Upisana i pripisane kružnice trokuta

Bešenić, Anamarija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anamarija Bešenić

UPISANA I PRIPISANE KRUŽNICE TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, veljača, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Najraniji matematički zapisi otkrivaju nam da su ljude od davnina fascinirali pravilni geometrijski oblici. Stari su Grci trokut i kružnicu smatrali savršenim geometrijskim likovima, stoga ne čudi što su kroz povijest ovi likovi bili predmet mnogobrojnih proučavanja i istraživanja.[2]

Govoreći o trokutu moramo spomenuti neke njegove karakteristične točke kao i njemu pridužene kružnice: opisanu, upisanu i pripisane kružnice. U ovom radu bavit ćemo se otkrivanjem svojstava i uspostavljanjem veze između navedenih kružnica.

Ovaj diplomski rad sastoji se od četiri poglavlja. U prvom poglavlju navodimo osnovne objekte i teoreme na koje ćemo se po potrebi pozivati tijekom rada te definiramo četiri osnovne karakteristične točke trokuta. U drugom poglavlju bavimo se pripisanim kružnicama trokuta. Zatim proučavamo odnose i svojstva između upisane i pripisanih kružnica trokuta. Karakteristične točke trokuta povezane su na zanimljiv način koji promatramo u trećem poglavlju. Konačno, četvrto poglavlje nam donosi dokaz jednog od najljepših teorema u geometriji trokuta: Feuerbachovog teorema.

Sve popratne slike izrađene su alatom dinamičke geometrije *GeoGebrom*.

Poglavlje 1

Osnovno o trokutu i kružnici

U ovom poglavlju navodimo definicije osnovih objekata i njihova svojstva koje ćemo koristiti pri proučavanju upisane i pripisanih kružnica trokuta te njihovih središta. Mnoge navedene objekte susrećemo već u osnovnoj školi te njihova svojstva smatramo poznatima i u ovom ih radu ne dokazujemo. Dokaze provodimo za manje poznate tvrdnje.

1.1 Trokut

Najprije ćemo navesti definiciju trokuta. Pri tome pratimo način definiranja iznesen u knjizi [17, str.178-179].

Definicija 1.1.1. *Neka su A, B, C tri nekolinearne točke. Konveksnu ljusku skupa* $\{A, B, C\}$ *nazivamo trokut. Točke A, B, C su vrhovi trokuta, a dužine* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ *stranice trokuta.*

Trokut s vrhovima A, B, C označavamo s ΔABC. Duljine stranica trokuta označavat ćemo s $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, a tim stranicama nasuprotne kutove s $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle ACB$.

Teorem 1.1.2. *(i) U svakom trokutu zbroj unutarnjih kutova iznosi* $180°$.
(ii) Vanjski kut uz jedan vrh trokuta jednak je zbroju unutarnjih kutova uz preostala dva vrha.

Definicija 1.1.3. *Srednjica trokuta je dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta.*

Teorem 1.1.4. *Srednjica trokuta je paralelna jednoj stranici trokuta i njena duljina je jednaka polovini duljine te stranice.*

Karakteristične točke trokuta

Četiri osnovne karakteristične točke trokuta zajednički je naziv za ortocentar H, težište T, središte trokutu upisane kružnice U i središte trokutu opisane kružnice O.

Ortocentar

Definicija 1.1.5. *Visina trokuta je dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi nožište okomice spuštene iz tog vrha na pravac na kojemu leži nasuprotna stranica.*

Teorem 1.1.6. *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Definicija 1.1.7. *Točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta naziva se ortocentar.*

Težište

Definicija 1.1.8. *Težišnica je dužina koja spaja vrh trokuta i polovište njemu nasuprotne stranice.*

Teorem 1.1.9. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, a t_a, t_b, t_c duljine odgovarajućih težišnica, tada je:*

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

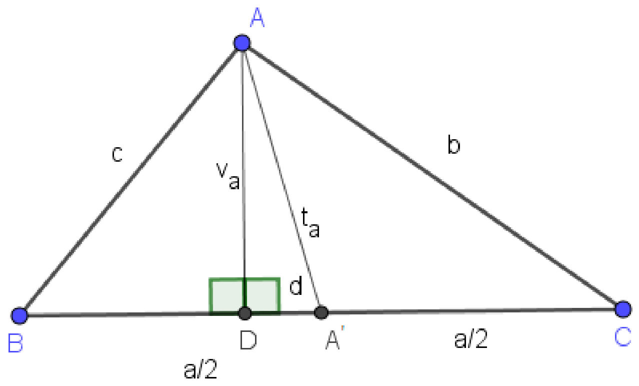
$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Bez smanjenja općenitosti neka je $b > c$. Neka je D nožište okomice iz A na pravac AB. Pretpostavimo da je D na dužini $\overline{BC}$. Označimo $|AD| = v_a$. Neka je A' polovište $\overline{BC}$. Označimo još $|AA'| = t_a$ i $|DA'| = d$.
Uočimo pravokutne trokute ADB, ADC, ADA'. Primjenom Pitagorinog poučka na te trokute dobivamo:

$$v_a^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} - d\right)^2, \tag{1.1}$$

$$v_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} + d\right)^2, \tag{1.2}$$

$$t_a^2 = v_a^2 + d^2. \tag{1.3}$$



Slika 1.1: Duljina težišnice

Supsitucijom iz jednadžbi (1.1) i (1.2) u jednadžbu (1.3) dobivamo:

$$t_a^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + d^2,$$

$$t_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} + d\right)^2 + d^2.$$

Odatle slijedi:

$$t_a^2 = c^2 - \frac{a^2}{4} + ad,$$

$$t_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - ad.$$

Nakon zbrajanja ovih jednadžbi dobivamo:

$$2t_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

te slijedi tvrdnja teorema

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Analogno vrijedi i za ostale težišnice.
Ako je D izvan $\overline{BC}$, dokaz se provodi na sličan način. □

Teorem 1.1.10. *Sve tri težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki. Udaljenost te točke od pojedinog vrha trokuta iznosi* $\frac{2}{3}$ *duljine odgovarajuće težišnice.*

Definicija 1.1.11. *Točku u kojoj se sijeku sve tri težišnice tokuta nazivamo težište trokuta.*

Lema 1.1.12. *Za težište T trokuta ABC vrijedi*

$$|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 = \frac{1}{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2\right).$$

Dokaz. Neka je A' polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Zbog teorema 1.1.10 i 1.1.9 vrijedi

$$|AT|^2 = \left(\frac{2}{3}|AA'|\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2|AC|^2 + 2|AB|^2 - |BC|^2}\right)^2 = \frac{1}{9}\left(2|AC|^2 + 2|AB|^2 - |BC|^2\right).$$

Analgno vrijedi i za $|BT|^2$, $|CT|^2$, pa je

$$|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 = \frac{1}{9}\cdot 3\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2\right),$$

odnosno

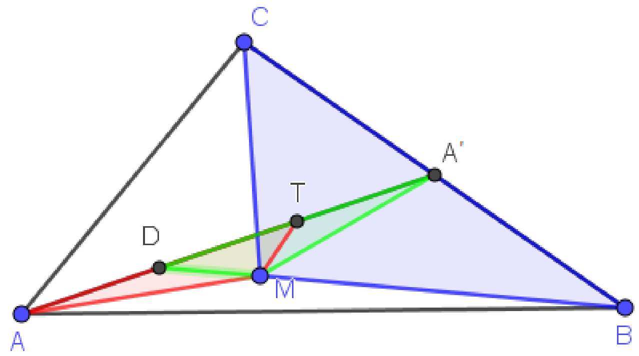
$$|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 = \frac{1}{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2\right).$$

□

Teorem 1.1.13. *Za svaku točku M unutar trokuta ABC vrijedi*

$$|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|MT|^2,$$

pri čemu je T težište trokuta ABC.



Slika 1.2: Točka M unutar trokuta ABC

Dokaz. Neka je dan trokut ABC i točka M unutar trokuta. Neka je T težište tog trokuta, A' polovište stranice $\overline{BC}$ i D polovište dužine $\overline{AT}$.
Zbog teorema 1.1.10 vrijedi $|DA'| = |AT|$. Uočimo trokute MBC, MDA', MAT i njihove težišnice iz vrha M ($\overline{MA'}$, $\overline{MT}$, $\overline{MD}$). Prema teoremu 1.1.9 slijedi:

$$|MA'|^2 = \frac{1}{2}\left(|MB|^2 + |MC|^2 - \frac{|BC|^2}{2}\right),$$

$$|MT|^2 = \frac{1}{2}\left(|MD|^2 + |MA'|^2 - \frac{|DA'|^2}{2}\right),$$

$$|MD|^2 = \frac{1}{2}\left(|MA|^2 + |MT|^2 - \frac{|AT|^2}{2}\right),$$

odnosno:

$$|MB|^2 + |MC|^2 = 2|MA'|^2 + \frac{|BC|^2}{2}, \tag{1.4}$$

$$|MD|^2 + |MA'|^2 = 2|MT|^2 + \frac{|DA'|^2}{2}, \tag{1.5}$$

$$|MA|^2 + |MT|^2 = 2|MD|^2 + \frac{|AT|^2}{2}. \tag{1.6}$$

Sada pomnožimo (1.5) s 2 te dobivenom izrazu pribrojimo (1.4) i (1.6). Dobivamo:

$$2|MD|^2 + 2|MA'|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MA|^2 + |MT|^2 =$$

$$4|MT|^2 + |DA'|^2 + 2|MA'|^2 + \frac{|BC|^2}{2} + 2|MD|^2 + \frac{|AT|^2}{2},$$

odnosno:

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3|MT|^2 + |DA'|^2 + \frac{|BC|^2}{2} + \frac{|AT|^2}{2}.$$

Konačno, zbog $|DA'| = |AT|$, dobivamo:

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3|MT|^2 + \frac{|BC|^2}{2} + \frac{3|AT|^2}{2}. \tag{1.7}$$

Također, preko težišnica $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ dobivamo analogne identitete:

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3|MT|^2 + \frac{|AC|^2}{2} + \frac{3|BT|^2}{2}, \tag{1.8}$$

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3|MT|^2 + \frac{|AB|^2}{2} + \frac{3|CT|^2}{2}. \tag{1.9}$$

Preostaje nam zbrojiti (1.7), (1.8), (1.9). Dobivamo:

$$3\left(|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2\right) = 9|MT|^2 + \frac{1}{2}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2\right) + \frac{3}{2}\left(|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2\right).$$

Konačno zbog leme 1.1.12 slijedi

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3|MT|^2 + |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2.$$

□

Opisana kružnica trokuta

Definicija 1.1.14. *Simetrala dužine je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.*

Teorem 1.1.15. *Točka C leži na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AC| = |BC|$.*

Teorem 1.1.16. *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Neka je točka O sjecište simetrale s_c stranice $\overline{AB}$ i simetrale s_a stranice $\overline{BC}$. Budući da točka O leži na simetrali stranice $\overline{AB}$, iz teorema 1.1.15 slijedi da je $|AO| = |BO|$. Također, točka O leži i na simetrali stranice $\overline{BC}$, pa prema teoremu 1.1.15 slijedi $|BO| = |CO|$.
Dakle, $|AO| = |CO|$ pa prema teoremu 1.1.15 točka O leži na simetrali s_b stranice $\overline{AC}$.
Prema tome, simetrale stranica danog trokuta sijeku se u točki O. □

Iz provedenog dokaza zaključujemo da je točka O jednako udaljena od točaka A, B, C pa postoji kružnica sa središtem u O na kojoj leže točke A, B, C.
Obrnuto, ako kružnica prolazi svim vrhovima trokuta, onda je njezino središte O jednako udaljeno od vrhova pa točka O pripada simetralama stranica.

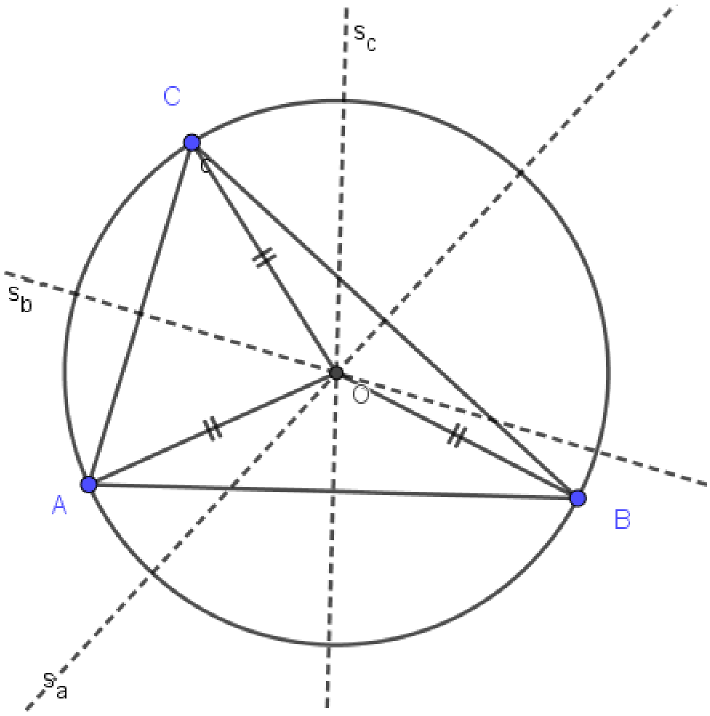
Definicija 1.1.17. *Kružnicu koja prolazi vhovima trokuta zovemo opisanom kužnicom tog trokuta.*

Upisana kružnica trokuta

Definicija 1.1.18. *Simetrala kuta je pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.*

Teorem 1.1.19. *Točka leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.*

Teorem 1.1.20. *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*



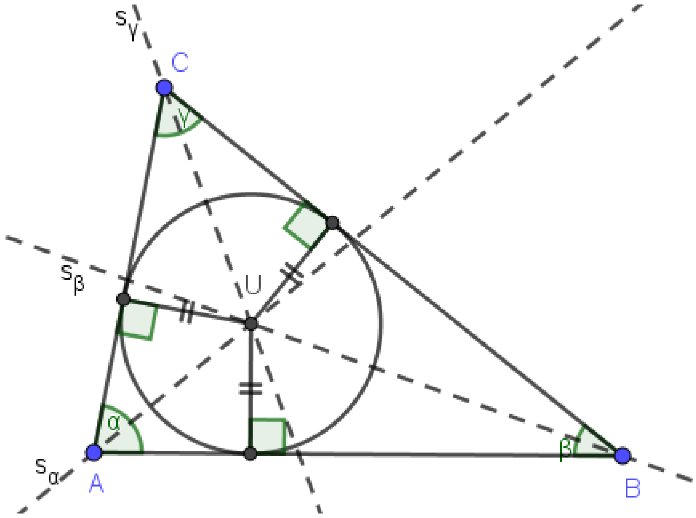
Slika 1.3: Središte trokutu opisane kružnice

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Neka je točka U sjecište simetala s_α i s_β unutarnjih kutova danog trokuta kod vrha A i vrha B, redom. Budući da točka U leži na simetrali s_α teorem 1.1.19 povlači da je $d(U, AB) = d(U, AC)$. Također, U leži na simetrali s_β pa teorem 1.1.19 povlači da je $d(U, AC) = d(U, BC)$.
Dakle, $d(U, AC) = d(U, BC)$ pa prema teoremu 1.1.19, točka U leži na simetrali s_γ unutarnjeg kuta kod vrha C. Prema tome, simetrale unutarnjih kutova trokuta ABC sijeku se u točki U. □

Iz provedenog dokaza zaključujemo da je točka U u kojoj se sijeku simetrale kutova trokuta ABC jednako udaljena od krakova kuta, tj. od stranica trokuta. Zato postoji kružnica sa središtem u točki U na kojoj leže nožišta okomica povučenih iz U na stranice trokuta. Ta kružnica dira sve tri stranice tog trokuta.

Definicija 1.1.21. *Kružnicu koja dira svaku stranicu trokuta s unutrašnje strane zovemo upisanom kružnicom tog trokuta.*

Prema teoremu 1.1.20 kružnica upisana trokutu ABC ima središte u točki U koja je sjecište simetrala kutova tog trokuta, a polumjer joj je jednak $r = d(U, AB) = d(U, BC) =$



Slika 1.4: Središte trokutu upisane kružnice

$d(U, AC)$.

Teorem 1.1.22. *Simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta kod istog vrha trokuta sijeku se pod pravim kutom.*

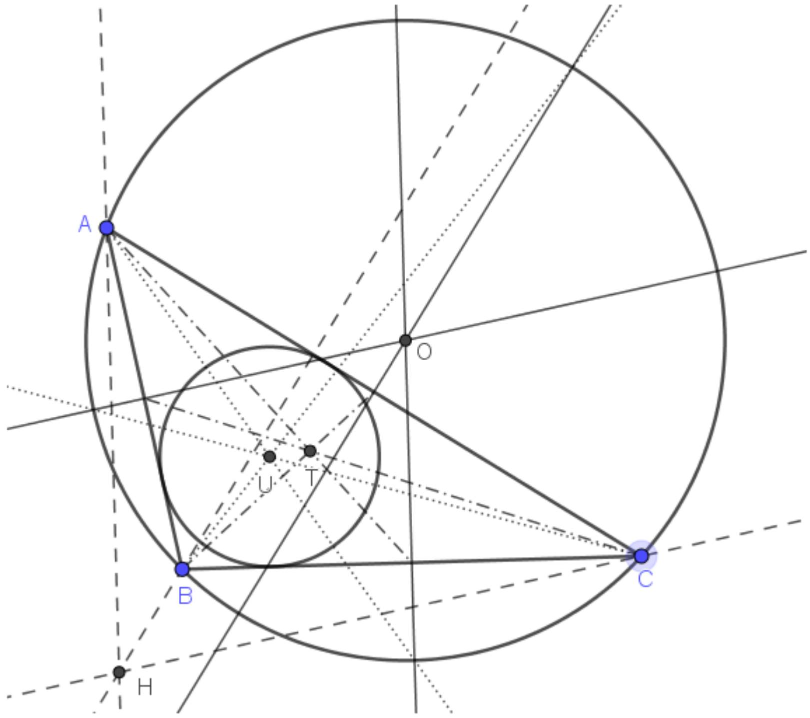
Teorem 1.1.23. *Simetrala unutarnjeg kuta u jednom vrhu trokuta i simetrala stranice nasuprot tom vrhu sijeku se na kružnici opisanoj tom trokutu.*

Ortocentar, težište, središte trokutu opisane kružnice i središte trokutu upisane kružnice su nam dobro poznate karakteristične točke trokuta, no one nisu jedine. Clark Kimberling u svojoj web-enciklopediji *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers* nastoji popisati sve dosad poznate karakteristične točake trokuta. Trenutno, njegova enciklopedija omogućava pretraživanje 31 509 poznatih točaka, istraživanje njihovih međusobnih odnosa te dodavanje novih unosa. S novim istraživanjima postojeći popis točaka se nadopunjuje.[3] Kroz ovaj rad upoznat ćemo se i s nekim drugim karakterističnim točkama trokuta.

