_i^T\right] = 0, \forall i \Leftrightarrow \\ E\left[x_k o_i^T\right] = E\left[\hat{x}_k(+) o_i^T\right], \forall i \end{aligned}$$

Pomnožimo zadnji izraz sa o_i i sumiramo po i:

$$\sum_{i=1}^{k} E\left[\hat{x}_k(+)o_i^T\right]o_i = \sum_{i=1}^{k} E\left[x_k o_i^T\right]o_i \tag{2.9}$$

Pošto $\hat{x}_k(+)$ pripada prostoru $\mathcal{Z}_k$, $\hat{x}_k(+)$ se može zapisati kao linearna kombinacija baznih vektora:

$$\hat{x}_k(+) = \sum_{i=1}^{k} A_i o_i$$

Supstitucijom posljednjeg izraza za $\hat{x}_k(+)$ u jednadžbu (2.9) dobijemo:

$$\hat{x}_k(+) = \sum_{i=1}^{k} E\left[x_k o_i^T\right]o_i$$

Da bi dobili rekuzivnu strukturu, navedenu sumu ćemo podijeliti na dva dijela:

$$\hat{x}_k(+) = \sum_{i=1}^{k-1} E\left[x_k o_i^T\right]o_i + E\left[x_k o_k^T\right]o_k$$

Koristeći (2.3) možemo raspisati zadnji izraz:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k(+) &= \sum_{i=1}^{k-1} E\left[(\Phi_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1})o_i^T\right]o_i + E\left[x_k o_k^T\right]o_k \\
&= \Phi_{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} E\left[x_{k-1}o_i^T\right]o_i + E\left[x_k o_k^T\right]o_k \\
&= \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + E\left[x_k o_k^T\right]o_k
\end{aligned}$$

Član $E\left[w_{k-1}o_i^T\right]$ nestane zasto što su mjerenja $\mathcal{Z}_{k-1}$ neovisna od slučajnih varijabli w_{k-1} i očekivanje je 0. Sljedeći zadatak je naći drugačiji oblik izraza $E\left[x_k o_k^T\right]o_k$ koji neće koristiti vektore o_k zbog prezahtijevnog računanja. Kao što je već napisano, promatranu sumu podijelili smo na dva dijela. Prvi dio pripada prostoru $\mathcal{Z}_{k-1}$, dok drugi pripada smjeru nekoreliranog o_k. Tražimo vektor koji je također smjera o_k, pripada $\mathcal{Z}_k$ i ortogonalan je na $\mathcal{Z}_{k-1}$. Tada možemo izraz $E\left[x_k o_k^T\right] o_k$ zamijeniti tim vektorom skaliranim sa nekom matricom koeficijenata. Znamo da za estimaciju u trenutku $k-1$ vrijedi:

$$E\left[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}(+))z_i^T\right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1$$

Množeći zadnji izraz matricom Φ_{k-1} izraz postaje:

$$E\left[(\Phi_{k-1}x_{k-1} - \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+))z_i^T\right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1$$

Koristimo opet (2.3) i činjenicu da je w_{k-1} nezavisna od svih z_i za $i \leq k-1$ pa je očekivanje 0 i dobijemo:

$$E\left[(x_k - \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+))z_i^T\right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1$$

Dobiveni izraz množimo matricom H_k. Koristeći (2.4) i činjenicu da je vektor v_k neovisan od svih z_i za $i \leq k-1$ pa je očekivanje 0, dobit ćemo:

$$E\left[(z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+))z_i^T\right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1$$

Vrijedi da je izraz $z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+)$ nekoreliran sa $\mathcal{Z}_{k-1}$ i da pripada prostoru $\mathcal{Z}_k$ pošto je linearna kombinacija izraza koji pripadaju $\mathcal{Z}_k$. Zato vrijedi:

$$E\left[x_k o_k^T\right] o_k = K_k(z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+))$$

gdje je K_k matrica koeficijenata i vrijedi rekurzivna relacija za $\hat{x}_k(+)$:

$$\hat{x}_k(+) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + K_k(z_k - H_k\Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+))$$

Izvod jednadžbi Kalmanovog filtera

Zadnje dobivena jednadžba kombinira utjecaj a priorne estimacije stanja i izmjerene veličine. A posteriori estimacija stanja $\hat{x}_k(+)$ je linearna kombinacija a priori estimacije stanja $\hat{x}_k(-)$ i razlike između aktualnog mjerenja z_k i izraza $H_k\hat{x}_k(-)$ pomnožene sa matricom K_k što možemo zapisati u obliku:

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k(-)) \tag{2.10}$$

U prethodnoj jednadžbi matrica K_k će predstavljati *Kalmanovo pojačanje*, a izraz $z_k - H_k\hat{x}_k(-)$ predstavlja *inovaciju* ili *mjerni rezidual*. Kalmanovo pojačanje K_k je matrica veličine $n \times l$ i cilj je izabrati takvu matricu koja minimizira kovarijancu greške a posteriorne estimacije. Optimalni odabir Kalmanovog pojačanja koji minimizira utjecaj procesnog i mjernog šuma iznosi:

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + R_k)^{-1}$$

što ćemo dokazati kasnije.

