SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matija Ivičinec

BAIREOVI PROSTORI I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ilja Gogić

Zagreb, Srpanj, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svome mentoru na velikom strpljenju i ukazanoj pomoći. Zahvaljujem se svojoj brojnoj obitelji i prijateljima na koji su mi bili velika podrška tijekom cijelog studija. Ovaj diplomski rad posvećujem zaručnici Klari koja je uvijek bila uz mene.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Osnovni pojmovi **3**
1.1 Osnove o metričkim prostorima 3
1.2 Neprekidne funkcije između metričkih prostora 11

2 Baireov teorem o kategoriji **15**
2.1 Kategorije skupova u metričkom prostoru 15
2.2 Baireovi prostori 18

3 Primjene Baireovog teorema o kategoriji **21**
3.1 Osnovne posljedice Baireovog teorema o kategoriji 21
3.2 Nigdje derivabilna neprekidna funkcija 26

Bibliografija **33**

Uvod

Baireov teorem o kategoriji je bitan rezultat koji ima dosta primjena u matematičkoj analizi i općoj topologiji. Formulirao ga je francuski matematičar René-Louis Baire 1899. godine u djelu *Sur les fonctions de variable réelles* te u njegovu čast je teorem nazvan Baireovim teoremom o kategoriji.
Ovaj diplomski rad podijeljen je na tri poglavlja. U prvom poglavlju definirani su osnovni pojmovi poput metričkih prostora, otvorenih i zatvorenih skupova te neprekidnosti funkcija između metričkih prostora. U drugom poglavlju definirani su pojmovi poput gustih i nigdje gustih skupova, skupova prve i druge kategorije te rezidualnih skupova. Također, u drugom poglavlju dana je definicija Baireovog prostora te iskaz i dokaz Baireovog teorema o kategoriji, koji kratko kaže da je svaki potpun metrički prostor Baireov prostor. U zadnjem poglavlju ovog rada prikazane su neke primjene Baireovog teorema o kategoriji. Između ostalog, dokazujemo da je generička neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nigdje derivabilna. Svi pojmovi definirani u radu popraćeni su brojnim primjerima radi boljeg razumijevanja tematike.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Osnove o metričkim prostorima

Definicija 1.1.1. *Neka je M neprazan skup i $d : M \times M \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$ *za sve* $x, y \in M$ *(nenegativnost);*

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ *za sve* $x, y \in M$ *(simetričnost);*

(M3) $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$ *(strogost);*

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *za sve* $x, y, z \in M$ *(nejednakost trokuta).*

*Funkciju d zovemo **metrika** na skupu M, a uređeni par (M, d) (ili samo skup M, ako se metrika podrazumjeva) zovemo **metrički prostor**. Elemente metričkog prostora zovemo **točkama**.*

Primjer 1.1.2. Standardna metrika na skupu $\mathbb{R}$ dana je s:

$$d(x, y) := |x - y|, \quad \text{pri čemu su } x, y \in \mathbb{R}.$$

Lako se provjeri da funkcija d zadovoljava svojstva $(M1) - (M4)$. Analogno prostor $\mathbb{R}^n$ postaje metrički prostor uz metriku

$$d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad \text{pri čemu su } x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Metriku d_2 zovemo **euklidska metrika** na $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.1.3. Neka je M neprazan skup i $d : M \times M \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{ako } x = y \\ 1, & \text{ako } x \neq y \end{cases}$$

Uređeni par (M, d) se tada naziva **diskretan metrički prostor**, a funkcija d **diskretna metrika** na M.

*Promotrimo podskup $Y \subseteq M, Y \neq \emptyset$ metričkog prostora (M, d) i restrikciju $d_Y := d|_{Y \times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ koja očito zadovoljava svojstva (M1)-(M4). Uređen par (Y, d_Y) je također metrički prostor kojeg zovemo **potprostor** od (M, d). Udaljenost točaka iz Y jednaka je neovisno o tome gledamo li ih kao točke iz Y ili iz M, pa ćemo metriku d_Y označavati s d.*

Definicija 1.1.4. *Neka je (M, d) metrički prostor.*

(a) Neka su $x \in M$ i $r > 0$. Skup

$$K(x, r) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$$

*zovemo **otvorena kugla** sa središtem x i radijusom r. Skup*

$$\overline{K}(x, r) := \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$$

*zovemo **zatvorena kugla** sa središtem x i radijusom r.*

*(b) Za skup $U \subseteq M$ kažemo da je **otvoren**, ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq M$.*

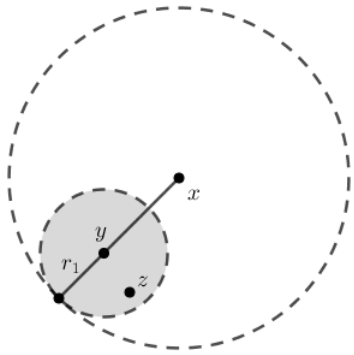
*(c) Za skup $F \subseteq M$ kažemo da je **zatvoren**, ako je njegov komplement $F^c = M \setminus F$ otvoren.*

Propozicija 1.1.5. *Svaka otvorena kugla $K(x, r)$ metričkog prostora M je otvoren skup.*

Dokaz. Neka je $y \in K(x, r)$. Definirajmo $r_1 = r - d(x, y)$ (slika 1.1). Kako se y nalazi u kugli $K(x, r)$ slijedi da je $d(x, y) < r$ pa je $r_1 > 0$. Uzmimo sada proizvoljnu točku z iz kugle $K(y, r_1)$. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo:

$$d(x, z) < d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r_1 = r$$

što znači da se z nalazi u kugli $K(x, r)$. Prema tome, dokazali smo da je $K(y, r_1) \subseteq K(x, r)$. □



Slika 1.1: Otvorena kugla $K(x, r)$.

Primjer 1.1.6. (a) Svaka zatvorena kugla $\overline{K}(x, r)$ je zatvoren skup.

(b) Otvoreni interval $\langle 0, 1\rangle$ je otvoren u $\mathbb{R}$ (s euklidskom metrikom) ali nije otvoren u $\mathbb{R}^2$ nakon identifikacije s $\langle 0, 1\rangle \times \{0\}$.

(c) Poluotvoreni interval $\langle 0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ nije niti otvoren niti zatvoren skup u euklidskoj metrici.

Prethodni primjer nam pokazuje da svojstvo otvorenosti i zatvorenosti skupa ovisi o tome u kojem metričkom prostoru promatramo taj skup, kao i postojanje skupova koji nisu niti otvoreni niti zatvoreni.

Propozicija 1.1.7. *Ako je M metrički prostor, tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) M i $\emptyset$ su otvoreni skupovi.

(b) Proizvoljne unije otvorenih skupova su otvoreni skupovi.

(c) Konačni presjeci otvorenih skupova su otvoreni skupovi.

Dokaz. Tvrdnja (a) očito slijedi iz definicije otvorenog skupa.

(b) Neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ familija otvorenih skupova u M te neka je

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Moramo pronaći $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Kako je $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ slijedi da je $x \in A_{\bar{i}}$ za neki $\bar{i} \in I$. Skup $A_{\bar{i}}$ je otvoren po pretpostavci, dakle postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x, r) \subseteq A_{\bar{i}} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i.$$

(c) Neka je $\{A_i : i = 1, ..., n\}$ konačna familija otvorenih skupova i neka je

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Moramo pronaći $r > 0$ za koji je $K(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Za svaki $i = 1, \ldots, n$ postoji $r_i > 0$ takav da je $K(x, r_i) \subseteq A_i$ jer je svaki A_i otvoren skup. Neka je $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$. Tada je $0 < r \leq r_i$ za svaki i, stoga $K(x, r) \subseteq K(x, r_i) \subseteq A_i$ i to za svaki i. Slijedi da je

$$K(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

to jest skup $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ je otvoren. □

Koristeći De Morganova pravila dobivamo analogne tvrdnje i za zatvorene skupove.

Propozicija 1.1.8. *Ako je M metrički prostor, tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) M i ∅ su zatvoreni skupovi.

(b) Proizvoljni presjeci zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi.