Pogledamo li sliku 1.5 primjećujemo da su ortocentar, težište i središte upisane kružnice sjecišta po triju pravaca od kojih svaki prolazi kroz jedan vrh trokuta. O takvim trojkama pravaca govori sljedeći teorem.

Teorem 1.1.24. *Neka su A_1, B_1, C_1 točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, redom. Pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 1.5: Četiri osnovne karakteristične točke trokuta ABC

Definicija 1.1.25. *Tri pravca koja prolaze vrhovima trokuta i sijeku se u jednoj točki nazivamo Cevinim pravcima.*

Dakle, Cevini pravci, među ostalim, su i težišnice, pravci na kojima leže visine trokuta te simetrale kutova trokuta. Ovaj važan zaključak iskoristit ćemo kasnije pri dokazivanju nekih teorema.

1.2 Teoremi o kružnici

Obodni kut

Definicija 1.2.1. *Obodni kut kružnice je konveksni kut kojemu vrh leži na kružnici i čiji krakovi sijeku kružnicu u dvije točke.*

Teorem 1.2.2. *Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.*

Teorem 1.2.3. *Obodni kutovi nad istim kružnim lukom su sukladni.*

Teorem 1.2.4. *Odsječci tangenata povučenih iz neke točke na kružnicu su sukladni.*

Definicija 1.2.5. *Tetiva kružnice je svaka dužina kojoj su krajevi dvije različite točke kružnice.*

Teorem 1.2.6. *Simetrala svake tetive polazi središtem kružnice.*

Definicija 1.2.7. *Tetivni četverokut je četverokut kojem se može opisati kružnica.*

Teorem 1.2.8. *Zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta je* $180°$.

Teorem 1.2.9. *Četverokut* $ABCD$ *je tetivan ako i samo ako je mjera unutarnjeg kuta kod vrha* A *jednaka mjeri vanjskog kuta kod vrha* C.

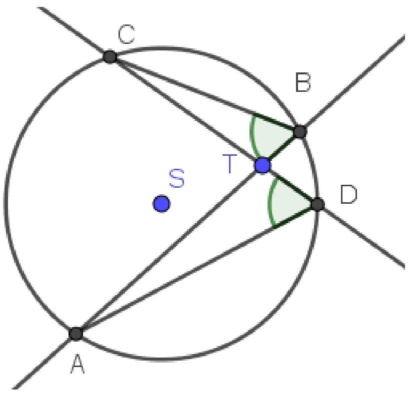
Potencija točke u odnosu na kružnicu

Definicija 1.2.10. *Neka je* k *kružnica, a* T *bilo koja točka ravnine. Za bilo koji pravac iz te ravnine koji sadrži točku* T *i siječe kružnicu* k *u točkama* A *i* B *umnožak*

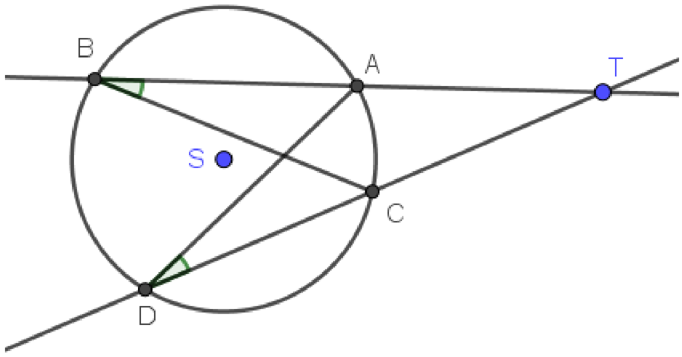
$$p = |TA| \cdot |TB|$$

je konstantan i nazivamo ga potencijom p *točke* T *u odnosu na kružnicu* k.

Pokažimo da je definicija dobra, tj. da potencija točke ne ovisi o izboru pravca. Promatrat ćemo tri slučaja obzirom na međusobni položaj točke i kružnice.



Slika 1.6: Točka T je unutar kružnice k



Slika 1.7: Točka T je izvan kružnice k

1. Točka T leži na kružnici k
   U ovom slučaju, jedna od točaka A i B podudara se s točkom T pa je ili $|TA| = 0$ ili $|TB| = 0$. U obje situacije slijedi $|TA| \cdot |TB| = 0$.

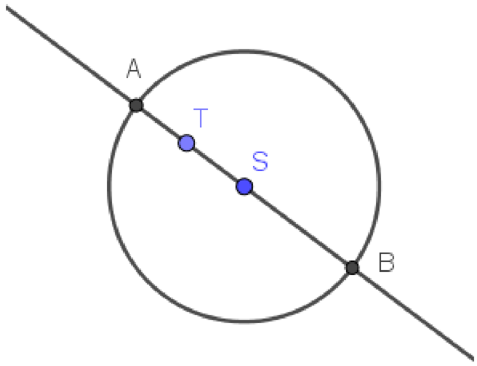
2. Točka T se nalazi unutar kružnice k
   Neka su kroz točku T povučena dva pravca. Neka prvi siječe kružnicu k u točkama A i B, a drugi u točkama C i D. Promotrimo trokute ATD i CTB. Kako je $\sphericalangle ATD = \sphericalangle CTB$ (vršni kutovi) i $\sphericalangle CBT = \sphericalangle TDA$ (obodni kutovi nad $\widehat{AC}$), trokuti su slični prema K-K teoremu o sličnosti. Slijedi $\dfrac{|TA|}{|TD|} = \dfrac{|TC|}{|TB|}$ i odatle $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

3. Točka T je izvan kružnice k
   Neka su kroz točku T povučena dva pravaca. Neka prvi siječe kružnicu k u točkama A i B, a drugi u točkama C i D. Promotrimo trokute ATD i CTB. Oni imaju zajednički kut kod vrha T, $\sphericalangle CBT = \sphericalangle TDA$ (obodni kutovi nad $\widehat{AC}$), pa su trokuti slični prema K-K teoremu o sličnosti. Slijedi $\dfrac{|TA|}{|TD|} = \dfrac{|TC|}{|TB|}$ i odatle $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

Uz potenciju točke vežu se i sljedeći teoremi:

Teorem 1.2.11. *Potencija točke T koja leži unutar kružnice k u odnosu na tu kružnicu, jednaka je razlici kvadrata polumjera promatrane kružnice i kvadrata udaljenosti točke T do središta kružnice.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k i neka se točka T nalazi na tom promjeru. Neka je r polumjer promatrane kružnice, a d udaljenost točke T do središta kružnice. Uočimo da



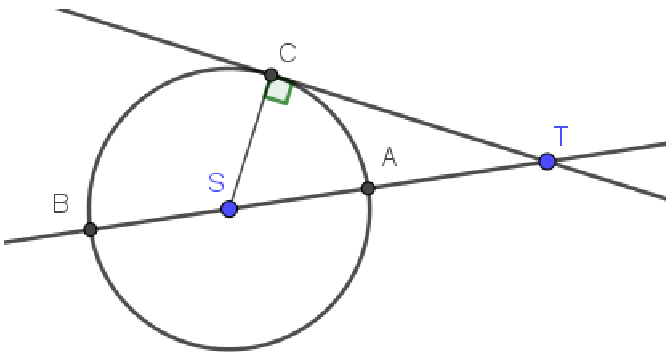
Slika 1.8: Potencija točke T unutar kružnice k

je potencija točke T u odnosu na kružnicu k jednaka

$$|AT| \cdot |TB| = (r - d) \cdot (r + d) = r^2 - d^2.$$

□

Teorem 1.2.12. *Potencija točke T koja leži izvan kružnice k u odnosu na tu kružnicu, jednaka je razlici kvadrata udaljenosti točke T od središta kružnice i kvadrata polumjera promatrane kružnice. Ta vrijednost je jednaka kvadratu udaljenosti točke T i dirališta tangente iz te točke na kružnicu k.*



Slika 1.9: Potencija točke T izvan kružnice k

Dokaz. Neka točka T leži izvan kružnice k sa središtem u S polumjera r. Iz T povučemo tangentu i pravac kroz S koji siječe kružnicu k u točkama A i B. Neka je točka C dirалište tangente s kružnicom k. Označimo $d = |TS|$.
Potencija točke T u odnosu na kružnicu k jednaka je

$$|TA| \cdot |TB| = (d - r) \cdot (d + r) = d^2 - r^2.$$

Sada primijenimo Pitagorin poučak na trokut SCT. Slijedi

$$|TA| \cdot |TB| = |TC|^2.$$

$\square$

Poglavlje 2

Pripisane kružnice trokuta

Trokutu upisana kružnica nije jedina kružnica čije su tangente pravci na kojima leže stranice trokuta. U ovom dijelu upoznat ćemo te imenovati i druge kružnice koje dobivamo gotovo na isti način.

2.1 Postojanje pripisanih kružnica trokuta

Pokazali smo da se simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku u jednoj točki. Nameće se pitanje vrijedi li nešto slično i za simetrale vanjskih kutova trokuta. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.1.1. *Simetrale bilo koja dva vanjska kuta trokuta i simetrala preostalog trećeg unutarnjeg kuta trokuta sijeku se u jednoj točki.*

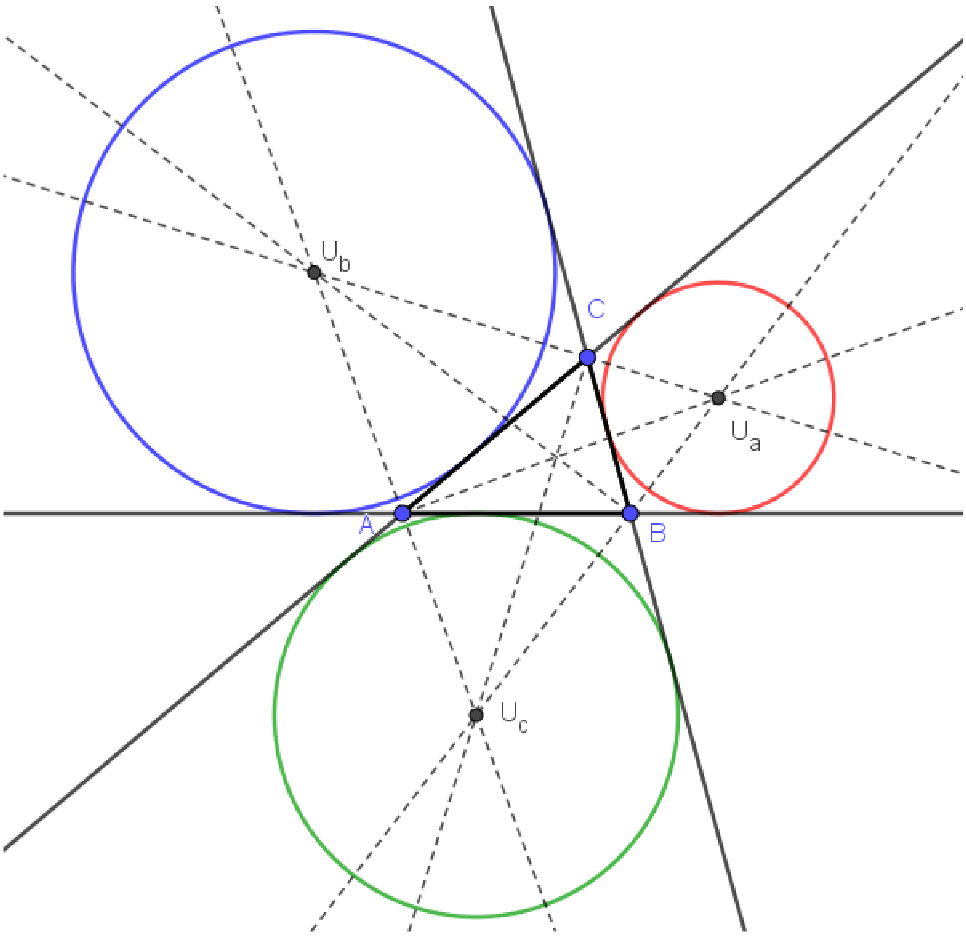
Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Neka se simetrale vanjskih kutova kod vrhova B i C sijeku u točki U_a. Budući da U_a leži na simetrali kuta kod vrha B, teorem 1.1.19 povlači da je $d(U_a, AB) = d(U_a, BC)$. Također, U_a leži na simetrali vanjskog kuta kod vrha C, pa teorem 1.1.19 povlači da je $d(U_a, AC) = d(U_a, BC)$.
Dakle, $d(U_a, AB) = d(U_a, AC)$ pa prema teoremu 1.1.19 točka U_a leži na simetrali unutarnjeg kuta kod vrha A. Prema tome, simetrale vanjskih kutova kod vrhova B i C te simetrala unutarnjeg kuta kod vrha A sijeku se u točki U_a, □

Označimo li $d(U_a, AB) = d(U_a, AC) = d(U_a, BC) = r_a$, zaključujemo da su pravci AB, AC, BC tangente kružnice $k_a(U_a, r_a)$.

Definicija 2.1.2. *Kružnicu koja dira jednu stranicu trokuta s njegove vanjske strane i produžetke ostalih dviju stranica zovemo pripisanom kružnicom trokuta.*

Točka U_a iz teorema 2.1.1 je središte pripisane kružnice trokuta koja dira stranicu $\overline{BC}$ i pravce AB i AC.

Svaki trokut ima tri pripisane kružnice.

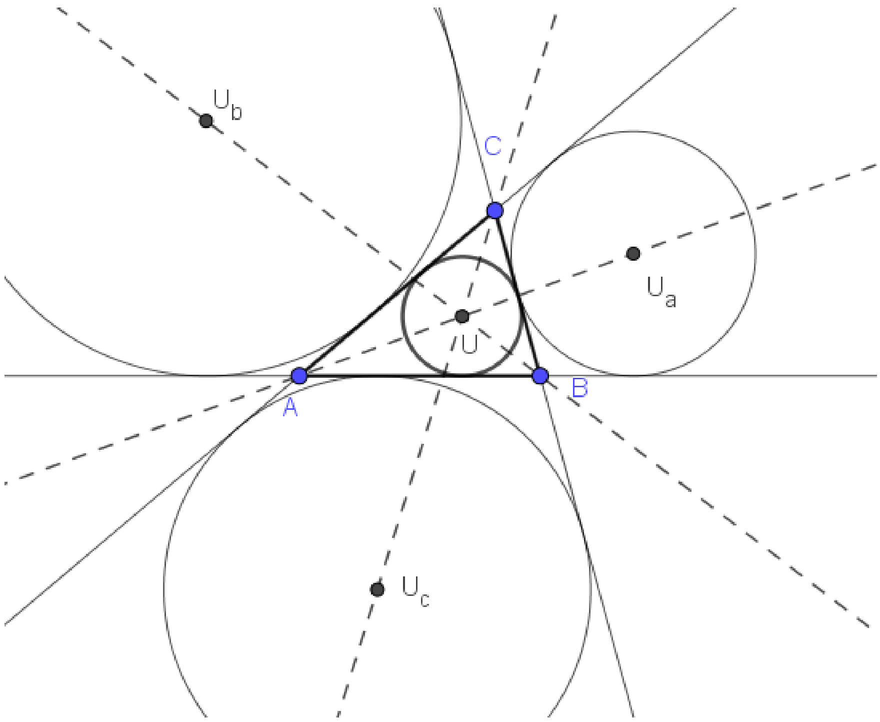


Slika 2.1: Pripisane kružnice trokuta ABC

2.2 O svojstvima središta upisane i pripisanih kružnica trokuta

Središta upisane i pripisanih kružnica trokuta imaju zanimljiva svojstva koja navodimo u obliku sljedećih teorema.

Teorem 2.2.1. *Neka je U središte trokutu ABC upisane kružnice i neka je U_a središte pripisane kružnice danog trokuta koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$. Tada su točke A, U i U_a kolinearne.*

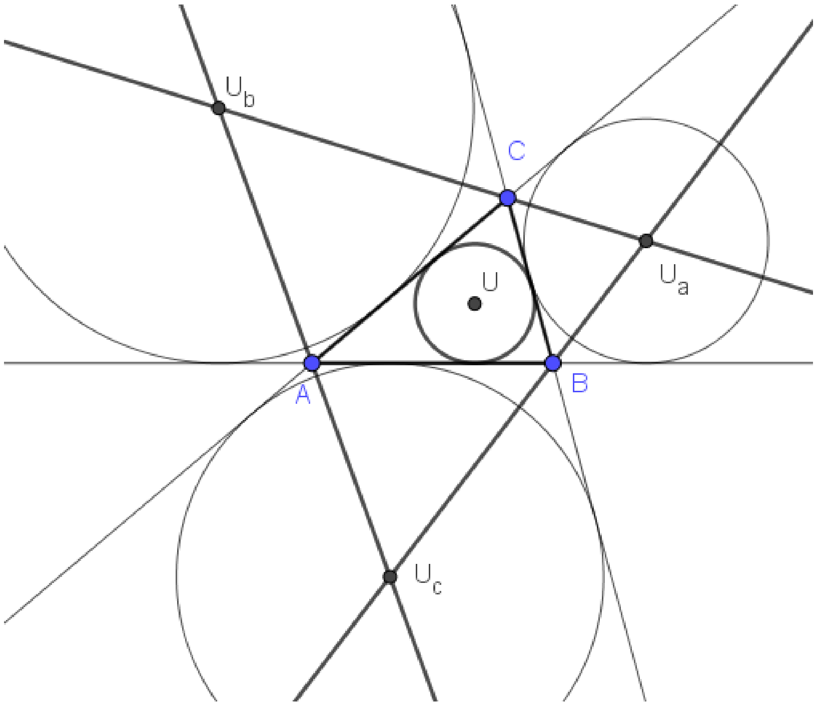


Slika 2.2: Kolinearnost točaka A, U i U_a

Dokaz. Prema teoremu 1.1.20 točke A i U leže na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$. Nadalje, prema teoremu 2.1.1 i točka U_a leži na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$. Dakle, sve tri točke A, U, U_a leže na simetrali $\sphericalangle BAC$, pa su one kolinearne. □

Također, kolinearne su i trojke točaka B, U, U_b, kao i C, U, U_c.