Približavanjem matrice kovarijance mjernog šuma R_k nuli, matrica K_k postaje sve veća i tako će dati veći udio inovaciji u izračunu a posteriorne estimacije. Dakle, smanjenje matrice R_k zapravo znači da je mjerni proces sigurniji i da bi trebalo više u obzir uzeti njegove rezultate za izračun konačne estimacije stanja.

$$\lim_{R_k \to 0} K_k = H_k^{-1}$$

Ako ipak pustimo da se matrica kovarijance greške a priorne estimacije približava 0, tada je matrica K_k sve manja i daje manji udio važnosti inovaciji u izračunu a posteriorne estimacije što je isto smisleno jer ako je matrica kovarijance greške a priorne estimacije mala, tada je točnost a priorne estimacije dobra i ne treba mjerenje uzimati previše u obzir.

$$\lim_{P_k \to 0} K_k = 0$$

Da bi izveli jednadžbe algoritma izraz (2.5) i (2.6) možemo proširiti na način:

$$P_k(+) = E[e_k(+)e_k^T(+)] = E\left[(x_k - \hat{x}_k(+))(x_k - \hat{x}_k(+))^T\right] \tag{2.11}$$

$$P_k(-) = E[e_k(-)e_k^T(-)] = E\left[(x_k - \hat{x}_k(-))(x_k - \hat{x}_k(-))^T\right] \tag{2.12}$$

Supstitucijom (2.4) u (2.10) dobit ćemo:

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k\left(H_kx_k + v_k - H_k\hat{x}_k(-)\right) \tag{2.13}$$

Ubacimo sada izraz (2.13) u (2.11):

$$P_k(+) = E\left[[(I - K_kH_k)(x_k - \hat{x}_k(-)) - K_kv_k]\,[(I - K_kH_k)(x_k - \hat{x}_k(-)) - K_kv_k]^T\right]$$

Ovdje treba primijetiti da je izraz $x_k - \hat{x}_k(-)$ greška a priorne estimacije nezavisna od šuma pa zbog toga se očekivanje može raspisati:

$$P_k(+) = (I - K_kH_k)E\left[(x_k - \hat{x}_k(-))(x_k - \hat{x}_k(-))^T\right](I - K_kH_k) + K_kE[v_kv_k^T]K_k^T \tag{2.14}$$

Supstitucijom izraza (2.8) i (2.12) u izraz (2.14) dobijemo:

$$P_k(+) = (I - K_kH_k)P_k(-)(I - K_kH_k) + K_kR_kK_k^T \tag{2.15}$$

gdje je $P_k(-)$ matrica kovarijance greške a priorne estimacije. Raspisivajući (2.15) možemo dobiti:

$$P_k(+) = P_k(-) - K_k H_k P_k(-) - P_k(-) H_k^T K_k^T + K_k(H_k P_k(-) H_k^T + R_k) K_k^T \tag{2.16}$$

Kalmanov filter omogućava efikasno izračunavanje stanja diskretnog linearnog procesa uz minimiziranje srednje kvadratne pogreške.

Teorem 5. *Optimalna vrijednost matrice Kalmanovog pojačanja - vrijednost koja minimizira kovarijancu greške je matrica:*

$$K_k = P_k(-) H_k^T (H_k P_k(-) H_k^T + R_k)^{-1}$$

Dokaz. Kalmanov filter je procijenitelj koji estimaciju vrši pomoću metode najmanjih kvadrata. Greška u a posteriornoj estimaciji je $e_k(+) = x_k - \hat{x}_k(+)$. Želimo minimizirati očekivanu vrijednost greške tj. $E\left[||x_k - \hat{x}_k(+)||^2\right]$. To je ekvivalentno minimiziranju traga matrice kovarijance greške a posteriorne estimacije $P_k(+)$. Uzimajući u obzir da je trag matrice jednak tragu njegove simetrične matrice, iz izraza (2.16) dobijemo:

$$tr\,(P_k(+)) = tr(P_k(-)) - 2tr(K_k H_k P_k(-)) + tr(K_k(H_k P_k(-) H_k^T + R_k) K_k^T) \tag{2.17}$$

Da bi postigli minimizaciju traga matrice, deriviramo (2.17) po K_k i izjednačimo dobiveno sa 0:

$$\frac{dtr(P_k(+))}{dK_k} = 0$$

Tako ćemo dobiti jednakost:

$$(H_k P_k(-))^T = K_k(H_k P_k(-) H_k^T + R_k)$$

Iz čega slijedi da će K_k iznositi:

$$K_k = P_k(-) H_k^T (H_k P_k(-) H_k^T + R_k)^{-1} \tag{2.18}$$

Na ovaj način izvedeno je optimalno pojačanje koje minimizira kovarijancu greške estimacije i matricu K_k nazivamo *Kalmanovo pojačanje*. □

