Analiza strategija poslovanja pomoću Markovljevih lanaca

Očko, Katarina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Očko

ANALIZA STRATEGIJA POSLOVANJA POMOĆU MARKOVLJEVIH LANACA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, Veljača, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ljudskoj je prirodi težiti ka boljemu stoga se od 50-ih godina prošlog stoljeća mnogi pojedinci bave konstrukcijom i proučavanjem različitih tehnika, modela i metoda kojima je zajednički cilj određivanje optimalne strategije. Knjigom *"Dynamic Programming"* R. Bellman započinje razvoj teorije koja omogućava rješavanje mnogih matematičkih problema temeljenih na dinamičkim procesima. Ronald A. Howard u knjizi *"Dynamic programming and Markov processes"* prvi povezuje Bellmanovu teoriju sa, do tada već dobro poznatim, matematičkim pojmom Markovljevih procesa. Od tada počinje razvoj teorije Markovljevih procesa odlučivanja. Daljnjim istraživanjem i razvojem Markovljevi procesi odlučivanja postajaju sve generalniji, te danas predstavljaju matematički okvir za donošenje odluka u situacijama gdje su ishodi djelomično slučajni, a djelomično pod kontrolom donositelja odluka. Kada se sustav zatekne u nekom stanju, postoji mnogo poteza koji mogu biti poduzeti, i svaki od tih poteza za sobom povlači drugačije prijelazne vjerojatnosti i nagrade, a mogućnosti i posljedice često ovise o stanju u kojem se sustav nalazi. Od svih mogućnosti, problem je izabrati „najbolju" strategiju, tj. onaj Markovljev proces i pripadajuće nagrade kod kojeg je dobit po prijelazu najveća.
Osim u teoriji, Markovljevi procesi odlučivanja danas se primjenjuju i u mnogim realnim situacijama iz različitih područja poput robotike, biologije, ekonomije, menadžmenta i mnogih drugih.
Cilj ovog rada je razviti teorijsku podlogu potrebnu za određivanje optimalne strategije i na nekoliko primjera pokazati primjenu Markovljevih lanaca u analizi stategija poslovanja. Najprije ćemo se upoznati s osnovnim pojmovima iz teorije Markovljevih lanaca u diskretnom vremenu, samom definicijom Markovljevog lanca i prijelaznim vjerojatnostima. Definirat ćemo stacionarnu i graničnu distribuciju i promatrati svojstvo ergodičnosti. Pri analizi ponašanja Markovljevog lanca služit ćemo se diferencijskim jednadžbama pa ćemo se zato kratko zadržati i u proučavanju njih. Nakon toga prezentirat ćemo dvije metode određivanja najbolje strategije. U svakoj od tih metoda ključnu ulogu igraju nagrade povezane s prijelazom Markovljevog lanca iz jednog stanja u drugo. Na kraju ćemo se osvrnut i na Markovljeve lance u neprekidnom vremenu.
Nakon teorijskog opisa svake metode slijedi primjer iz područja menadžmenta gdje se metoda koristiti za određivanje optimalne strategije poslovanja poduzeća.

Poglavlje 1

Markovljevi lanci

1.1 Definicija

Kako bismo mogli modelirati ponašanje nekog vjerojatnosnog sustava kroz vrijeme, neophodan alat za rad su nam Markovljevi lanci. Prema tome, prvi korak mi je definirati Markovljev lanac i sve pojmove nužne za razumijevanje daljnjeg sadržaja. Ovdje navodim samo isječke iz [2]. Počinjem definicijom slučajnog procesa, nakon čega odmah slijedi definicija Markovljevog lanca na prebrojivom skupu stanja:

Definicija 1.1.1. *Neka je S neprazan prebrojiv skup. Slučajan proces s diskretnim vremenom i prostorom stanja S je familija $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajnih varijabli definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u S.*

Definicija 1.1.2. *Neka je S neprazan prebrojiv skup. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u S je Markovljev lanac ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{1.1}$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \epsilon S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Svojstvo u relaciji (1.1) naziva se Markovljevim svojstvom.

Nas će zanimati samo homogeni Markovljevi lanci, pa u nastavku slijedi definicija:

Definicija 1.1.3. *Neka je $\lambda = (\lambda_i : i \epsilon S)$ vjerojatnosna distribucija na S, te neka je $P = (p_{ij} : i, j \epsilon S)$ stohastička matrica. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s prostorom stanja S je homogen Markovljev lanac s početnom* *distribucijom λ i prijelaznom matricom P (ili kraće $(\lambda, P)-$Markovljev lanac) ako vrijedi*

(i) $\quad \mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i \quad$ *za sve* $i \epsilon S$, *te*

(ii) $\quad \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij}$

za svaki $n \geq 0$ *i za sve* $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \epsilon S$.

Teorem 1.1.4. *Neka je X $(\lambda, P)-$ Markovljev lanac. Tada za sve $n \geq 0$ i za sva stanja $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n \epsilon S$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n} \tag{1.2}$$

Sada mogu pokazati da svaki $(\lambda, P)-$ Markovljev lanac zaista posjeduje Markovljevo svojstvo i smije se zvati Markovljev lanac.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} \epsilon S, \ldots, X_0 \epsilon S)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \epsilon S, \ldots, X_0 \epsilon S)} \\
&= \frac{\sum_{i_0 \epsilon S} \cdots \sum_{i_{n-1} \epsilon S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\sum_{i_0 \epsilon S} \cdots \sum_{i_{n-1} \epsilon S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i}} = p_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} \\
&= \frac{\lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i}} = p_{ij}
\end{aligned}$$

Napomena 1.1.5. *n-koračne prijelazne vjerojatnosti Markovljevog lanca su elementi matrice $P^{(n)}$*

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \tag{1.3}$$

U daljnjem razmatranju ograničit ćemo se na Markovljeve lance s konačnim skupom stanja $S = \{1, 2, \ldots, N\}$.

U tom slučaju posebnu ćemo pažnju posvetiti vjerojatnosti da se Markovljev lanac nalazi u stanju i u n-tom koraku u oznaci $P_i(n) = \mathbb{P}(X_n = i)$.

Vrijedi:

$$P_j(n+1) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} P_i(n) \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Očito, ako je poznata početna distribucija $\lambda = (\lambda_i : i = 1, \ldots, N)$, tada je $P_i(0) = \lambda_i$ i rekurzivno možemo izračunati $P_j(n)$ za svaki $n \epsilon \mathbb{N}$ i $j = 1, 2, \ldots, N$.

1.2 Stacionarna distribucija i ergodičnost

Izuzetno bitan pojam, proučavanju kojega ću posvetiti velik dio ovog rada, je ergodičnost. Na ovom mjestu navodim definiciju preuzetu iz [4]

Definicija 1.2.1. *Kažemo da je Markovljev lanac u potpunosti ergodičan ako je* $\lim_{n\to\infty} P_j(n)$ $(j \epsilon S)$ *jedinstven i ne ovisi o stanju iz kojeg je Markovljev lanac krenuo.*

Dakle, ako je Markovljev lanac ergodičan, nakon dovoljno mnogo koraka, vjerojatnost da će se lanac naći u nekom od stanja postaje konstantna i ne ovisi o stanju iz kojeg smo krenuli.
Ovo svojstvo olakšava donošenje zaključaka o ponašanju Markovljevog lanca u budućnosti.

Ovdje mi je cilj staviti ergodičnost u kontekst stacionarne i granične distribucije pa ću navesti najbitnije definicije i rezultate vezane uz njih. Daljnji sadržaj ovog podpoglavlja, ali i detalji izostavljeni ovdje, mogu se pronaći u [2, poglavlje 7 i 8].

Definicija 1.2.2. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *Markovljev lanac s nepraznim prebrojivim skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija* $\pi = (\pi_i : i \epsilon S)$ *na S je stacionarna distribucija Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako vrijedi:*

$$\pi = \pi P \tag{1.4}$$

odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k \epsilon S} \pi_k p_{kj}, \qquad za \quad sve \quad j \epsilon S$$

Definicija 1.2.3. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *Markovljev lanac na skupu stanja S s prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija* $\pi = (\pi_i : i \epsilon S)$ *naziva se graničnom distribucijom Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako za sve* $i, j \epsilon S$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \tag{1.5}$$

Uočimo kako je vektor graničnih vrijednosti iz definicije ergodičnosti zapravo i granična i stacionarna distribucija ako je S konačan skup, $S = \{1, 2, \ldots, N\}$.
Označimo: $\lim_{n\to\infty} P_j(n) = \pi_j \ \ (j = 1, 2, \ldots, N)$.
Jer ne ovisi o početnom stanju, slobodni smo izabrati početnu distribuciju $\lambda = \delta^i$.
U tom slučaju je

$$P_j(n) = p_{ij}^{(n)}$$

Dakle vrijedi: $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$
Pokažimo još da je $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_N)$ uistinu distribucija

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_j = \sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to\infty} P_j(n) = \sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1$$

Zaključujemo da je π granična distribucija.
Također, π zadovoljava svojstvo (1.4) iz definicije stacionarne distribucije

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_j(n) = \lim_{n\to\infty} P_j(n+1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} p_{kj} P_k(n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} p_{kj} \lim_{n\to\infty} P_k(n) = \sum_{k=1}^{N} \pi_k p_{kj}$$

Poglavlje 2

Diferencijske jednadžbe

Uočimo da jednadžbe

$$P_j(n+1) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} P_i(n) \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

čine sustav diferencijskih jednadžbi prvog reda. Kako bismo mogli riješiti taj sustav, promotrimo pobliže homogene linearne diferencijske jednadžbe s konstantnim koeficijentima kako je to napravljeno u [1].

Definicija i rješenje

Promatrat ćemo funkciju f koja poprima realne vrijednosti $x_k = f(k)$ na skupu $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definicija 2.0.1. *Jednadžbu oblika*

$$a_n x_{k+n} + a_{n-1} x_{k+n-1} + \cdots + a_0 x_k = g(k) \tag{2.1}$$

gdje su a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ konstante, a $g(k)$ proizvoljna realna funkcija, zovemo linearnom diferencijskom jednadžbom s konstantnim koeficijentima.
Ukoliko je $g = 0$ za jednadžbu kažemo da je homogena.