(c) Konačne unije zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi.

Definicija 1.1.9. *Za proizvoljni podskup A metričkog prostora M definiramo sljedeće skupove:*

(a)
$$\operatorname{Int} A := \bigcup \{U : U \subseteq A, U \textit{ otvoren u } M\}.$$

(b)
$$\overline{A} := \bigcap \{F : F \supseteq A, F \textit{ zatvoren u } M\}.$$

(c)
$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{M \setminus A}.$$

Skupove Int A, $\overline{A}$ *i* ∂A *redom zovemo* ***interior***, ***zatvarač*** *i* ***rub*** *skupa A.*

Propozicija 1.1.10. *(a) Vrijedi* $\operatorname{Int} A = M \setminus \overline{M \setminus A}$ *i* $\overline{A} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A)$.

(b) Podskup A metričkog prostora M je otvoren skup ako i samo ako je $\operatorname{Int} A = A$.

(c) Podskup A metričkog prostora M je zatvoren ako i samo ako je $\overline{A} = A$.

(d) *∂A je zatvoren skup u M i vrijedi $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$ te $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \emptyset$. Stoga je $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.*

Dokaz. (a) Dokažimo jednakost

$$\operatorname{Int} A = M \setminus \overline{M \setminus A}.$$

Uzmemo li komplement skupova s lijeve i desne strane dobivamo ekvivalentnu tvrdnju

$$M \setminus \operatorname{Int} A = \overline{M \setminus A}.$$

Prema definiciji interiora $\operatorname{Int} A = \bigcup_{i \in I} U_i$, pri čemu je $\{U_i\}_{i \in I}$ familija svih otvorenih skupova u M koji su sadržani u A. Sada je

$$M \setminus \operatorname{Int} A = M \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (M \setminus U_i).$$

Budući da je svaki U_i otvoren i $U_i \subseteq A$ slijedi da je $M \setminus U_i$ zatvoren i $M \setminus U_i \supseteq A$. No, prema definiciji zatvarača je

$$\overline{M \setminus A} = \bigcap_{i \in I} (M \setminus U_i).$$

Jednakost $\overline{A} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A)$ se dokazuje analogno.

(b) Očito je Int A $\subseteq A$. Pretpostavimo da je $A \subseteq M$ otvoren skup. Kako je $A \subseteq A$, prema definiciji interiora imamo $A \subseteq \operatorname{Int} A$. Dakle $\operatorname{Int} A = A$.
Obratno, pretpostavimo da je $\operatorname{Int} A = A$. Tada je A očito otvoren prema propoziciji 1.1.7 (b).

(c) Pretpostavimo da je A zatvoren skup. Prema definiciji zatvorenog skupa slijedi da je $M \setminus A$ otvoren. Nadalje, prema (a) i (b) dijelu propozicije $\overline{A} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A)$ i Int $(M \setminus A) = M \setminus A$ jer je $M \setminus A$ otvoren. Konačno,

$$\overline{A} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A) = M \setminus (M \setminus A) = A.$$

Obratno, neka je $\overline{A} = A$. Prema propoziciji 1.1.8 (b) $\overline{A}$ je zatvoren skup u M. Dakle, A je zatvoren u M i time je tvrdnja dokazana.

(d) Skup ∂A je očito zatvoren. Pokažimo da vrijedi

$$\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A.$$

Budući da je $\operatorname{Int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$ i $\partial A \subseteq \overline{A}$ slijedi

$$\overline{A} \supseteq \operatorname{Int} A \cup \partial A.$$

Obratno, neka je x proizvoljna točka iz $\overline{A}$. Ako je $x \in \operatorname{Int} A$ onda smo gotovi. Pretpostavimo zato da $x \notin \operatorname{Int} A$. Budući da $x \notin \operatorname{Int} A$ tada svaka okolina U točke x siječe komplement $M \setminus A$ pa je $x \in \overline{M \setminus A}$. Imamo $x \in \overline{A}$ i $x \in \overline{M \setminus A}$ stoga je $x \in \overline{A} \cap \overline{M \setminus A} = \partial A$ što znači da je

$$\overline{A} \subseteq \operatorname{Int} A \cup \partial A.$$

Dakle $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$. Pokažimo sada da je

$$\operatorname{Int} A \cap \partial A = \emptyset$$

Prema definiciji ruba skupa slijedi

$$\operatorname{Int} A \cap \partial A = \operatorname{Int} A \cap (\overline{A} \cap \overline{M \setminus A}).$$

Iskoristimo asocijativnost presjeka i (a) dio propozicije na skup $\overline{M \setminus A}$. Imamo

$$(\operatorname{Int} A \cap \overline{A}) \cap \overline{M \setminus A} = \operatorname{Int} A \cap (M \setminus \operatorname{Int} A) = \emptyset.$$

□

Napomena 1.1.11. Za $A \subseteq M$, očito je $\operatorname{Int} A$ najveći otvoren skup koji je sadržan u skupu A, dok je $\overline{A}$ najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A.

Primjer 1.1.12. (a) Neka je $A = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$. Interior skupa A je $\operatorname{Int} A = \langle a, b \rangle$, zatvarač od A je $\overline{A} = [a, b]$, a rub od A je $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = \{a, b\}$.

(b) U n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ interior otvorene kugle $A = K(x, r)$ je $\operatorname{Int} A = K(x, r)$, zatvarač je zatvorena kugla $\overline{A} = \overline{K}(x, r)$, a rub

$$\partial A = \overline{K}(x, r) \setminus K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ d_2(x, y) = r\}.$$

Rub skupa A se zove **sfera** u $\mathbb{R}^n$ sa središtem u točki x, radijusa r.

(c) Neka je $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Budući da svaki otvoreni interval u $\mathbb{R}$ sadrži racionalne i iracionalne brojeve, imamo redom $\operatorname{Int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ i $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

(d) Neka je $A = \{(0, y) \ : \ -1 < y < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada je $\operatorname{Int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \{(0, y) \ : \ -1 \leq y \leq 1\}$ i $\partial A = \overline{A}$.

Definicija 1.1.13. *Neka je M metrički prostor i $x \in M$ neka točka tog prostora.* ***Okolina*** *točke x je svaki podskup $A \subseteq M$ takav da vrijedi $x \in \operatorname{Int} A$.*

Definicija 1.1.14. *Neka je A podskup metričkog prostora M.*

(a) Za točku $x \in M$ kažemo da je **gomilište** *skupa A ako svaka okolina U točke x sadrži barem jednu točku iz A različitu od x, to jest ako vrijedi $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Skup svih gomilišta skupa A označavamo s A^d i zovemo ga* **derivat** *od A.*

(b) Svaku točku $x \in A \setminus A^d$ (ako postoji) nazivamo **izolirana točka** *skupa A.*

(c) Za skup A kažemo da je **savršen** *skup u M ako je $A^d = A$. Ako je $M^d = M$, tada za prostor M kažemo da je* **savršen prostor***.*

(d) Za A kažemo da je **diskretan** *skup u M ako za svaki $x \in A$ postoji $\delta > 0$ takav da je $d(x, y) > \delta$ za svaki $y \in A$.*

Propozicija 1.1.15. *Skup A u metričkom prostoru M je zatvoren ako i samo ako A sadrži sva svoja gomilišta.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A zatvoren. Tada je $M \backslash A$ otvoren. Za $x \in M \backslash A$ slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq M \backslash A$. Stoga x nije gomilište od A, pa su sva gomilišta od A sadržana u A.

Obratno, pretpostavimo da skup A sadrži sva svoja gomilišta. Uzmimo $x \in M \backslash A$. To nije točka gomilišta, pa postoji $r > 0$ takav da $K(x, r) \subseteq M \backslash A$. Stoga je $M \backslash A$ otvoren, odnosno, A je zatvoren. □

Propozicija 1.1.16. *Neka je M metrički prostor i $A \subseteq M$. Tada vrijedi*

$$\overline{A} = A \cup A^d.$$

Dokaz. Dokažimo prvo inkluziju $\overline{A} \subseteq A \cup A^d$. Neka je $x \in \overline{A}$ i pretpostavimo da $x \notin A^d$. Tada postoji okolina U točke x takva da je $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pretpostavimo sada da x ne pripada niti skupu A. Tada je $A = A \setminus \{x\}$ što povlači $U \cap A = \emptyset$, to jest $A \subseteq M \setminus U$. Budući da je U otvoren slijedi da je $M \setminus U$ zatvoren pa je prema definiciji zatvarača $\overline{A} \subseteq M \setminus U$. No, to je u kontradikciji s $x \in U$ i $x \in \overline{A}$.