Kada ubacimo jednadžbu Kalmanovog pojačanja (2.18) u jednadžbu (2.16) dobijemo vezu između $P_k(+)$ i $P_k(-)$:

$$\begin{aligned} P_k(+) &= P_k(-) - P_k(-) H_k^T (H_k P_k(-) H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k(-) \\ &= P_k(-) - K_k H_k P_k(-) \\ &= (I - K_k H_k) P_k(-) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Dobivena jednadžba daje nam vezu između a priorne i a posteriorne estimacije matrice kovarijance greške. Prelazak stanja iz trenutka k u trenutak $k+1$ određeno je jednadžbom:

$$\hat{x}_{k+1}(-) = \Phi_k \hat{x}_k(+) \tag{2.20}$$

Potrebno je još naći jednadžbu koja će projicirati matricu kovarijance greške iz jednog koraka u drugi. To ćemo postići tako što ćemo prvo naći jednadžbu greške a priorne estimacije:

$$\begin{aligned} e_{k+1}(-) &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}(-) \\ &= (\Phi_k x_k + w_k) - \Phi_k \hat{x}_k(+) \\ &= \Phi_k e_k(+) + w_k \end{aligned}$$

Projiciramo jednadžbu (2.12) na korak $k+1$:

$$P_{k+1}(-) = E\left[e_{k+1}(-)e_{k+1}(-)^T\right] = E\left[(\Phi_k e_k(+) + w_k)(\Phi_k e_k(+) + w_k)^T\right]$$

Da bi u potpunosti odredili rekurziju, treba još izraziti $P_{k+1}(-)$ pomoću $P_k(+)$:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(-) &= E\left[e_{k+1}(-)e_{k+1}(-)^T\right] \\ &= E\left[\Phi_k e_k(+)(\Phi_k e_k(+))^T\right] + E[w_k w_k^T] \\ &= \Phi_k P_k(+)\Phi_k^T + Q_k \end{aligned} \tag{2.21}$$

gdje smo u trećoj jednakosti koristili izraze (2.7) i (2.11).

2.2 Kontinuirani Kalmanov filter

U sustavu (2.2) također ćemo pretpostaviti kao i u diskretnom slučaju nepostojanje vektora ulaza $u(t)$. Tada promatramo sustav:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + w(t) \\ z(t) = H(t)x(t) + v(t) \end{cases}$$

gdje je $x(t)$ vektor stanja duljine n, $F(t)$ matrica dimenzije $n \times n$ i $w(t)$ je procesni šum duljine n. Mjerenje $z(t)$ vektor je duljine l, matrica $H(t)$ opisuje povezanost između stanja i izlaza i dimenzije je $l \times n$, a $v(t)$ je mjerni šum koji nije koreliran sa procesnim šumom $w(t)$ i također je vektor duljine l kao i mjerenje.

Neka je Δt vrijeme intervala $[t_k - t_{k-1}]$. Vrijedi sljedeća jednakost:

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) = \Phi_k = I + F(t_{k-1})\Delta t + 0(\Delta t^2)$$

gdje $0(\Delta t^2)$ označava sve članove višeg reda od Δt tj. druge ili više potencije. Andrews i Grewal su pokazali da za mjerni šum vrijedi (vidi [2]):

$$R_k = \frac{R(t_k)}{\Delta t}$$

dok za procesni šum vrijedi:

$$Q_k = Q(t_k)\Delta t$$

Kombinirajući izraze (2.19) i (2.21) dobijemo izraz:

$$P_k(-) = [I + F(t)\Delta t][I - K_{k-1}H_{k-1}]P_{k-1}(-)[I + F(t)\Delta t]^T + Q(t)\Delta t \tag{2.22}$$

Iz (2.22) slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{P_k(-) - P_{k-1}(-)}{\Delta t} &= F(t)P_{k-1}(-) + P_{k-1}(-)F^T(t) + Q(t)\\ &- \frac{K_{k-1}H_{k-1}P_{k-1}(-)}{\Delta t}\\ &- F(t)K_{k-1}H_{k-1}P_{k-1}(-)F^T(t)\Delta t\\ &+ (\check{c}.v.r.)\end{aligned} \tag{2.23}$$

gdje kratica (č.v.r.) označava članove višeg reda. Raspisivajući jednadžbu Kalmanovog pojačanja (2.18) dobijemo:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{K_{k-1}}{\Delta t}\right] &= \lim_{\Delta t \to 0}\left[P_{k-1}(-)H_{k-1}^T[H_{k-1}P_{k-1}(-)H_{k-1}^T\Delta t + R(t)]^{-1}\right]\\ &= P(t)H^T(t)R^{-1}(t) = K(t)\end{aligned} \tag{2.24}$$

Supstitucijom (2.24) u (2.23) i puštajući limes $\Delta t \to 0$ dobijemo diferencijalnu jednadžbu:

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q(t) - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) \tag{2.25}$$

Prethodna diferencijalna jednadžba (2.25) može biti zapisana i drugačije pomoću jednakosti:

$$K(t)R(t)K^T(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}R(t)R^{-1}(t)H(t)P(t)$$

pa diferencijalna jednadžba glasi:

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q(t) - K(t)R(t)K^T(t) \tag{2.26}$$

Na sličan način se pomoću jednadžbi (2.10) i (2.20) i puštajući limes $\Delta t \to 0$ može dobiti diferencijalna jednadžba:

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t) + K(t)(z(t) - H(t)\hat{x}(t)) \tag{2.27}$$

Jednadžbe (2.24), (2.26) i (2.27) čine algoritam kontinuiranog Kalmanovog filtera, poznatijeg kao *Kalman-Bucy filter*.

2.3 Algoritam diskretnog Kalmanovog filtera

Kalmanov filter procjenjuje stanje procesa u nekom vremenskom trenutku i zatim dobiva rezultat mjerenja. Problem je što su mjerenja dobivena iz senzora često parcijalna, nepotpuna i gotovo uvijek sadrže određeni stupanj šuma. U estimaciji stanja procesa cilj je dobiti pouzdane vrijednosti varijabli stanja procesa optimirajući ih podacima dobivenima iz senzorskih očitanja. Algoritam Kalmanovog filtera ima dva koraka. Prvi korak zovemo *prediktivnim*, dok će drugi biti *korekcijski*. Prediktivni korak algoritma projicira procjenu stanja procesa i matrice kovarijance greške iz koraka $k-1$ u korak k. Rezultat ovog koraka predstavljaju a priori estimacije stanja i matrice kovarijance greške. U korekcijskom koraku sustav dobiva informacije o novim mjerenjima i na osnovu tih informacija vrši korekciju a priori pretpostavke. Rezultat korekcijskog koraka naziva se a posteriorna estimacija. Jednadžbe Kalmanovog filtera mogu se po tome onda podijeliti u dvije grupe:

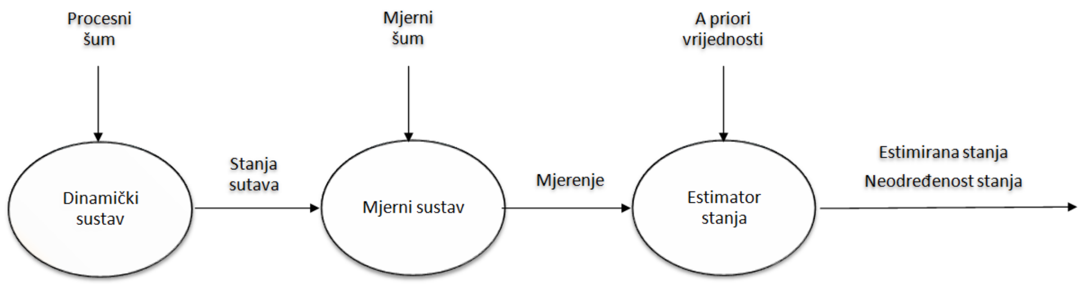
- jednadžbe predikcije

$$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+)$$
$$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

- jednadžbe korekcije

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + R_k)^{-1}$$
$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k(-))$$
$$P_k(+) = (I - K_kH_k)P_k(-)$$

Nakon što se mjerenjem dobije z_k, računa se Kalmanovo pojačanje, a posteriorno stanje i matrica kovarijance greške a posteriorne procjene stanja. A posteriorna procjena nakon vremenske projekcije postaje a priorna procjena u sljedećem koraku. Nakon jedne iteracije gore navedenih jednadžbi, proces se ponavlja tako da je ulaz u sljedeću iteraciju $k+1$ zadnje izračunato a posteriorno stanje i a posteriorna matrica kovarijance greške tj. $\hat{x}_k(+)$ i $P_k(+)$.



Slika 2.1: Shema postupka estimacije stanja sustava

Kada su matrice kovarijance šuma procesa Q i mjerenja R konstante, tada će se i matrica kovarijance greške estimacije stanja P_k i matrica K_k brzo stabilizirati i ostati konstantni. Konačni algoritam Kalmanovog filtera može se zapravo opisati pomoću beskonačne petlje u kojoj se cijelo vrijeme izmijenjuju obje grupe jednadžbi s ciljem procjene trenutnog stanja procesa. Slijedi algoritam za procjenu stanja modela:

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + w_{k-1} \\ z_k = H_k x_k + v_k \end{cases}$$

Koraci algoritma

1. U trenetku $k-1$ nakon što je izmjerena varijabla z_{k-1}, treba izračunati $\hat{x}_{k-1}(+)$ i $P_{k-1}(+)$

2. U trenutku k prije mjerenja z_k, izračunaju se a priorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$:

$$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+)$$

$$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

3. U trenutku k računamo optimalno Kalmanovo pojačanje:

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + R_k)^{-1}$$

4. Nakon mjerenja z_k, korigiraju se a priorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$ te se dobe a posteriorne procjene $\hat{x}_k(+)$ i $P_k(+)$.