Definicija 2.0.2. *Za funkciju f, odnosno niz (x_k) kažemo da je rješenje diferencijske jednadžbe* (2.1) *ako zadovoljava tu jednadžbu.*

Zadržimo se na homogenim diferencijskim jednadžbama prvog reda.

Lema 2.0.3. *Skup svih rješenja diferencijske jednadžbe $x_{k+1} - a x_k = 0$ je*
$\{k \mapsto A a^k : A \epsilon \mathbb{R}\}$.

Dokaz. Uvrštavanjem se lako vidi da svaka funkcija (odnosno, svaki niz) oblika $x_k = f(k) = Aa^k$ zadovoljava gornju jednadžbu.
Obratno: Neka je niz (x_k) rješenje jednadžbe $x_{k+1} - ax_k = 0$
Tada vrijedi:
$x_1 = ax_0,\ x_2 = a^2x_0,\ x_3 = a^3x_0,\ \dots$, iz čega slijedi $f(k) = x_k = x_0a^k = Aa^k$ □

Definicija 2.0.4. *Skup n linearno nezavisnih rješenja diferencijske jednadžbe naziva se fundamentalnim skupom rješenje te jednadžbe*

Lema 2.0.5. *Neka su* (x_k) *i* (y_k) *dva rješenja diferencijske jednadžbe* (2.1) *i* $a\epsilon\mathbb{R}$. *Neka su*

$$(i) \qquad (z_k),\ z_k = x_k + y_k,$$
$$(ii) \qquad (w_k),\ w_k = ax_k.$$

Vrijedi: (z_k) *i* (w_k) *su također rješenja jednadžbe* (2.1)

Definicija 2.0.6. *Neka je* $\{(x_k^{(1)}), (x_k^{(2)}), \dots, (x_k^{(n)})\}$ *fundamentalni skup rješenja diferencijske jednadžbe* (2.1). *Tada je opće rješenje jednadžbe dano sa*

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} C_i x_k^{(i)}$$

za proizvoljne konstante $C_1, \dots, C_n$

Vratimo se promatranju homogene linearne diferencijske jednadžbe s konstantnim koeficijentima:

$$a_n x_{k+n} + a_{n-1}x_{k+n-1} + \cdots + a_0 x_k = 0 \tag{2.2}$$

Pretpostavimo da rješenja imaju oblik $r^k,\ r\epsilon\mathbb{C}$. Slijedi:

$$r^k(a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0) = 0$$

Definicija 2.0.7. *Jednadžba* $a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ *naziva se karakteristična jednadžba diferencijske jednadžbe* (2.2), *a rješenja karakteristične jednadžbe nazivaju se karakteristični korijeni.*

Lako se vidi da svaki karakteristični korijen $r_i,\ i = 1, \dots, n$ definira jedno rješenje jednadžbe (2.2).
Ukoliko je $a_0 \neq 0$, i svi karakteristični korijeni realni i međusobno različiti, $\{r_1^k, r_2^k, \dots, r_n^k\}$ je fundamentalni skup rješenja jednadžbe (2.2).

Promotrimo sada slučaj kada svi karakteristični korijeni nisu međusobno različiti.
Pretpostavimo da su karakteristični korijeni $r_1, \dots, r_s$ realni i različiti sa višestrukostima

$m_1 \ldots, m_s$ respektivno, pri čemu je $m_1 + \cdots + m_s = n$.
Tada se karakteristična jednadžba može faktorizirati na slijedeći način:

$$(r - r_1)^{m_1} \cdots (r - r_s)^{m_s} = 0$$

Očito su sva rješenja jednadžbe $(r - r_i)^{m_i} = 0$ za neki $i = 1, \ldots s$ ujedno i rješenje polazne karakteristične jednadžbe.
Kako bismo, u ovom slučaju, odredili fundamentalni skup rješenja jednadžbe (2.2), moramo najprije odrediti fundamentalni skup rješenja diferencijske jednadžbe kojoj odgovara karakteristična jednadžba $(r - r_i)^{m_i} = 0$.

Lema 2.0.8. *Skup* $\{r^x, xr^x, \ldots, x^{m-1}r^x\}$ *je fundamentalni skup rješenja jednadžbe* $(r - r')^m = 0$.

Zaključujemo da dio općeg rješenja koji pripada m-strukom korijenu r ima sljedeći oblik:

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \cdots + A_{m-1} x^{m-1}) r^x$$

Karakteristični korijeni ne moraju uvijek biti realni. Takvim slučajevima se ovdje nećemo baviti iako ne predstavljaju osobit problem. Zainteresini mogu detalje potražiti u [4].

Poglavlje 3

Ergodičnost

3.1 Karakterizacija ergodičnosti

Sada znamo riješiti, u prvom poglavlju uočen, sustav homogenih linearnih diferencijskih jednadžbi

$$P_j(n+1) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} P_i(n) \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.1}$$

Rješenje ovog sustava pokazuje se izuzetno korisnim pri proučavanju ergodičnosti Markovljevog lanca. Ovdje prikazan postupak može se naći u [4].
Pretpostavimo da su rješenja oblika $P_i(n) = A_i r^n$ za svaki $i = 1, \ldots, N$ i uvrstimo u (3.1).

$$A_1 p_{1j} + A_2 p_{2j} + \ldots + A_j(p_{jj} - r) + \ldots + A_N p_{Nj} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Ovo je NxN sustav linarnih jednadžbi u nepoznanicama $A_1, \ldots, A_N$. Taj sustav ima rješenje različito od $A_1 = A_2 = \cdots = A_N = 0$ ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} p_{11} - r & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} - r & \cdots & p_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} - r \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Kako je ovo jednadžba N-tog stupnja po r, ona ima N rješenja $r_1, \ldots, r_N$.
Pretpostavimo sada da su sva rješenja međusobno različita. U praksi to zaista najčešće i jesu.
Dakle, fundamentalni skup rješenja za $P_i(n)$ je $\{A_i^{(k)} r_k^n,\ k = 1, 2, \ldots, N, \},\ i = 1, 2, \ldots, N$. Odnosno,

$$P_i(n) = \sum_{k=1}^{N} A_i^{(k)} r_k^n \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{3.3}$$

Uočimo da u rješenju imamo N^2 konstanti. Znamo da u rješenju linarne homogene jednadžbe N-tog stupnja može biti najviše N proizvoljnih konstanti pa zaključujemo da su ostale konstante zavisne, odnosno, mogu se izraziti preko izabranih N međusobno nezavisnih konstanti.
Jednadžbe kod kojih sva rješenja nisu međusobno različita moguće je riješiti primjenjujući znanje o rješenjima diferencijskih jednadžbi s višestrukim korijenima.

Ostaje primijetiti kako smo do gornje determinante mogli doći i bez uvođenja diferencijskih jednadžbi.
Prisjetimo se definicije svojstvene vrijednosti i svojstvenih vektora matrice.

Definicija 3.1.1. *Neka je $A \epsilon M_n(\mathbb{R})$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R}$ svojstvena vrijednost matrice A ako postoji vektor $x \epsilon V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Vektor x naziva se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0*

Za matricu $A \epsilon M_n(\mathbb{R})$, polinom $k_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ naziva se svojstveni polinom matrice A te vrijedi ovaj poznati teorem:

Teorem 3.1.2. *Neka je $A \epsilon M_n(\mathbb{R})$. Skalar $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R}$ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako vrijedi $k_A(\lambda_0) = 0$.*

Uočimo da za matricu prijelaznih vjerojatnosti P vrijedi

$$\begin{vmatrix} p_{11} - r & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} - r & \cdots & p_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} - r \end{vmatrix} = det((P - rI)^\tau) = det(P - rI) = k_P(r)$$

to jest, iz definicija svojstvene vrijednosti (odnosno svojstvenog vektora) i stacionarne distribucije lako se vidi da je stacionarna distribucija prijelazne matrice P zapravo normiran svojstveni vektor matrice P pridružen svojstvenoj vrijednosti 1.

Pokažimo sada važno svojstvo koje posjeduju stohastičke matrice.

Propozicija 3.1.3. *Neka je μ svojstvena vrijednost matrice P. Tada vrijedi $|\mu| \leq 1$*

Dokaz. Jer je μ svojstvena vrijednost matrice P, postoji vektor v takav da vrijedi $Pv = \mu v$, odnosno:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j = \mu_i v_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Neka je v_k po apsolutnoj vrijednosti najveća koordinata svojstvenog vektora v.

$$|\mu_k v_k - p_{kk} v_k| = |\sum_{j=1}^{N} p_{kj} v_j - p_{kk} v_k| = |\sum_{j \neq k} p_{kj} v_j| \leq \sum_{j \neq k} |p_{kj}||v_j| \leq \sum_{j \neq k} |p_{kj}||v_k| = |v_k| \sum_{j \neq k} |p_{kj}|$$

Kako je $|v_k| > 0$ (jer je $v \neq 0$), vrijedi

$$|\mu - p_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |p_{kj}|$$

Slijedi:

$$|\mu| = |(\mu - p_{kk}) + p_{kk}| \leq |\mu - p_{kk}| + |p_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |p_{kj}| + |p_{kk}| = \sum_{j=1}^{N} |p_{kj}| = 1$$

□

Sada smo napokon skupili dovoljno informacija za dokaz sljedeće karakterizacije ergodičnosti.

Teorem 3.1.4. *Markovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ s prijelaznom matricom P je ergodičan ako i samo ako je točno jedna svojstvena vrijednost matrice P jednaka 1, a ostale svojstvene vrijednosti su strogo manje od 1.*

Dokaz. Neka su r_i, $i = 1, \dots, N$ svojstvene vrijednosti matrice P.
Ako je $r_k = 1$ i $|r_i| < 1$ za $i \neq k$ tada očito $P_i(n)$ konvergira za svaki $i = 1, \dots, N$ kada $n \to \infty$, pri čemu je taj limes jedinstven i ne ovisi o stanju iz kojeg je Markovljev lanac krenuo.
Dakle, Markovljev lanac X je ergodičan.
Za dokaz obrata pretpostavimo suprotno. Tada postoje tri mogućnosti:

(i) $|r_i| < 1$ za sve $i = 1, \dots, N$,
ali u tom slučaju $\pi_i = \lim_{n \to \infty} P_i(n) = 0$ za svaki $i = 1, \dots, N$ pa π nije distribucija.