Obratno, budući da je $A \subseteq \overline{A}$ slijedi da je $A^d \subseteq (\overline{A})^d$. Također, budući da je $\overline{A}$ zatvoren, prema propoziciji 1.1.15 slijedi da je $(\overline{A})^d \subseteq \overline{A}$ pa je $\overline{A} \supseteq A \cup A^d$. Dakle, $\overline{A} = A \cup A^d$. □

Primjer 1.1.17. (a) Neka je $A = \langle a, b] \cup \{c\} \subseteq \mathbb{R}$, pri čemu $a \neq b \neq c$, derivat od A je skup $A^d = [a, b]$, a točka c je izolirana točka skupa A.

(b) Neka je $A = \{\frac{1}{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Derivat skupa A je $A^d = \{0\}$.

(c) Neka je $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Tada je derivat skupa A cijeli skup $\mathbb{R}$, to jest $A^d = \mathbb{R}$.

(d) Prostor $\mathbb{R}$ je savršen prostor. Također svaki segment u $\mathbb{R}$ je savršen podskup od $\mathbb{R}$.

Definicija 1.1.18. *Neka je M metrički prostor. Za niz (x_n) u M kažemo da je:*

a) ***konvergentan****, ako postoji točka x_0 takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(x_0, x_n) < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$. Tada za točku x_0 kažemo da je* ***limes niza*** *(x_n) i pišemo $\lim_n x_n = x_0$ ili $x_n \to x_0$.*

b) ***Cauchyjev****, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$.*

Napomena 1.1.19. Ako je niz (x_n) u metričkom prostoru M konvergentan, njegov limes je jedinstven. Zaista, pretpostavimo da su x_0 i x_0' različiti limesi od (x_n), tako da je $d(x_0, x_0') > 0$. Posebno, za

$$\varepsilon := \frac{1}{2} d(x_0, x_0')$$

postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da su svi članovi niza (x_n), $n \geq n_0$, istovremeno sadržani u kuglama $K(x_0, \varepsilon)$ i $K(x_0', \varepsilon)$. No to je nemoguće, jer su te kugle disjunktne.

Napomena 1.1.20. Neka je M metrički prostor. Svaki konvergentan niz u M je ujedno i Cauchyjev niz u M. Obrat općenito ne vrijedi. Na primjer, ako je $M = \langle 0, 1] \subset \mathbb{R}$ i $x_n = 1/n$, tada je (x_n) Cauchyjev niz u M koji ne konvergira u M.

Definicija 1.1.21. *Neka je M metrički prostor.*

a) ***Udaljenost točke*** *$x \in M$* ***do skupa*** *A je broj*

$$d(x, A) := \inf \{d(x, y) \ : \ y \in A\}.$$

b) ***Dijametar skupa*** *A je broj*

$$\operatorname{diam} A := \sup \{d(x, y) \ : \ x, y \in A\}.$$

Posebno ako je $\operatorname{diam} A < \infty$ tada kažemo da je skup A ***omeđen****.*

Propozicija 1.1.22. Za svaki podskup A metričkog prostora M vrijedi slijedeća karakterizacija zatvarača skupa:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{x \in M : d(x, A) = 0\} \\ &= \{\lim_n x_n : \ (x_n) \text{ niz u } A \text{ koji konvergira u } M\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Dokazat ćemo samo prvu jednakost. Jednakost $\overline{A} = \{x \in M : d(x, A) = 0\}$ je ekvivalentna s

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0.$$

Neka je $x \in \overline{A}$. Prema propoziciji 1.1.16 je $\overline{A} = A \cup A^d$, pa je $x \in A$ ili $x \in A^d$. Ako je $x \in A$ tada je očito $d(x, A) = 0$. Neka je sada $x \in A^d$. Budući da je x gomilište od A tada za svaki $r > 0$ postoji $y \in A, y \neq x$ koji je sadržan u $K(x, r)$. Kako je $y \in K(x, r)$ slijedi da je $d(x, y) < r$ pa je $d(x, A) = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $x \in M$ takav da je $d(x, A) = 0$. Tada za svaki $r > 0$ postoji $y \in A$ takav da je $d(x, y) < r$, odnosno $A \cap K(x, r) \neq \emptyset$. Dakle, $x \in A^d \cup A = \overline{A}$. □

Definicija 1.1.23. *Za metrički prostor M kažemo da je* ***potpun****, ako je svaki Cauchyjev niz u M konvergentan u M. Za potpun normiran prostor kažemo da je* ***Banachov prostor****.*

Primjer 1.1.24. Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je Banachov prostor. Nadalje, svaki zatvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ je potpun metrički prostor.

1.2 Neprekidne funkcije između metričkih prostora

Definicija 1.2.1. *Neka su X i Y metrički prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je* ***neprekidna u točki*** *$x_0 \in X$ ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ postoji okolina U točke x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$. Za funkciju f kažemo da je* ***neprekidna na*** *X ako je neprekidna u svakoj točki iz X.*

Napomena 1.2.2. Ekvivalentno, funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $f(K_X(x_0, \delta)) \subseteq K_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

Propozicija 1.2.3. *Neka su X i Y metrički prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna na X ako i samo ako je za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ skup $f^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren u X.*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija i $V \subseteq Y$ otvoren skup. Neka je $x \in f^{-1}(V)$ proizvoljna točka. Tada je V okolina točke $f(x)$. Zbog neprekidnosti funkcije f postoji okolina U od x takva da je $f(U) \subseteq V$. Zaključujemo da je $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$, pa se x nalazi u interioru skupa $f^{-1}(V)$. Dakle, $f^{-1}(V) \subseteq \operatorname{Int} f^{-1}(V)$, odnosno $f^{-1}(V) = \operatorname{Int} f^{-1}(V)$. Prema tome $f^{-1}(V)$ je otvoren skup.
Obratno, neka je $f^{-1}(V)$ otvoren za svaki otvoren $V \subseteq Y$. Neka je $x \in X$ proizvoljna točka i V otvorena okolina od $f(x)$. Skup $f^{-1}(V)$ je otvoren po pretpostavci i $x \in f^{-1}(V)$. Kako je $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, $U = f^{-1}(V)$ je tražena okolina točke x takva da je $f(U) \subseteq V$. Time je dokazano da je f neprekidna funkcija. □

Korolar 1.2.4. *Neka su X i Y metrički prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna na X ako i samo ako je za svaki zatvoren skup $F \subseteq Y$ skup $f^{-1}(F)$ zatvoren u X.*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija i $F \subseteq Y$ zatvoren skup. Tada je $Y \setminus F$ otvoren u Y. Prema propoziciji 1.2.3 da je skup $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ otvoren u X. Odnosno, $f^{-1}(F)$ je zatvoren podskup od X.