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k(-))$$
$$P_k(+) = (I - K_k H_k)P_k(-)$$

2.4 Primjer

Pretpostavimo da je promatreni sustav oblika:

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + w_{k-1}$$

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k$$

gdje je su bijeli šumovi:

$$w_k \sim N(0, 1)$$
$$v_k \sim N\left[0, 2 + (-1)^k\right]$$

i zadana je matrica:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Izračunat ćemo za korake $k = 1, ..., 10, 1000$ vrijednosti matrica $P_k(-)$, $P_k(+)$ i K_k. Primijetimo prvo da su nam poznate matrice:

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

U svakom koraku ćemo koristiti jednadžbe:

$$R_k = E[v_k v_k^T]$$

$$Q_k = E[w_k w_k^T]$$

$$P_k(-) = \Phi_{k-1} P_{k-1}(+) \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

$$K_k = P_k(-) H_k^T (H_k P_k(-) H_k^T + R_k)^{-1}$$

$$P_k(+) = (I - K_k H_k) P_k(-)$$

Tada za korak $k = 1$ vrijedi:

$$P_k(-) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$K_k = \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + 1 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9545 \\ 0.4545 \end{bmatrix}$$

$$P_k(+) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9545 \\ 0.4545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.45 \\ 0.45 & 6.45 \end{bmatrix}$$

Isto ponavljamo za ostale korake i tako dobijemo tablicu prikazanu na sljedećoj stranici sa vrijednostima matrica $P_k(-)$, $P_k(+)$ i K_k za korake $k = 1, ..., 10, 1000$.

k	R_k	Q_k	$P_k(-)$	K_k	$P_k(+)$
1	1	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}21 & 10\\ 10 & 11\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.9545\\ 0.4545\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.95 & 0.45\\ 0.45 & 6.45\end{pmatrix}$
2	3	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}9.31 & 6.9\\ 6.9 & 7.45\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.7564\\ 0.5608\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.26 & 1.68\\ 1.68 & 3.57\end{pmatrix}$
3	1	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10.21 & 5.26\\ 5.26 & 4.57\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.9108\\ 0.4692\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.91 & 0.46\\ 0.46 & 2.11\end{pmatrix}$
4	3	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.95 & 2.57\\ 2.57 & 3.11\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.6230\\ 0.324\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.86 & 0.97\\ 0.97 & 2.27\end{pmatrix}$
5	1	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7.08 & 3.24\\ 3.24 & 3.27\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.8763\\ 0.4013\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.87 & 0.40\\ 0.40 & 1.97\end{pmatrix}$
6	3	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.65 & 2.37\\ 2.37 & 2.97\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.6078\\ 0.3101\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.82 & 0.93\\ 0.93 & 2.23\end{pmatrix}$
7	1	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6.91 & 3.16\\ 3.16 & 3.23\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.8737\\ 0.3997\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.87 & 0.39\\ 0.39 & 1.96\end{pmatrix}$
8	3	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.64 & 2.36\\ 2.36 & 2.96\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.6074\\ 0.31\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.82 & 0.93\\ 0.93 & 2.23\end{pmatrix}$
9	1	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6.91 & 3.16\\ 3.16 & 3.23\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.8737\\ 0.3997\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.87 & 0.39\\ 0.39 & 1.96\end{pmatrix}$
10	3	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.64 & 2.36\\ 2.36 & 2.96\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.6074\\ 0.31\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.82 & 0.93\\ 0.93 & 2.23\end{pmatrix}$
1000	3	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.64 & 2.36\\ 2.36 & 2.96\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.6074\\ 0.31\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.82 & 0.93\\ 0.93 & 2.23\end{pmatrix}$

Tablica 2.1: Vrijednosti matrica $P_k(-)$, $P_k(+)$ i K_k za korake $k = 1, ..., 10, 1000$

2.5 Algoritam kontinuiranog Kalmanovog filtera

Algoritam za procjenu stanja modela:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + w(t) \\ z(t) = H(t)x(t) + v(t) \end{cases}$$

čine jednadžbe Kalmanovog filtera:

- jednadžbe predikcije i korekcije

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q(t) - K(t)R(t)K^T(t)$$

$$K(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}(t)$$
$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t) + K(t)(z(t) - H(t)\hat{x}(t))$$

Poglavlje 3

Nelinearno filtriranje

Mnogi dinamički sustavi nisu apsolutno linearni, ali nisu ni daleko od toga. U ovom poglavlju će biti razrađena primjena linearnog problema na probleme koji nisu u potpunosti linearni. Jedna od modifikacija Kalmanova filtera je *prošireni Kalmanov filter* (engl. *Extended Kalman filter* – EKF). EKF estimira stanje na osnovi lineariziranog modela, a linearizirani se model izračunava oko estimirane vrijednosti dobivene EKF-om. Pomoću Taylorovih redova možemo parcijalnim derivacijama nelinearnih funkcija procesa i mjerenja linearizirati estimaciju stanja u k-tom koraku preko estimacije stanja i kovarijance iz prethodnog koraka $k-1$. Uvođenjem nelinearnosti, promatrat ćemo diskretni sustav:

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1} \\ z_k = h(x_k) + v_k \end{cases}$$

gdje su $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ diferencijabilne nelinarne funkcije. Za kontinuirani slučaj, sustav glasi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + w(t) \\ z(t) = h(x(t)) + v(t) \end{cases}$$

gdje su diferencijabilne funkcije f i h jednako definirane kao i u diskretnom slučaju. Sve ostale varijable su jednakih dimenzija i oznake su iste kao što su definirane u poglavlju (1).

3.1 Diskretni Kalmanov filter

Za promatrani sustav:

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1} \\ z_k = h(x_k) + v_k \end{cases}$$

definiramo *nominalnu vrijednost stanja* kao vrijednost stanja kada zanemarimo procesni šum:

$$x_k^{nom} = f(x_{k-1}^{nom})$$

Definirajmo i *pertubacije nominalne vrijednosti*:

$$\delta x_k = x_k - x_k^{nom} \tag{3.1}$$

$$\delta z_k = z_k - h(x_k^{nom}) \tag{3.2}$$

Razvijmo funkciju $f(x)$ u Taylorov red oko točke $x = x_{k-1}^{nom}$:

$$\begin{aligned} x_k = f(x_{k-1}) &= f(x_{k-1}^{nom}) + \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_{k-1}^{nom}} \delta x_{k-1} + (\check{c}.v.r.) \\ &= x_k^{nom} + \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_{k-1}^{nom}} \delta x_{k-1} + (\check{c}.v.r.) \end{aligned}$$

Tada zbog (3.1) vrijedi:

$$\delta x_k = x_k - x_k^{nom} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_{k-1}^{nom}} \delta x_{k-1} + (\check{c}.v.r.)$$

Kad zanemarimo članove višeg reda tada će vrijediti:

$$\delta x_k \approx \Phi_{k-1} \delta x_{k-1} + w_{k-1} \tag{3.3}$$

gdje je Φ_{k-1}:

$$\Phi_{k-1} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_{k-1}^{nom}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{x=x_{k-1}^{nom}} \tag{3.4}$$

$n \times n$ konstantna matrica.

Slično razvijemo i diferencijabilnu funkciju h u Taylorov red oko točke $x = x_k^{nom}$:

$$h(x_k) = h(x_k^{nom}) + \frac{\partial h(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_k^{nom}} \delta x_k + (\check{c}.v.r.)$$

Tada zbog (3.2) vrijedi:

$$\delta z_k = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_k^{nom}} \delta x_k + (\check{c}.v.r.)$$

Ako zanemarimo članove višeg reda:

$$\delta z_k \approx H_k \delta x_k + v_k \tag{3.5}$$

gdje je:

$$H_k = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_k^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & \frac{\partial h_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_n} \end{bmatrix}\Bigg|_{x=x_k^{nom}} \tag{3.6}$$

$l \times n$ konstantna matrica.

Kada spojimo rezultate (3.3) i (3.5) dobijemo naš novi linearizirani sustav:

$$\begin{cases} \delta x_k = \Phi_{k-1}\delta x_{k-1} + w_{k-1} \\ \delta z_k = H_k \delta x_k + v_k \end{cases} \tag{3.7}$$

Problem kod linarizacije oko nominalne vrijednosti stanja je taj da se razlika stvarne vrijednosti s vremenom počinje dosta udaljavati od nominalne vrijednosti pa i u razvoju u Taylorov red članovi višeg reda imaju veći značaj što nam nikako nije u cilju. Da bi riješili ovaj problem, zamijenit ćemo nominalnu vrijednost stanja sa procijenjenom i Taylorov red razviti oko estimirane vrijednosti. Tada će razlika između stvarne vrijednosti i estimirane uvijek ostati mala i moći ćemo linearizirati sustav.
Na dobiveni rezultat (3.7), primijenit ćemo modifikaciju da ćemo zamijeniti x_{k-1}^{nom} sa $\hat{x}_{k-1}$ i x_k^{nom} sa $\hat{x}_k$. Tada će parcijalne derivacije (3.4) i (3.6) biti:

$$\Phi_{k-1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=\hat{x}_{k-1}(+)}$$

$$H_k = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\Big|_{x=\hat{x}_k(-)}$$

Konačno, za diskretne sustave linearizacijom oko estimirane vrijednosti stanja dobili smo sustav:

$$\begin{cases} \delta x_k = \Phi_{k-1}\delta x_{k-1} + w_{k-1} \\ \delta z_k = H_k \delta x_k + v_k \end{cases}$$