(ii) $r_k = -1$ za neki k,
ali tada $P_i(n)$ uopće ne konvergira.

(iii) $r_l = r_m = 1$ za neke k,m.
U ovom slučaju moramo zapis rješenja prilagoditi dvostrukom korijenu:

$$P_i(n) = A_i^{(l)} + A_i^{(m)} n + \sum_{k \neq l,m} A_i^{(k)} r_k^n$$

Uočimo da rješenje konvergira samo ako je $A_i^{(m)} = 0$ za svaki $i = 1, \dots, N$,
ali ni onda lanac nije ergodičan pošto vrijednost limesa ovisi o početnoj distribuciji.

□

Računanje svojstvenih vrijednosti i zatvorene formule za $P_i(n)$ može biti veoma komplicirano. Uz to, najčešće će nas zanimati ponašanje Markovljevog lanca nakon dovoljnog broja koraka pa nam je dovoljno poznavati graničnu distribuciju.
Ideja je koristiti relativno lako izračunjivu stacionarnu distribuciju i svojstvo ergodičnosti kako bismo došli do granične distribucije.
Ukratko, znamo da je stacionarna distribucija prijelazne matrice P normiran svojstveni vektor matrice P pridružen svojstvenoj vrijednosti 1. Dakle, ako sustav $\pi = \pi P$ uz dodatnu jednadžbu $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$ ima jedinstveno rješenje, možemo zaključiti da matrica P ima točno jednu svojstvenu vrijednost jednaku 1, a ostale su strogo manje od 1 budući da je P stohastička matrica. Sada nam upravo dokazani teorem govori kako je takav Markovljev lanac ergodičan, a znamo da je u tom slučaju stacionarna distribucija ujedno i granična.

3.2 Primjena ergodičnosti

Kako ne bi sve ostalo samo na teorijskom razmatranju slijedi primjer preuzet iz [4].

Primjer 3.2.1. Helikopter kapaciteta dvoje ljudi (pilot + putnik) povezuje dva industijska postrojenja B_1 i B_2 s obližnjom zračnom lukom A. Te tri točke leže približno u vrhovima jednakostraničnog trokuta i vrijeme potrebno da helikopter prijeđe udaljenost od jednog heliodroma do drugog je 20 minuta. Ugovorom je dogovoreno da helikopter poštuje taj dvadesetominutni raspored. Preciznije, ako je helikopter na nekom heliodromu na početku dvadesetominutnog razdoblja i putnik čeka tamo, helikopter će prevesti putnika na željenu destinaciju. Ako helikopter ne poleti na početku razdoblja, on čeka na heliodromu sljedećih 20 minuta. Čak i ako putnik stigne tijekom tog razdoblja, helikopter neće poletjeti prije početka sljedećeg razdoblja.
Osim toga, odluka o strategiji prijevoza je u rukama vlasnika helikoptera.
Pretpostavlja se da će putnik, ako stigne na heliodrom i tamo zatekne drugog putnika čekati, smjesta potražiti drugi način prijevoza. Također pretpostavljamo da će putnik odustati od čekanja ako se helikopter ne pojavi na početku prvog sljedećeg 20-minutnog razdoblja.
Istraživanjem je uočeno sljedeće: vjerojatnosti da putnik čeka, na početku 20-minutnog razdoblja, na heliodromu A, B_1 i B_2 su redom $P_A = 0.8$, $P_{B_1} = 0.6$, $P_{B_2} = 0.45$. Također je uočeno da putnici koji čekaju na heliodromu u zračnoj luci A u polovici slučajeva žele u postrojenje B_1, a u drugoj polovici slučajeva u postrojenje B_2. Za razliku od toga, putnici koji čekaju na heliodromu nekog od postrojenja, dvostruko češće žele u zračnu luku nego u drugo postrojenje.

Razmotrimo tri strategije dostupne vlasnicima helikoptera:

(1) Helikopter čeka na heliodromu na kojem se zatekne dok god putnik ne dođe. Pristiglog putnika preveze na željenu destinaciju na početku prvog sljedećeg 20-minutnog razdoblja.

(2) Helikopter čeka samo na heliodromima A i B_1 pošto je tamo veća vjerojatnost da putnik dođe. Ako poveze putnika u postrojenje B_2, a tamo ne čeka drugi putnik, smjesta se vraća u zračnu luku.

(3) Helikopter čeka samo na heliodromu u zračnoj luci. Ako poveze putnika u neko od postrojenja, a tamo ne čeka drugi putnik, smjesta se vraća u zračnu luku.

Promotrimo malo bolje opisane strategije. Svaka od njih može se opisati jednim Markovljevim lancem. Zanima nas ponašanje svakog od tih lanaca nakon dovoljno proteklog vremena. Dakle želimo odrediti granične distribucije. Naučili smo kako je mnogo lakše doći do stacionarne distribucije pa krenimo s računanjem istih.

Poslujući prema prvoj strategiji, helikopter se može zateći u 9 stanja:

1 Čeka na A
2 Leti od A do B_1
3 Leti od A do B_2
4 Čeka na B_1
5 Leti od B_1 do A
6 Leti od B_1 do B_2
7 Čeka na B_2
8 Leti od B_2 do A
9 Leti od B_2 do B_1

Stohastička matrica pridružena tom Markovljevom lancu je sljedeća:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pretpostavimo da P ima stacionarnu distribuciju $\pi^{(1)} = (\pi_1^{(1)}, \ldots, \pi_9^{(1)})$. Tada vrijedi $\pi = \pi P$

iz čega proizlazi sljedeći sustav:

$$\begin{aligned}
\pi_1^{(1)} &= 0.2\pi_1^{(1)} + 0.2\pi_5^{(1)} + 0.2\pi_8^{(1)}\\
\pi_2^{(1)} &= 0.4\pi_1^{(1)} + 0.4\pi_5^{(1)} + 0.4\pi_8^{(1)}\\
\pi_3^{(1)} &= 0.4\pi_1^{(1)} + 0.4\pi_5^{(1)} + 0.4\pi_8^{(1)}\\
\pi_4^{(1)} &= 0.4\pi_2^{(1)} + 0.4\pi_4^{(1)} + 0.4\pi_9^{(1)}\\
\pi_5^{(1)} &= 0.4\pi_2^{(1)} + 0.4\pi_4^{(1)} + 0.4\pi_9^{(1)}\\
\pi_6^{(1)} &= 0.2\pi_2^{(1)} + 0.2\pi_4^{(1)} + 0.2\pi_9^{(1)}\\
\pi_7^{(1)} &= 0.55\pi_3^{(1)} + 0.55\pi_6^{(1)} + 0.55\pi_7^{(1)}\\
\pi_8^{(1)} &= 0.3\pi_3^{(1)} + 0.3\pi_6^{(1)} + 0.3\pi_7^{(1)}\\
\pi_9^{(1)} &= 0.15\pi_3^{(1)} + 0.15\pi_6^{(1)} + 0.15\pi_7^{(1)}\\
\pi_1^{(1)} &+ \pi_2^{(1)} + \pi_3^{(1)} + \pi_4^{(1)} + \pi_5^{(1)} + \pi_6^{(1)} + \pi_7^{(1)} + \pi_8^{(1)} + \pi_9^{(1)} = 1
\end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je:
$\pi_1^{(1)} = \pi_6^{(1)} = \pi_9^{(1)} = \frac{3}{50}$, $\pi_2^{(1)} = \pi_3^{(1)} = \pi_4^{(1)} = \pi_5^{(1)} = \pi_8^{(1)} = \frac{6}{50}$, $\pi_7^{(1)} = \frac{11}{50}$

Promotrimo sada drugu strategiju.
Kako helikopter nikada ne čeka na heliodromu B_2, ovaj Markovljev lanac može se naći u sljedećih 8 stanja:

1 Čeka na A
2 Leti od A do B_1
3 Leti od A do B_2
4 Čeka na B_1
5 Leti od B_1 do A
6 Leti od B_1 do B_2
7 Leti od B_2 do A
8 Leti od B_2 do B_1

Prijazna matrica je stoga sljedeća:

$$P = \begin{pmatrix}
0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15\\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0\\
0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15\\
0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

a stacionarnu distribuciju dobivamo rješavanjem sljedećeg sustava:

$$\begin{aligned}
\pi_1^{(2)} &= 0.2\pi_1^{(2)} + 0.2\pi_5^{(2)} + 0.2\pi_8^{(2)}\\
\pi_2^{(2)} &= 0.4\pi_1^{(2)} + 0.4\pi_5^{(2)} + 0.4\pi_8^{(2)}\\
\pi_3^{(2)} &= 0.4\pi_1^{(2)} + 0.4\pi_5^{(2)} + 0.4\pi_8^{(2)}\\
\pi_4^{(2)} &= 0.4\pi_2^{(2)} + 0.4\pi_4^{(2)} + 0.4\pi_9^{(2)}\\
\pi_5^{(2)} &= 0.4\pi_2^{(2)} + 0.4\pi_4^{(2)} + 0.4\pi_9^{(2)}\\
\pi_6^{(2)} &= 0.2\pi_2^{(2)} + 0.2\pi_4^{(2)} + 0.2\pi_9^{(2)}\\
\pi_7^{(2)} &= 0.85\pi_3^{(2)} + 0.85\pi_6^{(2)}\\
\pi_8^{(2)} &= 0.15\pi_3^{(2)} + 0.15\pi_6^{(2)}\\
\pi_1^{(2)} &+ \pi_2^{(2)} + \pi_3^{(2)} + \pi_4^{(2)} + \pi_5^{(2)} + \pi_6^{(2)} + \pi_7^{(2)} + \pi_8^{(2)} = 1
\end{aligned}$$

čije je rješenje $\pi^{(2)} = (\frac{57}{675}, \frac{114}{675}, \frac{114}{675}, \frac{92}{675}, \frac{92}{675}, \frac{46}{675}, \frac{136}{675}, \frac{24}{675})$.