Obratno, neka je $V \subseteq Y$ otvoren. Tada je $Y \setminus V$ zatvoren u Y. Po pretpostavci praslika $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ je zatvoren skup što znači da je $f^{-1}(V)$ otvoren. Prema propoziciji 1.2.3 slijedi da je f neprekidna funkcija. □

Propozicija 1.2.5. *Neka su X i Y metrički prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz (x_n) u X koji konvergira prema x_0, niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ konvergira prema $f(x_0)$.*

Dokaz. Neka je f neprekidna u točki $x_0 \in X$ i neka je (x_n) niz u X koji konvergira prema x_0. Trebamo pokazati da niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ konvergira prema $f(x_0)$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0 postoji $\delta > 0$ takav da

$$f(K_X(x_0, \delta)) \subseteq K_Y(f(x_0), \varepsilon). \tag{1.1}$$

Budući da $x_n \to x_0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_n \in K_X(x_0, \delta), \ \forall n \geq n_0. \tag{1.2}$$

Iz (1.1) i (1.2) slijedi da je $f(x_n) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$ za svaki $n \geq n_0$ što znači da niz $(f(x_n))$ konvergira prema $f(x_0)$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki niz (x_n) koji konvergira prema x_0 niz vrijednosti $(f(x_n))$ konvergira prema $f(x_0)$. Trebamo pokazati da je f neprekidna u x_0. Pretpostavimo suprotno, to jest da f nije neprekidna u x_0. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji neki $x_\delta \in X$ takav da je

$$d_X(x_\delta, x_0) < \delta \quad \text{i} \quad d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Posebno, za $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, dolazimo do niza (x_n) u X za koji vrijedi

$$d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Budući da $d_X(x_n, x_0) \to 0$ kada $n \to \infty$, slijedi da niz (x_n) konvergira prema x_0 ali niz $(f(x_n))$ ne konvergira prema $f(x_0)$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, vrijedi obrat. □

Primjer 1.2.6. Neka je (M, d) metrički prostor i skup $A \subseteq M$. Funkcija $x \longmapsto d(x, A)$ je neprekidna na M. Zaista, neka su x i y proizvoljne točke prostora M. Tada za svaki $a \in A$ vrijedi:

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

slijedi da je

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

to jest

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y). \tag{1.3}$$

Uočimo da zamjena uloga točaka x i y povlači

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y). \tag{1.4}$$

Iz (1.3) i (1.4) slijedi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Dakle, funkcija $x \longmapsto d(x, A)$ jest neprekidna na M.

Poglavlje 2

Baireov teorem o kategoriji

2.1 Kategorije skupova u metričkom prostoru

Definicija 2.1.1. *Za podskup A metričkog prostora M kažemo da je:*

(a) ***Gust*** *u M, ako je $\overline{A} = M$.*

(b) ***Nigdje gust*** *u M ako je $M \setminus \overline{A}$ gust u M.*

(c) ***Prve kategorije*** *u M, ako se A može prikazati kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova.*

(d) ***Druge kategorije*** *u M, ako A nije prve kategorije.*

(e) ***Rezidualan*** *u M, ako je njegov komplement A^C skup prve kategorije u M.*

Propozicija 2.1.2. *Podskup A metričkog prostora M je:*

(a) nigdje gust u M ako i samo ako je $\operatorname{Int}\overline{A} = \emptyset$;

(b) rezidualan u M ako i samo ako se A može napisati kao prebrojiv presjek skupova s gustim interiorima.

Dokaz. (*a*). Pretpostavimo da je A nigdje gust podskup od M. Tada je $M \setminus \overline{A}$ gust u M, to jest $\overline{M \setminus \overline{A}} = M$. Želimo dokazati da je $\operatorname{Int}\overline{A} = \emptyset$. Imamo

$$\operatorname{Int}\overline{A} = M \setminus (\overline{M \setminus \overline{A}}) = M \setminus M = \emptyset.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$. Tvrdimo da je A nigdje gust u M. To će biti ako je $M \setminus \overline{A}$ gust u M, to jest $\overline{M \setminus \overline{A}} = M$. Zaista,

$$\overline{M \setminus \overline{A}} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus (M \setminus \overline{A})) = M \setminus \operatorname{Int} \overline{A} = M \setminus \emptyset = M.$$

(b). Pretpostavimo da se A može napisati kao prebrojiv presjek skupova s gustim interiorima, to jest $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ pri čemu su $A_n \subseteq M$ i svaki $\operatorname{Int} A_n$ je gust u M. Da bismo dokazali da je A rezidualan u M trebamo pokazati da je A^C skup prve kategorije u M. Iz

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

slijedi

$$A^C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^C.$$

Još je potrebno pokazati da je svaki A_n^C nigdje gust skup u M. A_n^C je nigdje gust ako je $M \setminus \overline{A_n^C}$ gust u M. Imamo

$$M \setminus \overline{A_n^C} = M \setminus (\overline{M \setminus A_n}) = \operatorname{Int} A_n.$$

Po pretpostavci je $\operatorname{Int} A_n$ gust u M. Stoga je svaki A_n^C nigdje gust skup i time je ovaj smjer dokazan.

Obratno, neka je A rezidualan u M. Tada je A^C skup prve kategorije, pa postoji prebrojivo mnogo nigdje gustih podskupova A_n od M takvih da je

$$A^C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Imamo

$$A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^C.$$

Nadalje, svaki A_n je nigdje gust što znači da je $M \setminus \overline{A_n}$ gust, odnosno $\overline{M \setminus \overline{A_n}} = M$. Moramo pokazati da je svaki $\operatorname{Int}(A_n^C)$ gust u M. Zaista,

$$\overline{\operatorname{Int}(A_n^C)} = \overline{M \setminus (\overline{M \setminus A_n^C})} = \overline{M \setminus \overline{A_n}} = M.$$

Dakle, A se uistinu može prikazati kao prebrojiv presjek skupova s gustim interiorima. □

Propozicija 2.1.3. *Rub svakog zatvorenog skupa je nigdje gust skup.*

Dokaz. Neka je A zatvoren skup. Tvrdimo da je ∂A nigdje gust skup, odnosno da je $\operatorname{Int} \overline{\partial A} = \emptyset$. Kako je ∂A zatvoren to je ekvivalentno s $\operatorname{Int} \partial A = \emptyset$.
Pretpostavimo da $\operatorname{Int} \partial A \neq \emptyset$. Prema definiciji zatvarača skupa vrijedi $\partial A \subseteq \overline{A}$, posebno $\partial A \subseteq A$ jer je A zatvoren po pretpostavci. Neka je sada $x \in \operatorname{Int} \partial A$. Tada postoji okolina točke x, nazovimo ju U_x takva da je $U_x \subseteq \partial A$. Imamo

$$U_x \subseteq \partial A \subseteq A.$$

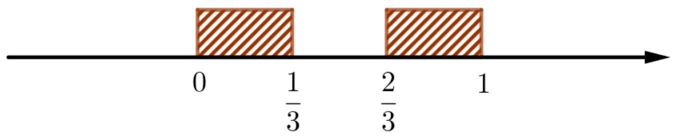
No to znači da je $U_x \cap A^C = \emptyset$ što je nemoguće. Dakle $\operatorname{Int} \partial A = \emptyset$ pa zaključujemo ∂A je nigdje gust skup. □

Primjer 2.1.4. a) Skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ su gusti u $\mathbb{R}$.

b) Diskretan podskup savršenog metričkog prostora je nigdje gust skup. Slijedi da je svaki prebrojivi podskup u savršenom metričkom prostoru skup prve kategorije. Posebno, skup $\mathbb{Q}$ je skup prve kategorije u $\mathbb{R}$. To ujedno pokazuje da prebrojiva unija nigdje gustih skupova može biti gust skup. Direktna posljedica ove činjenice jest da je skup iracionalnih brojeva rezidualan u $\mathbb{R}$.

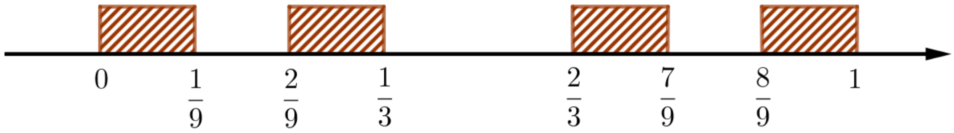
Sljedeći primjer nam pokazuje da nigdje gusti skupovi mogu biti savršeni i neprebrojivi.