Teorem 2.2.2. *Neka je U središte trokutu ABC upisane kružnice. Neka su U_a i U_b središta pripisanih kružnica danog trokuta koje dodiruju redom stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Tada su točke U_a, U_b i C kolinearne.*



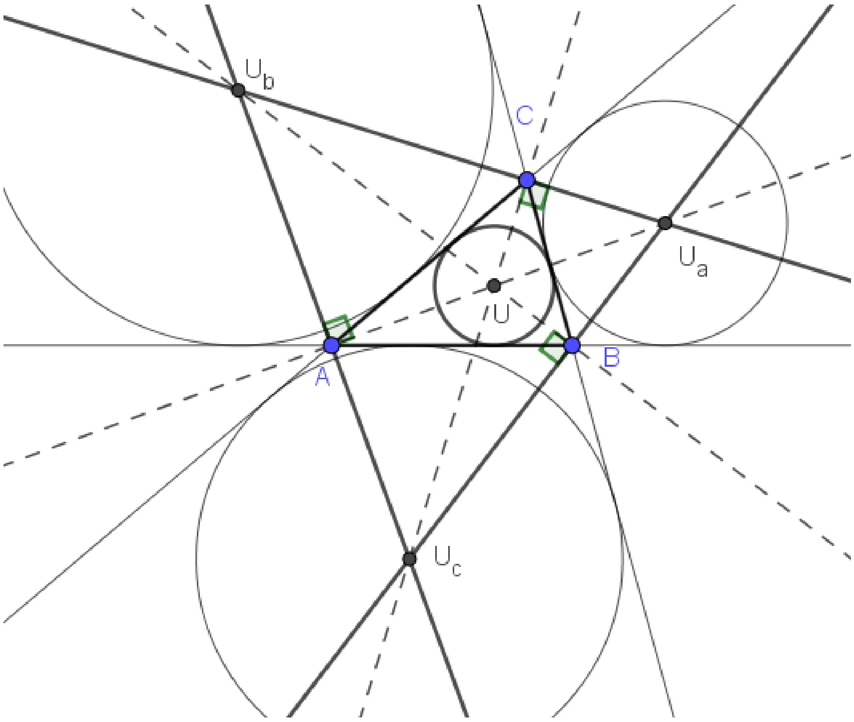
Slika 2.3: Trokut $U_aU_bU_c$

Dokaz. Neka su A_b i C_b dirališta pripisane kružnice sa središtem u U_b s pravcima BC i AB redom te B_a i C_a dirališta pripisane kružnice sa središtem u U_a s pravcima AC i AB redom. Vrijedi $\sphericalangle ACA_b = \sphericalangle BCB_a$ jer su to vršni kutovi, pa kutovi imaju istu simetralu. Iz teorema 2.1.1 slijedi da U_a leži na simetrali $\sphericalangle BCB_a$, dok U_b na simetrali $\sphericalangle ACA_b$. Budući da ti kutovi imaju zajedničku simetralu, slijedi da su U_a, C, U_b kolinearne točke. □

Kolinearnost se analogno pokaže i za trojke točaka U_b, A, U_c te za U_a, B, U_c.

Definicija 2.2.3. *Trokut $U_aU_bU_c$ čiji su vrhovi središta pripisanih kružnica trokuta ABC zovemo komplementarni trokut trokuta ABC.*

Teorem 2.2.4. *Neka je U središte trokutu ABC upisane kružnice. Neka su U_a, U_b, U_c središta pripisanih kružnica danog trokuta koje dodiruju redom stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Tada su pravci AU_a i U_bU_c međusobno okomiti.*



Slika 2.4: Visine u trokutu $U_aU_bU_c$

Dokaz. Teorem 2.2.1 povlači da je pravac AU_a simetrala kuta $\sphericalangle BAC$, dok teorem 2.2.2 povlači da je pravac U_bU_c simetrala kuta $\sphericalangle CAC_b$, gdje je C_b diralište pripisane kružnice sa središtem u U_b s pravcem AB. Dakle, ti pravci su simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta kod vrha A trokuta ABC. Prema teoremu 1.1.22 slijedi da se pravci AU_a i U_bU_c sijeku pod pravim kutom, odnosno međusobno su okomiti. □

Analogno se pokaže okomitost pravaca BU_b i U_aU_c te CU_c i U_aU_b.

Dakle, središte upisane kružnice trokuta ABC je ujedno i ortocentar komplementarnog trokuta.

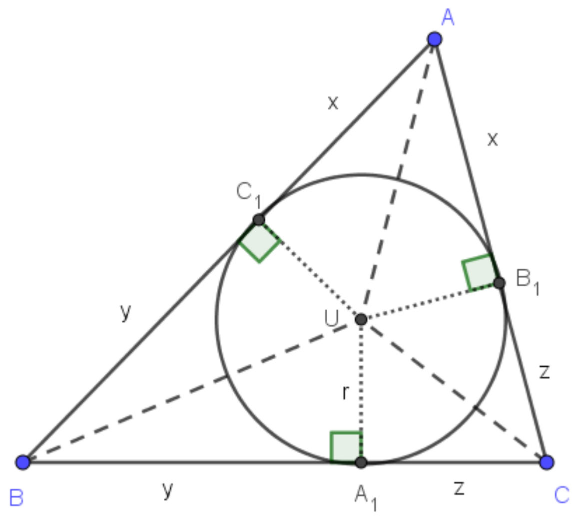
Sada ćemo izraziti udaljenosti između dirališta upisane kružnice danog trokuta i njegovih vrhova pomoću duljina njegovih stranica. Na sličan način izračunavamo i udaljenost između dirališta pripisane kružnice danog trokuta i njegovih vrhova.

Teorem 2.2.5. *Neka su A_1, B_1, C_1 dirališta upisane kružnice trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ čije su duljine a, b, c te neka je s poluopseg danog trokuta. Tada je*

$$|AB_1| = |AC_1| = s - a,$$

$$|BA_1| = |BC_1| = s - b,$$

$$|CA_1| = |CB_1| = s - c.$$



Slika 2.5: Dirališta upisane kružnice trokuta ABC

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Primijetimo da su stranice trokuta tangente njemu upisane kružnice. Iz teorema 1.2.4 slijedi da su udaljenosti pojedinog vrha trokuta od dvaju dirališta na stranicama koje sadrže taj vrh međusobno jednake. Uvedimo sljedeće oznake $x = |AB_1| = |AC_1|$, $y = |BA_1| = |BC_1|$, $z = |CA_1| = |CB_1|$. Dakle, ako su a, b, c duljine stranica trokuta, tada vrijedi:

$$a = |BC| = |BA_1| + |A_1C| = y + z,$$

$$b = |AC| = |AB_1| + |B_1C| = x + z,$$

$$c = |AB| = |AC_1| + |C_1B| = x + y.$$

Sada odredimo opseg tokuta:

$$2s = a + b + c = (y + z) + (x + z) + (x + y).$$

Odatle slijedi:

$$x + y + z = s;$$

$$x + (y + z) = s \Rightarrow x = s - a$$

$$(x + z) + y = s \Rightarrow y = s - b$$

$$(x + y) + z = s \Rightarrow z = s - c.$$

□

Teorem 2.2.6. *Neka je A_a dirалište stranice $\overline{BC}$ i trokutu ABC pripisane kružnice k_a te neka su B_a i C_a dirališta pravaca AB i AC s kružnicom k_a. Tada vrijedi:*

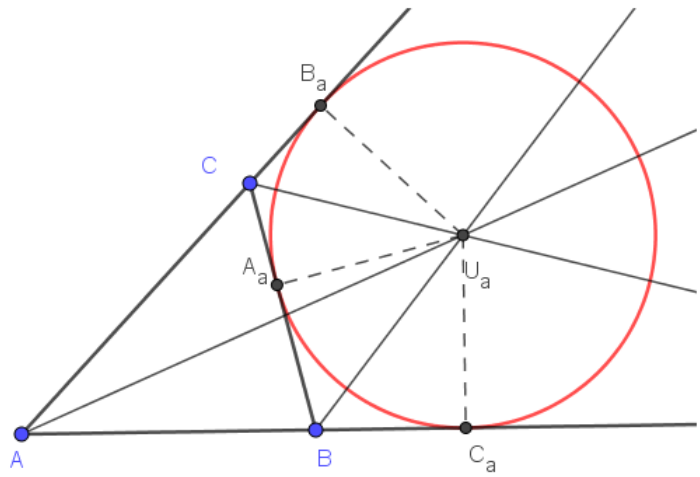
$$|AC_a| = |AB_a| = s,$$

$$|BA_a| = |BC_a| = s - c,$$

$$|CA_a| = |CB_a| = s - b,$$

pri čemu je $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ i s poluopseg.

Analogne jednakosti vrijede i za pripisane kružnice k_b i k_c.



Slika 2.6: Dirališta pripisane kružnice k_a trokuta ABC

Dokaz. Prema teoremu 1.2.4 slijedi da je $|AC_a| = |AB_a|, |BC_a| = |BA_a|, |CB_a| = |CA_a|$. Pogledajmo čemu je jednak zbroj $|AC_a|$ i $|AB_a|$.

$$\begin{aligned}|AC_a| + |AB_a| &= |AB| + |BC_a| + |AC| + |CB_a|\\ &= c + |BA_a| + b + |CA_a|\\ &= c + b + (|BA_a| + |CA_a|)\\ &= c + b + a\\ &= 2s,\end{aligned}$$

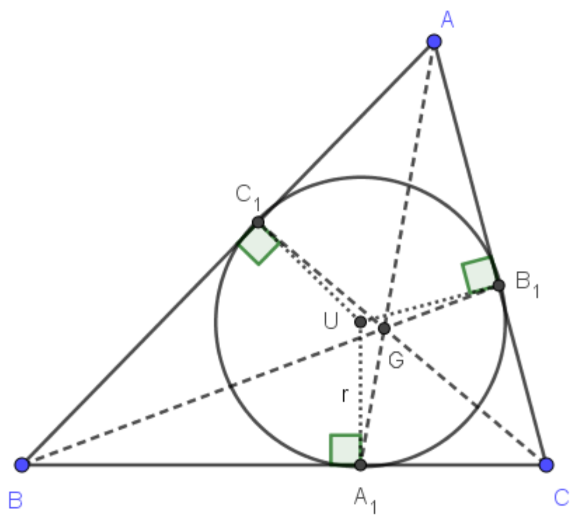
ali je $|AC_a| = |AB_a|$, pa je $|AC_a| = |AB_a| = s$.
Nadalje,

$$|AC_a| = |AB| + |BC_a| \Rightarrow |BC_a| = |AC_a| - |AB| = s - c,$$

$$|AB_a| = |AC| + |CB_a| \Rightarrow |CB_a| = |AB_a| - |AC| = s - b.$$

□

Sada se nameće pitanje jesu li pravci koji spajaju vrhove trokuta i dirališta upisane kružnice trokuta Cevini pravci. Francuski astronom i matematičar Joseph Diaz Gergonne (1771. – 1859.) prvi se pozabavio tim problemom.[13]



Slika 2.7: Gergonneova točka

Teorem 2.2.7. *Neka su A_1, B_1, C_1 dirališta upisane kružnice trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta. Tada se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki.*

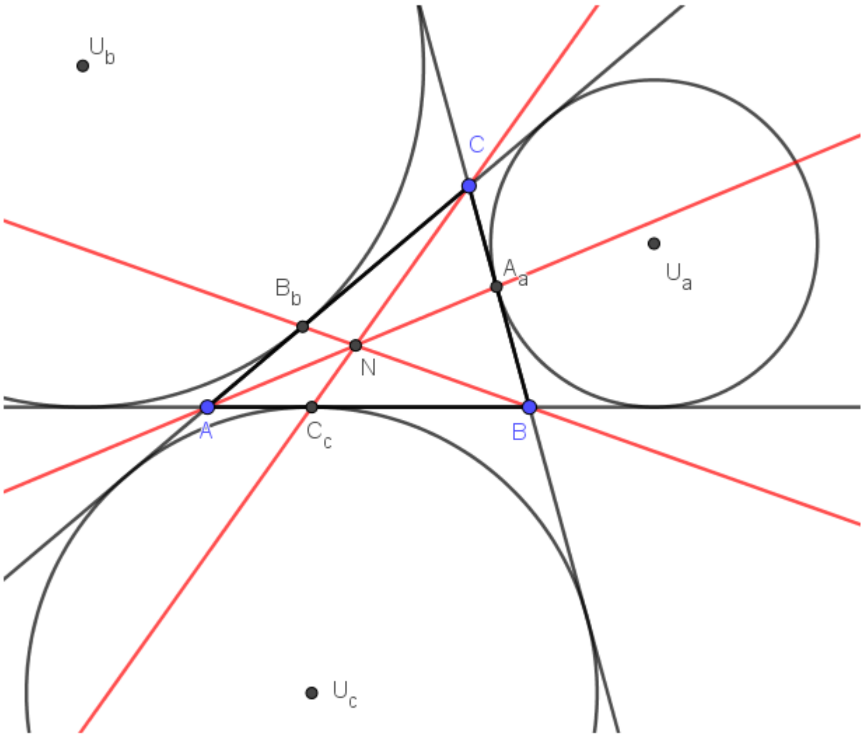
Dokaz. Po teoremu 2.2.5 vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} = 1,$$

pa tvrdnja slijedi prema teoremu 1.1.24. □

Definicija 2.2.8. *Točka u kojoj se sijeku pravci AA_1, BB_1, CC_1 naziva se Gergonneova točka.*

Pravci koji spajaju vrhove trokuta i dirališta pripisanih mu kružnica također su Cevini pravci. To nam govori sljedeći teorem.



Slika 2.8: Nagelova točka N

Teorem 2.2.9. *Neka su A_a, B_b, C_c dirališta pripisanih kružnica trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Tada se pravci AA_a, BB_b, CC_c sijeku u jednoj točki.*

Dokaz. Po teoremu 2.2.6 vrijedi:

$$\frac{|AC_c|}{|C_cB|} \cdot \frac{|BA_a|}{|A_aC|} \cdot \frac{|CB_b|}{|B_bA|} = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1,$$

pa tvrdnja slijedi prema teoremu 1.1.24. □

Definicija 2.2.10. *Točka u kojoj se sijeku pravci AA_a, BB_b, CC_c naziva se Nagelova točka.*

Njemački profesor matematike Christian Heinrich von Nagel (1803. – 1882.) proučavao je različita svojstva i točke trokuta koje se pojavljuju kao sjecišta određenih pravaca te je objavio mnogo članaka na tu temu. U povijesti je ostao upamćen po točki iz teorema 2.2.9.[14]

2.3 Koncikličnost nekih točaka vezanih uz trokut i kružnice

U ovom dijelu pokazujemo da postoje kružnice koje povezuju dva vrha danog trokuta i središta njegove upisane i pripisane kružnice.