Primjenom treće strategije, helikopter ne čeka ni na heliodromu postrojenja B_1, ni na heliodromu postrojenja B_2, prema tome, može se naći u sljedećim stanjima:

1 Čeka na A
2 Leti od A do B_1
3 Leti od A do B_2
4 Leti od B_1 *do A*
5 Leti od B_1 *do* B_2
6 Leti od B_2 *do A*
7 Leti od B_2 *do* B_1

i pripadna prijelazna matrica je:

$$P = \begin{pmatrix}
0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15\\
0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15\\
0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

a rješavajući sustav

$$\begin{aligned}
\pi_1^{(3)} &= 0.2\pi_1^{(3)} + 0.2\pi_5^{(3)} + 0.2\pi_8^{(3)} \\
\pi_2^{(3)} &= 0.4\pi_1^{(3)} + 0.4\pi_5^{(3)} + 0.4\pi_8^{(3)} \\
\pi_3^{(3)} &= 0.4\pi_1^{(3)} + 0.4\pi_5^{(3)} + 0.4\pi_8^{(3)} \\
\pi_4^{(3)} &= 0.8\pi_2^{(3)} + 0.8\pi_9^{(3)} \\
\pi_5^{(3)} &= 0.2\pi_2^{(3)} + 0.2\pi_9^{(3)} \\
\pi_6^{(3)} &= 0.85\pi_3^{(3)} + 0.85\pi_6^{(3)} \\
\pi_7^{(3)} &= 0.15\pi_3^{(3)} + 0.15\pi_6^{(3)} \\
\pi_1^{(3)} + \pi_2^{(3)} &+ \pi_3^{(3)} + \pi_4^{(3)} + \pi_5^{(3)} + \pi_6^{(3)} + \pi_7^{(3)} = 1
\end{aligned}$$

dobivamo ovu staconarnu distribuciju: $\pi^{(3)} = (\frac{97}{955}, \frac{194}{955}, \frac{194}{955}, \frac{184}{955}, \frac{46}{955}, \frac{204}{955}, \frac{36}{955})$.

U sva tri slučaja došli smo do jedinstvene stacionarne distribucije. Primjenjujući zaključke ovog poglavlja možemo reći kako su tri promatrana Markovljeva lanca ergodična i izračunate stacionarne distribucije su ujedno i granične distribcije.

Poglavlje 4

Nagrade

U prethodnom primjeru prezentirane su tri strategije od mnoštva mogućih. Na vlasniku helikoptera je odluka koju od njih će pratiti, a prirodno je pretpostaviti da vlasnik želi pratiti onu strategiju koja mu dugoročno donosi najveću nagradu. Pri definiciji nagrada i izvodu zatvorene formule za računanje očekivane nagrade koristim pristup oipsan u [4].

4.1 Definicija

Nagrada se ostvaruje svakim prijelazom Markovljevog lanca iz jednog stanja u drugo stanje, a također i ostajanjem u istom stanju, i ne mora uvijek biti pozitivna. Nagrada može biti neki novčani iznos i u tom slučaju, negativna nagrada predstavlja novčani gubitak. Nagrade reprezentirano sljedećom matricom:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{pmatrix}$$

pri čemu q_{ij} odgovara nagradi dobivenoj prijezom Markovljevog lanca iz stanja i u stanje j.

Zanima nas očekivana nagrada u sljedećih n koraka Markovljevog lanca, ako se lanac trenutno nalazi u stanju i. Označimo to očekivanje sa $Z_i(n)$.
Ako lanac u sljedećem koraku prijeđe uz stanja i u stanje j, očekivana nagrada $Z_i(n)$ je tada:

$$q_{ij} + Z_j(n-1)$$

Prema tome, ako, kao i do sada, promatramo Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ s prijelaznom matricom $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$, vrijedi:

$$\begin{aligned} Z_i(n) &= \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(q_{ij} + Z_j(n-1)) \\ &= \sum_{j=1}^{N} p_{ij}q_{ij} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}Z_j(n-1) \end{aligned}$$

Pošto su p_{ij} i q_{ij} poznati za svaki $i, j\epsilon\{1, 2, \ldots, N\}$ možemo definirati konstante

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}q_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

i gornje jednadžbe zapisati na sljedeći način:

$$Z_i(n) = S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}Z_j(n-1) \tag{4.1}$$

4.2 Izvod zatvorene formule za očekivanu nagradu

Jednadžbe (4.1) čine sustav nehomogenih linarnih diferencijskih jednadžbi.
Odredimo najprije rješenje pripadnog sustava homogenih jednadžbi.

$$Z_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}Z_j(n-1), \qquad i \in S$$

Uočimo da ovaj sustav ima rješenja jednaka rješenjima sustava (3.1) pošto je pripadna matrica koeficijenata jednaka transponiranoj matrici koeficijenata sustava (3.1).
Kako je slobodni član konstanta, a uz to, konstanta (stacionarna distribucija) je i jedno od rješenja homogene jednadžbe, pretpostavljamo da partikularni dio općeg rješenja ima oblik $C_i n$, tako da opće rješenje ima oblik:

$$Z_i(n) = P_i(n) + C_i n, \qquad i \in S$$

Za određivanje konstanti C_i poslužit ćemo se stacionarnom distribucijom kao jednim od rješenja sustava (3.1). Dakle,

$$Z_i(n) = \pi_i + C_i n, \qquad i \in S$$

Ako uvrstimo ovaj oblik rješenja u (4.1) imamo:

$$\begin{aligned}\pi_i + C_i n &= S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(\pi_j + C_j(n-1)) = \\ &= S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\pi_j - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}C_j + n\sum_{j=1}^{N} p_{ij}C_j, \qquad i \in S\end{aligned}$$

Primjetimo da i s lijeve i s desne strane imamo polinome. Po teoremu o jednakosti polinoma mora vrijediti:

$$\begin{aligned}C_i &= \sum_{j=1}^{N} p_{ij}C_j, \qquad i \in S \\ \pi_i &= S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\pi_j - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}C_j, \qquad i \in S\end{aligned}$$

Prva jednakost vrijedi ukoliko je $C_i = C$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, N$.
Uvrstimo konstantu C u drugu jednakost:

$$C = S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\pi_j - \pi_i, \qquad i \in S$$

Pomnožimo li svaku jednadžbu sa π_i i sve ih sumiramo, dobivamo:

$$C\sum_{i=1}^{N}\pi_i = \sum_{i=1}^{N}\pi_i S_i + \sum_{i=1}^{N}\pi_i\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\pi_j - \sum_{i_1}^{N}\pi_i^2$$

U članu s dvostrukom sumom smijemo zamijeniti redosljed sumacije jer se radi o konačnim sumama.

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\pi_j = \sum_{j=1}^{N}\pi_j\sum_{i=1}^{N} p_{ij}\pi_i = \sum_{j=1}^{N}\pi_j\pi_j = \sum_{j=1}^{N}\pi_j^2$$

Dakle,

$$C = \sum_{i=1}^{N}\pi_i S_i =: \overline{S}$$

Konačno, rješenje sustava (4.1) je:

$$Z_i(n) = P_i(n) + \overline{S}n, \qquad i \in S \tag{4.2}$$

Primjer 4.2.1. *Dana je sljedeća prijelazna matrica i pripadna matrica nagrada*

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 10 & -40 \\ 5 & 30 \end{pmatrix}$$

Izračunajmo ukupnu očekivanu nagradu za sljedećih n prijelaza ako je sustav trenutno u stanju 1. Kolika bi bila razlika u ukupnoj očekivanoj nagradi ako bi sustav trenutno bio u stanju 2?

Upravo smo pokazali kako je očekivana nagrada nakon n prijelaza, uz uvijet da se lanac trenutno nalazi u stanju i dana sljedećim izrazom

$$Z_i(n) = P_i(n) + \overline{S}n$$

$P_i(n)$ izračunajmo kako je opisano u 3. poglavlju ovog rada računajući svojstvene vrijednosti matrice P.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0.9 - r & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 - r \end{vmatrix} &= 0 \\ r^2 - 1.5r + 0.5 &= 0 \\ r_1 = 1, \ r_2 &= 0.5 \end{aligned}$$

Dakle, $P_i(n) = A_i^{(1)} + A_i^{(2)}(0.5)^n$, $i = 1, 2$.
Odredimo stacionarnu distribuciju rješavajući sustav

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.9\pi_1 + 0.4\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.1\pi_1 + 0.6\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

Odnosno, $\pi = (0.8, 0.2)$.
Kako je stacionarna distribucija jedinstvena, zaključujemo da je lanac ergodičan.
Uz to, potrebna nam je i prosječna nagrada po prijelazu $\overline{S}$.

$$\begin{aligned} S_1 &= 0.9 \cdot 10 + 0.1 \cdot (-40) = 5 \\ S_2 &= 0.4 \cdot 5 + 0.6 \cdot (30) = 20 \\ \overline{S} &= 0.8 \cdot 5 + 0.2 \cdot 20 = 8 \end{aligned}$$

Konačan izraz za $Z_i(n)$ je:

$$Z_i(n) = A_i^{(1)} + A_i^{(2)}(0.5)^n + 8n, \ i = 1, 2$$

Izračunajmo najprije $Z_1(n)$.

$$Z_1(0) = 0 \Rightarrow A_1^{(1)} + A_1^{(2)} = 0$$
$$Z_1(1) = S_1 \Rightarrow A_1^{(1)} + 0.5A_1^{(2)} + 8 = 5$$

Dakle, $Z_1(n) = -6 + 6(0.5)^n + 8n$
Na sličan način može se izračunati i $Z_2(n) = 40 - 40(0.5)^(n) + 8n$
Preostaje nam još odrediti kolika je razlika u očekivanim nagrada s obzirom na trenutno stanje Markovljevog lanca.

$$Z_2(n) - Z_1(n) = [40 - 40(0.5)^n + 8n] - [-6 + 6(0.5)^n + 8n] = 46 - 40(0.5)^n + 6(0.5)^n$$

Ako pretpostavimo da će promatrani n biti dovoljno velik, vidimo da je očekivana nagrada nakon tih n koraka za 46 jedinica veća ako je lanac trenutno u stanju 2, nego ako kreće iz stanja 1.