Primjer 2.1.5 (Cantorov skup)**.** Neka je C Cantorov skup. Skup C možemo konstruirati na sljedeći način. Uzmimo segment $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ te iz njega izbacimo njegovu otvorenu trećinu:



Slika 2.1: $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Ostatak nazovimo s C_1. Prema tome $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Zatim iz svakog od ta dva segmenta izbacimo njihove srednje otvorene trećine:



Slika 2.2: $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

Ostatak nazovimo s C_2, dakle $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
Primjetimo da ako postupak nastavimo induktivno da će u n-tom koraku skup C_n biti unija 2^n segmenata pri čemu je duljina svakog segmenta 3^{-n}. Definiramo Cantorov skup C kao presjek

$$C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Skup C je očito zatvoren jer je dobiven kao presjek (prebrojivo mnogo) zatvorenih skupova. Nadalje, kako svaki skup C_n ne sadrži otvoreni interval duljine veće od 3^{-n} zaključujemo da C ne može sadržavati niti jedan otvoreni interval. Dakle C je nigdje gust u $\mathbb{R}$.

Pokažimo da je C savršen skup. Neka je $x \in C$ proizvoljna točka. Kako je $x \in C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ tada x pripada nekom od 2^n segmenata duljine 3^{-n}. Uzmimo da je x_n bilo koja rubna točka tog segmenta takva da je $x_n \neq x$. Slijedi da je $0 < d(x, x_n) < 3^{-n}$. Budući da sve rubne točke segmenata od C_n pripadaju skupu C slijedi da se i x_n nalazi u C. Na taj način dolazimo do niza točaka (x_n) u C čije su sve vrijednosti različite i koji konvergira prema x. Budući da je $x \in C$ bio proizvoljan, slijedi da je C savršen skup.

2.2 Baireovi prostori

Definicija 2.2.1. *Za metrički prostor M kažemo da je **Baireov prostor** ako je svaki neprazan otvoren skup u M skup druge kategorije.*

Propozicija 2.2.2. *Neka je M metrički prostor. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) M je Baireov prostor.

(b) Svaki rezidualan skup u M je gust u M.

(c) Ako je se M može prikazati kao prebrojiva unija zatvorenih skupova F_n tada je skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Int} F_n$ gust u M.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$. Neka je M Baireov prostor. Prema (b) dijelu propozicije 2.1.2. dovoljno je dokazati da je svaki prebrojivi presjek otvorenih gustih podskupova od M gust u M. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoji prebrojiva familija (A_n) gustih otvorenih skupova u M takva da

$$A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

nije gust u M. Tada sigurno postoji neprazan otvoren podskup U u M takav da je $A \cap U = \emptyset$. Sada imamo

$$M = \emptyset^C = (A \cap U)^C = A^C \cup U^C.$$

Slijedi da skup U možemo prikazati u obliku

$$U = M \cap U = (A^C \cup U^C) \cap U = A^C \cap U = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C \cap U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n^C \cap U).$$

Kako je svaki $A_n^C \cap U$ nigdje gust u M slijedi da je U skup prve kategorije u M. To je moguće jedino ako je U prazan skup što je kontradikcija s izborom skupa U. Zaključujemo da je A gust u M.

$(b) \Rightarrow (c)$. Neka je (F_n) niz zatvorenih podskupova od M takvih da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = M.$$

Moramo pokazati da je skup

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Int}(F_n)$$

gust u M. Definirajmo skup

$$O := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\partial F_n)^C.$$

Promotrimo sada skupove $(\partial F_n)^C$. Prema propoziciji 1.1.10 i propoziciji 2.1.3. skupovi (∂F_n) su nigdje gusti i zatvoreni u M, pa su svi $(\partial F_n)^C$ otvoreni i gusti u M. Stoga je O rezidualan pa je prema pretpostavci O gust u M. Budući da je

$$U^C = M \setminus U = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Int}\, F_n\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n \setminus \mathrm{Int}\, F_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial F_n = O^C$$

zaključujemo da je $O \subseteq U$. Skup U kao nadskup gustog skupa O je dakako gust u M što je i trebalo dokazati.

$(c) \Rightarrow (a)$. Pretpostavimo da vrijedi (c) ali da M nije Baireov prostor. Tada u M postoji neprazan otvoren skup U koji je prve kategorije. Dakle, skup U možemo prikazati kao

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

pri čemu su svi A_n, $n \in \mathbb{N}$, nigdje gusti skupovi u M. Tada je cijeli prostor M jednak

$$M = U^C \cup U = U^C \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \cdots$$

što je prebrojiva unija zatvorenih skupova. Kako je svaki A_n nigdje gust u M, imamo Int $(\overline{A_n}) = \emptyset$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Stoga je prema pretpostavci

$$\mathrm{Int}(U^C) = \mathrm{Int}(U^C) \cup \mathrm{Int}(\overline{A_1}) \cup \mathrm{Int}(\overline{A_2}) \cup \mathrm{Int}(\overline{A_3}) \cup \cdots$$

gust skup u M. Budući da je Int $(U^C) \subseteq U^C$ slijedi da je U^C gust u M. Posebno, $U \cap U^C \neq \emptyset$ što je nemoguće. Dakle M je Baireov prostor. □

Teorem 2.2.3. ***(Baireov teorem o kategoriji)*** *Svaki potpun metrički prostor M je Baireov prostor.*

Dokaz. Neka je (U_n) proizvoljan niz gustih otvorenih podskupova od M. Prema propoziciji 2.2.2. i propoziciji 2.1.2. dovoljno je pokazati da je njihov presjek

$$A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

gust u M. Dakle, za proizvoljne $x \in M$ i $r > 0$ trebamo provjeriti da je $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Kako je U_1 gust otvoren podskup od M tada postoje $x_1 \in M$ i $0 < r \leq 1$ takvi da vrijedi

$$\overline{K}(x_1, r_1) \subseteq K(x,r) \cap U_1.$$

Nadalje, budući da je U_2 gust otvoren podskup od M postoje $x_2 \in M$ i $0 < r_2 \leq \frac{1}{2}$ takvi da je

$$\overline{K}(x_2, r_2) \subseteq K(x_1, r_1) \cap U_2.$$

Indukcijom dolazimo do niza (x_n) u M i niza realnih brojeva (r_n) za koje vrijedi

$$0 < r_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \overline{K}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq K(x_n, r_n) \cap U_n$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Tvrdimo da je (x_n) Cauchyjev niz. Kako je

$$x_m \in \overline{K}(x_m, r_m) \subseteq \overline{K}(x_n, r_n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n \tag{2.1}$$

slijedi da je $d(x_m, x_n) \leq r_n \leq \frac{1}{n}$. Budući da je M potpun prostor Cauchyjev niz (x_n) je konvergentan u M pa postoji limes niza (x_n), označimo ga s x_0. Prema (2.1) slijedi da je

$$x_0 \in \overline{K}(x_n, r_n) \subseteq U_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dakle

$$x_0 \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \cap K(x,r) = A \cap K(x,r).$$

Stoga slijedi $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$.

□

Poglavlje 3

Primjene Baireovog teorema o kategoriji

3.1 Osnovne posljedice Baireovog teorema o kategoriji

Definicija 3.1.1. *Neka je M potpun metrički prostor. Kažemo da je svojstvo $\mathcal{P}$* ***generičko svojstvo*** *ako je skup*

$$P := \{x \in M : \ x \text{ ima svojstvo } \mathcal{P}\}$$

rezidualan u M.

Slobodno govoreći, pod generičkim svojstvom smatramo ono svojstvo koje vrijedi na "gotovo svim" elementima metričkog prostora M. Za odgovarajući dualan pojam, odnosno za svojstvo koje definira skup prve kategorije u M, kažemo da je ***zanemarivo svojstvo****.*

Primjer 3.1.2. Kao što smo već primijetili, skup $\mathbb{Q}$ je skup prve kategorije u $\mathbb{R}$, odnosno skup $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je rezidualan u $\mathbb{R}$. Dakle, u ovom kontekstu svojstvo racionalnosti broja $x \in \mathbb{R}$ smatramo zanemarivim svojstvom, dok svojstvo iracionalnosti broja $x \in \mathbb{R}$ smatramo generičkim svojstvom.

Propozicija 3.1.3. *Svaki potpun savršen metrički prostor M je neprebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji potpun savršen metrički prostor M koji je prebrojiv. Neka je $f : \mathbb{N} \to M$, bijekcija. Tada je

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\}.$$

No to je u kontradikciji s Baireovim teoremom o kategoriji jer je svaki jednočlan skup u savršenom metričkom prostoru nigdje gust. $\square$

Napomena 3.1.4. Direktna posljedica prethodne propozicije je neprebrojivost Cantorovog skupa.