Teorem 2.3.1. *Neka je M_a polovište luka $\widehat{BC}$ (koji ne sadrži A) opisane kružnice trokuta ABC. Neka je U središte upisane, a U_a središte pripisane kružnice trokuta koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$. Tada točke U, U_a, B, C leže na kružnici sa središtem u M_a.*

Dokaz. Teorem 1.1.22 povlači da je $\sphericalangle UBU_a = \sphericalangle UCU_a = 90°$. Zbog teorema 1.2.2 točke B i C leže na kružnici s promjerom $\overline{UU_a}$. Ostaje nam pokazati da je središte te kružnice točka M_a, odnosno da je M_a povište dužine $\overline{UU_a}$.
Neka su α, β i γ mjere kutova danog trokuta redom pri vrhovima A, B, C. Budući da je M_a polovište luka $\widehat{BC}$ slijedi da je $\widehat{BM_a} = \widehat{CM_a}$ i

$$|M_aB| = |M_aC|. \tag{2.1}$$

Sada prema teoremu 1.1.23 zaključujemo da se točka M_a nalazi na simetrali kuta kod vrha A pa je $\sphericalangle BAM_a = \sphericalangle BAU = \frac{\alpha}{2}$. Nadalje, promotrimo trokut M_aUC. Kut $\sphericalangle M_aUC$ je vanjski kut trokuta AUC kod vrha U, pa je

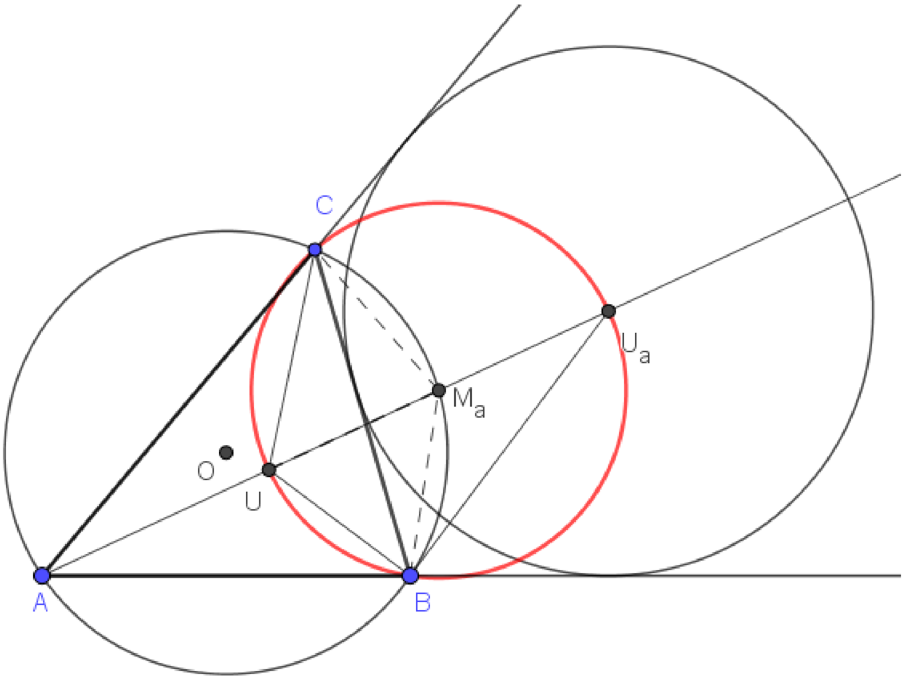
$$\sphericalangle M_aUC = \sphericalangle CAU + \sphericalangle ACU = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Također, $\sphericalangle M_aCB = \sphericalangle BAU$ jer su to kutovi nad istim kružnim lukom $\widehat{BM_a}$. Zato je

$$\sphericalangle M_aCU = \sphericalangle M_aCB + \sphericalangle BCU = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Dakle, trokut M_aUC je jednakokračan i vrijedi

$$|M_aC| = |M_aU|. \tag{2.2}$$



Slika 2.9: Koncikličnost točaka U, U_a, B, C

Promotrimo trokut BM_aU_a. Kut $\sphericalangle CBU_a$ je polovina vanjskog kuta trokuta ABC kod vrha B, dok zbog $\widehat{BM_a} = \widehat{CM_a}$ vrijedi $\sphericalangle CBM_a = \sphericalangle M_aCB = \sphericalangle BAU$. Zato je

$$\sphericalangle M_aBU_a = \sphericalangle CBU_a - \sphericalangle CBM_a = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2},$$

Želimo još odrediti kut $\sphericalangle M_aU_aB$. Uočimo trokut AU_aB. Kut $\sphericalangle ABU_a = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBU_a$. Zato je

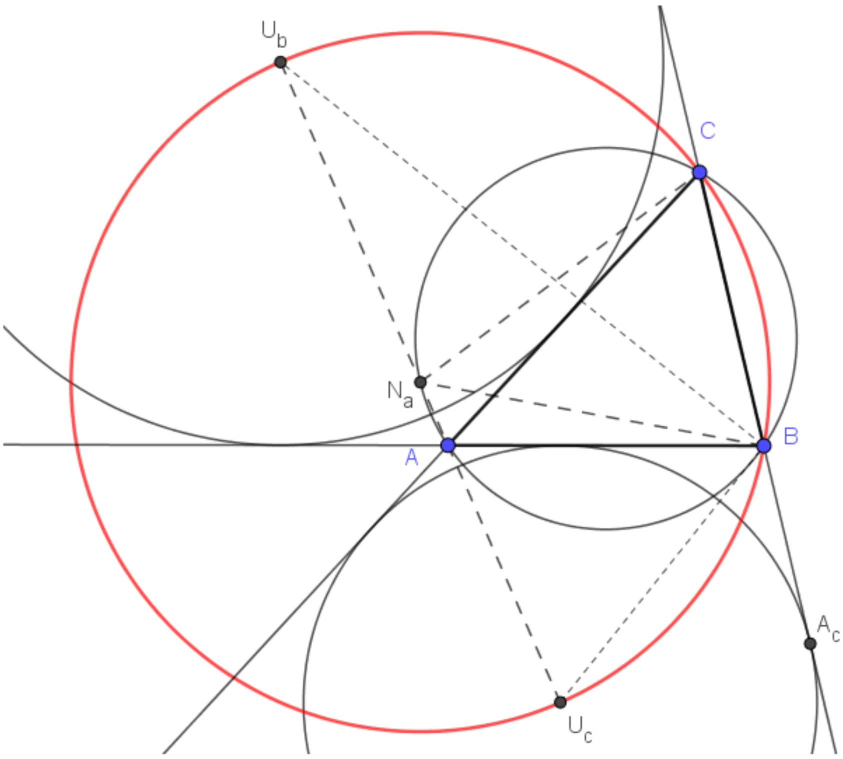
$$\begin{aligned}
\sphericalangle M_aU_aB &= \sphericalangle AU_aB = 180^\circ - \sphericalangle U_aAB - \sphericalangle ABU_a \\
&= 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \left(\beta + 90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \\
&= 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, trokut BM_aU_a je jednakokračan i vrijedi

$$|M_aB| = |M_aU_a|. \tag{2.3}$$

Sada iz (2.1), (2.2) i (2.3) zaključujemo da je točka M_a središte kružnice kroz točke B, U_a, C i U. □

Teorem 2.3.2. *Neka je N_a polovište luka $\widehat{BC}$ (koji sadrži točku A) opisane kružnice trokuta ABC. Neka su U_b i U_c središta pripisanih kružnica danog trokuta koje dodiruju redom stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Tada točke U_b, U_c, B, C leže na kružnici sa središtem u N_a.*



Slika 2.10: Koncikličnost točaka U_b, U_c, B, C

Dokaz. Teorem 1.1.22 povlači da je $\sphericalangle U_bBU_c = \sphericalangle U_bCU_c = 90°$. Zbog teorema 1.2.2 točke U_b, U_c, B, C leže na kružnici s promjerom $\overline{U_bU_c}$. Ostaje nam pokazati da je polovište te dužine upravo točka N_a.

Neka su α, β i γ mjere kutova danog trokuta redom pri vrhovima A, B, C. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\beta > \gamma$. Budući da je N_a polovište luka $\widehat{BC}$ slijedi da je $\widehat{BN_a} = \widehat{CN_a}$ i

$$|N_aB| = |N_aC|. \tag{2.4}$$

Zato je trokut N_aBC jednakokračan. Kako je $\sphericalangle BN_aC = \sphericalangle BAC = \alpha$, to je $\sphericalangle N_aBC = \sphericalangle N_aCB = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Također je $\sphericalangle N_aAC = \sphericalangle N_aBC = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Nadalje, $\sphericalangle U_bAC$ je polovina vanjskog kuta trokuta ABC kod vrha A, pa je $\sphericalangle U_bAC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Iz $\sphericalangle N_aAC = \sphericalangle U_bAC$ slijedi da točka N_a leži na pravcu AU_b. Zaključujemo točke U_b, N_a i U_c su kolinearne.
Sada promotrimo trokut N_aBU_c. Vrijedi

$$\sphericalangle N_aU_cB = \sphericalangle AU_cB = 180° - \sphericalangle U_cAB - \sphericalangle U_cBA.$$

Budući da su $\sphericalangle U_cAB$ i $\sphericalangle U_cBA$ polovine vanjskih kutova trokuta ABC kod vrhova A i B, slijedi

$$\sphericalangle N_aU_cB = \sphericalangle AU_cB = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Nadalje, neka je A_c dirališe pripisane kružnice sa središtem u U_c s pravcem BC. Tada

$$\sphericalangle N_aBU_c = \sphericalangle N_aBA_c - \sphericalangle U_cBA_c = \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Dakle, trokut N_aBU_c je jednakokračan i vrijedi

$$|N_aU_c| = |N_aB|. \tag{2.5}$$

Analogno je

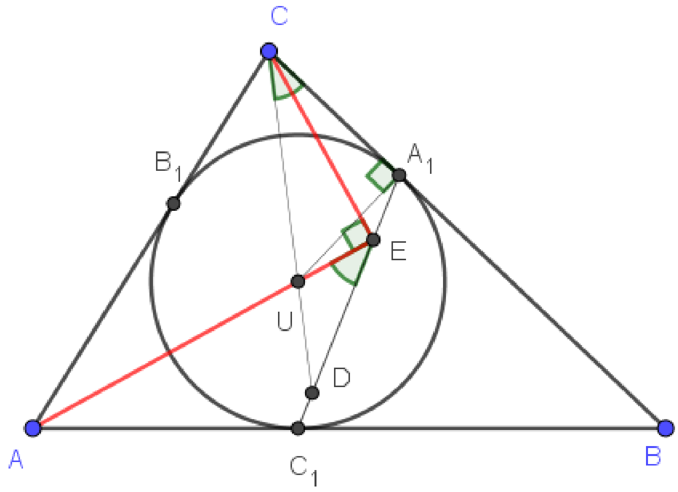
$$|N_aU_b| = |N_aC|. \tag{2.6}$$

Sada iz (2.4), (2.5) i (2.6) zaključujemo da je točka N_a središte kružnice kroz točke U_b, U_c, B, C. □

Teorem 2.3.3. *Neka je ABC trokut. Neka je $k_u(U, r_u)$ upisana kružnica trokuta ABC. Neka je $k_b(U_b, r_b)$ pripisana kružnica trokuta ABC nasuprot vrha B. Neka su točke A_1, B_1, C_1 dirališta kružnice k_u redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, te neka su točke A_b, B_b, C_b dirališta pripisane kružnice k_b redom s pravcima BC, AC i AB. Neka su E i D točke u kojima AU i CU redom sijeku A_1C_1. Neka su D_1 i E_1 točke u kojima AU_b i CU_b redom sijeku A_bC_b. Tada su točke A, D, E, C, D_1 i E_1 konciklične.*

Za dokaz teorema 2.3.3 trebat će nam dvije tvrdnje koje dokazujemo u idućim teoremima.

Teorem 2.3.4. *Uz oznake iz teorema 2.3.3 vrijedi $\sphericalangle AEC = 90°$.*



Slika 2.11: $\sphericalangle AEC$ je pravi kut

Dokaz. Mjere kutova u trokutu ABC pri vrhovima A, B, C, označimo redom s α, β, γ. Prema teoremu 1.2.4 vrijedi $|BA_1| = |BC_1|$, pa je trokut BA_1C_1 jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle A_1C_1B = \sphericalangle C_1A_1B$. U tom se trokutu visina iz vrha B podudara sa simetralom kuta kod tog istog vrha. Zbog toga je:

$$\sphericalangle A_1BU = \sphericalangle C_1BU = \frac{\beta}{2},$$

$$\sphericalangle A_1C_1B = \sphericalangle C_1A_1B = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Uočimo sada trokut AEC_1. Vrijedi:

$$\sphericalangle C_1AE = \sphericalangle C_1AU = \frac{\alpha}{2},$$

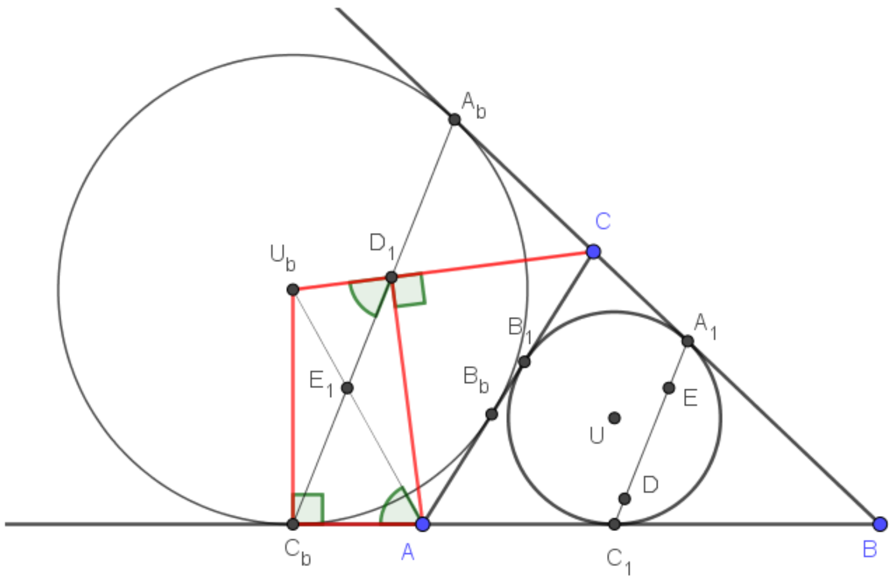
$$\sphericalangle AC_1E = 180^\circ - \sphericalangle A_1C_1B = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

pa je

$$\sphericalangle AEC_1 = 180^\circ - \sphericalangle C_1AE - \sphericalangle AC_1E = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Uočimo sada četverokut EA_1CU. Kut $\sphericalangle A_1CU = \frac{\gamma}{2}$ jer je U središta trokutu upisane kružnice, $\sphericalangle C_1EU = \sphericalangle C_1EA = \frac{\gamma}{2}$ pa je prema teoremu 1.2.9 četverokut EA_1CU tetivan i može mu se opisati kružnica. Budući da je A_1 dirალište upisane kružnice trokuta sa stranicom $\overline{BC}$ slijedi da je $\sphericalangle UA_1C = 90°$. Prema teoremu 1.2.2 $\overline{UC}$ je promjer kružnice opisane trokutu UA_1C, pa onda i četverokutu UEA_1C. Slijedi $\sphericalangle UEC = 90°$, odnosno $\sphericalangle AEC = 90°$. □

Teorem 2.3.5. *Uz oznake iz teorema 2.3.3 vrijedi* $\sphericalangle AD_1C = 90°$.



Slika 2.12: $\sphericalangle AD_1C$ je pravi kut

Dokaz. Mjere kutova u trokutu ABC pri vrhovima A, B, C, označimo redom s α, β, γ. Prema teoremu 1.2.4 vrijedi $|BA_b| = |BC_b|$, pa je trokut BA_bC_b jednakokračan i vrijedi

$$\sphericalangle A_bC_bB = \sphericalangle C_bA_bB = 90° - \frac{\beta}{2}. \tag{2.7}$$

Kako je U_b središte pripisane kružnice imamo

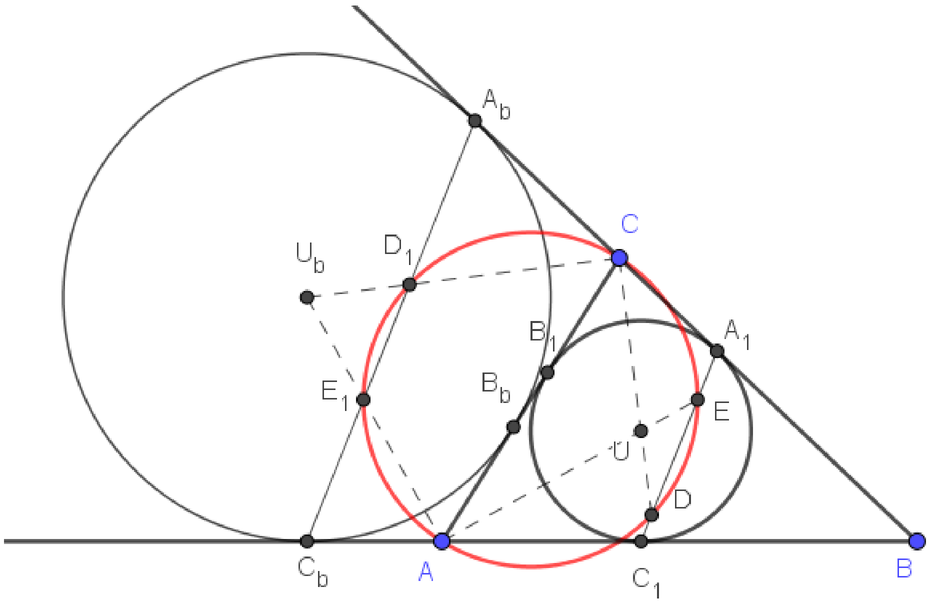
$$\sphericalangle A_bCU_b = \sphericalangle A_bCD_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}, \tag{2.8}$$

$$\sphericalangle C_bAU_b = \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Iz (2.7) i (2.8) zaključujemo $\sphericalangle A_bD_1C = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Sada je $\sphericalangle C_bD_1U_b = A_bD_1C = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ jer su to vršni kutovi.
Uočimo četverokut $AD_1U_bC_b$. Kutovi nad stranicom $\overline{U_bC_b}$ su jednaki

$$\sphericalangle C_bAU_b = C_bD_1U_b = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

pa je taj četverokut tetivan. Točka C_b je diralište tangente na pripisanu kružnicu pa je $AC_bU_b = 90^\circ$. Sada prema teoremu 1.2.9 sijedi da je $\sphericalangle AD_1C = 90^\circ$, a to je i trebalo dokazati. □



Slika 2.13: Konciklićnost točaka A, D, E, C, D_1 i E_1

Konačno, dokažimo teorem 2.3.3.

Dokaz. Dokaz teorema 2.3.3.
Prema teoremu 2.3.4 je $\sphericalangle AEC = 90^\circ$ i analogno $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, a iz teorema 2.3.5 $\sphericalangle AD_1C = \sphericalangle AE_1C = 90^\circ$. To znači da točke E i D, a također i točke D_1 i E_1 leže na kružnici promjera $\overline{ED}$, čime je tvrdnja dokazana. □

Poglavlje 3

Metričke relacije vezane uz trokut

3.1 Duljine polumjera kružnica pridruženih trokutu

Prethodnim analizama pokazali smo da su svaki trokut ima opisanu, upisanu i pripisane kružnice. U ovom dijelu promatramo duljine polumjera tih kružnica i odnose između površine trokuta i duljine njegovih stranica.

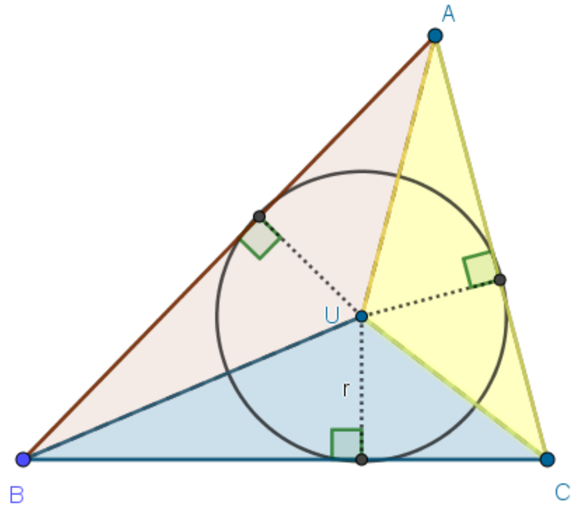
Teorem 3.1.1. *Ako je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg, a P površina trokuta, tada duljina polumjera trokutu upisane kružnice iznosi:*

$$r = \frac{P}{s}.$$

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Neka je U središte tom trokutu upisane kružnice. Uočimo trokute ABU, BCU, ACU. U svakom od tih trokuta duljina visine iz vrha U iznosi r. Izrazimo površinu trokuta ABC kao zbroj površina trokuta ABU, BCU, ACU. Imamo:

$$\begin{aligned} P = P(ABC) &= P(ABU) + P(BCU) + P(ACU) \\ &= \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} \\ &= \frac{r(a+b+c)}{2} \\ &= rs. \end{aligned}$$

Slijedi: $r = \dfrac{P}{s}$. □



Slika 3.1: Polumjer r upisane kružnice trokuta

Teorem 3.1.2. *Ako je* $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ *poluopseg, a* P *površina trokuta, tada duljina polumjera trokutu pripisanih kružnica iznosi:*

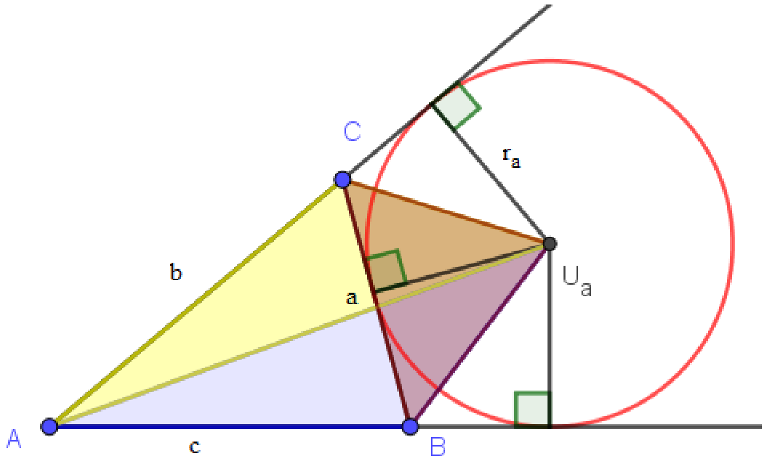
$$r_a = \frac{P}{s-a}; \qquad r_b = \frac{P}{s-b}; \qquad r_c = \frac{P}{s-c}.$$

Dokaz. Neka je dan trokut ABC sa stranicama duljina a, b, c. Neka je U_a središte pripisane kružnice k_a koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$. Uočimo četverokut ABU_aC. Njegovu površinu možemo promatrati kao zbroj površina trokuta ABU_a i ACU_a ili pak zbroj površina trokuta ABC i BCU_a. Dakle,

$$P(ABC) + P(BCU_a) = P(ABU_a) + P(ACU_a),$$

odakle je

$$\begin{aligned} P = P(ABC) &= P(ABU_a) + P(ACU_a) - P(BCU_a) \\ &= \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} \\ &= \frac{r_a(c+b-a)}{2} \\ &= r_a\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \\ &= r_a(s-a). \end{aligned}$$



Slika 3.2: Polumjer r_a pripisane kružnice k_a trokuta ABC

Slijedi:

$$r_a = \frac{P}{s-a}.$$

Analogno dobivamo $r_b = \dfrac{P}{s-b}$ i $r_c = \dfrac{P}{s-c}$. □

Sljedeći teorem nam govori na koji način su povezane duljine visina trokuta, polumjeri njemu pripisanih kružnica te polumjer njegove upisane kružnice.

Teorem 3.1.3. *Neka su v_a, v_b, v_c duljine visina trokuta ABC. Neka je r duljina polumjera upisane, a r_a, r_b, r_c duljine polumjera pripisanih kružnica trokuta. Tada vrijedi:*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Dokaz. Neka je dan trokut ABC sa stranicama duljina a, b, c i neka su v_a, v_b, v_c duljine visina na stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, redom. Neka je r duljina polumjera trokutu upisane kružnice.
Dobro poznatu formulu za površinu trokuta

$$P = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$$

zapisat ćemo u malo drugačijem obliku. Dobivamo:

$$\frac{1}{v_a} = \frac{a}{2P}, \qquad \frac{1}{v_b} = \frac{b}{2P}, \qquad \frac{1}{v_c} = \frac{c}{2P}.$$

Zbrojimo li te jednakosti dobivamo:

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} + \frac{c}{2P} = \frac{a+b+c}{2P}.$$

Kako je $a + b + c = 2s$, gdje je s poluopseg, a $P = rs$, vrijedi:

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{2s}{2P} = \frac{s}{rs} = \frac{1}{r}.$$

Ostaje nam još pokazati da vrijedi:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Neka su r_a, r_b, r_c polumjeri pripisanih kružnica danog trokuta. U teoremu 3.1.2 uočili smo vezu između površine danog trokuta i polumjera pripisanih kružnica. Dakle, $r_a = \dfrac{P}{s-a}$, pa je $\dfrac{1}{r_a} = \dfrac{s-a}{P}$. Analogno $\dfrac{1}{r_b} = \dfrac{s-b}{P}$, $\dfrac{1}{r_c} = \dfrac{s-c}{P}$. Sada je:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{s-a}{P} + \frac{s-b}{P} + \frac{s-c}{P} \\
&= \frac{3s-(a+b+c)}{P} \\
&= \frac{3s-2s}{P} = \frac{s}{P} = \frac{s}{rs} = \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

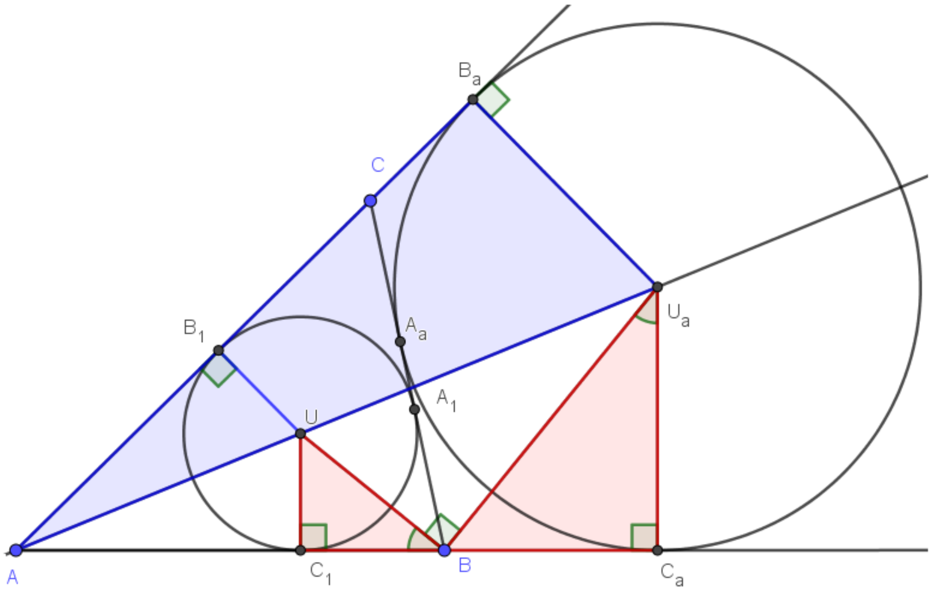
□

Površinu danog trokuta možemo izračunati i kada su nam zadane samo duljine stranica trokuta. Pri tome se služimo Heronovom formulom. Formula je ime dobila po jednom od najznačajnijih matematičara i predstavnika znanosti u staroj Grčkoj, Heronu (oko 10. − 75.) iz Aleksandrije. On je formulu zapisao i dokazao u prvoj knjizi svog djela *Metrika*.[2] U nastavku navodimo dokaz Heronove formule koristeći svojstva upisane i opisane kružnice danog trokuta.

Teorem 3.1.4. *(**Heronova formula**) Neka su a, b, c duljine stranica danog trokuta, a s njegov poluopseg. Tada površina trokuta iznosi:*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Neka je $k(U, r)$ kružnica upisana danom trokutu, a A_1, B_1, C_1 dirališta te kružnice sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ redom. Neka je $k_a(U_a, r_a)$ njegova pripisana kružnica koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki A_a, a pravce AB i AC redom u točkama C_a i B_a. Označimo mjeru kuta kod vrha B s β.



Slika 3.3: Uz izvod za Heronovu formulu

Iz teorema 1.2.4, 2.2.5 i 2.2.6 dobivamo:

$$|AB_1| = |AC_1| = s - a, \quad |BA_1| = |BC_1| = s - b, \quad |CA_1| = |CB_1| = s - c,$$

$$|AC_a| = |AB_a| = s, \quad |BA_a| = |BC_a| = s - c, \quad |CA_a| = |CB_a| = s - b.$$

Znamo da točke U i U_a leže na simetrali unutarnjeg kuta trokuta kod vrha A. Također, U_a leži na simetrali vanjskog kuta trokuta kod vrha B, a U na simetrali unutarnjeg kuta kod istog vrha. Prema teoremu 1.1.22 slijedi da se pravci BU i BU_a sijeku pod pravim kutom, odnosno $\sphericalangle UBU_a = 90°$.
Budući da je U središte upisane, a U_a središte pripisane kružnice trokuta ABC slijedi:

$$\sphericalangle UC_1B = \sphericalangle U_aC_aB = 90°, \quad \sphericalangle UBC_1 = \frac{\beta}{2}, \quad \sphericalangle BUC_1 = 90° - \frac{\beta}{2},$$

dok za $\sphericalangle U_aBC_a$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\sphericalangle U_aBC_a &= 180^\circ - \sphericalangle UBC_1 - \sphericalangle UBU_a \\ &= 180^\circ - \frac{\beta}{2} - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$

Zbog toga su trokuti C_1BU i C_aU_aB slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta. Slijedi:

$$\frac{|C_aU_a|}{|C_1B|} = \frac{|BC_a|}{|UC_1|} \Rightarrow \frac{r_a}{s-b} = \frac{s-c}{r} \Rightarrow r \cdot r_a = (s-b)(s-c). \tag{3.1}$$

Također, očito je da su trokuti AUC_1 i AU_aC_a slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta. Slijedi:

$$\frac{|AU|}{|AU_a|} = \frac{|AC_1|}{|AC_a|} \Rightarrow \frac{r}{r_a} = \frac{s-a}{s} \Rightarrow r_a = \frac{r \cdot s}{s-a}. \tag{3.2}$$

Uzevši u obzir (3.1) i (3.2) dobivamo:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

odakle je:

$$P = r \cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

□

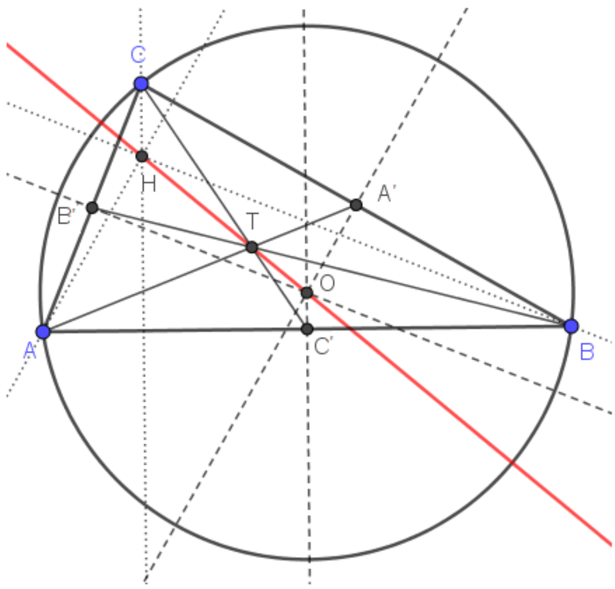
3.2 Metričke relacije među točkama H, T, O, U

Karakteristične točke trokuta imaju zanimljiva svojstva. Neka od njih navodimo u ovom dijelu. Posebno nas zanimaju udaljenosti između središta trokutu upisane kružnice i ortocentra, kao i između središta trokutu opisane kružnice i ortocentra.

Teorem 3.2.1. *Središte O opisane kružnice, težište T i ortocentar H svakog trokuta su kolinearne točke. Nadalje, T je između O i H i vrijedi $|TH| = 2 \cdot |TO|$.*

Pravac iz teorema 3.2.1 naziva se Eulerov pravac tog trokuta.

Dokaz. Neka je u trokutu ABC točka A' polovište stranice $\overline{BC}$, a B' polovište stranice $\overline{AC}$. Tada je $\overline{A'B'}$ srednjica trokuta ABC te vrijedi $A'B' \parallel AB$, $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$.
Kako je pravac AH okomit na BC i $A'O$ okomit na BC, to su pravci AH i $A'O$ međusobno paralelni. Također, pravac BH je okomit na AC i $B'O$ je okomit na AC, pa su pravci BH i $B'O$ međusobno paralelni. Zaključujemo da su odgovarajuće stranice u trokutima ABH i $A'B'O$ paralelne. Zbog toga su šiljasti kutovi $\sphericalangle HAB$ i $\sphericalangle OA'B'$ s paralelnim kracima



Slika 3.4: Kolinearnost točaka O, T, H.

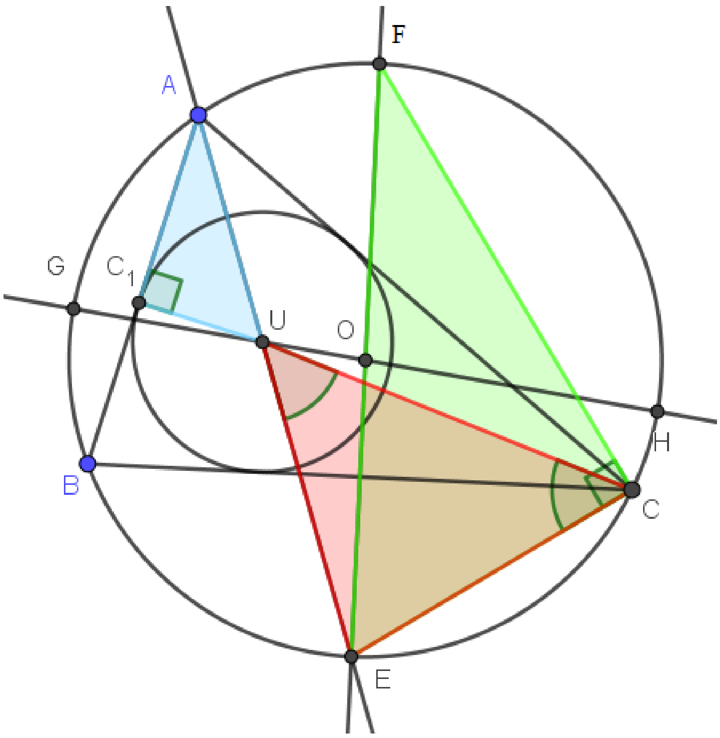
međusobno sukladni, kao i $\sphericalangle ABH$ i $\sphericalangle A'B'O$.
Sada prema K-K teoremu o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti ABH i $A'B'O$ slični, pa vrijedi $\dfrac{|AH|}{|A'O|} = \dfrac{|AB|}{|A'B'|} = 2$.
Neka je točka T_1 sjecište pravaca HO i AA'. Kako su pravci AH i $A'O$ paralelni, a točke A, A', T_1, odnosno H, O, T_1 kolinearne, to su trokuti AHT_1 i $A'OT_1$ slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta. Slijedi $\dfrac{|AT_1|}{|A'T_1|} = \dfrac{|AH|}{|A'O|} = 2$.
Međutim, dužina $\overline{AA'}$ je težišnica trokuta ABC i prema teoremu 1.1.10 za težište T vrijedi $\dfrac{|AT|}{|A'T|} = 2$. Sada iz $\dfrac{|AT_1|}{|A'T_1|} = \dfrac{|AT|}{|A'T|}$ slijedi da se točke T_1 i T podudaraju.
Dakle, T leži na pravcu HO, odnosno točke T, H, O su kolinearne. Kako su trokuti AHT i $A'OT$ slični, slijedi $\dfrac{|TH|}{|TO|} = \dfrac{|AT|}{|A'T|} = 2$, pa je $|TH| = 2 \cdot |TO|$. □

Korolar 3.2.2. *Udaljenost ortocentra H od vrha A trokuta ABC dvostruko je veća od udaljenosti središta O trokutu opisane kružnice do stranice $\overline{BC}$.*

Švicarac Leonhard Euler (1707. − 1783.) bio je jedan od najvećih matematičara 18. stoljeća. Ostavio je dubok trag u proučavanju geometrije trokuta. Zbog toga ne čudi što mnogi pojmovi i teoremi u geometriji nose njegovo ime. Smatra se da je upravo Euler prvi dokazao rezultat sljedećeg teorema.[2] Postoje razni njegovi dokazi, a mi ćemo ga dokazati koristeći potenciju točke u odnosu na kružnicu.

Teorem 3.2.3. ***(Eulerova formula).*** *Neka je R radijus opisane, a r radijus upisane kružnice trokuta. Za udaljenost d između središta O opisane i središta U upisane kružnice trokuta vrijedi:*

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$



Slika 3.5: Eulerova formula

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Neka je O središte opisane kružnice k_o, a U središte upisane k_u kružnice trokuta ABC i neka je $|OU| = d$. Neka je E točka u kojoj pravac AU siječe k_o. Nadalje, neka pravac OE siječe kružnicu k_o u točki F i neka pravac OU siječe kružnicu k_o u točkama G i H. Uočimo da su $\overline{EF}$ i $\overline{GH}$ promjeri opisane kružnice.
Promotrimo točku U. Prema teoremu 1.2.11 za potenciju točke U u odnosu na k_o vrijedi:

$$|AU| \cdot |UE| = |GU| \cdot |UH| = (R - d) \cdot (R + d) = R^2 - d^2. \tag{3.3}$$

Uočimo točka E je polovište luka $\widehat{BC}$, pa po teoremu 2.3.1 slijedi

$$|EB| = |EC| = |EU|. \tag{3.4}$$

Neka je C_1 dиралište k_u sa stranicom $\overline{AB}$. Zaključujemo da je trokut AUC_1 pravokutni s pravim kutom kod vrha C_1 te kutom mjere $\frac{\alpha}{2}$ kod vrha A.
Pogledajmo trokut FEC. On je također pravokutni s pravim kutom kod vrha C te vrijedi $\sphericalangle EFC = \sphericalangle EAC = \frac{\alpha}{2}$. Sada, prema K-K teoremu o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti AUC_1 i FEC slični, pa vrijedi:

$$\frac{|AU|}{|EF|} = \frac{|UC_1|}{|EC|} \Rightarrow |AU| \cdot |EC| = |UC_1| \cdot |EF| = r \cdot 2R. \tag{3.5}$$

Dakle, iz (3.5), (3.4), (3.3) dobivamo

$$2rR = |AU| \cdot |EC| = |AU| \cdot |UE| = R^2 - d^2,$$

odnosno:

$$d^2 = R^2 - 2rR.$$

□

Korolar 3.2.4. *Polumjer opisane kružnice danog trokuta ne može biti manji od promjera upisane kružnice, tj. $R \geq 2r$.*

Dokaz. Iz $d^2 = R^2 - 2rR = R(R - 2r) \geq 0$ slijedi da je $R \geq 2r$. □

Teorem 3.2.5. *Neka je dan tokut ABC sa stranicama duljina a, b, c i ortocentrom H. Neka je $k(O, R)$ tom trokutu opisana kružnica. Za udaljenost OH između središta O opisane kružnice trokuta i ortocentra H vrijedi:*

$$|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Nadalje, neka je D nožište visine spuštene iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$. Ako je trokut šiljastokutni, vrijedi:

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot |AH| \cdot |HD|,$$

a ako je trokut tupokutni, vrijedi:

$$|OH|^2 = R^2 + 2 \cdot |AH| \cdot |HD|.$$

Dokaz. Neka su A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ i neka je T težište danog trokuta.
Zamijenimo li točku M iz teorema 1.1.13 sa središtem O opisane kružnice danog trokuta, dobivamo

$$|AO|^2 + |BO|^2 + |CO|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|OT|^2,$$
$$3R^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|OT|^2.$$

Primjenom leme 1.1.12 dobivamo

$$3R^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 3|OT|^2,$$

odnosno

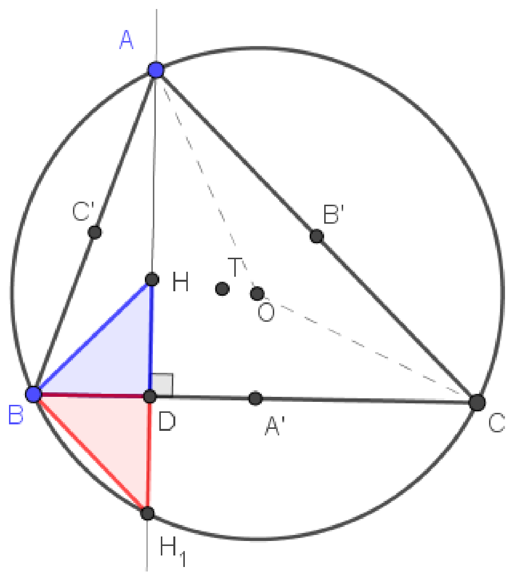
$$9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 9|OT|^2.$$

Prema teoremu 3.2.1 slijedi da je $|OH| = 3|OT|$, pa je $|OH|^2 = 9|OT|^2$. Konačno:

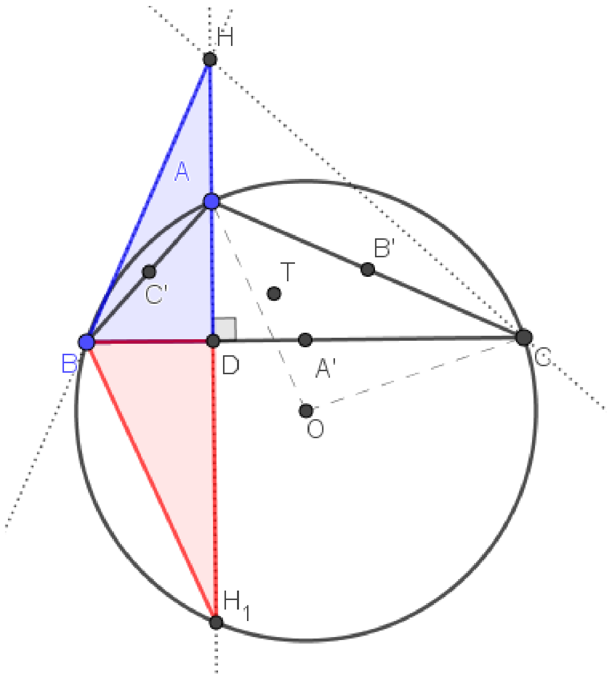
$$9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + |OH|^2,$$

$$|OH|^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Ostaje nam dokazati drugi dio teorema. U tu svrhu promatramo tri slučaja: trokut ABC



Slika 3.6: Sukladnost trokuta BDH i BDH_1 za šiljastokutni trokut ABC



Slika 3.7: Trokut ABC s tupim kutom u vrhu A

je šiljastokutni, trokut ABC ima tupi kut u vrhu A i bez smanjenja općenitosti trokut ABC ima tupi kut u vrhu B. Neka pravac AH siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točki H_1, pri čemu je $H_1 \neq A$. Uočimo trokute BDH i BDH_1. Za trokut ABC šiljastokutni i trokut ABC s tupim kutom u vrhu A vrijedi

$$\sphericalangle H_1BD = \sphericalangle H_1AC = \sphericalangle DAC = 90^\circ - \gamma$$

jer su to obodni kutovi nad kružnim lukom $\widehat{H_1C}$. Također, $BH \perp AC$ pa je

$$\sphericalangle DBH = 90^\circ - \sphericalangle BCA = 90^\circ - \gamma.$$

Nadalje, za trokut ABC s tupim kutom u vrhu B vrijedi

$$\sphericalangle DH_1B = \sphericalangle BCA = \gamma,$$

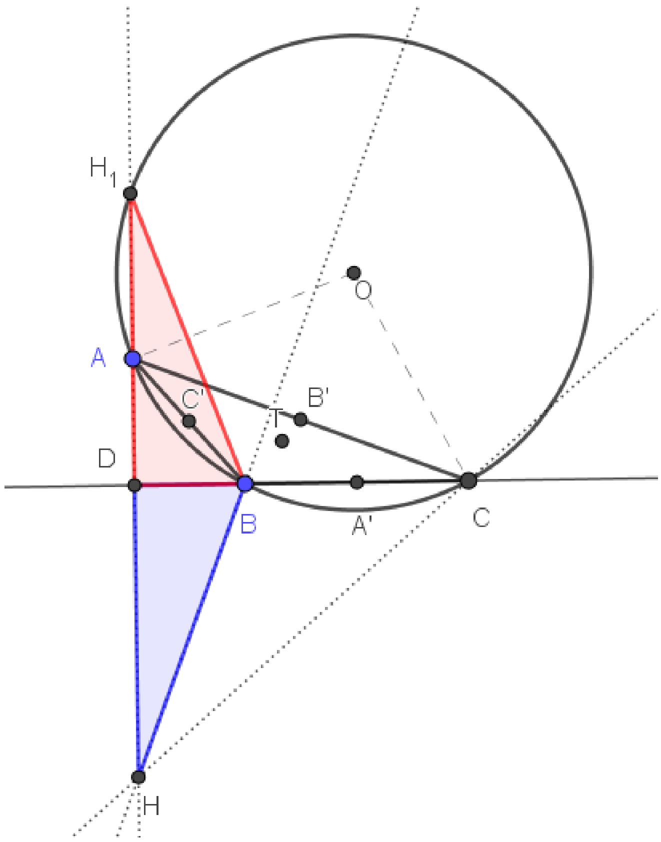
jer su to obodni kutovi nad kružnim lukom $\widehat{AB}$, pa je

$$\sphericalangle H_1BD = 90^\circ - \gamma.$$

Dakle, trokuti BDH i BDH_1 imaju zajedničku stranicu $\overline{BD}$, $\sphericalangle BDH_1 = \sphericalangle BDH$ te je $\sphericalangle H_1BD = \sphericalangle HBD$ pa su oni sukladni prema K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta. Slijedi

$$|HD| = |DH_1|. \tag{3.6}$$

Pogledajmo sada potenciju točke H u odnosu na opisanu kružnicu. Ako je trokut šiljastokutni,



Slika 3.8: Trokut ABC s tupim kutom u vrhu B

ortocentar H leži unutar opisane kružnice. Primjenom teorema 1.2.11 dobivamo

$$|HA| \cdot |HH_1| = R^2 - |OH|^2.$$

Primijetimo $|HH_1| = |HD| + |DH_1|$, te uz (3.6) imamo

$$|HA| \cdot 2 \cdot |HD| = R^2 - |OH|^2,$$

odnosno

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot |AH| \cdot |HD|.$$

Ako je trokut tupokutni, ortocentar H leži izvan opisane kružnice. Primjenom teorema 1.2.12 dobivamo

$$|HA| \cdot |HH_1| = |OH|^2 - R^2,$$

odnosno uz (3.6)

$$|OH|^2 = R^2 + 2 \cdot |AH| \cdot |HD|.$$

□

Teorem 3.2.6. *Neka je dan trokut ABC sa stranicama duljina a, b, c i ortocentrom H. Neka je $k(U, r)$ upisana, a $k(O, R)$ opisana kružnica tom trokutu. Za udaljenost između središta U upisane kružnice trokuta i ortocentra H vrijedi:*

$$|HU|^2 = 2(r^2 + 2R^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Nadalje, neka je D nožište visine spuštene iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$. Ako je trokut šiljastokutni, vrijedi:

$$|HU|^2 = 2r^2 - |AH| \cdot |HD|,$$

a ako je trokut tupokutni vrijedi:

$$|HU|^2 = 2r^2 + |AH| \cdot |HD|.$$

Dokaz. Označimo mjere kutova kod vrhova trokuta A, B, C, redom s α, β, γ. Neka je $k_a(U_a, r_a)$ pripisana kružnica koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$. Uočimo trokute ACU_a i AUB i pogledajmo njihove kutove. Kako su U i U_a na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$ vrijedi

$$\sphericalangle CAU_a = \sphericalangle UAB = \frac{\alpha}{2}.$$

Nadalje,

$$\sphericalangle AUB = 180^\circ - \sphericalangle UAB - \sphericalangle UBA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Iz teorema 1.1.22 slijedi da je $\sphericalangle UCU_a = 90^\circ$, pa je

$$\sphericalangle ACU_a = \sphericalangle ACU + \sphericalangle UCU_a = \frac{\gamma}{2} + 90^\circ.$$

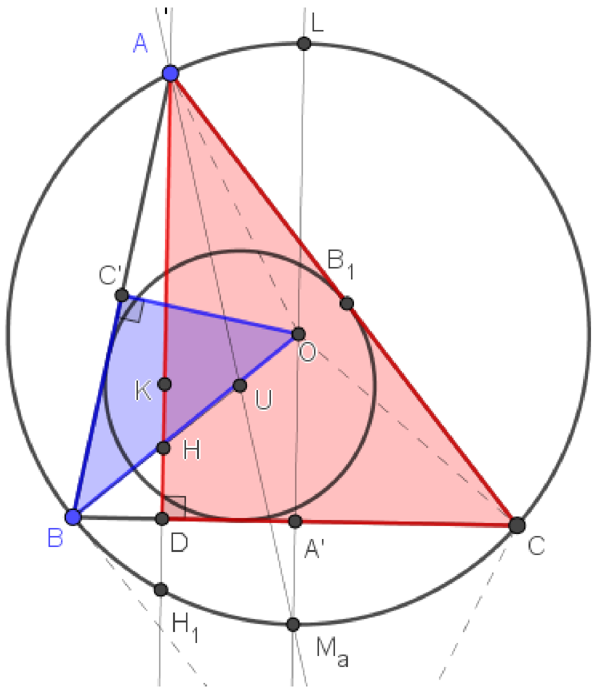
Dakle, $\sphericalangle CAU_a = \sphericalangle UAB$ i $\sphericalangle ACU_a = \sphericalangle AUB$, pa su trokuti ACU_a i AUB slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta. Slijedi:

$$\frac{|AU|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AU_a|} \Rightarrow |AU| \cdot |AU_a| = |AB| \cdot |AC|. \tag{3.7}$$

Neka su C' i A' polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, redom. Neka je $k(O,R)$ opisana kružnica. Kut $\sphericalangle AOB$ je središnji kut. Zato vrijedi:

$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 2\gamma,$$

$$\sphericalangle C'OB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \gamma.$$



Slika 3.9: Šiljastokutni trokut ABC

Nadalje, uočimo trokute $C'BO$ i DAC. Vrijedi:

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle OC'B = 90°,$$

$$\sphericalangle DCA = \sphericalangle C'OB = \gamma.$$

Dakle, trokuti $C'BO$ i DAC su slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta pa vrijedi

$$\frac{|AD|}{|BC'|} = \frac{|AC|}{|BO|} \Rightarrow |AD| \cdot |BO| = |AC| \cdot |BC'|,$$

te uz $|AB| = 2|BC'|$, $|OB| = R$ imamo

$$|AB| \cdot |AC| = 2R \cdot |AD|. \tag{3.8}$$

Sada, na temelju (3.7) i (3.8) slijedi:

$$|AU| \cdot |AU_a| = 2R \cdot |AD|. \tag{3.9}$$

Iz teorema 2.3.1 znamo da je $|UM_a| = |M_aU_a|$, gdje je M_a sjecište simetrale kuta kod vrha A i opisane kružnice trokuta ABC, pa je

$$\begin{aligned} |AU_a| &= |AU| + |UM_a| + |M_aU_a| = |AU| + 2|UM_a| \\ &= 2|AU| + 2|UM_a| - |AU| = 2(|AU| + |UM_a|) - |AU| \\ &= 2|AM_a| - |AU|, \end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem u (3.9) dobijemo

$$2|AU| \cdot |AM_a| - |AU|^2 = 2R \cdot |AD|. \tag{3.10}$$

Neka je K nožište okomice spuštene iz U na visinu $\overline{AD}$ te neka je L drugo sjecište M_aO s $k(O,R)$. Uočimo trokute AKU i M_aAL. Dužina $\overline{M_aL}$ je promjer opisane kružnice, pa je $\sphericalangle AKU = \sphericalangle M_aAL = 90°$ te $\sphericalangle KAU = \sphericalangle AM_aL$ jer je $AK \parallel M_aL$. Dakle, trokuti AKU i M_aAL su slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta. Slijedi:

$$\frac{|AU|}{|M_aL|} = \frac{|AK|}{|AM_a|} \Rightarrow |AU| \cdot |M_aA| = |AK| \cdot |M_aL|,$$

odnosno

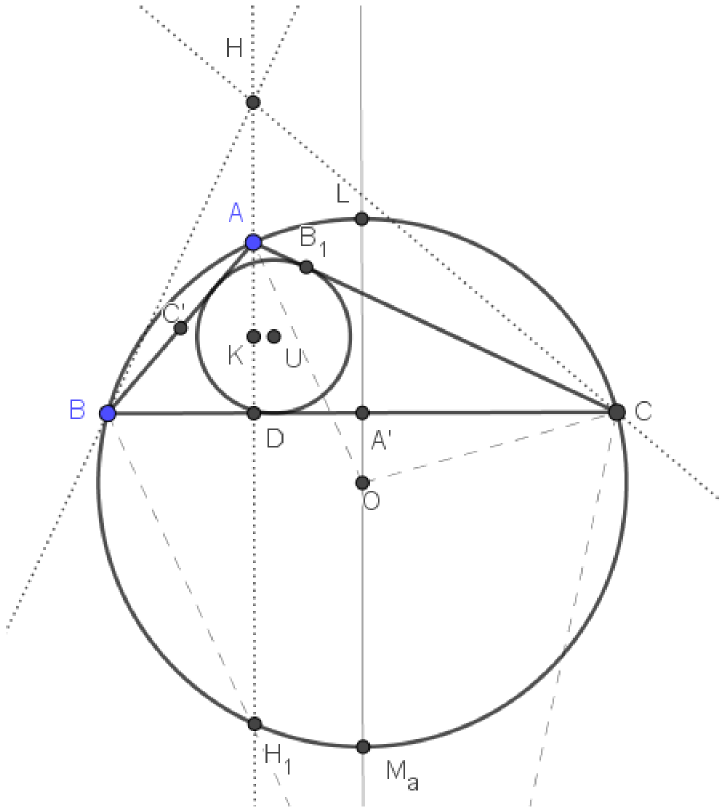
$$|AU| \cdot |M_aA| = |AK| \cdot 2R. \tag{3.11}$$

Iz (3.10) i (3.11) dobivamo

$$4R \cdot |AK| = 2R \cdot |AD| + |AU|^2. \tag{3.12}$$

Sada, primjenom kosinusovog poučka na trokut AUH slijedi

$$|UH|^2 = |AU|^2 + |AH|^2 - 2 \cdot |AU| \cdot |AH| \cdot \cos \sphericalangle UAH. \tag{3.13}$$



Slika 3.10: Trokut ABC s tupim kutom u vrhu A

Vrijednost $\cos \sphericalangle UAH$ dobit ćemo primjenom trigonometrije na pravokutni trokut AKU. Vrijedi

$$\cos \sphericalangle UAK = \frac{|AK|}{|AU|}.$$

Za šiljastokutni trokut vrijedi

$$\cos \sphericalangle UAH = \cos \sphericalangle UAK = \frac{|AK|}{|AU|},$$

pa uvrštavanjem u (3.13) dobivamo

$$|UH|^2 = |AU|^2 + |AH|^2 - 2 \cdot |AH| \cdot |AK|. \tag{3.14}$$

Za trokut s tupim kutom u vrhu A vrijedi

$$\cos \sphericalangle UAH = \cos (180^\circ - \sphericalangle AUK) = -\cos \sphericalangle AUK = -\frac{|AK|}{|AU|},$$

pa uvrštavanjem u (3.13) dobivamo

$$|UH|^2 = |AU|^2 + |AH|^2 + 2 \cdot |AH| \cdot |AK|, \tag{3.15}$$

dok je za trokut s tupim kutom u vrhu B

$$\cos \sphericalangle UAH = \cos \sphericalangle UAK = \frac{|AK|}{|AU|},$$

pa i u ovom slučaju vrijedi formula (3.14). Nadalje, u šiljastokutnom trokutu je $|AD| = |AH| + |HD|$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
2R \cdot |UH|^2 &= 2R \cdot |AU|^2 + 2R \cdot |AH|^2 - 4R \cdot |AH| \cdot |AK| && \text{prema (3.14)} \\
&= 2R \cdot |AU|^2 + 2R \cdot |AH|^2 - |AH|\left(2R \cdot |AD| + |AU|^2\right) && \text{prema (3.12)} \\
&= (2R - |AH|)\,|AU|^2 - 2R \cdot |AH|\,(|AD| - |AH|) \\
&= (2|OM_a| - 2|OA'|)\,|AU|^2 - 2R \cdot |AH| \cdot |HD| && \text{korolar 3.2.2} \\
&= 2|M_aA'| \cdot |AU|^2 - 2R \cdot |AH| \cdot |HD|,
\end{aligned}$$

odnosno

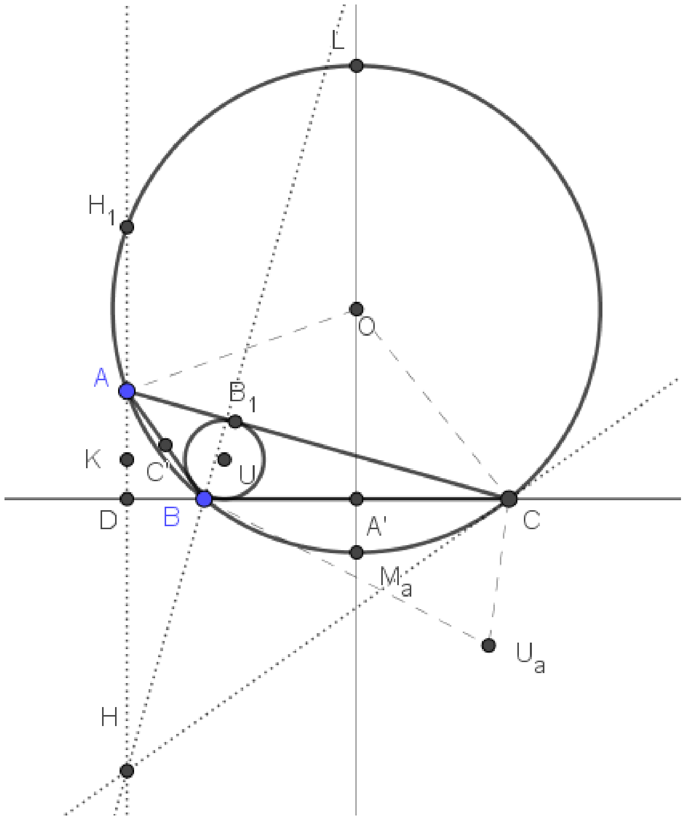
$$2R \cdot |UH|^2 = 2|M_aA'| \cdot |AU| \cdot |AU| - 2R \cdot |AH| \cdot |HD|. \tag{3.16}$$

U trokutu s tupim kutom u vrhu A je $|DA| + |AH| = |DH|$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
2R \cdot |UH|^2 &= 2R \cdot |AU|^2 + 2R \cdot |AH|^2 + 4R \cdot |AH| \cdot |AK| && \text{prema (3.15)} \\
&= 2R \cdot |AU|^2 + 2R \cdot |AH|^2 + |AH|\left(2R \cdot |DA| + |AU|^2\right) && \text{prema (3.12)} \\
&= (2R + |AH|)\,|AU|^2 + 2R \cdot |AH|\,(|DA| + |AH|) \\
&= (2|A'O| + 2|OM_a|)\,|AU|^2 + 2R \cdot |AH| \cdot |DH| && \text{korolar 3.2.2} \\
&= 2|A'M_a| \cdot |AU|^2 + 2R \cdot |AH| \cdot |DH|,
\end{aligned}$$

odnosno

$$2R \cdot |UH|^2 = 2|A'M_a| \cdot |AU| \cdot |AU| + 2R \cdot |AH| \cdot |DH|. \tag{3.17}$$



Slika 3.11: Trokut ABC s tupim kutom u vrhu B

Ostaje nam još pogledati što vrijedi za trokut s tupim kutom u vrhu B (ili C). Kut u vrhu A je šiljast te je $|AD| + |DH| = |AH|$ pa vrijedi:

$$
\begin{aligned}
2R \cdot |UH|^2 &= 2R \cdot |AU|^2 + 2R \cdot |AH|^2 - 4R \cdot |AH| \cdot |AK| && \text{prema (3.14)}\\
&= 2R \cdot |AU|^2 + 2R \cdot |AH|^2 - |AH| \left(2R \cdot |AD| + |AU|^2\right) && \text{prema (3.12)}\\
&= (2R - |AH|)\, |AU|^2 + 2R \cdot |AH|\, (|AH| - |AD|) && \text{jer je } |AH| > |AD|\\
&= (2|OM_a| - 2|OA'|)\, |AU|^2 + 2R \cdot |AH| \cdot |HD| && \text{korolar 3.2.2}\\
&= 2|A'M_a| \cdot |AU|^2 + 2R \cdot |AH| \cdot |HD|,
\end{aligned}
$$

odnosno

$$2R \cdot |UH|^2 = 2|A'M_a| \cdot |AU| \cdot |AU| + 2R \cdot |AH| \cdot |HD|.$$

Zaključujemo, ako je trokut šiljastokutan vrijedi (3.16), a ako je trokut tupokutan vrijedi (3.17).

Neka je B_1 diralište upisane kružnice trokuta ABC sa stranicom $\overline{AC}$. Uočimo trokute $BA'M_a$ i AB_1U. Očito je $\sphericalangle BA'M_a = \sphericalangle UB_1A = 90°$ te $\sphericalangle M_aBA' = \sphericalangle M_aBC = \sphericalangle M_aAC = \sphericalangle UAB_1 = \frac{\alpha}{2}$ jer su to kutovi nad kružnim lukom $\widehat{M_aC}$. Dakle, trokuti $BA'M_a$ i AB_1U su slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta. Vrijedi:

$$\frac{|AU|}{|M_aB|} = \frac{|UB_1|}{|M_aA'|} \Rightarrow |M_aA'| \cdot |AU| = |M_aB| \cdot |UB_1|.$$

Zbog toga za šiljastokutni trokut imamo

$$2R \cdot |UH|^2 = 2r|M_aB| \cdot |AU| - 2R \cdot |AH| \cdot |HD|, \tag{3.18}$$

dok je za tupokutan

$$2R \cdot |UH|^2 = 2r|M_aB| \cdot |AU| + 2R \cdot |AH| \cdot |DH|. \tag{3.19}$$

Također, prema K-K teoremu o sličnosti trokuta, trokuti M_aBL i UB_1A su slični, jer je $\sphericalangle M_aBL = 90°$, $\sphericalangle BLM_a = \frac{\alpha}{2}$. Slijedi:

$$\frac{|M_aL|}{|AU|} = \frac{|BM_a|}{|UB_1|} \Rightarrow |BM_a| \cdot |AU| = |M_aL| \cdot |UB_1|.$$

Konačno iz (3.18) za šiljastokutni trokut proizlazi

$$\begin{aligned} 2R \cdot |UH|^2 &= 2r \cdot |M_aL| \cdot |UB_1| - 2R \cdot |AH| \cdot |HD|, \\ R \cdot |UH|^2 &= r \cdot 2R \cdot r - R \cdot |AH| \cdot |HD|, \\ |UH|^2 &= 2r^2 - |AH| \cdot |HD|, \end{aligned} \tag{3.20}$$

a iz (3.19) za tupokutni trokut imamo

$$\begin{aligned} 2R \cdot |UH|^2 &= 2r \cdot |M_aL| \cdot |UB_1| + 2R \cdot |AH| \cdot |DH|, \\ R \cdot |UH|^2 &= r \cdot 2R \cdot r + R \cdot |AH| \cdot |DH|, \\ |UH|^2 &= 2r^2 + |AH| \cdot |HD|. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Sada prema teoremu 3.2.5 za šiljastokutni trokut slijedi

$$\begin{aligned} |AH| \cdot |HD| &= \frac{R^2 - |OH|^2}{2} \\ &= \frac{R^2 - 9R^2 + (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2) - 8R^2}{2}, \end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem u (3.20) dobivamo

$$\begin{aligned}|UH|^2 &= 2r^2 - \frac{(a^2+b^2+c^2)-8R^2}{2}\\ &= 2r^2+4R^2-\frac{1}{2}\Big(a^2+b^2+c^2\Big)\\ &= 2(r^2+2R^2)-\frac{1}{2}\Big(a^2+b^2+c^2\Big).\end{aligned}$$

Nadalje, prema teoremu 3.2.5 za tupokutni trokut slijedi

$$\begin{aligned}|AH|\cdot|HD| &= \frac{|OH|^2-R^2}{2}\\ &= \frac{9R^2+(a^2+b^2+c^2-R^2)}{2}\\ &= \frac{8R^2-(a^2+b^2+c^2)}{2},\end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem u (3.21) dobivamo

$$\begin{aligned}|UH|^2 &= 2r^2 + \frac{8R^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\\ &= 2r^2+4R^2-\frac{1}{2}\Big(a^2+b^2+c^2\Big)\\ &= 2(r^2+2R^2)-\frac{1}{2}\Big(a^2+b^2+c^2\Big).\end{aligned}$$

Uočimo da su nam dva promatrana slučaja: za šiljastokutni i za tupokutni trokut dala isti rezulatat, koji se tvrdi teoremom.
Na kraju, pokažimo da teorem vrijedi i za pravokutni trokut. Ako je kut u vrhu A pravi, onda se ortocentar H podudara s vrhom A. Primijetimo dužina $\overline{AU}$ je dijagonala kvadrata čija su dva nasuprotna vrha dirališta upisane kružnice. Zbog toga je $|AU| = |HU| = r\cdot\sqrt{2}$, odnosno

$$|HU|^2 = 2\cdot r^2.$$

Kako je iz Pitagorinog poučka $a^2 = b^2+c^2$ te $a = 2R$, vrijedi $R^2 = b^2+c^2$. Sada je

$$a^2+b^2+c^2 = 4R^2+4R^2 = 8R^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) = 4R^2.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}|UH|^2 = 2r^2 &= 2r^2 + 4R^2 - 4R^2 \\ &= 2\left(r^2 - 2R^2\right) - \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),\end{aligned}$$

te je time teorem dokazan.

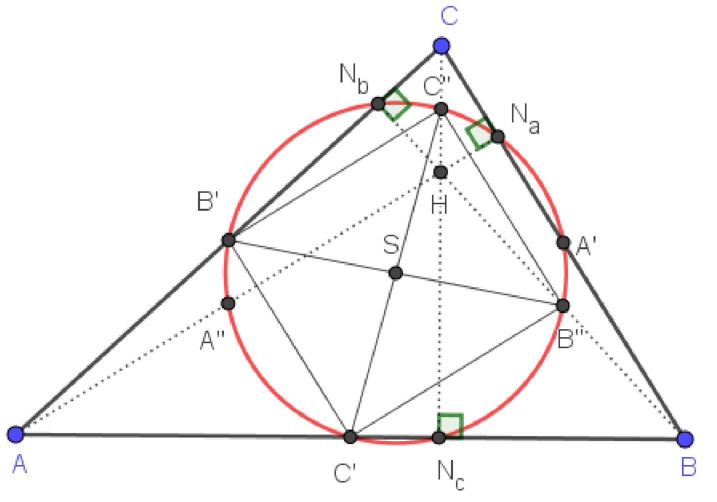
□

Poglavlje 4

Feuebachova kružnica

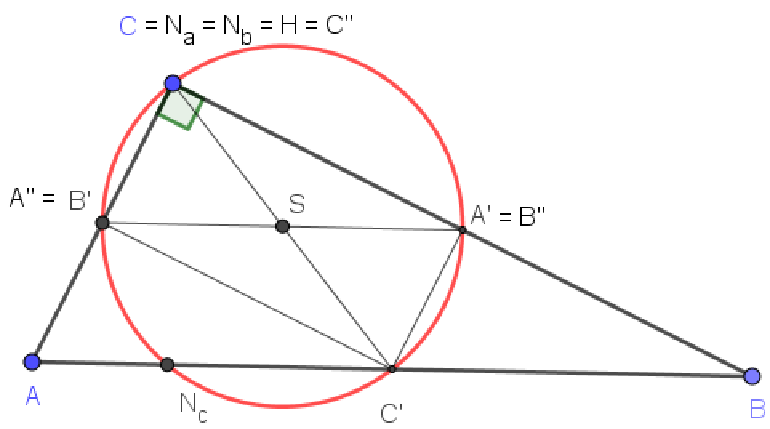
Kroz rad smo promatrali koncikličnost različitih točaka vezanih uz trokut i kružnice. U ovom ćemo poglavlju promatrati Feuerbachovu kružnicu i otkriti koncikličnost još nekih točaka. Za kraj ćemo dokazati da se u svakom trokutu upisana i Feuerbachova kružnica dodiruju.

Teorem 4.0.1. *Neka su u trokutu ABC točke A', B', C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom, točke N_a, N_b, N_c nožišta visina, a točke A'', B'', C'' polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, gdje je H ortocenar. Svih devet točaka A', B', C', A'', B'', C'', N_a, N_b, N_c leži na istoj kružnici.*



Slika 4.1: Šiljastokutan trokut i Feuerbachova kružnica

Dokaz. Trebamo dokazati koncikličnost navedenih devet točaka. Budući da su B' i C' polovišta stranica trokuta ABC, $\overline{B'C'}$ je srednjica trokuta ABC, pa vrijedi $|B'C'| = \frac{1}{2}|BC|$ i $B'C' \parallel BC$. Isto tako, $\overline{B''C''}$ je srednjica trokuta BCH te je $|B''C''| = \frac{1}{2}|BC|$ i $B''C'' \parallel BC$.
Zaključujemo da je $B'C'B''C''$ paralelogram. Njegove dijagonale $\overline{B'B''}$ i $\overline{C'C''}$ međusobno se raspolavljaju. Označimo sa S njihov presjek.
Promotrimo trokut AHC. Točke B' i C'' su polovišta stranica tog trokuta. Zato je $\overline{B'C''}$ njegova srednjica, pa je $B'C'' \parallel AH$. Slijedi $B'C'' \perp B''C''$, tj. $\sphericalangle B'C''B'' = 90°$. Prema tome, $B'C'B''C''$ je pravokutnik kojemu možemo opisati kužnicu sa središtem u točki S, polumjera $\frac{1}{2}|C'C''|$.
Na isti način pokazujemo da je $A'C'A''C''$ pravokutnik kojemu možemo opisati kružnicu jednakog polumjera i središta kao i pravokutniku $B'C'B''C''$.
Uočimo da točke A', B', C', A'', B'', C'' leže na istoj kružnici. Označimo tu kužnicu s k.
Trokut $C'C''N_c$ je pravokutan s hipotenuzom $\overline{C'C''}$, pa je kružnica opisana tom trokutu upravo kružnica k. Dakle, i točka N_c leži na kružnici k.
Analogno se pokaže da i točke N_a i N_b leže na kružnici k. □

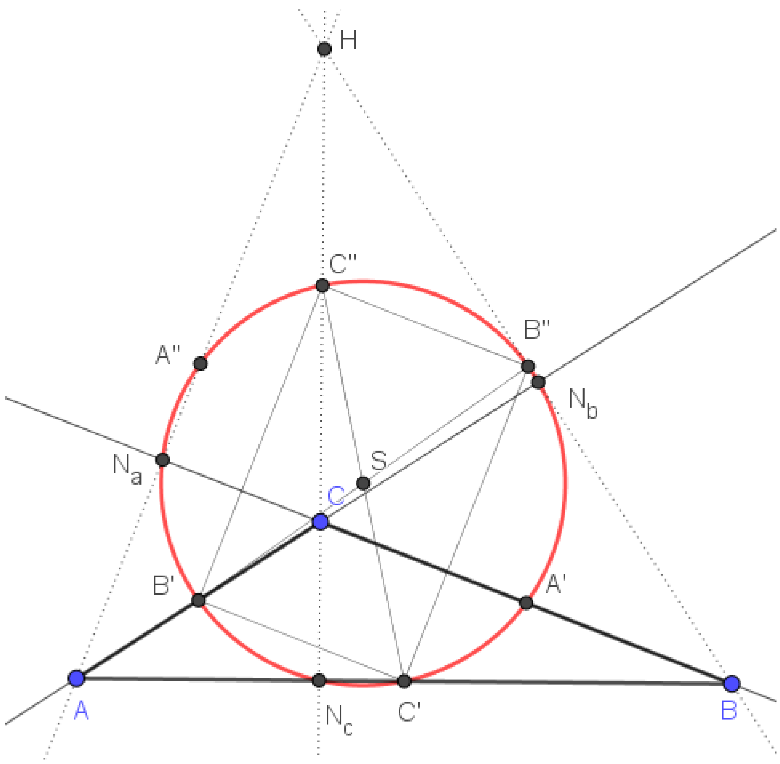


Slika 4.2: Pravokutan trokut i Feuerbachova kružnica

Definicija 4.0.2. *Kružnicu na kojoj leže polovišta stranica trokuta, polovišta spojnica ortocentra i vrhova trokuta te nožišta visina trokuta zovemo Feuerbachova kružnica.*

Prema povijesnim istraživanjima postoji nekoliko njenih nezavisnih otkrića, pa se ova kružnica često u literatuti susreće pod imenom kružnica devet točaka ili pak Eulerova kružnica. Povijest otkrića detaljno je prikazana u članku [11].
Njemački matematičar Karl Wilhelm Feuerbach (1800. – 1834.) proučavao je karakteristične točke trokuta i otkrio niz novih i važnih tvrdnji vezanih uz Feuerbachovu kružnicu.

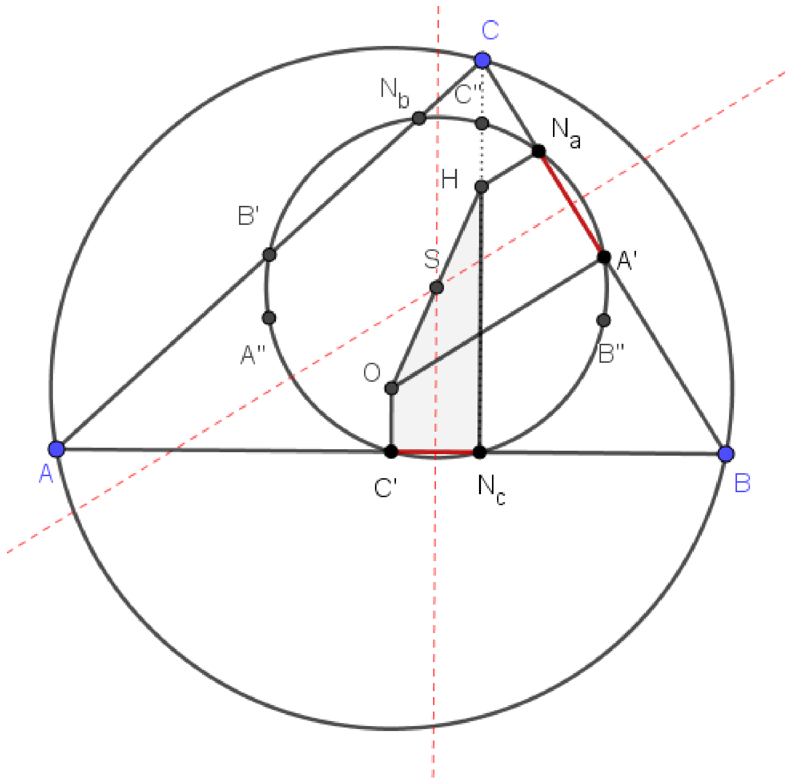
Također, dokazao je da kružnica koja prolazi nožištima visina trokuta dira sve četiri kružnice koje diraju stranice trokuta, odnosno njihova produženja. Dakako, radi se o upisanoj i pripisanim kružnicama trokuta. Ovaj je teorem postao poznat kao Feuerbachov teorem. Kroz povijest je bio predmet istraživanja brojnih matematičara, pa postoji velik broj njegovih različitih dokaza.



Slika 4.3: Tupokutan trokut i Feuerbachova kružnica

Na slici 4.1 prikazan je šiljastokutan trokut i njegova Feuerbachova kružnica, na slici 4.2 pravokutan trokut s pripadajućom Feuerbachovom kružnicom, dok je na slici 4.3 tupokutan trokut sa svojom Feuerbachovom kružnicom. Primijetimo da se u pravokutnom trokutu neke od danih devet točaka podudaraju. Tako je vrh C ujedno i ortocentar te nožište visina iz vrha A i B, pa se i polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ podudaraju s polovištima dužina $\overline{AH}$ i $\overline{BH}$.

Svojstva Feuerbachove kružnice navodimo u obliku sljedeća dva teorema. Napomenimo da u njihovim dokazima koristimo oznake iz teorema 4.0.1.

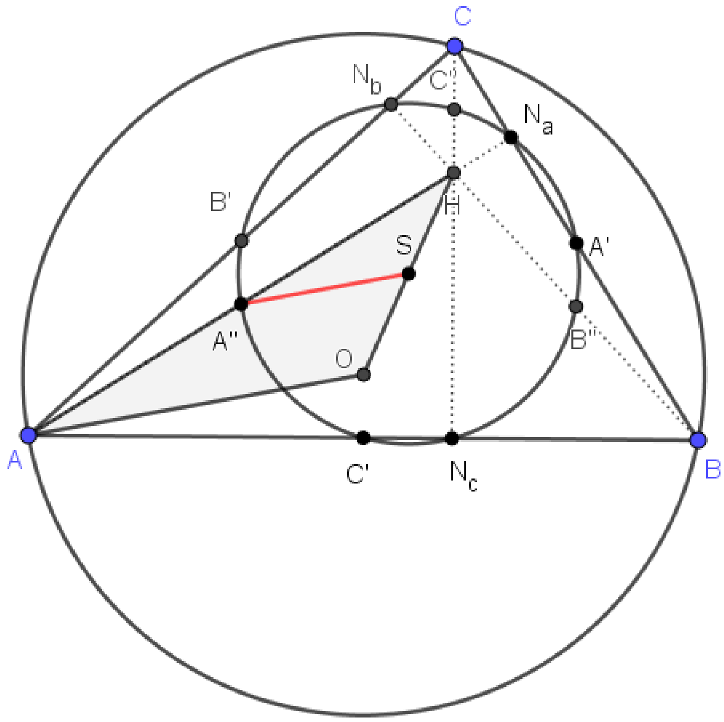


Slika 4.4: Središte Feuerbachove kružnice

Teorem 4.0.3. *Središte S Feuerbachove kružnice je polovište dužine $\overline{HO}$, gdje je H ortocentar, a O središte opisane kružnice danog trokuta.*

Dokaz. Prema teoremu 4.0.1 $\overline{N_aA'}$ i $\overline{N_cC'}$ su tetive Feuebachove kružnice. Prema teoremu 1.2.6 sjecište njihovih simetrala je središte kružnice. Nadalje, $HN_a \parallel OA'$ te $HN_c \parallel OC'$, pa su četverokuti $N_aA'OH$ i N_cHOC' trapezi sa zajedničkim krakom $\overline{HO}$, a drugi su im krakovi $\overline{N_aA'}$, odnosno $\overline{N_cC'}$ tetive Feuerbachove kružnice.
Uočimo da na simetrali promatranih tetiva leže srednjice promatranih trapeza. Budući da trapezi imaju zajednički krak $\overline{HO}$, na tom se kraku mora nalaziti središte Feuerbachove kružnice. Također, srednjica trapeza spaja polovišta krakova trapeza, pa se središte Feuerbachove kružnice podudara s polovištem kraka $\overline{HO}$.
Time smo dokazali da je središte Feuerbachove kružnice polovište dužine $\overline{HO}$. □

Teorem 4.0.4. *Polumjer Feuerbachove kružnice danog trokuta jednak je polovini polumjera opisane kružnice tog trokuta.*



Slika 4.5: Polumjer Feuerbachove kružnice

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Promotrimo trokut AOH. Iz teorema 4.0.3 znamo da je S polovište dužine $\overline{HO}$, a budući da je A'' polovište dužine $\overline{AH}$, slijedi da je dužina $\overline{A''S}$ srednjica trokuta AOH. Zbog toga vrijedi $|A''S| = \frac{1}{2}|AO|$. Uočimo da je pri tome $\overline{A''S}$ polumjer Feuerbachove kružnice, a $\overline{AO}$ polumjer kružnice opisane trokutu ABC, te je time dokazana tvrdnja teorema. □

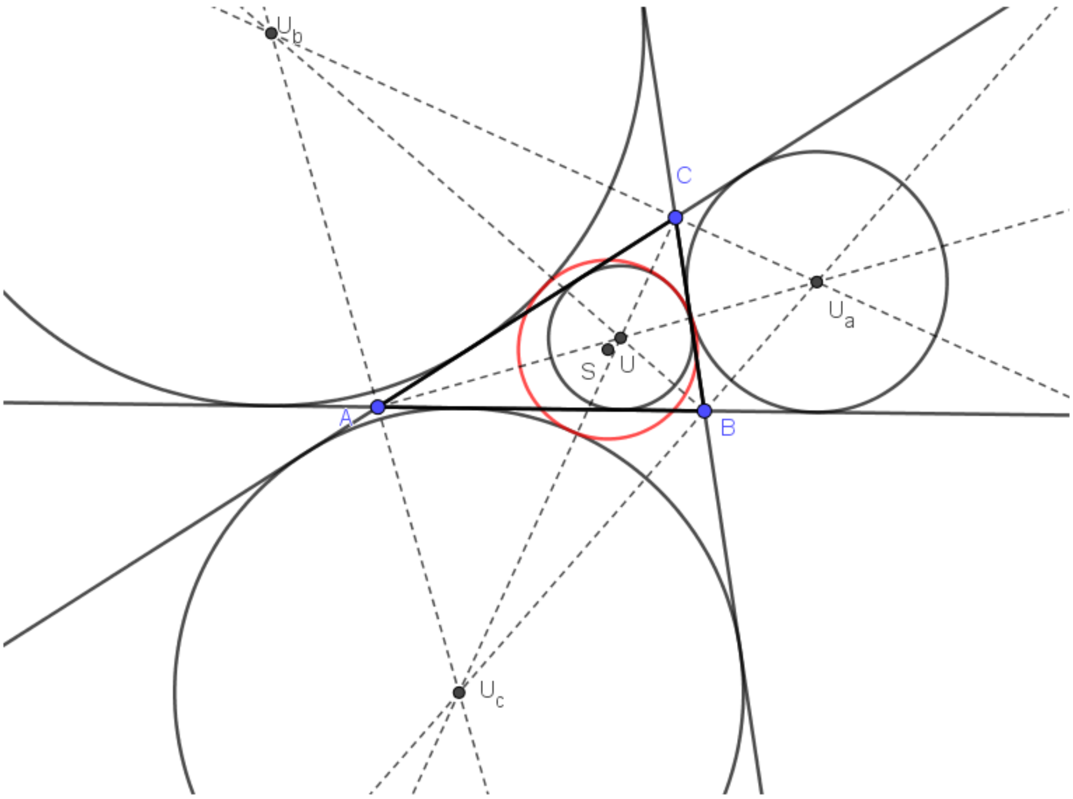
Sada možemo dokazati sljedeću tvrdnju:

Teorem 4.0.5. *Svi trokuti upisani u danu kružnicu koji imaju i zajednički ortocentar imaju zajedničku i Feuerbachovu kružnicu.*

Dokaz. Neka su dana dva trokuta $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ s istom opisanom kružnicom $k(O, R)$ i istim ortocentrom H. Neka je S polovište dužine $\overline{OH}$. Prema teoremu 4.0.3 i teoremu 4.0.4 Feuerbachova kružnica trokuta $A_1B_1C_1$ je $k(S, \frac{1}{2}R)$, a isto vrijedi i za Feuerbachovu kružnicu trokuta $A_2B_2C_2$. Dakle, kružnica sa središtem S i polumjerom $\frac{1}{2}R$ zajednička je Feuerbachova kružnica danih trokuta. □

Ostaje nam proučiti najpoznatiju tvrdnju koja se veže uz Feuerbachovu kružnicu. U geometriji trokuta to je jedan od najljepših teorema.

Teorem 4.0.6. *U svakom trokutu upisana kružnica dodiruje Feuerbachovu kružnicu iznutra.*



Slika 4.6: Feuerbachov teorem

Dokaz. Neka je dan trokut ABC s ortocentrom H, središtem opisane kružnice O, središtem upisane kružnice U te središtem Feuerbachove kružnice S.
Promotrimo trokut UOH. Točka S je polovište stranice $\overline{OH}$ tog trokuta, pa je dužina $\overline{US}$ njegova težišnica. Sada na taj trokut i težišnicu primijenimo teorem 1.1.9. Dobivamo:

$$|US| = \frac{1}{2}\sqrt{2|UH|^2 + 2|OU|^2 - |OH|^2},$$

odnosno

$$|US|^2 = \frac{1}{2}|UH|^2 + \frac{1}{2}|OU|^2 - \frac{1}{4}|OH|^2. \tag{4.1}$$

Poznavajući duljine $|UH|$, $|OU|$, $|OH|$ možemo odrediti $|US|$.
Na temelju teorema 3.2.5, 3.2.3 i 3.2.6 imamo redom:

$$|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \tag{4.2}$$

$$|UO|^2 = R^2 - 2Rr, \tag{4.3}$$

$$|HU|^2 = 2\left(r^2 + 2R^2\right) - \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \tag{4.4}$$

Uvrštavanjem (4.2), (4.3), (4.4) u (4.1) dobivamo:

$$\begin{aligned}
|US|^2 &= \frac{1}{2}\left(4R^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(R^2 - 2Rr\right) - \frac{1}{4}\left(9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\right) \\
&= 2R^2 + r^2 - \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{1}{2}R^2 - Rr - \frac{9}{4}R^2 + \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \\
&= \frac{1}{4}R^2 - Rr + r^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}R - r\right)^2.
\end{aligned}$$

Zbog korolara 3.2.4 konačno je

$$|US| = \frac{R}{2} - r.$$

Dokazali smo da je udaljenost središta upisane kružnice U i središta Feuerbachove kružnice S jednaka razlici polumjera tih dviju kružnica što dokazuje da se one dodiruju. Pritom se upisana kružnica nalazi unutar Feuerbachove kružnice te ju dodiruje iznutra. □

Definicija 4.0.7. *Točku u kojoj se upisana i Feuerbachova kružnica danog trokuta dodiruju nazivamo Feuerbachovom točkom.*

Dodajmo na kraju da vrijedi i:

Teorem 4.0.8. *U svakom trokutu Feuerbachova kružnica dodiruje pripisane kružnice izvana.*

Ovaj teorem nećemo dokazivati. Dokaz se provodi na sličan način kao dokaz teorema 4.0.6.

Bibliografija

[1] D. Bakoš, Z. Kolar-Begović, *Eulerova kružnica*, Matematičko fizički list, LX 1 (2009. - 2010.), 23-28

[2] E. T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb, 1972.

[3] *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*, dostupno na `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html` (studeni 2018.)

[4] Z. Čerin, *Problemi s ortocentrom*, Hrvatski matematički elektronski časopis math.e, broj 9, dostupno na `http://e.math.hr/ortocentar/index-print.pdf` (veljača 2019.)

[5] Ž. Ćaćić, V. Kovač, *Otkrivanje karakterističnih točaka trokuta korištenjem enciklopedije ETC*, Poučak 72, 24-33

[6] *Geometry Problem 1269*, dostupno na `https://gogeometry.blogspot.com/2016/10/geometry-problem-1269-triangle-incircle.html` (siječanj 2019.)

[7] *Geometry Problem 1270*, dostupno na `https://gogeometry.blogspot.com/2016/10/geometry-problem-1270-triangle-excircle.html` (siječanj 2019.)

[8] *Geometry Problem 1271*, dostupno na `http://www.gogeometry.com/school-college/3/p1271-triangle-incircle-excircle-concyclic-tutoring.htm` (siječanj 2019.)

[9] H. Halas, M. Bombardelli, *Izotomične točke trokuta*, Matematičko fizički list, LX 3 (2009. - 2010.), 158-165

[10] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, skripta, 2007., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf` (rujan 2018.)

[11] Z. Kolar-Begović, A. Tonkić, *Feuerbachov teorem*, Osječki matematički list, br. 9 (2009.), 21-31

[12] A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.

[13] MacTutor History of Mathematics, *Joseph Diaz Gergonne*, dostupno na `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Gergonne.html` (siječanj 2019.)

[14] MacTutor History of Mathematics, *Christian Heinrich von Nagel*, dostupno na `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Nagel.html` (siječanj 2019.)

[15] MacTutor History of Mathematics, *Karl Wilhelm Feuerbach*, dostupno na `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Feuerbach.html` (siječanj 2019.)

[16] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[17] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[18] P. Ramakrishnan, *All About Excircles!*, dostupno na `https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2014-06/excircles.pdf` (siječanj 2019.)

[19] The Math forum: Ask dr. Math, *Geometric Proof of Heron's formula*, dostupno na `http://mathforum.org/library/drmath/view/54686.html` (listopad 2018.)

[20] *Sum Of Squares of Distances to Vertices*, dostupno na `https://www.cut-the-knot.org/triangle/SumOfSquares.shtml` (studeni 2018.)

Sažetak

U ovom radu proučavali smo trokut, njemu pridružene kružnice te njihova središta. Promatrali smo sličnosti, veze i svojstva između njih. Uz četiri najpoznatije karakteristične točke trokuta: težište, ortocentar, središte trokutu upisane kružnice i središte trokutu opisane kružnice, osvrnuli smo se i na druge, manje poznate karakteristične točke trokuta poput Gergonnove točke i Nagelove točke. Također, proučavali smo metričke relacije među karakterističnim točkama.
Nadalje, definirali smo Feuerbachovu kružnicu i pokazali njezina svojstva. Na samom kraju rada dokazali smo jedan od najljepših teorema geometrije trokuta: Feuerbachov teorem koji govori da Feuerbachova kružnica dira upisanu kružnicu danog trokuta iznutra, a njegove pripisane kružnice izvana.

Summary

This paper sets out to study the triangle, the circles connected with the triangle, and their centres. In the study, their properties, as well as the similarities and relationships between them,have been observed. Apart from the four points of concurrency in triangles: the centroid, the orthocentre, the incentre and the circumcentre, other, less known concurrency points, such as the Gergonne point and the Nagel point, have also been addressed.
Furthermore, the Feuerbach circle has also been defined and its properties have been demonstrated. At the very end of the paper, one of the most beautiful theorems of the triangle geometry, the Feuerbach theorem, which states that the Feuerbach circle is tangent internally to the incircle and tangent externally to the triangle's excircles, has been proved.

Životopis

Rođena sam 31. listopada 1994. u Varaždinu. Nakon završene osnovne škole Antuna i Ivana Kukuljevića u Varaždinskim Toplicama, srednjoškolsko obrazovanje stječem u Prvoj gimnaziji Varaždin. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, 2013. godine, upisujem integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij Matematika i fizika; smjer: nastavnički.