Ovim primjerom pokazala sam kako ovdje opisanim postupkom stvarno možemo odrediti očekivanu nagradu nakon bilo kojeg broja koraka u ovisnosti o stanju u kojem se Markovljev lanac nalazi u početnom trenutku.
Primijetimo da smo se ovdje bavili $2x2$ matricama, a opet, imali smo dosta posla sa računanjem. U praksi nas najčešće zanima ponašanje Markovljevog lanca nakon dovoljnog broja koraka i prosječna nagrada po prijelazu nakon nekog duljeg perioda. U tom slučaju možemo preskočiti računanje egzaktnog izraza za očekivanu nagradu nakon n koraka i odmah izračunati prosječnu nagrada po prijelazu nakon duljeg perioda. Jedina potrebna pretpostavka je ergodičnost Markovljevog lanca.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_i(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{P_i(n)}{n} + \overline{S}) = \pi_i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \overline{S} = \overline{S}$$

4.3 Primjena nagrada u donošenju poslovnih odluka

Vratimo se sada na primjer iz prethodnog poglavlja i primjenom znanja o nagradama izaberimo najbolju strategiju za vlasnika helikoptera.

Primjer 4.3.1. *Nastavak primjera* (3.2.1)

Vlasnik helikoptera želi izabrati najbolju strategiju. Taj izbor uvelike ovisi o definiciji mjere učinkovitosti, odnosno isplativosti strategije. Razmotrimo dvije (od mnogo mogućih) mjera isplativosti.

1. *Poželjno je prevesti što više putnika. Time vlasnik helikoptera želi uvjeriti ulagače da je ostvarivo i širenje posla.*

2. *Vlasnik helikoptera želi maksimizirati profit na razumno velikom broju vožnji. Cijena jedne vožnje je \$14. Ali vlasnik ima i troškove, troškovi održavanja helikoptera iznose \$6 po 20-minutnom razdoblju bez obzira letio on ili čekao na heliodromu. Uz to, kad leti s jednog mjesta na drugo, trošak goriva iznosi \$2.*

Odredimo sada najbolju strategiju pretpostavljajući da vlasnik mjeri učinkovitost projekta na prvi način.
Izračunajmo očekivani broj prevezenih putnika ako se vlasnik odluči za prvu strategiju.

Prisjetimo se, prateći prvu strategiju, helikopter može biti u sljedećih 9 stanja:
1 Čeka na A
2 Leti od A do B_1
3 Leti od A do B_2
4 Čeka na B_1
5 Leti od B_1 *do A*
6 Leti od B_1 *do* B_2
7 Čeka na B_2
8 Leti od B_2 *do A*
9 Leti od B_2 *do* B_1

Matrica prijelaza i matrica nagrada su tada:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{(1)} = 0.8,\ S_2^{(1)} = 0.6,\ S_3^{(1)} = 0.45,\ S_4^{(1)} = 0.6,\ S_5^{(1)} = 0.8,$$
$$S_6^{(1)} = 0.45,\ S_7^{(1)} = 0.45,\ S_8^{(1)} = 0.8,\ S_9^{(1)} = 0.6$$

Prije smo već izračunali stacionarnu distribuciju $\pi^{(1)}$ i utvrdili da je ovaj Markovljev lanac ergodičan i sada možemo izračunati $\overline{S}^{(1)}$, odnosno prosječnu nagradu (u ovom slučaju, prosječan broj prevezenih putnika po periodu).

$$\overline{S}^{(1)} = \frac{3}{50}0.8 + \frac{6}{50}0.6 + \frac{6}{50}0.45 + \frac{6}{50}0.6 + \frac{6}{50}0.8 + \frac{3}{50}0.45 + \frac{11}{50}0.45 + \frac{6}{50}0.8 + \frac{3}{50}0.6 = \\ = 0.6$$

Uz drugu strategiju, helikopter ne čeka na heliodromu industrijskog postrojenja B_2, ali zato, u slučajevima kad na B_2 ne čeka putnik, leti prazan u A i taj let mu ne donosi nagradu. Matrica prijelaza i matrica nagrada jesu:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{6}{17} & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{(2)} = 0.8,\ S_2^{(2)} = 0.6,\ S_3^{(2)} = 0.45,\ S_4^{(2)} = 0.6,\ S_5^{(2)} = 0.8,$$
$$S_6^{(2)} = 0.45,\ S_7^{(2)} = 0.8,\ S_8^{(2)} = 0.6$$

Prosječna dugoročna nagrada po 20-minutnom periodu iznosi:

$$\overline{S}^{(2)} = \frac{57}{675}0.8 + \frac{114}{675}0.6 + \frac{114}{675}0.45 + \frac{92}{675}0.6 + \frac{92}{675}0.8 + \frac{46}{675}0.45 + \frac{136}{675}0.8 + \frac{24}{675}0.6 = \\ = 0.649$$

Slično, prateći treću strategiju, matrica prijelaza i matrica nagrada jesu:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{6}{17} & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{(3)} = 0.8,\ S_2^{(3)} = 0.6,\ S_3^{(3)} = 0.45,\ S_4^{(3)} = 0.8, \\ S_5^{(3)} = 0.45,\ S_6^{(3)} = 0.8,\ S_7^{(3)} = 0.6$$

Prosječna dugoročna nagrada po 20-minutnom periodu u ovom slučaju iznosi:

$$\overline{S}^{(3)} = \frac{97}{955}0.8 + \frac{194}{955}0.6 + \frac{194}{955}0.45 + \frac{184}{955}0.8 + \frac{46}{955}0.45 + \frac{204}{955}0.8 + \frac{36}{955}0.6 \\ = 0.664$$

Sada je jasno da, ako vlasnik želi prevesti što je više moguče putnika, treba izabrati treću strategiju i ne čekati na heliodromima industrijskih postrojenja.

Hoće li treća strategija biti najbolja i ukoliko vlasnik želi ostvariti što je veću moguću dobit?
Za periode u kojima helikopter čeka na heliodromu, trošak vlasnika je \$6 po jednom takvom periodu. Ako helikopter leti, a ne prevozi putnika, trošak je \$8. Vlasnik ostvaruje prihod jedino kada prevozi putnika. Dobit od takve vožnje je \$6.

Izračunajmo očekivanu dobit uz primjenu prve strategije.

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.3 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{(1)} = 3.6,\ S_2^{(1)} = 1.2,\ S_3^{(1)} = -0.6,\ S_4^{(1)} = 1.2,\ S_5^{(1)} = 3.6,$$
$$S_6^{(1)} = -0.6,\ S_7^{(1)} = -0.6,\ S_8^{(1)} = 3.6,\ S_9^{(1)} = 1.2$$

$$\overline{S}^{(1)} = \frac{3}{50}3.6 + \frac{6}{50}1.2 + \frac{6}{50}(-0.6) + \frac{6}{50}1.2 + \frac{6}{50}3.6 + \frac{3}{50}(-0.6) + \frac{11}{50}(-0.6) + \frac{6}{50}3.6 + \frac{3}{50}1.2 =$$
$$= \$1.2$$

Očekivana dobit po periodu uz drugu strategiju je:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 6 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{(2)} = 3.6,\ S_2^{(2)} = 1.2,\ S_3^{(2)} = -1.7,\ S_4^{(2)} = 1.2,\ S_5^{(2)} = 3.6,$$
$$S_6^{(2)} = -1.7,\ S_8^{(2)} = 3.6,\ S_9^{(2)} = 1.2$$

$$\overline{S}^{(2)} = \frac{57}{675}3.6 + \frac{114}{675}1.2 - \frac{114}{675}1.7 + \frac{92}{675}1.2 + \frac{92}{675}3.6 - \frac{46}{675}1.7 + \frac{136}{675}3.6 + \frac{24}{675}1.2 =$$
$$= \$1.53$$

Prateći treću strategiju, vlasnik helikoptera može očekivati sljedeću dobit po periodu:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -1 & 6 & -\frac{52}{17} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &S_1^{(3)} = 3.6,\ S_2^{(3)} = 0.4,\ S_3^{(3)} = -1.7,\ S_4^{(3)} = 3.6, \\ &S_5^{(3)} = -1.7,\ S_6^{(3)} = 3.6,\ S_7^{(3)} = 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}^{(3)} &= \frac{97}{955}3.6 + \frac{194}{955}0.4 - \frac{194}{955}1.7 + \frac{184}{955}3.6 - \frac{46}{955}1.7 + \frac{204}{955}3.6 + \frac{36}{955}0.4 = \\ &= \$1.50 \end{aligned}$$

Dakle, ukoliko je vlasnik helikoptera vođen željom za dobiti, najbolje mu je prikloniti se drugoj strategiji.

Poglavlje 5

Strategije

5.1 Najbolja strategija

U prethodnom primjeru strategije su se razlikovale po stanjima koja Markovljev lanac može posjetiti prateći neku od tih strategija.
U ovom poglavlju promatrat ćemo Markovljev lanac sa fiksnim stanjima, ali mogućnošću donošenja poslovnih odluka tijekom boravka Markovljevog lanca u nekom stanju. Svaka poslovna odluka mijenja matricu prijelaznih vjerojatnosti na svoj način, a često mijenja i matricu nagrada. Dostupne odluke, kao i njihov broj, mogu se mijenjati od stanja do stanja. Izazov je odrediti koju odluku treba donijeti u svakom od stanja kako bi dugoročna prosječna dobit po prijelazu bila maksimalna.

Ako promatramo potpuno ergodičan Markovljev lanac s N stanja, za dovoljno velik broj budućih prijelaza n, očekivanu nagradu možemo izvesti iz rješenja (3.3) i (4.2):

$$Z_i(n) = A_i + \overline{S}n \tag{5.1}$$

Iako neka dobit može biti povezana sa stanjem iz kojeg je Markovljev lanac krenuo, značajan parametar je $\overline{S}$. Dakle, tražimo matricu prijelaza P i matricu nagrada Q takve da je $\overline{S}$ maksimalan.

5.2 Maksimizacijski postupak

U [4] opisana je sljedeća tehnika nalaženja najbolje strategije.