Promotrimo sada sljedeći primjer.

Primjer 3.1.5. Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Funkcija f je poznata pod nazivom **Dirichletova** funkcija. Ona ima prekid u svakoj točki. Sada se možemo pitati koji se podskupovi od $\mathbb{R}$ mogu javiti kao skupovi neprekidnosti neke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Za danu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ označimo s $C(f)$ skup svih točaka $x \in \mathbb{R}$ točaka u kojima je f neprekidna. Promotrimo preslikavanje

$$\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \Phi : f \longmapsto C(f),$$

gdje smo s $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ redom označili skupove svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i partitivni skup od $\mathbb{R}$. Ako je f Dirichletova funkcija, onda je $C(f) = \emptyset$, odakle zaključujemo da vrijedi $\emptyset \in \operatorname{Im} \Phi$.

Promotrimo još jedan primjer.

Primjer 3.1.6. Neka je dana funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, M(p,q) = 1 \\ 0, & \text{ako je } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Funkcija g je u engleskom jeziku poznata pod nazivom **popcorn function**. Za funkciju g vrijedi da je $C(g) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ to jest, g je neprekidna točno u svim iracionalnim brojevima. Dakle, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \operatorname{Im} \Phi$.

Stoga se možemo pitati postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna samo u racionalnim brojevima, to jest vrijedi li $\mathbb{Q} \in \operatorname{Im} \Phi$? Kako bismo odgovorili na to pitanje uvedimo sljedeće skupove.

Definicija 3.1.7. *Za podskup A metričkog prostora M kažemo da je:*

*(a) F_σ-**skup** ako se A može prikazati kao prebrojiva unija zatvorenih skupova.*

*(b) G_δ-**skup** ako se A može prikazati kao prebrojiv presjek otvorenih skupova.*

Propozicija 3.1.8. *Neka je M metrički prostor i neka je $A \subseteq M$. Skup A je F_σ-skup ako i samo ako je M^C G_δ-skup.*

Dokaz. Neka je A F_σ-podskup od M. Tada postoji prebrojivo mnogo zatvorenih skupova F_n u M takvi da je

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Slijedi da je

$$M^C = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c.$$

Dakle, M^C je prebrojiv presjek otvorenih skupova F_n^c, odnosno M^C je G_δ-skup. Obrat se dokazuje analogno. □

Propozicija 3.1.9. *Svaki zatvoren podskup od M je G_δ-skup.*

Dokaz. Neka je A zatvoren podskup od M. Prema napomeni1.1.22 imamo

$$A = \overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in M : \; d(x, A) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Prema primjeru 1.2.6 znamo da je funkcija $x \longmapsto d(x, A)$ neprekidna na M. Stoga je svaki skup oblika

$$\left\{ x \in M : \; d(x, A) < \frac{1}{n} \right\}$$

otvoren u M. Dakle A je moguće prikazati kao prebrojiv presjek otvorenih skupova u M. □

Napomena 3.1.10. Iz propozicija 3.1.8. i 3.1.9. slijedi da je svaki otvoren podskup u M F_σ-skup.

Napomena 3.1.11. Primjetimo da je familija F_σ-skupova u metričkom prostoru M zatvorena na formiranje konačnih presjeka kao i na formiranje prebrojivih unija. Analogno, familija G_δ-skupova je zatvorena na formiranje konačnih unija i prebrojivih presjeka.

Lema 3.1.12. *Svaki F_σ-skup A u metričkom prostoru M je ili skup prve kategorije ili ima neprazan interior.*

Dokaz. Neka je

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

pri čemu je svaki $F_n \subseteq M$ zatvoren. Ako svi skupovi F_n imaju prazan interior, tada je A je skup prve kategorije. S druge strane, ako postoji barem jedan F_n čiji je interior neprazan tada i A ima neprazan interior. □

Primjer 3.1.13. Promotrimo metrički prostor $\mathbb{R}$ s euklidskom metrikom. Skup $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ jest prebrojiv pa je $\mathbb{Q}$ F_σ-skup. Propozicija 3.1.8 povlači da je $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ G_δ-skup.

Propozicija 3.1.14. *Skup iracionalnih brojeva $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nije F_σ-skup u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ F_σ-skup. Budući je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$ interior skupa $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je prazan. No, prema lemi 3.1.12. slijedi da je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ skup prve kategorije. Sada imamo:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

To povlači da je $\mathbb{R}$ skup prve kategorije, kao unija dva skupa prve kategorije. To je nemoguće, jer je prema Baireovom teoremu o kategoriji $\mathbb{R}$ skup druge kategorije. □

Korolar 3.1.15. *Skup $\mathbb{Q}$ nije G_δ-skup u $\mathbb{R}$.*

Definicija 3.1.16. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Za svaki $A \subseteq X$ definiramo **oscilaciju od f na A** s*

$$\omega_f(A) := \operatorname{diam}(f(A)) = \sup\{d_Y(f(x), f(x')) \ : x, x' \in A)\}.$$

*Nadalje, za svaku točku $x \in X$ definirmo **oscilaciju od f u x** s*

$$\omega_f(x) := \inf_{\varepsilon>0} \omega_f(K(x, \varepsilon)).$$

Propozicija 3.1.17. *Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako je $\omega_f(x_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U = K_X(x_0, \delta)$ točke x_0 takva da $x \in U$ povlači

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tada za proizvoljne x_1,$x_2 \in U$ vrijedi

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), f(x_0)) + d_Y(f(x_0), f(x_2)) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Slijedi da je $\omega_f(x_0) \leq \varepsilon$. Budući da to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$ slijedi da je $\omega_f(x_0) = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $\omega_f(x_0) = 0$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji okolina U točke x_0 takva da vrijedi

$$\sup\{d_Y(f(x_1), f(x_2)) : \ x_1, x_2 \in U\} < \varepsilon.$$

Neka je $\delta > 0$ takav da je $K_X(x_0, \delta) \subseteq U$. Tada za svaki $x \in K(x_0, \delta)$ vrijedi

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \sup\{d_Y(f(x_1), f(x_2)) : \ x_1, x_2 \in U\} < \varepsilon.$$

Dakle, $f(K_X(x_0, \delta)) \subseteq K_Y(f(x_0), \varepsilon)$, odakle slijedi da je f neprekidna u x_0. □

Lema 3.1.18. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je funkcija*

$$\omega_f : X \to [0, \infty], \quad \omega_f : x \longmapsto \omega_f(x)$$

odozgo poluneprekidna na X. Drugim riječima, za svaki $\alpha > 0$ skup

$$\{x \in X : \omega_f(x) < \alpha\}$$

je otvoren u X.

Dokaz. Neka su $\alpha > 0$ i $x_0 \in X$ takvi da je $\omega_f(x_0) < \alpha$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\omega_f(K_X(x, \varepsilon)) = \sup\{d_Y(f(x), f(x')) : x, x' \in K_X(x_0, \varepsilon)\} < \alpha.$$

Neka je $x_1 \in K_X(x_0, \varepsilon)$ proizvoljan i odaberimo sada $\delta > 0$ takav da je $K_X(x_1, \delta) \subseteq K_X(x_0, \varepsilon)$. Na primjer, možemo odabrati $\delta = \varepsilon - d_X(x_0, x_1)$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} \omega_f(x_1) &\leq \omega_f(K_X(x_1, \delta)) \\ &= \sup\{d_Y(f(x), f(x')) : x, x' \in K_X(x_1, \delta)\} \\ &\leq \sup\{d_Y(f(x), f(x')) : x, x' \in K_X(x_0, \varepsilon)\} \\ &< \alpha. \end{aligned}$$

Dakle, $K_X(x_0, \varepsilon)$ je sadržan u skupu $\{x \in X : \omega_f(x) < \alpha\}$ što povlači da je prethodni skup otvoren. □

Propozicija 3.1.19. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je $f : X \to Y$ funkcija. Vrijedi:*

(a) Skup svih točaka neprekidnosti $C(f)$ od f je G_δ-skup.