3.2 Kontinuirani Kalmanov filter

Promatramo kontinuirani sustav:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + w(t) \\ z(t) = h(x(t)) + v(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

sa istim dimenzijama vektora kao i u diskretnom slučaju.
Slično kao i disrektnom slučaju, linearizirali smo sustav (3.8) u sustav:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = F\delta x(t) + w(t) \\ \delta z(t) = H\delta x(t) + v(t) \end{cases}$$

gdje je:

$$F = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)}\Big|_{x(t)=x^{nom}(t)}$$

i

$$H = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)}\Big|_{x(t)=x^{nom}(t)}$$

Varijable $\delta x(t)$ i $\delta z(t)$ su pertubacije nominalne vrijednosti stanja definirane slično kao i u disrektnom slučaju. Isto tako ćemo zamijeniti nominalnu vrijednost stanja sa procijenjenom i pomoću ove modifikacije, dobit ćemo da su tražene parcijalne derivacije u kontinuiranom slučaju jednake:

$$F(t) = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)}\Big|_{x=\hat{x}(t)}$$

$$H(t) = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)}\Big|_{x=\hat{x}(t)}$$

Konačno, za kontinuirane sustave linearizacijom oko estimirane vrijednosti stanja dobili smo sustav:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = F(t)\delta x(t) + w(t) \\ \delta z(t) = H(t)\delta x(t) + v(t) \end{cases}$$

3.3 Algoritam diskretnog Kalmanovog filtera

Jednadžbe proširenog Kalmanovog filtera mogu se također podijeliti u dvije grupe:

- jednadžbe predikcije

$$\hat{x}_k(-) = f(\hat{x}_{k-1}(+))$$

$$P_k(-) = \Phi_{k-1} P_{k-1}(+) \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

  gdje je

$$\Phi_{k-1} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_{k-1}(+)}$$

- jednadžbe korekcije

$$K_k = P_k(-) H_k^T (H_k P_k(-) H_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - h(\hat{x}_k(-)))$$

$$P_k(+) = (I - K_k H_k) P_k(-)$$

  gdje je

$$H_k = \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_k(-)}$$

Koraci algoritma

1. U trenetku $k-1$ nakon što je izmjerena varijabla z_{k-1}, treba izračunati $\hat{x}_{k-1}(+)$ i $P_{k-1}(+)$

2. Računa se parcijalna derivacija kako bi dobili matricu Φ_{k-1}:

$$\Phi_{k-1} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_{k-1}(+)}$$

3. U trenutku k prije mjerenja z_k, izračunaju se a priorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$:

$$\hat{x}_k(-) = f(\hat{x}_{k-1}(+))$$

$$P_k(-) = \Phi_{k-1} P_{k-1}(+) \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

4. U trenutku k računa se parcijalna derivacija kako bi dobili matricu H_k:

$$H_k = \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_k(-)}$$

5. Računamo optimalno Kalmanovo pojačanje:

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + R_k)^{-1}$$

6. Nakon mjerenja z_k, korigiraju se a priorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$ te se dobe a posteriorne procjene $\hat{x}_k(+)$ i $P_k(+)$.

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(+) &= \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - h(\hat{x}_k(-))) \\ P_k(+) &= (I - K_kH_k)P_k(-) \end{aligned}$$

Gledajući malo drugačiji sustav:

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}, w_{k-1}) \\ z_k = h(x_k, v_k) \end{cases}$$

gdje su sada šumovi argumenti naših funkcija f i h, razlikovat će se i koraci algoritma. Jednadžbe proširenog Kalmanovog filtera mogu se i sada podijeliti u dvije grupe:

- jednadžbe predikcije

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(-) &= f(\hat{x}_{k-1}(+), 0) \\ P_k(-) &= \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + L_{k-1}Q_{k-1}L_{k-1}^T \end{aligned}$$

  gdje je

$$\begin{aligned} \Phi_{k-1} &= \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=\hat{x}_{k-1}(+)} \\ L_{k-1} &= \frac{\partial f}{\partial w}\bigg|_{x=\hat{x}_{k-1}(+)} \end{aligned}$$

- jednadžbe korekcije

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + M_kR_kM_k^T)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(+) &= \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - h(\hat{x}_k(-), 0)) \\ P_k(+) &= (I - K_kH_k)P_k(-) \end{aligned}$$

  gdje je

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=\hat{x}_k(-)} \\ M_k &= \frac{\partial h}{\partial v}\bigg|_{x=\hat{x}_k(-)} \end{aligned}$$

Koraci algoritma

1. U trenetku $k-1$ nakon što je izmjerena varijabla z_{k-1}, treba izračunati $\hat{x}_{k-1}(+)$ i $P_{k-1}(+)$

2. Računaju se parcijalne derivacije kako bi dobili matrice Φ_{k-1} i L_{k-1}:

$$\Phi_{k-1} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=\hat{x}_{k-1}(+)}$$

$$L_{k-1} = \frac{\partial f}{\partial w}\bigg|_{x=\hat{x}_{k-1}(+)}$$

3. U trenutku k prije mjerenja z_k, izračunaju se a priorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$:

$$\hat{x}_k(-) = f(\hat{x}_{k-1}(+), 0)$$

$$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + L_{k-1}Q_{k-1}L_{k-1}^T$$