Uvrstimo izraz za očekivanu nagradu (5.1) u sustav (4.1):

$$\begin{aligned} A_i + \overline{S}n &= S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[A_j + \overline{S}(n-1)] = \\ &= S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}A_j + \overline{S}n - \overline{S} \end{aligned}$$

odnosno

$$A_i + \overline{S} = S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}A_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{5.2}$$

S_i i p_{ij} ovise o odluci donešenoj tijekom boravka Markovljevog lanca i stanju i. Recimo da je donositelj odluke izabrao odluku k. $S_i(k)$ i $p_{ij}(k)$ su tada poznate konstante Dakle, gornji sustav je sustav N jednadžbi s $N + 1$ nepoznanica $A_1, A_2, \ldots, A_N$ *i* $\overline{S}$.
Pošto imamo jednu nepoznanicu više nego što imamo jednadžbi, fiksirajmo $A_N = 0$ (od interesa nam je ionako samo razlika između A_i-eva) i riješimo sustav.

Koristeći dobivena rješenja promatrajmo vrijednost

$$V_i(k) = S_i(k) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(k)A_j \qquad \textit{za svaki } i.$$

U svakom stanju i bira se odluka k^* za koju je$V_i(k)$ maksimalan. Na taj način dolazimo do nove strategije kojoj odgovara matrica prijelaznih vjerojatnosti $P^* = (p^*_{ij})$ i matrica nagrada $Q^* = (q^*_{ij})$. Cijeli postupak računanja A_i-eva i $\overline{S}$ ponovimo s ovim vrijednostima. Iteracije izvodimo tako dugo dok dva puta uzastopno ne dobijemo isti $\overline{S}$.

Kako bismo bili sigurni da prije opisani postupak uistinu u svakom koraku nalazi bolju strategiju, od velike nam je važnosti sljedeći rezultat.

Propozicija 5.2.1. *Opisani maksimizacijski postupak u svakom koraku povećava vrijednost* $\overline{S}$.

Dokaz. Neka su p_{ij} i S_i prijeazne vjerojatnosti i pripadne nagrade izabrane na početku procesa. Neka su p^*_{ij} i S^*_i vrijednosti koje maksimiziraju V_i za svaki i.
Tada vrijedi:

$$S^*_i + \sum_{j=1}^{N} p^*_{ij} A_j = S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_j + \epsilon_i^2 \tag{5.3}$$

gdje je $\epsilon_i^2 \geq 0$ i $i = 1, 2, \ldots, N$.
Također vrijedi:

$$A_i + \overline{S} = S_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_j$$

$$A^*_i + \overline{S}^* = S^*_i + \sum_{j=1}^{N} p^*_{ij} A^*_j$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobivamo

$$(A^*_i + A_i) + (\overline{S}^* - \overline{S}) = (S^*_i - S_i) + \sum_{j=1}^{N} p^*_{ij} A^*_j - \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_j$$

Ako umjesto $S^*_i - S_i$ u gornju jednadžbu uvrstimo izraz dobiven u (5.3) i sredimo, dobivamo sljedeći izraz:

$$(A^*_i + A_i) + (\overline{S}^* - \overline{S}) = \epsilon_i^2 + \sum_{j=1}^{N} p^*_{ij} (A^*_j - A_j)$$

Uočimo da gornji oblik jednadžbe odgovara jednadžbi (5.2) iz čega zaključujemo kako je $\overline{S}^* - \overline{S}$ prosječna nagrada po prijelazu uz prijelazne vjerojatnosti (p^*_{ij}) i prosječne nagrade u pojedinim stanjiima ϵ_i^2.
Prisjetimo se kako smo prosječnu nagradu po prijelazu $(\overline{S})$ definirali u prethodnom poglavlju

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{N} \pi_i S_i$$

Dakle,

$$\overline{S}^* - \overline{S} = \sum_{i=1}^{N} \pi^*_i \epsilon_i^2$$

gdje je $\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_N^*)$ stacionarna distribucija definirana vjerojatnostima prijelaza (p_{ij}^*).

Sada je jasno da vrijedi $\overline{S}^* \geq \overline{S}$ $\square$

U praksi se pokazalo kako je konvergencija ove metode izuzetno brza, dovoljno je tek nekoliko iteracija kako bi se odredila najbolja strategija.

5.3 Odabir najbolje strategije

Pokušajmo primijeniti upravo opisanu metodu u praksi. U tu svrhu poslužit ću se brojevima preuzetima iz [4] stavljajući ih u kontekst opisa poslovanja jednog fiktivnog poduzeća.

Primjer 5.3.1. Proizvođač drvenog namještaja ima jednog dobavljača industrijskog drva. Nabavna cijena fluktuira između dva stanja:

(1) Niske cijene
(2) Visoke cijene

Cijena koju će proizvođač platiti za drvo ovisi o veličini trenutne narudžbe i cijeni plaćenoj u prethodnoj narudžbi. Cijenu saznaje tek nakon što preda svoju narudžbu dobavljaču. Proizvođač može birati između tri standardne veličine narudžbe:

(N1) Mala narudžba
(N2) Srednja narudžba
(N3) Velika narudžba

Vjerojatnost da će cijena pasti (ili ostati niska) povećava se sa veličinom narudžbe, ali velike zalihe materijala proizvođaču povećavaju troškove skladištenja i time mu smanjuju zaradu.
Matrice prijelaza i nagrada utvrđene su dugogodišnjim promatranjem poslovanja proizvođača i dobavljača i izgledaju kao što slijedi.

Proizvođač naručuje male narudžbe:

$$P_{N1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \; Q_{N1} = \begin{pmatrix} 40 & -20 \\ 25 & -40 \end{pmatrix}$$

Proizvođač naručuje srednje velike narudžbe:

$$P_{N2} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}, \; Q_{N2} = \begin{pmatrix} 35 & -30 \\ 15 & -70 \end{pmatrix}$$

Proizvođač naručuje velike narudžbe:

$$P_{N3} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}, \; Q_{N3} = \begin{pmatrix} 25 & -60 \\ 10 & -120 \end{pmatrix}$$

Izračunajmo najprije prosječne nagrade za svaki redak:

$$\begin{array}{lll} S_1(N1) = 10, & S_1(N2) = 12.3, & S_1(N3) = 8 \\ S_2(N1) = -1, & S_2(N2) = -6.2, & S_2(N3) = -3 \end{array}$$

Kako bi započeli s postupkom određivanja najbolje strategije, odaberimo početnu strategiju.
Recimo da proizvođač uvijek predaje malu narudžbu jer je vođen mišlju kako malim narudžbama gotovo i nema troškova skladištenja, a ako cijena poraste (ili ostane visoka), na maloj je narudžbi najmanji gubitak.
Sustav (5.2) je u tom slučaju

$$A_1 + \overline{S} = 10 + 0.5A_1 + 0.5A_2$$
$$A_2 + \overline{S} = -1 + 0.6A_1 + 0.4A_2$$

Jedno rješenje ovog sustava je $A_1 = 10,\ A_2 = 0,\ \overline{S} = 5.$

Sada promatrajmo vrijednost V za svako stanje i svaku strategiju:

$$\begin{array}{ll} V_1(N1) = 10 + 0.5 \cdot 10 = 15, & V_2(N1) = -1 + 0.6 \cdot 10 = 5 \\ V_1(N2) = 12.3 + 0.65 \cdot 10 = 18.8, & V_2(N2) = -6.2 + 0.75 \cdot 10 = 1.3 \\ V_1(N3) = 8 + 0.8 \cdot 10 = 16, & V_2(N3) = -3 + 0.9 \cdot 10 = 6 \end{array}$$

Očito, za proizvođača je bolje da naručuje srednje velik paket materijala ako je prethodna cijena bila niska i veliki paket ako je prethodna cijena bila visoka.

Provedimo još jednu iteraciju i otkrijmo postoji li bolja strategija.
Sustav koji sada rješavamo je sljedeći:

$$A_1 + \overline{S} = 12.3 + 0.65A_1 + 0.35A_2$$
$$A_2 + \overline{S} = -3 + 0.9A_1 + 0.1A_2$$

Jedno rješenje ovog sustava je $A_1 = 12.2,\ A_2 = 0,\ \overline{S} = 8.$
Ponovno izračunajmo V za svako stanje i svaku strategiju.

$$\begin{array}{ll} V_1(N1) = 10 + 0.5 \cdot 12.2 = 16.1, & V_2(N1) = -1 + 0.6 \cdot 12.2 = 6.3 \\ V_1(N2) = 12.3 + 0.65 \cdot 12.2 = 20.2, & V_2(N2) = -6.2 + 0.75 \cdot 12.2 = 3 \\ V_1(N3) = 8 + 0.8 \cdot 12.2 = 17.7, & V_2(N3) = -3 + 0.9 \cdot 12.2 = 8 \end{array}$$

Vidimo da bismo ponovno izabrali srednju narudžbu ako su cijene bile niske i veliku narudžbu u slučaju prethodno visokih cijena drva. Prema tome, ovo je strategija koja dugoročno donosi najveću dobit proizvođaču namještaja.

Poglavlje 6

Neprekidni Markovljevi lanci

Do sada smo proučavali diskretne Markovljeve lance. Kako se u praksi se češće javljaju neprekidni Markovljevi lanci, vrijeme je da se pozabavimo njima. Ovo poglavlje prati [3, 2. poglavlje] i svi detalji izostavljeni ovdje mogu se naći tamo.

6.1 Definicija neprekidnog Markovljevog lanca

Definicija 6.1.1. *Markovljev lanac s neprekidnim vremenom i nepraznim prebrojivim skupom stanja S je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za koji vrijedi sljedeće Markovljevo svojstvo: za sve $n \geq 1$, za sve vremenske trenutke $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ i sva stanja $i_1, \ldots, \imath_{n-2}, i, j \in S$*

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, X_{t_{n-1}} = i) = \mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i) \tag{6.1}$$

Definirajmo: $P_{ij}(s,t) := \mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i)$
Funkcije $P_{ij}(s,t)$ zovu se prijelazne vjerojatnosti Markovljevog lanca X.

Definicija 6.1.2. *Markovljev lanac $(X_t : t \geq 0)$ je vremenski homogen ako za prijelazne vjerojatnosti vrijedi*

$$P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0, t-s)$$

za sve $i, j \in S$ i za sve $0 \leq s < t$.

Od sada nadalje bavit ćemo se samo homogenim Markovljevim lancima iako će se riječ 'homogeni' najčešće izostavljati. U tom slučaju uvodimo oznaku $P_{ij}(t-s) := P_{ij}(s,t)$
Uvedimo i uvjetne vjerojatnosti: za $i, j \in S$ i $t \geq 0$ definirajmo

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$$

Jednako kao i kod diskretnih Markovljevih lanaca, početna distribucija Markovljevog lanca je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$, gdje je $\lambda_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$.
Za kraj uvedimo još jednu oznaku

$$P(t) = (P_{ij}(t) : i, j \in S)$$

Uočimo da je u slučaju konačnog skupa S, P kvadratna matrica.
Uz to, može se pokazati kako $(P(t) : t \geq 0)$ ima sljedeća svojstva:

(i) $P(0) = I$ gdje je $I_{ij} = \delta_{ij}$
(ii) $P(t)$ je stohastička matrica, tj. $P_{ij}(t) \geq 0$ i $\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1$
(iii) Vrijede Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti: $P(t + s) = P(t)P(s)$

Definicija 6.1.3. *Neka je X neprekidan Markovljev lanac.*
Vremena skokova $(J_n : n \geq 0)$ od X definiraju se na sljedeći način:

$$J_0 = 0,\ J_{n+1} = inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$$

uz dogovor: $inf\phi = +\infty$.
Vremena čekanja $(W_n : n \geq 0)$ od X definiraju se

$$W_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1}, & J_{n-1} < \infty \\ +\infty, & J_{n-1} = \infty \end{cases}$$

Vrijeme eksplozije lanca X je $\zeta := \lim_{n\to\infty} J_n$
a lanac skokova je $Y = (Y_n : n \geq 0)$, $Y_n := X_{J_n}$.

Pokazuje se (Vidi [3].) da, uvjetno na prošlost, sva vremena čekanja imaju neku eksponencijalnu distribuciju, odnosno da lanac X prelazi u novo stanje nakon nekog eksponencijalnog vremena čekanja.
Kao podsjetnik, ovdje navodim definiciju eksponencijalne slučajne varijable.

Definicija 6.1.4. *Kažemo da slučajna varijabla T ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $q > 0$ ako funkcija distribucije F od T ima oblik*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-qx}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Pišemo: $T \sim Exp(q)$.

6.2 Konstrukcija Markovljevog lanca s neprekidnim vremenom

Neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ diskretan Markovljev lanac na nepraznom prebrojivom skupu stanja S s početnom distribucijom $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$, te prijaznom matricom $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in S)$ takvom da je $\pi_{ii} = 0$ za sve $i \in S$.
Neka je $(E_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli s parametrom 1, te pretpostavimo da su E_n nezavisne od Markovljevog lanca Y.
Konačno, neka je $q : S \to \langle 0, \infty \rangle$ funkcija.
Pomoću Markovljevog lanca Y i niza $(E_n : n \geq 1)$ želimo konstruirati Markovljev lanac $X = (X(t) : t \geq 0)$ s neprekidnim vremenom.

Stavimo $J_0 = 0$ te, za $n \geq 0$, definirajmo

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \frac{E_{n+1}}{q(Y_n)} \\ J_{n+1} &= J_n + W_{n+1} \\ X_t &= Y_{J_n}, \ J_n \leq t < J_{n+1} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Označimo $\zeta := \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_n \leq \infty$
Pokažimo kako slučajne varijable W_n imaju (uvjetno na prošlost) eksponencijalnu distribuciju :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_n > s | Y_{n-1} = i) &= \frac{\mathbb{P}(\frac{E_n}{q(Y_{n-1})} > s, Y_{n-1} = i)}{\mathbb{P}(Y_{n-1} = i)} = \frac{\mathbb{P}(\frac{E_n}{q(i)} > s, Y_{n-1} = i)}{\mathbb{P}(Y_{n-1} = i)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(\frac{E_n}{q(i)} > s)\mathbb{P}(Y_{n-1} = i)}{\mathbb{P}(Y_{n-1} = i)} = e^{-q(i)s} \end{aligned}$$

Uvedimo još jedan bitan pojam prije nego ustvrdimo da je upravo definiran slučajan proces $X = (X_t : t \geq 0)$ zapravo Markovljev lanac s neprekidnim vremenom.

Definicija 6.2.1. *Za neprekidan slučajan proces $(X_t : 0 \leq t < \zeta)$ kažemo da je regularan ako je $\mathbb{P}_i(\zeta = +\infty) = 1$ za sve $i \in S$.*

Sljedeći teorem, čiji se dokaz može pronaći u [3], govori nam upravo ono što smo i željeli postići ovom konstrukcijom. Uz samo jedan uvijet, garantira nam da je, na ovaj način konstruiran, slučajan proces X neprekidan Markovljev lanac.

Teorem 6.2.2. *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ slučajan proces konstruiran pomoću* (6.2). *Pretpostavimo da je X regularan. Tada je X Markovljev lanac s neprekidnim vremenom pri čemu su $(J_n : n \geq 0)$ vremena skokova lanca X, $(W_n : n \geq 1)$ vremena čekanja od X, a lanac Y je lanac skokova.*

6.3 Generatorska matrica

Promotrimo malo detaljnije neprekidan Markovljev lanac X kojeg smo upravo konstruirali. Za sada znamo sljedeće: ako se X nalazi u nekom stanju $i \in S$, tada u stanje $j \in S$ $(j \neq i)$ prelazi s vjerojatnosti π_{ij} nakon vremena čekanja koje je eksponencijalno s parametrom $q(i)$. Dakle, matrica Π i funkcija q opisuju kako se neprekidan Markovljev lanac ponaša kad se zatekne u nekom stanja, a mi bi željeli znati i funkciju prijelaznih vjerojatnosti $P(t)$ koja opisuje globalno ponašanje Markovljevog lanca s neprekidnim vremenom.

Definicija 6.3.1. *Generatorska martica Markovljavog lanca* $X = (X_t : t \geq 0)$ *je matrica* $Q = (Q_{ij} : i, j \in S)$ *definirana sa*

$$q_{ij} = \begin{cases} -q(i), & j = i \\ q(i)\pi_{ij}, & j \neq i \end{cases} \tag{6.3}$$

Generatorska je matrica u potpunosti određena prijelaznom matricom Π i funkcijom q, ali vrijedi i obratno. Ako znamo matricu Q, iz nje lako konstruirano funkciju q i prijelaznu matricu Π na sljedeći način:

$$\begin{aligned} q(i) &= -q_{ii}, & i &\in S \\ \pi_{ii} &= 0, & i &\in S \\ \pi_{ij} &= -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}, & j \neq i,\ i, j &\in S \end{aligned}$$

Lako se pokaže da je, na ovaj način konstruirana, matrica Π stohastička matrica.
Uočimo sada neka svojstva generatorske matrice:

(i) $q_{ii} < 0$ i $q_{ij} >= 0$ za $j \neq i, i, j \in S$
(ii) $\sum_{j \in S} q_{ij} = -q(i) + \sum_{j \neq i} p_{ij} = 0$ jer je $p_{ii} = 0$

Pomoću generatorske matrice može se odrediti funkcija prijelaznih vjerojatnosti pošto vrijedi:

$$P'(t) = QP(t) \tag{6.4}$$

Gornja jednadžba naziva se diferencijalna jednadžba unatrag.
U slučaju konačnog prostora stanja S, određivanje funkcije $P(t)$ je mnogo lakše. Naime, vrijedi:

$$P(t) = e^{tQ}$$

Diferencijalna jednadžba unatrag korisna je i za interpretaciju elemenata genetatorske matrice. Zapišimo jednadžbu (6.4) koristeći definiciju derivacije:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P(t)Q$$

Iskoristimo činjenicu da funkcija P zadovoljava Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t)P(\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P(t)Q$$

odnosno

$$P(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(\Delta t)}{\Delta t} = P(t)Q$$

Kako je $P \neq 0$, zaključujemo da vrijedi

$$Q = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{P(\Delta t)}{\Delta t}$$

zbog čega q_{ij} interpretiramo kao stopu prijelaza iz stanja i u stanje j.

Kao i kod diskretnih Markovljevih lanaca i ovdje želimo promatrati ponašanje lanca u beskonačnosti (odnosno, u primjerima, nakon dovoljno proteklog vremena). Zbog toga definiram pojam stacionarne distribucije za Markovljeve lance s neprekidnim vremenom.

Definicija 6.3.2. *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i generatorskom matricom Q. Vjerojatnosna distribucija $\mu = (\mu_i : i \in S)$ je stacionarna distribucija Markovljevog lanca X ako vrijedi:*

$$\mu Q = 0$$

Kako bi ovu definiciju stacionarne distribucije povezali sa definicijom iz 1. poglavlja ovog rada, pokažimo ekvivalentnost sljedećih tvrdnji:
(i) $\mu Q = 0$
(ii) $\mu P(t) = \mu$

Iskoristimo diferencijalnu jednadžbu unatrag: $P'(t) = QP(t)$. Prva jednakost u sljedećem retku vrijedi jer je skup stanja S konačan.

$$\frac{d}{dt}\mu P(t) = \mu P'(t) = \mu Q P(t)$$

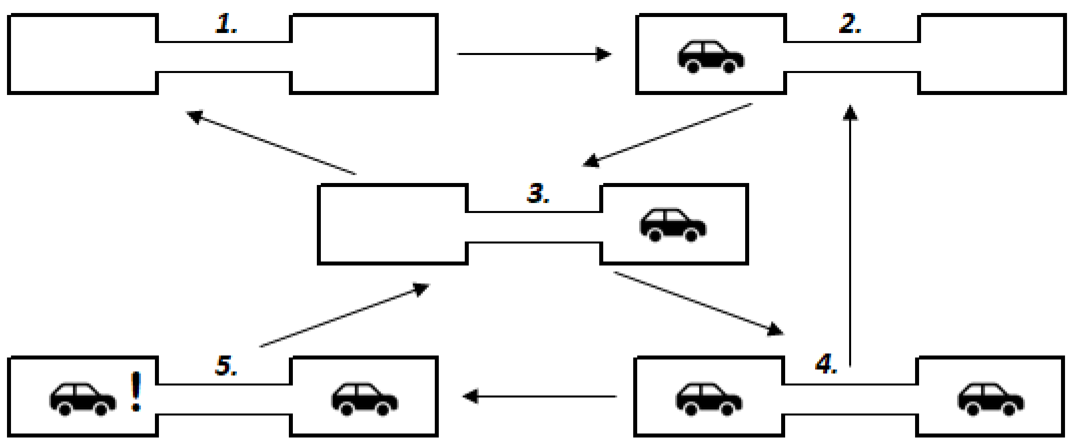
Ako je $\mu Q = 0$ tada je $t \mapsto \mu P(t)$ konstanta, a zbog $\mu P(0) = \mu$ mora vrijediti $\mu P(t) = \mu$. Također, iz gornje jednakosti je očito da ukoliko je $\mu P(t) = \mu$, $\mu Q = 0$ jer je $P(t) \neq 0$.

6.4 Primjena neprekidnih Markovljevih lanaca

Ovdje želim pokazati kako je ovaj koncept primjenjiv na primjere poslovanja iz stvarnog života. Naravno, zadržat ćemo se na jednostavnom preuzetom iz [4].

Primjer 6.4.1. Promatrajmo malu autopraonicu u kojoj svaki automobil prolazi kroz dvije faze čišćenja: vanjsko i unutarnje pranje. Automobil najprije ide na vanjsko pranje, a zatim direktno prelazi na unutarnje pranje, osim ako je jedinica za unutarnje pranje zauzeta (čišćenje prethodnog automobila još nije gotovo). U tom slučaju automobil mora čekati u jedinici za vanjsko pranje dok se ona za unutarnje pranje ne oslobodi. Iako klijenti dolaze po stopi od 8 automobila na sat, nitko ne želi čekati. Dakle, ako je jedinica za vanjsko pranje zauzeta (bilo da je automobil unutra u procesu pranja ili samo čeka da se druga jedinica isprazni) novi klijenti neće dolaziti. Prosječno vrijeme koje automobil provede u svakoj od faza čišćenja je 15 minuta. Vlasnik autopraonice razmatra isplativost gradnje dodatne jedinice u kojoj bi jedan automobil mogao čekati nakon vanjskog pranja u slučaju da unutarnje pranje prethodnog automobila još nije gotovo. Ta investicija omogućila bi posluživanje više klijenata. Kolika je dobit od izgradnje "čekaonice" ako je mjerimo očekivanim brojem automobila u autopraonici?

Identificirajmo najprije stanja u kojima se autopraonica može zateći ako nema prostora za čekanje:



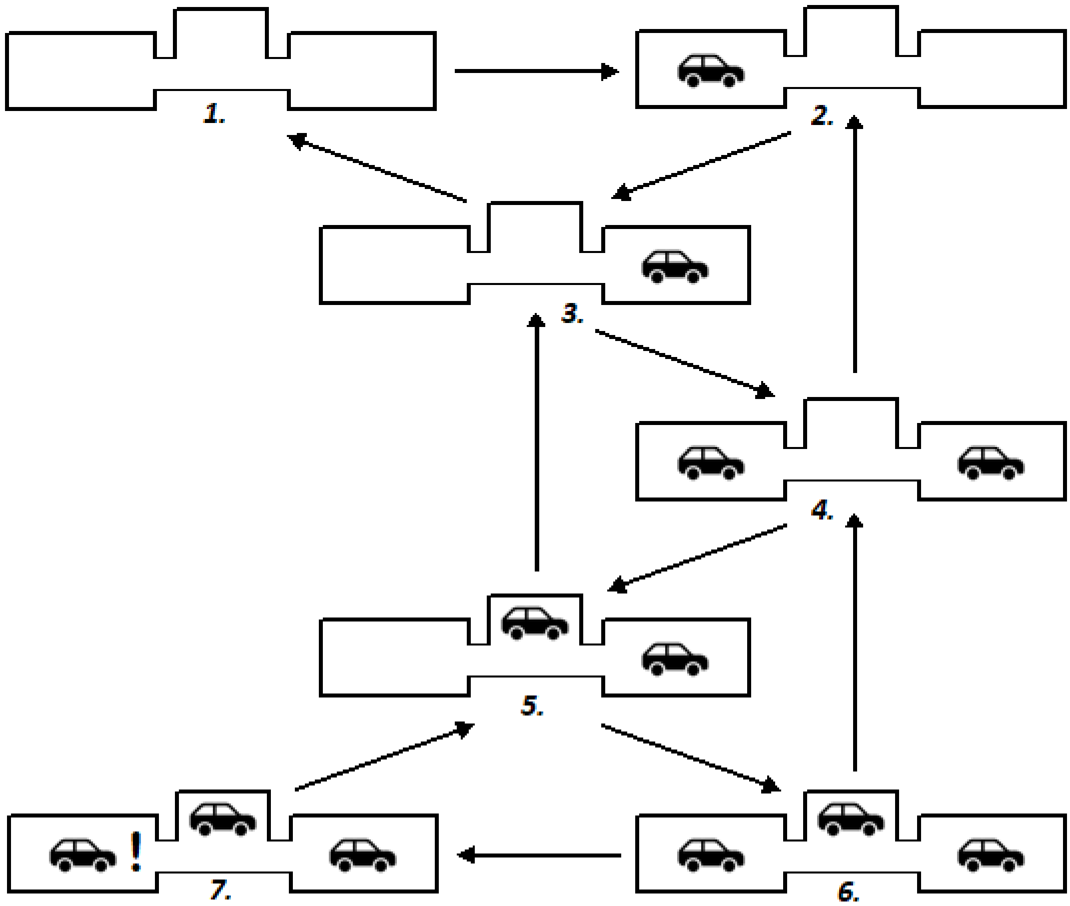
Generatorska matrica je u tom slučaju

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -12 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Rješavajući sustav $\pi^{(1)}Q^{(1)} = 0$ dolazimo do stacionarne distribucije $\pi^{(1)} = (\frac{1}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11})$
Očekivani prosječni broj automobila u autopraonici kroz dulji vremenski period je

$$N_1 = \frac{4}{11} + \frac{2}{11} + 2(\frac{2}{11} + \frac{2}{11}) = \frac{14}{11} = 1.27$$

Zamislimo sada da je vlasnik investirao u "čekaonicu". Stanja u kojoj se autopraonica može naći nakon investicije prikazana su na slici ispod.



Ponovno definiramo pripadnu generatorsku matricu

$$Q^{(2)} = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -12 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

i izračunamo stacionarnu distribuciju

$$\pi^{(2)} = (\frac{3}{43}, \frac{14}{43}, \frac{6}{43}, \frac{8}{43}, \frac{4}{43}, \frac{4}{43}, \frac{4}{43})$$

U ovom slučaju, očekivani broj automobila u autopraonici je

$$N_2 = \frac{14}{43} + \frac{6}{43} + 2(\frac{8}{43} + \frac{4}{43}) + 3(\frac{4}{43} + \frac{4}{43}) = \frac{68}{43} = 1.58$$

Očekivano povećanje prosječnog broja automobila u autopraonici nije veliko i investicija u izgradnju dodatne jedinice u sklopu autopraonice vlasniku nije isplativa.

Bibliografija

[1] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Linearne diferentne jednadžbe*, PrintCom d.o.o, 2016.

[2] Z. Vondraček: *Markovljevi lanci, predavanja*, 2008.

[3] Z. Vondraček: *Slučajni procesi, predavanja*, 2010.

[4] George P. Wadsworth, Joseph G. Bryan: *Applications of probability and random variables*, McGraw-Hill book company, second edition, 1974.

Sažetak

U ovom radu bavili smo se metodama koje se koriste pri analizi strategija. Iako je teorija dana općenito, primjerima smo se ograničili na analizu strategija poslovanja. Sve ovdje opisane metode uključuju pretpostavku da promatrani proces možemo opisati homogenim Markovljevim lancem. Druga važna pretpostavka, je pretpostavka o ergodičnosti promatranog Markovljevog lanca kako bi imalo smisla promatrati ponašanje sustava u beskonačnosti, odnosno u praksi, nakon duljeg vremena.
Predstavljene su dvije metode odabira najbolje strategije ovisno o vrsti problema s kojim smo suočeni. Kada donositelj odluke ima mogućnost unaprijed izabrati stanja u kojima će se poduzeće naći tijekom svog poslovanja, uspoređuju se očekivane nagrade za svaki odabrani skup stanja. Ukoliko su stanja u kojima se poduzeće može nalaziti fiksna, a donositelju odluka su u svakom stanju dostupne određene odluke koje utječu na matricu prijelaza (a vrlo često i na matricu nagrada), za određivanje najbolje strategije koristi se algoritam maksimizacijskog postupka.
Na kraju je dan kratak pregled Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu i pokazano je na koji način se teorija razvijena na diskretnim Markovljevim lancima može prenjeti na neprekidan slučaj.

Summary

This thesis deals with the methods used in analysis of strategies. Although the theory is generally given, the examples are limited to the analysis of business strategies. All of the described methods are based on the assumption that the observed process can be described by homogeneous Markov chain. Another important assumption is the assumption of the ergodicity of the observed Markov chain so that it would have sense to observe the system's behaviour in infinity, or in practice, after a long time.

Two methods of choosing the best strategy are presented depending on the type of problem we are facing. When the Decision Maker has the possibility to pre-select the states in which the enterprise will be found during their business, the expected prizes for each selected set of states are compared. If the states in which an enterprise can be found are fixed, and the Decision Maker has in every state the possibility to make certain decisions affecting the transition matrix (and also often on the matrix of awards), a maximization process algorithm is used to determine the best strategy.

At the end is given a brief overview of the continuous Markov chains and it is shown how the theory developed on discrete Markov chains can be applied to a continuous case.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu, 8. travnja 1994. godine. Osnovnu školu završavam u Humu na Sutli nakon čega upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Krapina. Svoje školovanje nastavljam na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu svaučilišta u Zagrebu gdje u srpnju 2013. godine upisujem preddiplomski studij matematike. Po završetku preddiplomskog studija, 2016. godine, na istom fakultetu upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike. U travnju 2018. godine počinjem raditi studentski posao u Privrednoj Banci Zagreb gdje u rujnu zasnivam radni odnos i nastavljam rad kao pripravnica u Upravljanju rizicima.