(b) Skup svih točaka u kojima funkcija f ima prekid je F_σ-skup.

Dokaz. (a). Imamo

$$C(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X : \omega_f(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Prema lemi 3.1.18 svi skupovi

$$\left\{x \in X : \omega_f(x) < \frac{1}{n}\right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

su otvoreni, prema tome $C(f)$ je G_δ-skup.

(b) Slijedi direktno iz (a) jer je komplement G_δ skupa F_σ-skup. □

Vratimo se sada na pitanje postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *koja je neprekidna samo u racionalnim brojevima, odnosno za koju vrijedi* $C(f) = \mathbb{Q}$*?*

Prema propoziciji 3.1.19, za svaku funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $C(f)$ *je* G_δ*-skup. S druge strane prema korolaru 3.1.15,* $\mathbb{Q}$ *nije* G_δ*-skup. Dakle, zaključujemo:*

Korolar 3.1.20. *Ne postoji funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *koja je neprekidna u svim racionalnim brojevima i koja ima prekid u svim iracionalnim brojevima.*

3.2 Nigdje derivabilna neprekidna funkcija

Većina neprekidnih realnih funkcija realne varijable s kojima se studenti susretnu tokom studija su svugdje derivabilne, osim eventualno u konačno ili prebrojivo mnogo točaka. Godine 1872. njemački matematičar Karl Weierstrass pronašao je primjer neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *koja je nigdje derivabilna, ta funkcija* f *je originalno definirana s:*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x),$$

gdje je $0 < a < 1$ *i* b *neparan prirodan broj takav da je* $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$*. Funkcija* f *je poznata pod nazivom* ***Weierstrassova funkcija****.*

Zapitajmo se sada koliko su derivabilne funkcije na $\mathbb{R}$ *zastupljene u prostoru svih neprekidnih funkcija? Odgovor na to pitanje je potpuno zapanjujuć, naime generička neprekidna funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je nigdje derivabilna. Prije nego dokažemo ovu tvrdnju označimo* $C([a, b])$ *skup svih neprekidninih funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Tada* $C([a, b])$ *postaje realan normiran prostor uz operacije definirane po točkma te max normu, to jest:*

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$
- $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

Norma $\| \cdot \|_\infty$ *se naziva* ***uniformna*** *ili* ***max-norma*** *i konvergencija s obzirom na tu normu se podudara sa standardnom uniformnom konvergencijom.*

Propozicija 3.2.1. *Neka je* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ *niz funkcija koji uniformno konvergira prema funkciji* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Ako su sve funkcije* f_n *neprekidne na* $[a, b]$*, tada je i funkcija* f *neprekidna na* $[a, b]$*.*

Dokaz. Trebamo pokazati da je f neprekidna u svakoj točki $x_0 \in [a, b]$. Neka je $x_0 \in [a, b]$ proizvoljna točka i $\varepsilon > 0$. Kako niz funkcija f_n uniformno konvergira prema f tada postoji

$n \in \mathbb{N}$ takav da je
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in [a, b].$$
Nadalje, svaka funkcija f_n jest neprekidna na $[a, b]$ pa postoji otvoreni interval I oko točke x_0 takav da vrijedi
$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in I \cap [a, b].$$
Tada za svaki $x \in I \cap [a, b]$ vrijedi:
$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
□

Propozicija 3.2.2. *Prostor $C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$ je Banachov prostor.*

Dokaz. Trebamo pokazati da je svaki Cauchyjev niz (f_n) u $C([a, b])$ konvergentan s obzirom na max-normu. Neka je $x \in [a, b]$ proizvoljna točka. Budući da za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \tag{3.1}$$
slijedi da je niz $(f_n(x))$ Cauchyjev u $\mathbb{R}$. Kako je $\mathbb{R}$ potpun tada postoji $\lim_n f_n(x)$. Na taj način dolazimo do funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Pokažimo da je funkcija f neprekidna, to jest $f \in C([a, b])$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i izaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq n_0. \tag{3.2}$$
Iz (3.1) i (3.2) slijedi da je
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq n_0 \text{ i } \forall x \in [a, b].$$
Zaključujemo da je
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \text{ i } \forall x \in [a, b].$$
Prema tome, niz (f_n) uniformno konvergira prema f pa je prema propoziciji 3.2.1 $f \in C([a, b])$. □

Lema 3.2.3. *Neka je $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija koji uniformno konvergira prema funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ako je f neprekidna u točki $x \in [a, b]$, tada za svaki niz (x_n) u $[a, b]$ iz $x_n \to x$ slijedi $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Dokaz. Neka je (f_n) niz funkcija koji uniformno konvergira prema f i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|f_n(y) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_1 \text{ i } \forall y \in [a, b]$$

Nadalje, budući da je f neprekidna u x postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|f(x_n) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_2.$$

Stavimo $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Slijedi za svaki $n \geq n_0$

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Teorem 3.2.4. *Generička neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nigdje derivabilna. Drugim riječima, skup svih neprekidnih funkcija na $[a, b]$ koje su nigdje derivabilne čine rezidualan skup u prostoru svih realnih neprekidnih funkcija na* $[0, 1]$.

Dokaz. Radi jednostavnosti oznaka dokaz provodimo za segment $[0, 1]$. Označimo s D skup svih funkcija $f \in C([0, 1])$ koje su derivabilne u barem jednoj točki $x \in [0, 1]$. Pokazat ćemo da je skup D skup prve kategorije u prostoru $C([0, 1])$ što povlači da je skup svih neprekidnih funkcija na $[0, 1]$ koje su nigdje derivabilne rezidualan u $C([0, 1])$. Dokaz provodimo u tri koraka:

(1) Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ definirajmo skupove

$$A_n := \left\{ f \in C([0, 1]) : \ \exists x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \text{ takav da je } |f(x + h) - f(x)| \leq nh, \ \forall\ 0 < h < \frac{1}{n} \right\}.$$

$$B_n := \left\{ f \in C([0, 1]) : \ \exists x \in [\frac{1}{n}, 1] \text{ takav da je } |f(x + h) - f(x)| \leq nh, \forall\ 0 < h < \frac{1}{n} \right\}.$$

Tvrdimo da su A_n i B_n zatvoreni podskupovi od $C([0, 1])$. Iskoristimo karakterizaciju zatvarača skupa. Skup A_n je zatvoren ako i samo ako je

$$A_n = \overline{A_n} = \{\lim_k f_k \mid (f_k) \text{ niz u } A_n \text{ koji uniformno konvergira u } C([0, 1])\}.$$

Neka je (f_k) niz funkcija u A_n koji uniformno konvergira prema nekoj funkciji $f \in C([0, 1])$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ odaberemo neki $x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ takav da je

$$|f_k(x + h) - f_k(x_k)| \leq nh, \qquad \text{za sve } 0 < h < \frac{1}{n}. \tag{3.3}$$

Prema Bolzano-Weiersstrasovom teoremu za nizove postoji podniz niza (x_k) koji konvergira prema nekoj točki $x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\lim_k x_k = x$. Kako je svaka funkcija f_k neprekidna, iz leme 3.2.3 slijedi

$$\lim_k f_k(x_k + h) = f(x + h) \tag{3.4}$$

i

$$\lim_k f_k(x_k) = f(x). \tag{3.5}$$

Uvrštavanjem (3.4) i (3.5) u (3.3) slijedi

$$|f(x + h) - f(x)| \leq nh, \quad \text{za sve } 0 < h < \frac{1}{n}.$$

Dakle $f \in A_n$, pa je prema tome A_n zatvoren u $C([0, 1])$.

Analogno ćemo pokazati zatvorenost skupa B_n. Neka je (f_k) niz funkcija u B_n koji uniformno konvergira prema nekoj funkciji $f \in C([0, 1])$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ odaberemo neki $x_k \in [\frac{1}{n}, 1]$ takav da je

$$|f_k(x + h) - f_k(x_k)| \leq nh, \quad \text{za sve } 0 < h < \frac{1}{n}.$$

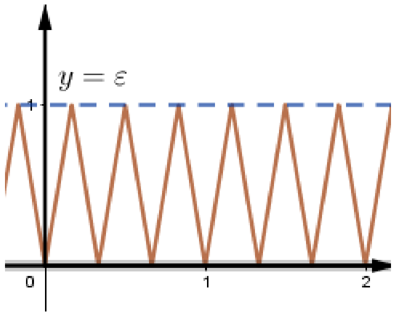
Prema Bolzano-Weiersstrasovom teoremu za postoji podniz niza (x_k) koji konvergira prema nekom $x \in [\frac{1}{n}, 1]$ te bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lim_k x_k = x$. Kako je svaka funkcija f_k neprekidna, pozivajući se ponovo na lemu 3.2.3 dobivamo

$$|f(x + h) - f(x)| \leq nh, \quad \text{za sve } 0 < h < \frac{1}{n}.$$

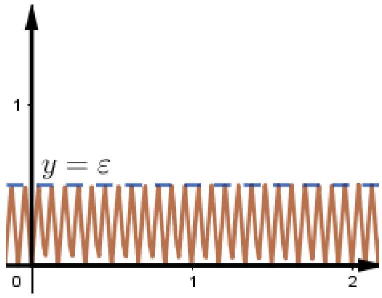
Dakle $f \in B_n$, to jest B_n je zatvoren u $C([0, 1])$.

(2) Skupovi A_n i B_n su nigdje gusti u $C([0, 1])$. Dokaz ćemo provesti za skup A_n budući je dokaz za B_n analogan. Trebamo pokazati da skup A_n ima prazan interior, to jest $\forall f \in A_n$ i $\forall r > 0, K(f, r) \not\subseteq A_n$. Fiksirajmo funkciju $f \in A_n$ i $\varepsilon > 0$. Definirajmo funkciju $\hat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kao $\frac{2\varepsilon}{3n}$- periodičku funkciju koja je na segmentu $[0, \frac{2\varepsilon}{3n}]$ zadana s

$$\hat{g}(x) := \begin{cases} 3nx, & \text{ako je } 0 \leq x \leq \frac{\varepsilon}{3n} \\ 2\varepsilon - 3nx, & \text{ako je } \frac{\varepsilon}{3n} \leq x \leq \frac{2\varepsilon}{3n}. \end{cases}$$



Slika 3.1: Graf funkcije $\hat{g}(x)$ za $\varepsilon = 1$ i $n = 2$.



Slika 3.2: Graf funkcije $\hat{g}(x)$ za $\varepsilon = 0.5$ i $n = 4$.

Funkcija $\hat{g}$ je po dijelovima linearna i neprekidna. Neka je funkcija g restrikcija od $\hat{g}$ na $[0, 1]$, to jest $g := \hat{g}|_{[0,1]}$. Tada za svaki $x \in [0, 1\rangle$ možemo naći dovoljno mali $h > 0$ takav da je

$$|g(x + h) - g(x)| = 3nh.$$

Definirajmo sada novu funkciju $\hat{f} := f + g$. Tada je $\hat{f} - f = g$ i $\|\hat{f} - f\|_\infty = \|g\|_\infty = \varepsilon$. Dakle, funkcija $\hat{f}$ se sigurno nalazi u kugli oko f radijusa 2ε. Nadalje, za proizvoljni $x \in [0, 1\rangle$ i dovoljno mali $h > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} nh &< 2nh = 3nh - nh \leq |g(x+h) - g(x)| - |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq |(g(x+h) - g(x)) - (f(x) - f(x+h))| = |\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)|. \end{aligned}$$

Zbog toga funkcija $\hat{f}$ ne pripada skupu A_n, ali kako se $\hat{f}$ nalazi u kugli $K(f, 2\varepsilon)$ slijedi da je $K(f, 2\varepsilon) \not\subseteq A_n$. Kako su funkcija $f \in A_n$ i $\varepsilon > 0$ su bili proizvoljni, zaključujemo da je Int A_n prazan. Time smo pokazali da je skup A_n nigdje gust u $C([0, 1])$.

(3) Pokazali smo da su svi skupovi A_n i B_n nigdje gusti, stoga je njihova prebrojiva unija

$$\Big(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\Big)$$

skup prve kategorije u $C([0,1])$. Budući da je skup D svih funkcija $f \in C([0,1])$ koje su derivavilne u barem jednoj točki segmenta $[0,1]$ podskup gornje unije, on je i sam skup prve kategorije kao podskup skupa prve kategorije. Zaključujemo da je $C([0,1]) \setminus D$ rezidualan u prostoru $C([0,1])$ što je i trebalo dokazati.

□

Napomena 3.2.5. *Koristeći slične arumente kao u dokazu teorema 3.2.4, može se pokazati da je generička neprekidna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nigdje monotona.*

Bibliografija

[1] R. P. Boas, A Primer of Real Functions, fourth edition, The Mathematical Association of America, Washington, 1996.

[2] Z. Čerin, Metrički prostori, skripta, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~cerin/METR.pdf` *(lipanj 2019.)*

[3] I. Gogić, Baireov teorem o kategoriji, rukopis, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/sn_Baire.pdf` *(lipanj 2019.)*

[4] I. Gogić, P. Pandžić, J. Tambača, Diferencijalni račun funkcija više varijabli, skripta, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/dif/Diferencijalni_racun.pdf` *(lipanj 2019.)*

[5] A. Liteanu, Baire category theorem, rukopis, University of Washington dostupno na `https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_14/papers/alana.pdf` *(lipanj 2019.)*

[6] J. C. Oxtoby, Measure and Category, second edition, Springer-Verlag, New York, 1980.

[7] C. C. Pugh, Real Mathematical Analysis, Springer-Verlag, New York, 2002.

[8] K. A. Ross, Elementary Analysis, second edition, Springer, New York, 2013.

[9] Š. Ungar, Matematička analiza u $\mathbb{R}^n$*, Golden marketing, Zagreb, 2005.*

Sažetak

Baireov teorem o kategoriji važan je teorem u matematici koji se često primjenjuje pri dokazivanju egzistencije elemenata koje je teško vizualizirati. Grubo govoreći, skupove metričkog prostora svrstavamo u tri kategorije. Skupovi prve kategorije su skupovi koje smatratamo "malima" odnosno zanemarivima u promatranom prostoru. Skupovi druge kategorije su oni skupovi koji nisu "mali", dok su rezidualni skupovi oni koje smatramo "velikima". Baireovi prostori definirani su kao metrički prostori u kojima je svaki rezidualan skup gust. Baireov teorem o kategoriji kaže da je svaki potpun metrički prostor Baireov prostor. U ovom radu dokazujemo Baireov teorem o kategoriji te dajemo razne primjere vezane uz spomenute koncepte. U zadnjem poglavlju rada prikazane su neke zanimljive primjene Baireovog teorema o kategoriji. Između ostalog, dokazujemo da su generičke neprekidne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nigdje derivabilne.*

Summary

The Baire category theorem is an important theorem in mathematics which is oftenly used in proving existence of elements which are hard to visualize. Speaking loosely, sets of a metric space are divided into three categories. Sets of the first category are sets that are considered as "small" or negligible in the observed space. Sets of the second category are those that are not "small", while the residual sets are considered "large". We define a Baire space as a metric space in which every residual set is dense. The Baire category theorem states that every complete metric space is a Baire space. In this thesis we prove the Baire category theorem and we present various examples of the mentioned concepts. In the last chapter of the thesis we present some interesting applications of the Baire category theorem. Among other things, we prove that generic continuous functions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *are nowhere differentiable.*

Životopis

Rođen sam 27. lipnja 1991. godine u Sisku. Osnovnoškolsko obrazovanje započeo sam 1998. godine u Osnovnoj školi 22.lipnja. Nakon završene osnovne škole upisao sam Gimnaziju Sisak. Preddiplomski sveučilišni studij nastavničkog smjera matematike upisao sam na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu 2010. godine te ga završio 2016. godine. Svoje fakultetsko obrazovanje nastavio sam upisom diplomskog studija matematike - smjer nastavnički, također na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.