4. U trenutku k računaju se parcijalne derivacije kako bi dobili matrice H_k i M_k:

$$H_k = \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=\hat{x}_k(-)}$$

$$M_k = \frac{\partial h}{\partial v}\bigg|_{x=\hat{x}_k(-)}$$

5. Računamo optimalno Kalmanovo pojačanje:

$$K_k = P_k(-)H_k^T(H_kP_k(-)H_k^T + M_kR_kM_k^T)^{-1}$$

6. Nakon mjerenja z_k, korigiraju se a priorne procjene $\hat{x}_k(-)$ i $P_k(-)$ te se dobe a posteriorne procjene $\hat{x}_k(+)$ i $P_k(+)$.

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k(z_k - h(\hat{x}_k(-), 0))$$
$$P_k(+) = (I - K_kH_k)P_k(-)$$

3.4 Algoritam kontinuiranog Kalmanovog filtera

Algoritam za procjenu stanja modela:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + w(t) \\ z(t) = h(x(t)) + v(t) \end{cases}$$

čine jednadžbe proširenog Kalmanovog filtera:

- jednadžbe predikcije i korekcije

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q(t) - K(t)R(t)K^T(t)$$

$$K(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + K(t)(z(t) - h(\hat{x}(t)))$$

  gdje je

$$F(t) = \left.\frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)}\right|_{x=\hat{x}(t)}$$

$$H(t) = \left.\frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)}\right|_{x=\hat{x}(t)}$$

Bibliografija

[1] C. K. Chui & G. Chen, *Kalman Filtering wtih Real-Time Applications*, Springer, Berlin, 2009.

[2] M. S. Grewal & A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[3] S. Haykin, *Kalman filtering and neural networks*, John Wiley & Sons, Inc., Hamilton, Ontario, Canada, 2001.

[4] R. E. Kalman, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Transaction of the ASME - Journal of Basic Engineering, Baltimore, 1960.

[5] S. K. Koldbæk & L. C. Totu, *Improving MEMS Gyroscope Performance using Homogeneous Sensor Fusion*, `http://kom.aau.dk/~lct/repository/other_work/11gr1033/Appendices_G_H.pdf` (veljača 2019.)

[6] T. Lacey, *Tutorial: The Kalman Filter*, `http://web.mit.edu/kirtley/kirtley/binlustuff/literature/control/Kalman%20filter.pdf` (siječanj 2019.)

[7] D. Simon, *Optimal state estimation - Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.

[8] G. Welch & G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, `http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf` (siječanj 2019.)

Sažetak

U ovom radu opisana je teorija koja stoji iza algoritma Kalmanovog filtera. Kalmanov filter je estimator stanja linearnog dinamičkog sustava popraćen šumovima. Primjenu pronalazi u mnogim područjima kao na primjer u navigaciji i robotici, a korišten je i od strane NASA-e za Apollo projekt. U prvom poglavlju opisan je deterministički sustav promatranog modela, objašnjeni su osnovni pojmovi koji će biti korišteni dalje u radu i definirana su svojstva observabilnosti i kontrolabilnosti sustava. U drugom poglavlju promatran je stohastički linearni sustav i uz pretpostavke modela izvedene su jednadžbe za Kalmanov algoritam u diskretnom i kontinuiranom slučaju. Pronađen je najbolji linearni procjenitelj slučajne varijable stanja te u zadnjem poglavlju su dobiveni rezultati prošireni na nelinearne sustave i samim time je opisan prošireni Kalmanov filter.

Summary

The subject of this thesis is the theory behind Kalman filter algorithms. Kalman filter is a state estimator of linear dynamic system containing statistical noise. Areas of application are navigation, robotics and even spacecraft technology. NASA has used it for the Apollo project. A description of deterministic system of the observed model is provided in the first chapter. Also, in the first chapter basic terms that will be further used are explained and definitions of system properties - observability and controllability are given. In the second chapter, a stohastic linear system is observed and Kalman algorithm equations for discrete and continuous cases are derived. Also, the best linear state estimator has been found. In the last chapter, the results were expanded into nonlinear systems and so is the description of Extended Kalman filter given.

Životopis

Rođen sam 28. studenog 1994. godine u Münchenu, Njemačka. Prije početka osnovnoškolskog obrazovanja selim se iz Münchena u Varaždin gdje pohađam VII. OŠ Varaždin. Nakon osnovne škole, 2009. godine upisujem Prvu gimnaziju Varaždin koju završavam 2013. godine. Iste godine upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij završio sam 2016. godine te iste godine upisao diplomski studij Financijska i poslovna matematika također na matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu.