Teorija brojeva i glazba

Kapitanić, Luka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Kapitanić

TEORIJA BROJEVA I GLAZBA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala dragoj mentorici izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić na ukazanom povjerenju, savjetima i usmjerenjima te na uloženom vremenu pri izradi ovog diplomskog rada.

Hvala mojim požrtvovnim roditeljima na nesebičnoj ljubavi i vjeri u mene, a i cijeloj obitelji na podršci i ljubavi koju su mi pružili tijekom mojeg obrazovanja.

Posebno hvala mojoj supruzi Aniti bez čije bi podrške i ljubavi sve ovo bilo puno teže.

Na kraju najviše hvala Onome koji mi je dao snage da izdržim sve obrazovne izazove i zahtjeve, koji mi je darovao sposobnosti i talente da budem to što jesam.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Motivacija i osnovni pojmovi **2**
1.1 Glazba kao pomoć pri učenju matematike 2
1.2 Neki osnovni pojmovi iz matematike 4
1.3 Neki osnovni pojmovi iz elementarne teorije brojeva 8
1.4 Osnovni pojmovi iz glazbe 13

2 Horizontalna struktura **20**
2.1 Trajanje nota 20
2.2 Ritam 26
2.3 Ponavljanje uzorka 28
2.4 Euklidski ritmovi 31

3 Vertikalna struktura **37**
3.1 *Glazbeni* val 37
3.2 Modularna aritmetika u glazbi 39
3.3 Ljestvice 43

Bibliografija **48**

Uvod

"Matematika i glazba za mene su cjeloživotna strast."
—David Wright

Što povezuje matematiku i glazbu? Na prvi pogled teško je uočiti povezanost glazbe i matematike, a još teže primjenu jedne u drugoj. No, ulazeći u bit jednog, odnosno drugog područja njihova međusobna povezanost postaje sve jača. Često je slučaj da osoba koja voli matematiku gleda na glazbu s divljenjem, ali kao nešto izvan njezinog dosega. U drugom slučaju osoba koja pronalazi svoju strast u glazbi često gleda na matematiku s kombinacijom straha i zaziranja. Nastojanja svih ljudi koji vole i jedno i drugo područje te istražuju njihove veze svode se na to da razbiju granicu između matematike i glazbe te da otvore most između njih. Možemo reći da je matematika povezana sa svim područjima ljudske djelatnosti koje na bilo koji način uključuju prostor i vrijeme. Ono što glazbu ističe među svim drugim umjetnostima, i što stvara njezinu neraskidivu vezu s matematikom je to što je ona u svojoj biti zasnovana na protoku vremena. Ta vremenska dimenzija glazbe povezuje glazbu s dijelom matematike koji se bavi funkcijama. No, ono što najviše povezuje matematiku i glazbu je nastojanje da uhvate skrivenu strukturu i harmoniju u svjetovima prožetim apstraktnim objektima. Traganje za harmonijom, simetrijom i redom u naizgled kaotičnom svijetu u kojem postoje beskonačne mogućnosti jest pravi smisao i matematike i glazbe. Ni matematiku ni glazbu ne možemo staviti u okvire ma koliko se trudili, primjeri su to područja koji imaju intelektualne, duhovne i kreativne temelje. Postoje brojne definicije i matematike i glazbe, no teško je definirati i jedno i drugo. Dok jedni smatraju glazbu kao neverbalan oblik komunikacije koji može doprijeti do najdubljih čovjekovih emocija, drugi prije svega ističu kako je glazba fenomen prirode, odnosno rezultat zakonitosti fizike i matematike, a da su ljudi samo otkrili i prepoznali kako manipulirati njome. Matematika je, s druge strane, proizašla iz različitih izazova i problema s kojima su se ljudi suočavali kroz povijest. No, i za glazbu i za matematiku će mnogi reći da predstavljaju univerzalni jezik koji ne poznaje granice i koji pomaže čovječanstvu da se poveže, bolje razumije i razvija iz dana u dan.

Poglavlje 1

Motivacija i osnovni pojmovi

1.1 Glazba kao pomoć pri učenju matematike

Učenje može biti teško za neke učenike. Mnoga istraživanja pokazala su da glazba može pomoći učenicima pripremiti se za nastavne jedinice dajući im energiju i potičući pamćenje i rad mozga. Uključivanje glazbe u matematiku može promijeniti dinamiku matematike čineći je ugodnijim iskustvom za svakoga. Matematika može biti teška tema za neke učenike, dok neki učenici jednostavno kliknu s matematikom, drugi trebaju dodatnu pomoć.

Učenje matematike pomoću glazbe

Kako se glazbeni ritam temelji na matematici, točnije razlomcima, u tom području lako možemo povezati učenje matematike s glazbom. Učenici se prvi put susreću s razlomcima u petom razredu osnovne škole te je upravo glazba jedan od najefikasnijih i najzanimljivijih načina učenja razlomaka, decimalnih brojeva i postotaka. Znanje o osnovama glazbenog ritma može se primijeniti u raznim matematičkim zadacima kao npr. u sljedeća četiri primjera:

1. Učenicima zadajemo notno crtovlje s nekoliko taktova, a oni ga trebaju popuniti notama po izboru koje zadovoljavaju zadanu mjeru:

Slika 1.1:

Na slici 1.1 je primjer zadatka u kojem učenici popunjavaju notno crtovlje notama različitim po trajanju uz zadanu mjeru. Zbroj "nota", odnosno razlomaka mora biti 1.

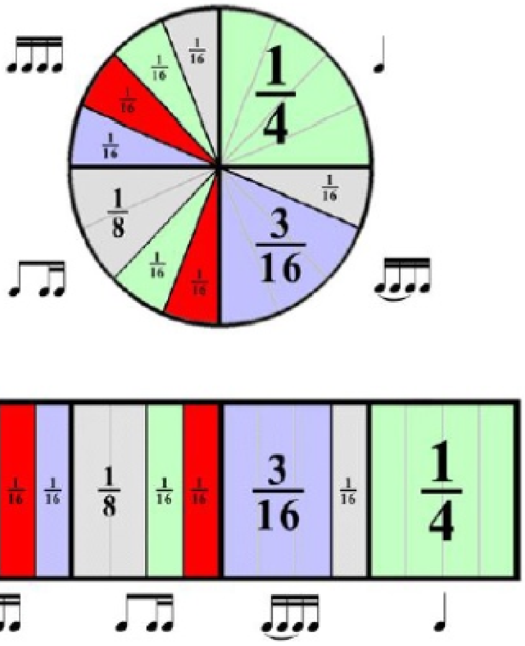
2. Učenicima zadajemo tablicu koju moraju popuniti na način da za svaku notu napišu pripadni razlomak, decimalni broj i postotak:

Ime note	Izgled	Razlomak	Decimalni broj	Postotak
cijela nota				
polovinka				
četvrtinka	♩	1/4	0,25	25%
osminka				
šesnaestinka				

Slika 1.2:

3. Sljedeći zadatak realiziramo kroz grupni rad. Razred podijelimo u četiri grupe i svaka grupa dobije jednu vrstu udaračkog instrumenta (olovka, lupanje rukama, nogama). Jedna grupa kuca samo polovinke, druga četvrtinke, treća osminke, a četvrta šesnaestinke. Kada nastavnik da znak grupe bi mijenjale ritam. Ovom vježbom učenici bi razvili osjećaj za ritam i za veličinu razlomka.

4. Jedan od zadataka može biti i krug (kružni dijagram), koji predstavlja jednu cijelu notu. Različite veličine kružnih isječaka predstavljaju različite note. Zadatak učenika je da popune kružni dijagram kako god žele koristeći dane kružne isječke kao na sljedećoj slici:



Slika 1.3:

1.2 Neki osnovni pojmovi iz matematike

Skupovi i brojevi

Pretpostavka je da poznajemo osnovne pojmove teorije skupova, kao što su pojmovi element skupa, podskup skupa, unija i presjek skupova, te funkcija s jednog skupa na drugi. Slijedeći standardnu notaciju, označit ćemo s $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva, $\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva i $\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva. Na tim skupovima imamo definiranu relaciju uređaja $\leq$ prema kojoj za svaka dva (realna) broja x i y vrijedi točno jedna od tvrdnji: $x < y$, $x > y$, $x = y$. Ako su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i vrijedi $a < b$ i $c > 0$, tada slijedi $ac < bc$.

Relacija ekvivalencije

Neka su A i B neprazni skupovi. Skup svih uređenih parova (a, b) gdje je $a \in A$ i $b \in B$ naziva se *Kartezijev produkt skupova* A i B. Označava se s $A \times B$. Dakle,

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Definicija 1.2.1. *Neka su A i B neprazni skupovi. Podskup ρ Kartezijevog produkta $A \times B$ zovemo* relacija. *Kažemo da je element $a \in A$ u relaciji ρ s elementom $b \in B$, u oznaci $a \, \rho \, b$, ako je $(a, b) \in \rho$.*

Binarna relacija *na skupu A je svaki podskup od $A^2 = A \times A$.*

Definicija 1.2.2. *Neka je $\sim$ binarna relacija na nepraznom skupu A. Kažemo da je $\sim$* relacija ekvivalencije *ako vrijede sljedeća svojstva:*

1. refleksivnost*:* $(\forall x \in X)(x \sim x)$*;*
2. simetričnost*:* $(\forall x, y \in X)(x \sim y \Rightarrow y \sim x)$*;*
3. tranzitivnost*:* $(\forall x, y, z \in X)((x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z)$.

Relacija uređaja $\leq$ na skupu realnih brojeva je relacija ekvivalencije.

Intervali

Definicija 1.2.3. Otvoreni interval *realnih brojeva $\langle a, b\rangle$, određen s dva realna broja a, b, $a < b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$, tj.*

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} |\, a < x < b\}.$$

Definicija 1.2.4. Zatvoreni interval *ili* segment *realnih brojeva $[a, b]$, određen s dva realna broja a, b, $a \leq b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leq x \leq b$, tj.*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\, a \leq x \leq b\}.$$

Pored otvorenih i zatvorenih intervala definiraju se i poluotvoreni intervali:

$$[a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} |\, a \leq x < b\}, \langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\, a < x \leq b\}.$$

Za $a \in \mathbb{R}$ skupovi svih realnih brojeva x većih, većih ili jednakih, manjih, odnosno manjih ili jednakih od a nazivaju se *beskonačni intervali*:

$$\langle a, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}, \ [a, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\},$$

$$\langle -\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}, \ \langle -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}.$$

Za beskonačne intervale $\langle 0, \infty\rangle$ i $\langle -\infty, 0\rangle$ često koristimo oznake $\mathbb{R}^+$ i $\mathbb{R}^-$.

Funkcije i grafovi

Definicija 1.2.5. *Neka su A i B neprazni skupovi i f pravilo po kojem se svakom elementu skupa A pridružuje jedan element skupa B. Uređena trojka (A, B, f) naziva se* preslikavanje *ili* funkcija *skupa A u skup B. Pišemo $f : A \to B$.*

Skup A naziva se područje definicije *ili* domena*, skup B* područje vrijednosti *ili* kodomena*, a f* pravilo *ili* zakon preslikavanja*.*

Skup

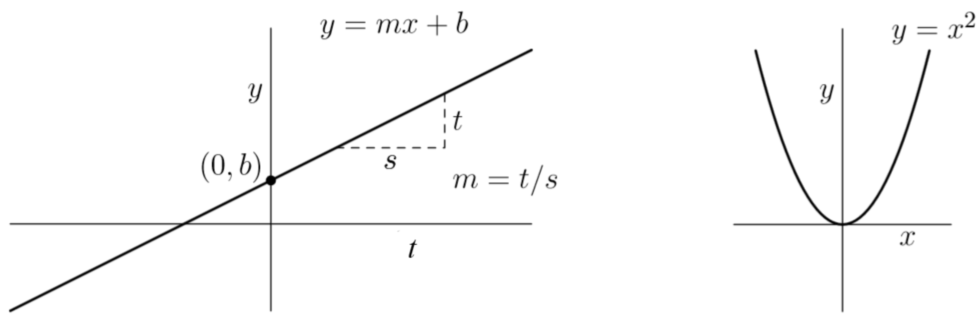
$$S(f) = \{f(x)|a \in A\} \subseteq B$$

naziva se slika funkcije*.*

Funkciju čija je domena $\mathbb{N}$ ili $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazivamo *niz*. Na primjer, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je *realan niz* kojeg standardno označavano s (a_n) pri čemu je $a_n = a(n)$. U radu ćemo u odsječku 3.3 spomenuti *Fibonaccijev niz*, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., najpoznatiji rekurzivno zadani niz koji se pojavljuje u prirodi, arhitekturi, glazbi itd.

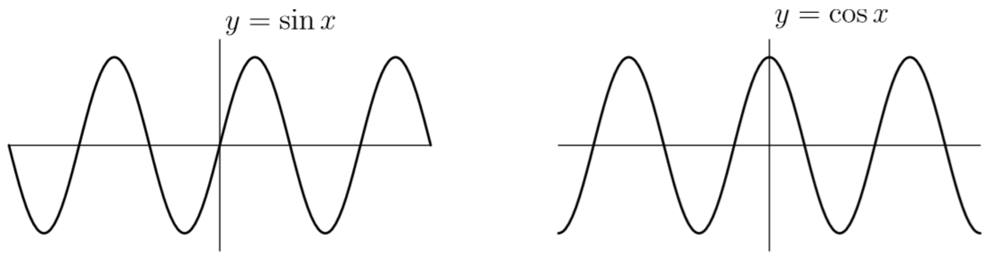
Definicija 1.2.6. Graf funkcije *$f : A \to B$, u oznaci Γ_f, je skup svih uređenih parova $(x, f(x))$, $x \in A$, odnosno $\Gamma_f = \{(x, f(x))|x \in A\} \subseteq A \times B$.*

Mi ćemo se ograničiti na realne funkcije realne varijable, odnosno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kada je funkcija zadana propisom, a domena joj je $\mathbb{R}$, onda često pišemo samo $y = f(x)$, gdje je x *nezavisna* varijabla, a y *zavisna* varijabla. Kada nezavisna varijabla parametrizira vrijeme, onda često pišemo $y = f(t)$. Graf funkcije $y = mt + b$, gdje su $m, b \in \mathbb{R}$, pravac koji ima *nagib* ili *koeficijent smjera* m i *odsječak* b na osi y. Graf funkcije $y = x^2$ je parabola s tjemenom u ishodištu.



Slika 1.4: Grafovi funkcija $y = mt + b$ i $y = x^2$

Dvije funkcije koje su posebno relevantne za glazbu su trigonometrijske funkcije $y = \sin x$ i $y = \cos x$.



Slika 1.5: Grafovi funkcija $y = \sin x$ i $y = \cos x$

Transformacije grafova

Vrlo je korisno znati skicirati graf funkcije koja je nastala transformacijama grafova osnovnih elementarnih funkcija. Neka je $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$:

1. *Vertikalni pomak*: Graf funkcije $(f + c)(x) = f(x) + c$ dobiva se pomicanjem grafa funkcije $y = f(x)$ prema gore za c ako je $c > 0$, odnosno prema dolje za $|c|$ ako je $c < 0$.

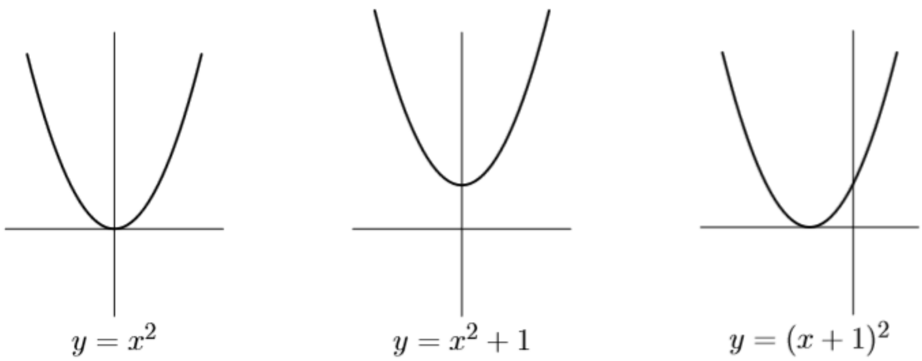
2. *Horizontalni pomak*: Graf funkcije $g(x) = f(x - c)$ dobiva se pomicanjem grafa funkcije $y = f(x)$ udesno za c ako je $c > 0$, odnosno ulijevo za $|c|$ ako je $c < 0$.

3. *Zrcaljenje*: Graf funkcije $(-f)(x) = -f(x)$ dobiva se zrcaljenjem s obzirom na x-os grafa funkcije $y = f(x)$. Graf funkcije $g(x) = f(-x)$ dobiva se zrcaljenjem s obzirom na y-os grafa funkcije $y = f(x)$.

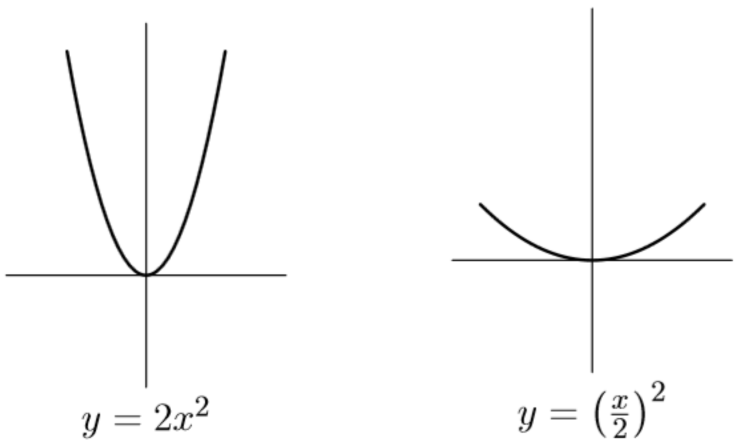
4. *Vertikalno rastezanje/stezanje*: Ako je $c > 1$, graf funkcije $(cf)(x) = c \cdot f(x)$ dobiva se rastezanjem grafa funkcije $y = f(x)$ vertikalno c puta. Ako je $0 < c < 1$, onda se graf steže (kontrahira). U slučaju $c < 0$ imamo i dodatno zrcaljenje u odnosu na x-os.

5. *Horizontalno rastezanje/stezanje*: Ako je $0 > c > 1$, $g(x) = f(x/c)$ dobiva se rastezanjem grafa $y = f(x)$ vodoravno, odnosno u u smjeru x-osi. Ako je $c > 1$, graf se sužava vertikalno. U slučaju $c < 0$ imamo i dodatno zrcaljenje grafa u odnosu na y-os.

U nastavku su grafovi koji ilustriraju neke od tih transformacija za funkciju $y = x^2$:



Slika 1.6: Transformacije grafa funkcije $y = x^2$



Slika 1.7: Transformacije grafa funkcije $y = x^2$

1.3 Neki osnovni pojmovi iz elementarne teorije brojeva

Pojam djeljivosti

Definicija 1.3.1. *Neka su $a \neq 0$ i b cijeli brojevi. Kažemo da je b* djeljiv *s a, odnosno da a* dijeli *b, ako postoji cijeli broj x takav da je $b = ax$. To zapisujemo kao $a|b$. Ako*

b nije djeljiv sa a, onda pišemo $a \nmid b$.

Teorem 1.3.1 (Teorem o dijeljenju s ostatkom)**.** *Za proizvoljan prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r, 0 \leq r < a$.*

Dokaz. Promotrimo skup $\{b - am : m \in \mathbb{Z}\}$. Najmanji nenegativni član ovog skupa označimo sa r. Tada je po definiciji $0 \leq r < a$ i postoji $q \in \mathbb{Z}$ takav da je $b - qa = r$, tj. $b = qa + r$. Da bi dokazali jedinstvenost od q i r, pretpostavimo da postoji još jedan par q_1, r_1 koji zadovoljava iste uvjete. Pokažimo najprije da je $r_1 = r$. Pretpostavimo da je npr. $r < r_1$. Tada je $0 < r_1 - r < a$, dok je s druge strane $r_1 - r = a(q - q_1) \geq a$. Prema tome je $r_1 = r$, pa je stoga i $q_1 = q$. □

Uzastopnom primjenom Teorema o dijeljenju s ostatkom dobivamo jedan od najpoznatijih matematičkih algoritama, Euklidov algoritam. Njega ćemo prikazati u odsječku 2.4.

Kongruencije

Definicija 1.1. *Neka su $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Kažemo da je a* kongruentan *b* modulo *m, $a \equiv b \pmod{m}$, ako m dijeli razliku $a - b$. U protivnom, kažemo da a* nije kongruentan *b* modulo *m i pišemo $a \not\equiv b \pmod{m}$.*

Uočimo da *biti kongruentan modulo m* predstavlja binarnu relaciju na skupu $\mathbb{Z}$. Nadalje, ako *a kongruentan b modulo m*, onda postoji $k \in \mathbb{Z}$ za koji je $a = b + mk$. Koristeći taj prikaz kongruentnih brojeva lako možemo dokazati neka osnovna svojstva kongruencija koja navodimo u sljedećim propozicijama.

Propozicija 1.2. *Neka su $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Vrijedi da je $a \equiv b \pmod{m}$ ako i samo ako a i b daju iste ostatke pri dijeljenju s m.*

Propozicija 1.3. *Relacija* biti kongruentan modulo *m je relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z}$.*

Posljedica prethodne propozicije jest da se skup $\mathbb{Z}$ *raspada* na *klase.* Ako relaciju biti kongruentan modulo m označimo s $\sim$, onda klasu ekvivalencije označavamo s

$$[n] = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \sim n\}.$$

U našem slučaju postoji točno m klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju biti kongruentan modulo m. Skup svih klasa ekvivalencije naziva se kvocijentni skup i označava s $\mathbb{Z}/_\sim$ ili $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Dakle,

$$\mathbb{Z}/_\sim = \{[0], [1], [2], \ldots, [m-1]\}.$$

Štoviše, budući da skup $\mathbb{Z}$ ima strukturu prstena, uz standarno zbrajanje i množenje, ima je i kvocijentni skup $\mathbb{Z}/_{\sim}$. Naime, zbrajanje i množenje klasa se definira prirodno kao

$$[a] + [b] = [a + b], \; [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

Na drugi način, strukturu možemo uvesti i na skup potpunih ostataka modulo m, tj. na skup

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}.$$

Definiramo binarne operacije zbrajanja i množenja modulo m

$$+_m : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m, \; \cdot_m : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$$

na sljedeći način: za $a, b \in \mathbb{Z}_m$ definiramo $a +_m b$ kao ostatak pri dijeljenju $a + b$ brojem m, te analogno $a \cdot_m b$ je ostatak pri dijeljenju $a \cdot b$ brojem m. Pokazat ćemo da je $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ prsten, odnosno polje ako i samo ako je m prost broj. Operacije zbrajanja i množenja modulo m nazivamo još *modularnom aritmetikom.*

Definicija 1.3.2. *Neka je G neprazan skup i $\cdot$ preslikavanje s domenom $G \times G$. Uređeni par $(G, \cdot)$ je* grupa *ako vrijede sljedeća svojstva:*

(i) (zatvorenost) $xy \in G$ za sve $x, y \in G$,

(ii) (asocijativnost) $(xy)z = x(yz)$ za sve $x, y, z \in G$,

(iii) (neutralni element) Postoji $e \in G$ takav da je $ex = xe = x$ za sve $x \in G$,

(iv) (inverzni element) Za svaki $x \in G$ postoji $y \in G$ takav da je $xy = yx = e$.

Ako vrijedi i svojstvo

(v) $xy = yx$ za sve $x, y \in G$,
onda je $(G, \cdot)$ komutativna *ili* Abelova grupa.

Definicija 1.3.3. *Neka je R neprazan skup na kojem su definirane dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$. Kažemo da je uređena trojka $(R, +, \cdot)$* prsten *ako vrijedi*

(i) $(R, +)$ je Abelova grupa,

(ii) $(R, \cdot)$ je polugrupa (to jest operacija $\cdot$ je asocijativna),

(iii) svojstvo distributivnosti operacije $\cdot$ obzirom na operaciju $+$:

$$x(y + z) = xy + xz, (x + y)z = xz + yz,$$

za sve $x, y, z \in R$

Neutralni element grupe $(R,+)$ *naziva se* nula *i označava s 0. Ukoliko postoji neutralni element strukture* $(R,\cdot)$ *onda se on naziva* jedinica *i označava s* 1*, a* $(R,+,\cdot)$ *se tada naziva* prsten s jedinicom*. Ukoliko je operacija* $\cdot$ *komutativna, onda govorimo o* komutativnom prstenu*.*

Definicija 1.3.4. *Komutativni prsten s jedinicom* $(R,+,\cdot)$ *u kojem je svaki element* $x \in R\backslash\{0\}$ *invertibilan naziva se* polje*.*

Propozicija 1.4. *Neka je* $m \in \mathbb{N}$ *i* $m > 1$*. Skup* $\mathbb{Z}_m$ *ima strukturu Abelove grupe s obzirom na zbrajanje modulo* m

Dokaz. Ispitujemo svojstva grupe iz Definicije 1.3.2.

(i) Zatvorenost vrijedi prema definiciji.

(v) Operacija $+_m$ je očito komutativna.

(ii) Svojstvo asocijativnosti nije sasvim jednostavno za pokazati. Neka je

$$(x +_m y) +_m z = r +_m z = s,$$

gdje je

$$x + y = km + r, \tag{1.1}$$

$$r + z = lm + s, \tag{1.2}$$

za $k, l \in \mathbb{Z}$ i $r, s \in \mathbb{Z}_m$. Nadalje, neka je $y +_m z = t$, to jest

$$y + z = pm + t, \tag{1.3}$$

za $p \in \mathbb{Z}$ i $t \in \mathbb{Z}_m$. Ako zbrojimo jednakosti (1.1), (1.2) i (1.3) pomnoženu s -1 dobit ćemo

$$x + t = (k + l - p)m + s,$$

odnosno $x +_m t = s$ pa je

$$x +_m (y +_m z) = x +_m t = s,$$

što je i trebalo pokazati.

(iii) Broj 0 je neutralni element.

(iv) Suprotni element (inverz) od $x \in \mathbb{Z}_m\backslash\{0\}$ je $m - x$, a element 0 je sam sebi inverz.

□

Abelova grupa $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ naziva se *grupa ostataka modulo m*.

Propozicija 1.5. *Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $m > 1$. Skup $\mathbb{Z}_m$ ima strukturu komutativne polugrupe s jedinicom s obzirom na zbrajanje modulo m.*

Dokaz. Svojstva zatvorenosti i komutativnosti su očita. Asocijativnost se pokazuje slično kao u dokazu Propozicije (1.4). □

Korolar 1.6. $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ *je komutativan prsten s jedinicom.*

Linearna kongruencija $ax \equiv b \pmod{m}$ ima rješenja ako i samo ako najveći zajednički djelitelj brojeva a i m, $\gcd(a, m)$, dijeli b. U tom slučaju kongruencija ima točno $d = \gcd(a, m)$ rješenja u skupu $\mathbb{Z}_m$. Specijalno, ako je $\gcd(a, m) = 1$, onda je rješenje kongruencije $ax \equiv b \pmod{m}$ u $\mathbb{Z}_m$ jedinstveno. Dakle, ako pretpostavimo da je $\gcd(a, m) = 1$ onda postoji jedinstveni $a' \in \mathbb{Z}_m$ takav da je $aa' \equiv 1 \pmod{m}$, odnosno drugačije pisano $a \cdot_m a' = 1$, tj. a' je multiplikativni inverz od a. Skup svih invertibilnih elemenata u polugrupi s jedinicom (monoidu) čini grupu. Stoga je grupa invertibilnih elemenata u $(Z_m, \cdot_m)$, u oznaci $\mathbb{Z}_m^*$, jednaka skupu svih elemenata iz Z_m koji su relativno prosti s m,

$$\mathbb{Z}_m^* = \{a \in \mathbb{Z}_m \mid \gcd(a, m) = 1\}.$$

Očito je $\mathbb{Z}_p^* = \{1, \ldots, p-1\} = \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$ za p prost i stoga vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 1.7. $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ *je polje ako i samo ako je m prost broj.*

Napomenimo da je grupa $\mathbb{Z}_m$ *ciklička*. Grupa je ciklička ako se svi elementi mogu generirati uzastopnom primjenom binarne operacije, koja određuje tu grupu, te uzimanjem inverza na samo jedan element te grupe. Taj se element naziva *generatorom* grupe. Generatori grupe $\mathbb{Z}_m$ su svi elementi $a \in \mathbb{Z}_m$ koji su relativno prosti s m. Dakle, ako je $a \in \mathbb{Z}_m$, $\gcd(a, m) = 1$, tada je

$$\mathbb{Z}_m = \{n \cdot_m a \,|\, n \in \mathbb{Z}_m\}.$$

Primjer 1.8. Generatori grupe $\mathbb{Z}_{12}$ su 1, 5, 7 i 11. Ako je $a = 5$ dobivamo:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n \cdot_m a$	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7

Za $a = 2$ dobiva se

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n \cdot_m a$	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10

pa je podgrupa generirana s 2 jednaka $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

1.4 Osnovni pojmovi iz glazbe

Tonovi

Glazbeni ton je rezultat pravilne vibracije koja se prenosi kroz zrak kao zvučni val. On je izražajno sredstvo glazbene umjetnosti koji nastaje pravilnim titranjem nekog elastičnog tijela (žice, jezika,...). Osobine tona jesu: trajanje, visina, jačina i boja. *Visina tona* je frekvencija vibracije. Frekvencija se obično izražava u ciklusima po sekundi, odnosno mjernom jedinicom herc (ime po njemačkom fizičaru Heinrichu Hertzu (1857-1894)), oznaka Hz. Osnova na kojoj se temelje svi pristupi učenju glazbe je poznavanje i razumijevanje glazbene teorije, odnosno notnog pisma i glazbenih zakonitosti. *Note* su grafički simboli tonova. Njima se predočava visina tona i svojim oblikom prikazuju odnose međusobnih trajanja. *Notno crtovlje* služi za označavanje nota i glazbenih znakova. Sastoji se od pet crta i četiri praznine, (koje brojimo odozdo prema gore).

U glazbi postoji mnogo tonova koji se nalaze na različitim visinama i njihove pozicije se razlikuju od instrumenta do instrumenta. Da bi se točno odredilo mjesto tona, njegovo ime i visina, koriste se ključevi, bas (F) i violinski (G) ključ. Violinski ključ piše se od druge crte i označava poziciju note G. F-ključ ili bas ključ piše se od četvrte crte i označava poziciju note F.

Slika 1.8: Prikaz tona C u violinskom i bas ključu

Na primjer frekvencija standarnog tona A iz "srednje" oktave, odnosno prve oktave se obično definira kao 440 Hz, to jest 440 perioda u sekundi. Poznata je kao *koncertni ton*, na koji se orkestar ugađa, a u violinskom ključu nalazi se u drugoj praznini.

Slika 1.9: Ton A u notnom crtovlju

Note

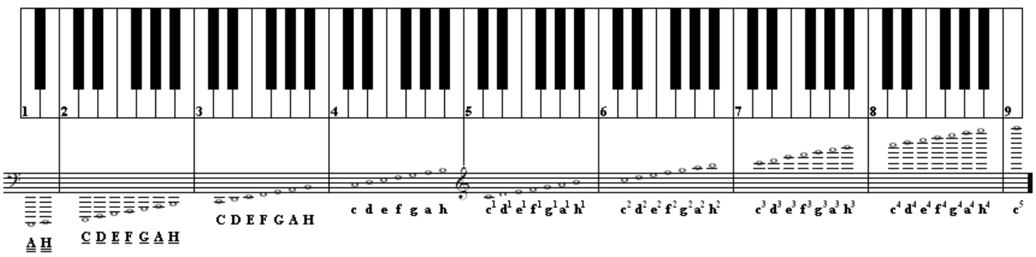
Raspon od početne frekvencije nekog tona do dvostruke početne frekvencije naziva se *oktava*. Zanimljivo je da ti tonovi čiji je frekvencijski odnos 1 : 2, zvuče ljudskom uhu "isto". Pod tim mislimo da na primjer frekvenciju 880 Hz čujemo kao 440 Hz samo u višem registru. Oktava se dijeli na dvanaest dijelova. Tih 12 tonova imenuju se sa 7 različitih slova: C, D, E, F, G, A, H i 5 onih kojima se dodaje sufiks *is*. Konkretno taj notni slijed između dvije oktave (bez zadnje note) glasi:

C, Cis, D, Dis, E, F, Fis, G, Gis, A, Ais, H.

Napominjemo da je u literaturi engleskog govornog područja nota H obično označena s B dok će kod nas nota B odgovarati noti Ais (tzv. povišena nota A ili snižena nota H).

Slika 1.10: Note na klavijaturi

Note je za početak najbolje vizualno predočiti na klavijaturi kao na slici 1.4. Vidimo da bijele tipke odgovaraju notama C, D, E, F, G, A, H, a crne "notama sa sufiksom" Cis, Dis, Fis, Gis, Ais.



Slika 1.11: Sve oktave na klavijaturi

Oktave imenujemo prema visini i to su *praduboka*, *duboka*, *velika*, *mala*, *prva*, *druga*, *treća*, *četvrta* i *peta oktava*. Standardna klavijatura obuhvaća 7 punih, dvije note praduboke i jednu notu pete oktave. Oznake za note s obzirom na oktavu kojoj pripadaju mogu se vidjeti na slici 1.4 kao i njihov položaj u crtovlju. U dijelu literature oznake za prve tonove u svakoj od 9 oktava su : $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_8$. Mi ćemo rabiti obje vrste oznaka.

Glazbeni intervali

Glazbeni interval je razmak između dva tona, odnosno dvije note i to se razlikuje od pojma intervala u matematici. Intervale ćemo karakterizirati prema tzv. veličini intervala, tj. prema udaljenosti između dvije note. Klavir je ugođen po principu tzv. *temperirane ljestvice oktava*, što znači da je interval između bilo koje dvije susjedne tipke (bijele ili crne) jednak, odnosno da su sve frekvencije susjednih tonova u istom omjeru. Taj se interval naziva *poluton* ili *polustepen*. Već smo spomenuli da se frekvencija nekog tona i tona za oktavu višeg odnose kao 1 : 2. Dakle, ako početni ton ima frekvenciju f_0, ton oktavu više ima frekvenciju $f_{12} = 2f_0$. Izračunajmo koliki je odnos frekvencija između dva polutona, $f_i : f_{i-1} = x$. Frekvencije nota iz jedne oktave su f_0, $f_1 = f_0 x$, $f_2 = f_0 x^2$, $\ldots$, $f_{11} = f_0 x^{11}$, dakle čine geometrijski niz, te za frekvenciju prve note sljedeće oktave vrijedi

$$f_0 x^{12} = 2f_0.$$

Stoga je

$$\ln x = \frac{\ln 2}{12},$$

odnosno

$$x = e^{\frac{\ln 2}{12}} \approx 1.059463094359.$$

Dakle, svaki susjedni poluton ima frekvenciju približno 5.95% višu od prethodnog tona.

Prvi i najmanji interval je ponovljeni (isti) ton i naziva se *prima*. Interval koji se sastoji od jednog polutona naziva se *mala sekunda*, a onaj od dva polutona naziva se *velika sekunda*. Svi ostali intervali mogu se naći u tablici 1.2. Osnovna podjela intervala je na *čiste* (prima, kvarta, kvinta, oktava) i *velike/male* (sekunda, terca, seksta, septima). Napomenimo da svi intervali mogu biti povećani i smanjeni (s iznimkom prime koja ne može biti smanjena) ali nam većina takvih nije interesantna jer npr. povećana sekunda zvuči kao mala terca jer se oba intervala sastoje od 3 polustepena, a razlikuju se samo u notnom zapisu. (Interval Ces-Dis zvao bi se povećana sekunda, a Ces-Es mala terca).

naziv	oznaka	broj polutonova (veličina intervala)
(čista) prima	č1	0
mala sekunda	m2	1
velika sekunda	v2	2
mala terca	m3	3
velika terca	v3	4
(čista) kvarta	č4	5
povećana kvarta (snižena kvinta	p4 s5	6 6)
(čista) kvinta	č5	7
mala seksta	m6	8
velika seksta	v6	9
mala septima	m7	10
velika septima	v7	11
(čista) oktava	č8	12

Tablica 1.1: Glavni intervali

Intervali se precizno mjere u jedinicama koji se nazivaju *centili*. *Cent* je stoti dio polutona i označava se sa s. Dakle,

$$s^{100} = x,$$

odnosno

$$s^{1200} = x^{12} = 2,$$

pa je $s = \sqrt[1200]{2} \approx 1.00058$. Stoga u logaritamskoj skali izraženoj u centilama intervali imaju vrijednosti:

interval	č1	m2	v2	m3	v3	č4	p4	č5	m6	v6	m7	v7	č8
cent	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

Tablica 1.2: Glavni intervali u centilama

Klasična harmonija dijeli intervale na *konsonantne* (svi čisti, m3, v3, m6, v6) i *disonantne* (m2, v2, p4/s5, m7,v7). Konsonantni intervali zvuče ugodno, dok disonantni zvuče nedorečeno i traže “rješenje” (tj. pomak za poluton prema gore ili dole od posljednjeg tona u intervalu). Danas se više gube takve podjele koje intervale svrstavaju u ugodne ili neugodne jer suvremena glazba obiluje disonantnim intervalima, a ipak ima veliku slušateljsku publiku (Stravinski, Sweeney). Nadalje, takve podjele vezane su najviše uz europsku glazbu i kulturološke su prirode. Zanimljivo je da indijska glazba sadrži "mikrotonove", intervale manje od polutona, i europljanima zvuči neuobičajeno i strano.

Napomenimo da se intervali koji imaju razmak veći od oktave zovu složeni intervali. Oni se tvore kao spajanje oktave i jednog osnovnog intervala. Tako ako na oktavu nadodamo sekundu dobivamo tzv. *nonu* - razmak od 9 tonova.

Predznaci

Note se mogu mijenjati korištenjem povisilica ($\sharp$) i snizilica ($\flat$). Povisilica postavljena neposredno prije note uz glavu note podiže visinu tona za poluton, a snizilica spušta visinu tona za poluton, dok razrješilica ($\natural$) poništava učinak povisilice ili snizilice. Glazbeni zapis također ponekad koristi dvostruku povisilicu ($\sharp\sharp$) ili dvostruku snizilicu ($\flat\flat$) koji mijenjaju visinu tona za dva polutona. Klasu takvih izmijenjenih nota označavamo pisanjem povisilice ili snizilice u eksponentu, kao $D^\sharp$ ili $A^\flat$. Ove oznake koje koristimo za promjenu visine tonova nazivaju se *predznaci*. Povišene note imaju sufiks *is*, a snižene *s* ili *es* pri čemu sniženu notu H čitamo B. Napominjemo da je $F^\sharp$ ista klasa nota kao $G^\flat$ i da je $C_5^\flat$ ista nota kao i H_4. Kada dvije note imaju istu visinu tona na ovaj način, kažemo da su *enharmonijski ekvivalentne*.

Ljestvice

Ljestvica je uzlazni ili silazni niz tonova u kojem su tonovi poredani po određenim glazbenim pravilima koji karakteriziraju pojedinu vrstu ljestvice. Dobivaju nazive po prvom tonu ljestvice, vrsti intervala od kojih su građene (dijatonska, kromatska) te postoje posebni nazivi (istarska, pentatonska, balkanska). Koriste se za melodijsku i harmonijsku građu u glazbi. Najzastupljenije su dur-ljestvica i mol-ljestvica. One pripadaju dijatonskim ljestvicama jer su po poretku tonova građene od polutonova i cijelih tonova. Imena dur-ljestvica pišu se velikim, a imena mol-ljestvica malim slovima.

Dijatonska dur-ljestvica

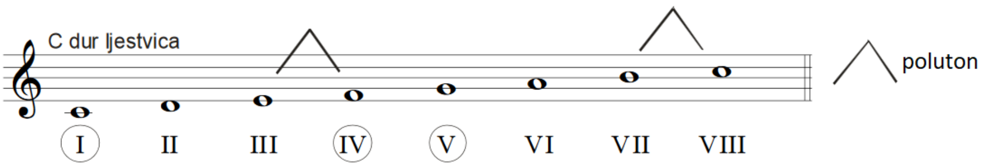
Dur-ljestvica je niz od osam uzastopnih tonova poredanih u razmacima od sekunde zaključno s oktavom.

Slika 1.12: C-dur ljsetvica

U svakoj dur-ljestvici razmještaj polutonova i cijelih tonova mora biti poredan istim redoslijedom. Najmanji razmak ili poluton uvijek se nalazi između trećeg i četvrtog i između sedmog i osmog tona. Ostali razmaci su uglavnom cijeli tonovi.

Stupnjevi ljestvice

Svaki ton u ljestvici ima svoj položaj i ulogu. Stupanj je naziv za položaj tona u ljestvici, a označavamo ga rimskim brojem.

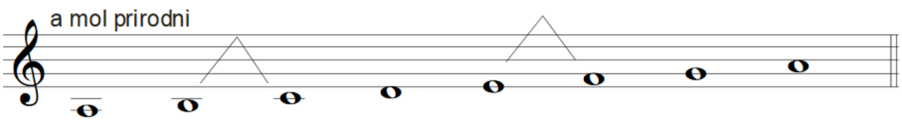


Slika 1.13: Stupnjevi C-dur ljestvice

Svaka ljestvica ima tri glavna stupnja koji su vrlo važni za harmonizaciju melodije, a to su: tonika (I), subdominanta (IV) i dominanta (V).

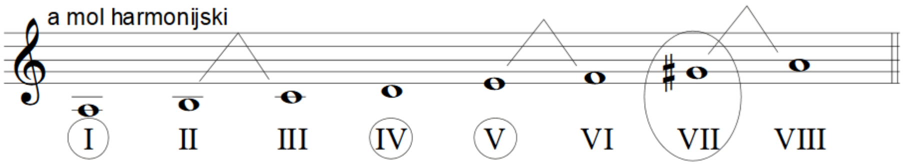
Dijatonske mol-ljestvice

Mol-ljestvica je također niz od osam uzastopnih tonova, ali drugačijeg rasporeda polutonova i cijelih tonova. Postoje tri vrste mol-ljestvice: prirodna, harmonijska, melodijska. Svaka mol-ljestvica ima iste predznake kao i njena paralelna dur-ljestvica zato što na šestom stupnju svake dur-ljestvice gradimo mol-ljestvicu.



Slika 1.14: a-mol prirodni

U svakoj prirodnoj mol-ljestvici polutonovi se nalaze između drugog i trećeg i između petog i šestog stupnja. Harmonijska ljestvica je karakteristična po povišenom VII. stupnju



Slika 1.15: A-mol harmonijski

Polustepeni se nalaze na tri mjesta, a glavni stupnjevi su kao i u dur-ljestvici. Melodijska ljestvica je karakteristična po povišenom VI. i VII. stupnju kad je uzlazna, a silazno je ista kao i prirodna.

Slika 1.16: A-mol melodijski

Poglavlje 2

Horizontalna struktura

Pod pojmom *horizontalne strukture* u glazbi mislimo na trajanje pojedinih nota, odnosno *ritam* s kojim ćemo se najviše baviti u ovom poglavlju. Kao vezu s teorijom brojeva ističemo tzv. *euklidske ritmove* koji se mogu generirati pomoću Euklidovog algoritma za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja. Melodija se isto može analizirati horizontalno, no i vertikalno ako razmake među notama, odnosno intervale shvatimo kao diskretne vertikalne pomake.

2.1 Trajanje nota

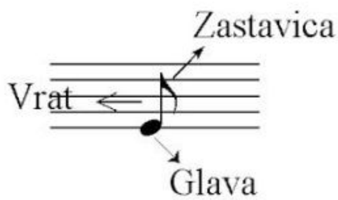
Razlike u trajanju nota očituju se po obliku kojim su note napisane. Razlikujemo ih po nazivima i različitim trajanjima. U zapadnoj glazbi nazivi nota temelje se na *cijeloj noti*, koja ima trajanje u otkucajima (često četiri otkucaja) definirano zadanom mjerom. Note za koje vrijedi da je omjer njihova trajanja i trajanja cijele note jednak $\frac{1}{2^n}$, gdje je n nenegativni cijeli broj, imenuju se prema tom omjeru. Dakle, ako cijela nota ima određeno trajanje u otkucajima, polovina note ima pola tog trajanja i naziva se *polovinka*, četvrtina note ima jednu četvrtinu tog trajanja i naziva se *četvrtinka*, itd. U situaciji u kojoj cijela nota traje četiri otkucaja, polovinka traje pola od tih četiri otkucaja, odnosno dva otkucaja, a šezdesetčetvrtinka traje $\frac{1}{16}$ otkucaja.

U glazbi se trajanja ne mjere prema nama poznatim jedinicama za mjerenje vremena (sekundama, minutama...), već su trajanja tonova relativna i određena međuodnosima u grupi tonova određene skladbe. Koristit ćemo (nestandardni) termin „nota koja traje“ koji će nam označavati notu koja se razlikuje po svojem trajanju, kao što je polovinka ili četvrtinka, neovisno o pripadajućoj visini tona. Primijetimo da ove oznake za note u pozadini koriste pojam klase ekvivalencije. Ovdje navodimo da su dvije note ekvivalentne ako imaju isto trajanje, tako da se trajanje note odnosi na klasu ekvivalencije svih nota koje imaju određeno trajanje. Na primjer, polovinka je oznaka za klasu ekvivalencije svih polovinki, bez obzira na visinu pripadnog tona. Visinu tona pripadne note diktira okomita pozicija glave note u notnom crtovlju. Trajanje note diktira nekoliko detalja o kojima ćemo pojedinačno razgovarati. To su:

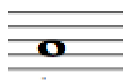
1. Ispunjenost unutrašnjosti glave nota.
2. Prisutnost ili odsutnost vrata na noti i broj zastavica na vratu ili poprečnih notnih spojeva spojenih s drugim notama. Npr. osminka, puna nota s vratom i zastavicom ili poprečnim notnim spojem spojena s drugim notama traje dvostruko kraće od četvrtinke. Tim slijedom još kraće note označavaju se s više zastavica ili paralelnih notnih spojeva.
3. Broj točaka koje slijede nakon note. Kad je s desne strane note napisana točka, ona produljuje trajanje note za pola njene vrijednosti.
4. Oznaka ritmičkih grupa nota.

Glava, vrat, zastavice na vratu i poprečni notni spojevi

Cijela nota i polovinka pišu se u notnom crtovlju s neispunjenom glavom, odnosno kao tzv. *prazna* nota. Za $n \geq 2$, nota čiji je omjer trajanja u odnosu na trajanje cijele note jednak $\frac{1}{2^n}$ zapisana je s ispunjenom glavom, zovemo je puna nota. Sve note čiji je omjer trajanja u odnosu na trajanje cijele note jednak $\frac{1}{2^n}$, osim cijele note (tj. slučaj $n = 0$), imaju vrat, koji se proteže prema gore s desne strane glave ili prema dolje s lijeve strane glave note. Za $n \geq 3$, na vratu note čiji je omjer trajanja u odnosu na trajanje cijele note jednak $\frac{1}{2^n}$ nalazi se $n - 2$ zastavice. Tako osminka ($n = 3$) ima jednu zastavicu, šesnaestinka ($n = 4$) ima dvije zastavice, itd.

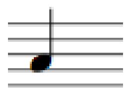


Slika 2.1: Vrat, glava i zastavica note



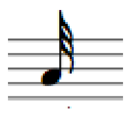
Slika 2.2: Cijela nota - njeno trajanje određeno je glazbenim metrom

Slika 2.3: Polovinka - traje upola kraće od cijele note, tj. dvije polovinke traju zajedno kao jedna cijela nota



Slika 2.4: Četvrtinka - dvije četvrtinke traju zajedno kao jedna polovinka, a četiri četvrtinke traju kao jedna cijela nota

Slika 2.5: Osminka - dvije osminke traju kao jedna četvrtinka



Slika 2.6: Šesnaestinka - dvije šesnaestinke traju kao jedna osminka

U susjednim notama mogu se zamijeniti poprečni notni spojevi koji povezuju vratove nota sa zastavicama.

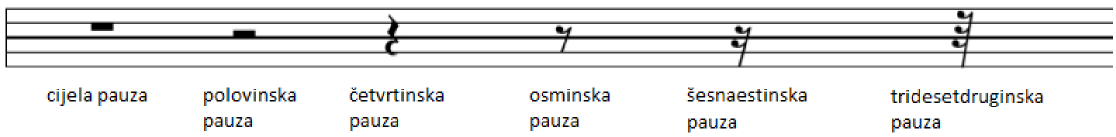
Slika 2.7: Različiti zapisi istih nota

Istovremeno zvučanje najmanje tri tona različite visine (akord), poredanih prema određenim pravilima označeno je u notnom crtovlju s dviju ili više nota koje dijele zajednički vrat:

Slika 2.8: Zapis akorda u notnom crtovlju

Pauze

Pauze su znakovi kojima označavamo privremeni prekid izvođenja skladbe. Zapravo, možda bi bilo bolje reći da su one zvukovi tišine jer i pauze čine skladbu. Znakovi za stanke određuju dužinu prekida, a dijele se po vremenskom trajanju kao istoimene note:



Slika 2.9: Pauze

Točka

Točka uz notu ili pauzu produžuje njezino trajanje za pola svog izvornog trajanja ili, ekvivalentno, množi izvorno trajanje sa $\frac{3}{2}$. Stoga je trajanje šesnaestinke s točkom u otkucajima (još uvijek pretpostavljajući za trenutak da cijela nota dobiva četiri otkucaja) dano kao $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$. Druga točka uz notu zahtijeva dodatno trajanje od jedne četvrtine izvornog trajanja (uz trajanje izazvano prvom točkom), tako da u gornjoj situaciji šesnaestinka s dvije točke traje $\frac{1}{4} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{16}$.

Ako označimo s d trajanje note, a trajanje note s m točaka d_m, tada je

$$\begin{aligned} d_m &= d \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^m}\right) = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= d \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right] = d \cdot \left[2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right)\right] \\ &= d \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right] = d \cdot \left[1 + \frac{2^m - 1}{2^m}\right]. \end{aligned}$$

U prethodnom izvodu koristili smo formulu za sumu prvih m članova geometrijskog niza:

$$\sum_{i=0}^{m-1} r^i = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{m-1} = \frac{1 - r^m}{1 - r},$$

za $m \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$.

Iz formule

$$d_m = d \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right] \tag{2.1}$$

možemo lako zaključiti da s povećavanjem broja m trajanje note s m točaka teži u $2d$, odnosno

$$\lim_{m \to \infty} d_m = \lim_{m \to \infty} d \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right] = 2d.$$

Primjer 2.1. Izračunajmo trajanje šesnaestinke s trostrukom točkom ako cijela nota ima 2 otkucaja, to jest u mjeri 2/2. Trajanje šesnaestinke, bez točke, računamo kao šesnaestinu trajanja cijele note:

$$d = \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}.$$

Sada za $m = 3$ iz (2.1) dobivamo

$$d_3 = \frac{1}{8} \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{8} \cdot \left(2 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{15}{8} = \frac{15}{64}.$$

Dakle, trajanje šesnaestinke s trostrukom točkom je $\frac{15}{64}$ otkucaja.

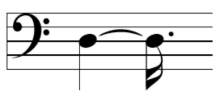
Ritmičke grupe

Možemo primijetiti da je glazbena notacija uvelike orijentirana oko prostog broja 2 i njegovih potencija. Ne koristimo izraze kao što su *petinka* ili *devetinka*. Kako bismo podijelili notu čiji je omjer trajanja u odnosu na trajanje cijele note jednak $\frac{1}{2^n}$ na k jednakih nota, gdje k nije potencija broja 2, formirat ćemo tzv. k - *ritmičke grupe* na sljedeći način.

Neka je r jedinstveni pozitivan cijeli broj takav da vrijedi $2^r < k < 2^{r+1}$ i označimo ritmičku grupu kao skupinu od k nota čiji je omjer trajanja u odnosu na trajanje cijele note jednak $\frac{1}{2^{n+r}}$ za cijeli broj k. Na primjer, pretpostavimo da želimo podijeliti četvrtinku (nota za koju vrijedi da je omjer njezina trajanja i trajanja cijele note jednak $\frac{1}{2^2}$) na 3 jednaka dijela. Na taj način dobivamo tzv. *triolu*. Ovdje je $n = 2$, a budući da imamo $2^1 < 3 < 2^2$, slijedi da je $r = 1$. Možemo napisati i slijed od 3 note za koje vrijedi da je omjer njihovih trajanja i trajanja cijele note jednak $\frac{1}{2^{2+1}} = \frac{1}{8}$, odnosno 3 osminke, tvoreći *osminsku triolu*. Ako, umjesto toga, želimo podijeliti četvrtinku na 5 nota jednakog trajanja, tada iz $2^2 < 5 < 2^3$ slijedi da je $r = 2$ i pišemo slijed od 5 nota za koje vrijedi da je omjer njihovih trajanja i trajanja cijele note jednak $\frac{1}{2^{2+2}} = \frac{1}{16}$, odnosno slijed od 5 šesnaestinki. Taj slijed od 5 nota zovemo *šesnaestinska kvintola*.

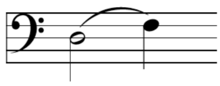
Ligatura i legato

Note povezujemo pomoću *ligature* ili *legata*. *Ligatura* je luk koji spaja note istih visina te se tako spojene note izvode kao jedna cjelina bez prekida, smatramo je jednom notom čija je vrijednost zbroj trajanja dviju vezanih nota. Dakle, dvije četvrtinke spojene ligaturom izvode se kao jedna polovinka. Dakle, ako cijela nota dobiva četiri otkucaja, onda vezanje četvrtinke, čije trajanje iznosi 1, i šesnaestinke s točkom, čije trajanje iznosi $\frac{1}{4} \cdot (1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$, daje trajanje od $\frac{11}{8}$ otkucaja.



Slika 2.10: Ligatura

Usko povezan je i *legato*, koji izgleda kao ligatura, ali povezuje note različitih visina. Ne utječe na trajanje note već na način izvođenja. Note povezane legatom izvode se povezano, odnosno bez prekida.



Slika 2.11: Legato

Glazbeni metar. Mjera

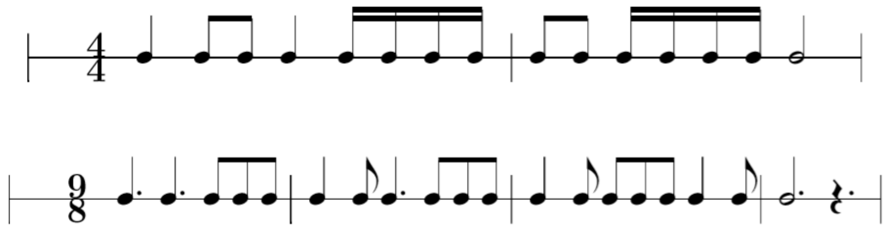
Glazbeno se djelo obično dijeli na skupine od n otkucaja, za neki cijeli broj $n \geq 1$. Takve se skupine nazivaju mjere ili taktovi. *Glazbeni metar* neke skladbe definiran je kao n otkucaja po taktu gdje je određenoj noti pridruženo trajanje jednog otkucaja. Ovi parametri su definirani zadanom mjerom u skladbi, koja se postavlja odmah iza simbola ključa. *Mjera* se sastoji od dva cijela broja n/r gdje je $n \in \mathbb{Z}^+$, a r je potencija broja 2. Značenje brojeva n i r je sljedeće:

- **Općenito**: Prvi broj n određuje broj otkucaja u taktu, a drugi broj $r = 2^m$ označava da nota za koju vrijedi da je omjer njezina trajanja i trajanja cijele note jednak $\frac{1}{2^m}$ traje jedan otkucaj. Dakle, mjera 2/4 označava 2 otkucaja u taktu, gdje jedan otkucaj označava trajanje četvrtinke.

- **Specijalan slučaj**: U situaciji u kojoj $3|n$ i $n > 3$ obično se metar interpretira kao složena mjera, što znači da se broj otkucaja u taktu uzima kao $\frac{n}{3}$ umjesto n; tako tri note za koje vrijedi da je omjer njihova trajanja i trajanja cijele note jednak $\frac{1}{2^m}$ traju jedan otkucaj (gdje je također $r = 2^m$). To znači da je jedan otkucaj pridružen trajanju note za koju vrijedi da je omjer njezina trajanja i trajanja cijele note jednak $\frac{1}{2^{m-1}}$, s točkom. Tako mjera 6/8 ima $\frac{6}{3} = 2$ otkucaja po taktu i jedan otkucaj je pridružen trajanju triju osminki, ili četvrtinki s točkom.

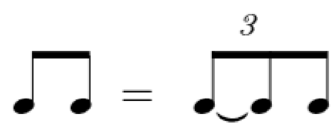
2.2 Ritam

Ritam je sastavni dio glazbenog izražavanja. Predstavlja “vremensku organizaciju” u glazbi, a nastaje notama koje su različitog trajanja i naglašenosti. Sastavni dio ritma čine i pauze, odnosno stanke. Ukupnost ponavljanja ritmičkih elemenata (nota i pauza) određen je pravilima ritmičke mjere. Razmotrimo sljedeće primjere:



Slika 2.12: Primjeri ritma

Svirajući ovo u tempu primjećuje se da određena količina glazbenog zadovoljstva proizlazi iz umjetničke varijacije načina na koje su taktovi ispunjeni notama koje traju. Ritmovi mogu biti izravni ili suptilni. Jazz često izbjegava ono što je očito privremenim zamagljivanjem glazbenog metra pomoću složenih sekvenci (ponavljanje jednog motiva). Ponekad se podrazumijevaju određeni tipovi ritmova koji nisu zapisani, a dobar primjer je ritam swinga. U skladbi u kojoj je slijed nota koji se sastoji od triole s povezanim prvim dvjema notama prevladavajući, zapis triole postaje glomazan i često se potiskuje. Ta triola je jednostavno označena s dvije osminke. To je obično označeno riječima "ritam ljuljačke" ili oznakom kao što je:

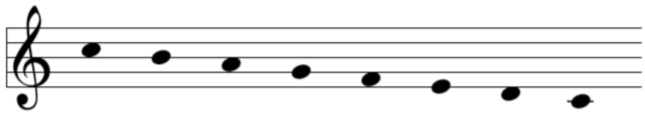


Slika 2.13: Ritam ljuljačke

Naravno, taj se ritam može precizno označiti korištenjem jedne od složenih mjera oblika 3/8 zapisujući gore navedenu triolu kao četvrtinku nakon čega slijedi osminka. Ovo je i primjer ritma čije je glavno obilježje naglašavanje tona u nenaglašenom dijelu takta ili dobe, a poznato je i pod nazivom *sinkopa*.

Melodija

Melodija je niz nota (pojedinačne visine s propisanim trajanjem) koje su najistaknutije u glazbenoj kompoziciji i služe za definiranje i karakterizaciju djela. Melodija je niz nota u pjesmi koju pjeva solo pjevač, dok se druge note reproduciraju u pratnji. U simfoniji melodiju često, ali ne uvijek, svira najviši instrument, najčešće prva violina. Treba naglasiti da se melodija definira i čini prepoznatljivom ne samo svojim slijedom tonova, nego i ritmom. To je prikazano silaznom skalom u jonskom (glavnom) modusu (načinu):



Slika 2.14: Jonski modus

koja sama po sebi ne stvara nikakvu posebnu pjesmu. Međutim, isti niz tonova napisan u nekom ritmu:

Slika 2.15: Joy to the world

odmah je prepoznat kao pjesma *Joy To The World*.

2.3 Ponavljanje uzorka

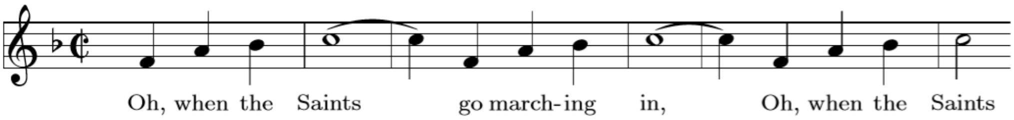
Jedan od načina na koji glazba postiže koheziju jest ponavljanje određenih melodijskih obrazaca, često s varijacijama i uljepšavanjem. To može značiti ponavljanje glavnog dijela skladbe ili, više "lokalno", suprotstavljanje kratkih melodija iz određenih dijelova skladbe. U nastavku prolazimo kroz lokalne tipove ponavljanja koji odgovaraju matematičkom konceptu *geometrijskih transformacija*.

Translacija

Jednostavan primjer takve transformacije je horizontalni pomak, odnosno translacija, do koje dolazi kada graf funkcije $y = f(x)$ zamijenimo s $y = f(x - c)$ (vidi poglavlje (1.2)). To se često pojavljuje u glazbi kao ponavljanje (horizontalna translacija) slijeda tonova ili ritmičkog uzorka. Evo primjera koji ilustrira ritmičku translaciju:

Slika 2.16: Ritmička translacija

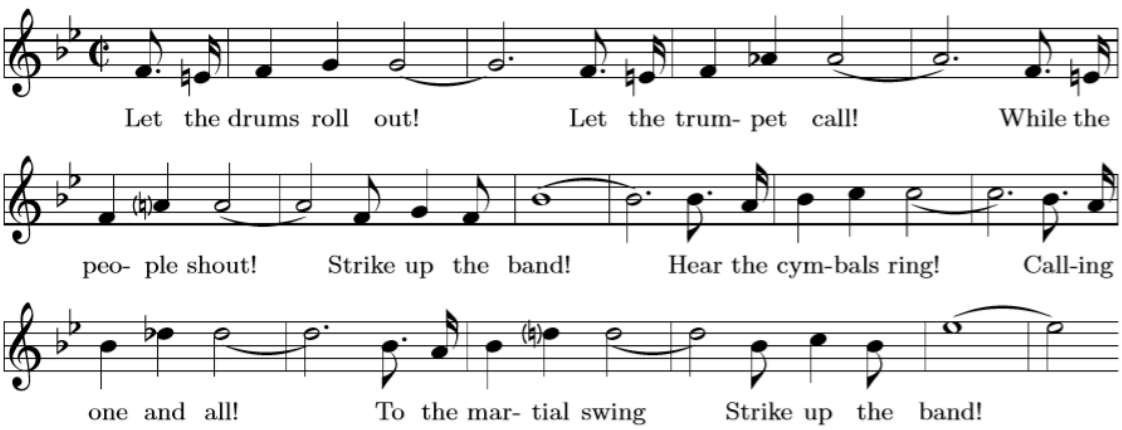
Vidimo da se ritam prvih dvaju stupaca ponavlja dva puta, dok se redoslijed tonova mijenja. Primjer melodijske (kao i ritmičke) translacije nalazi se u duhovnoj pjesmi *When The Saints Go Marching In*,



Slika 2.17: When The Saints Go Marching In

gdje se melodijski slijed F-A-B-C pojavljuje uzastopno tri puta.

Transpozicija



Slika 2.18: Strike Up The Band

Kada se ponavljajući uzorak predstavlja melodijski, moguće je primijeniti i vertikalni pomak ili transpoziciju, analogno translaciji u smjeru osi y, odnosno zamjeni grafa $y = f(x)$ s grafom $y = f(x) + c$. Takva zamjena može ponoviti melodijski dio, prenoseći svaku notu prema gore ili prema dolje fiksnim kromatskim intervalom, kao u prvih šesnaest taktova pjesme *Strike Up The Band*, gdje se u drugih osam taktova ponavlja melodija prvih osam taktova, pomaknutih vertikalno prema gore za kvartu.

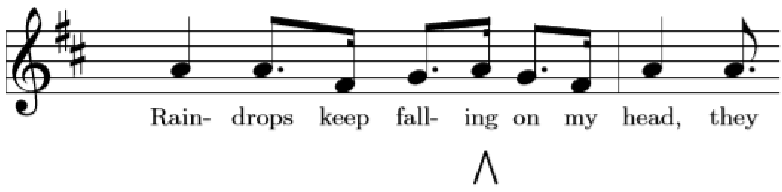
Ovaj tip transpozicije, koji je gore naveden, naziva se *kromatska transpozicija*. Varijantni oblik transpozicije, nazvan *dijatonska transpozicija*, nastaje kada se dijatonska melodija pomakne gore ili dolje za isti broj tonova dijatonske ljestvice, stvarajući melodiju koja ima isti opći oblik, ali s kromatskim intervalima koji nisu savršeno očuvani zbog razlika u intervalu između susjednih dijatonskih nota. To se događa u pjesmi *O Christmas Tree* na način da je drugi označeni slijed u nastavku dobiven iz prvog označenog slijeda tako da je melodija pomaknuta prema dolje za jedan ton dijatonske ljestvice.

Slika 2.19: O Christmas Tree

Retrogradni pomak

Još jedan oblik transformacije u glazbi je retrogradni pomak, koji je analogan matematičkom pojmu horizontalne simetrije. Takvu simetriju dobivamo kada zamijenimo graf $y = f(x)$ s grafom $y = -f(x)$, zrcaleći graf funkcije oko osi y. U glazbi, "retrogradni pomak" znači "preokretanje redoslijeda nota", tako da dobivena sekvenca (ponovljeni dio) oblikuje odraz početnog.

U sljedećem isječku iz pjesme *Raindrops Keep Falling On My Head* vidljiva je simetrija melodije oko note označene s $\wedge$:



Slika 2.20: Raindrops Keep Falling On My Head

2.4 Euklidski ritmovi

Euklidov algoritam koristi se za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju prirodnih brojeva. Pokazat ćemo da se struktura Euklidovog algoritma može zapaziti u nekim tradicionalnim ritmovima, posebice onima iz afričke kulture. Nadalje, ista se struktura može koristi za stvaranje novih raznovrsnih ritmova koji se nazivaju *euklidski ritmovi*.

Prisjetimo se najprije *Euklidovog algoritma* za prirodne brojeve a i b kojeg dobivamo uzastopnom primjenom Teorema o dijeljenju s ostatkom:

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b,\\
b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2,\\
&\vdots \\
r_{j-2} &= r_{j-1} q_j + r_j, & 0 < r_j < r_{j-1},\\
r_{j-1} &= r_j q_{j+1}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Brojevi $q_1, \ldots, q_{j+1}$ nazivaju se količnici ili kvocijenti, a $r_1, \ldots, r_j$ ostatci. Posljednji nenegativan ostatk r_j je najveći zajednički djeliteljbrojeva a i b, tj. $\gcd(a, b) = r_j$.

U slučaju kada b dijeli a, algoritam se sastoji od samo jednog koraka. Na primjer, za $a = 16$, $b = 4$, imamo

$$16 = 4 \cdot 4.$$

Za razliku od prethodnog, za $a = 12$ i $b = 5$ algoritam (2.2) glasi

$$\begin{aligned}
12 &= 5 \cdot 2 + 2,\\
5 &= 2 \cdot 2 + 1,\\
2 &= 1 \cdot 2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Razmotrimo sada sljedeći problem. Pretpostavimo da imamo binarni niz od n bita, od kojih je k jedinica, a ostatak, su naravno, nule. Želimo k jedinica ravnomjerno rasporediti među $n-k$ nula. Ako k dijeli n, tada je rješenje jednostavno. Na primjer, za $n = 16$ i $k = 4$ dobivamo slijed:

$$[1000100010001000].$$

Problem postaje zanimljiviji kada su n i k relativno prosti, tj. kada je jedini zajednički djelitelj brojeva n i k broj 1. Pretpostavimo da imamo $n = 12$ i $k = 5$. Kako vrijedi $12 - 5 = 7$, počinjemo stvaranjem niza s 5 jedinica i 7 nula:

$$[111110000000].$$

Ovaj slijed možemo zapisati i kao 12 sekvenci od kojih svaka ima jedan bit:

$$[\underbrace{[1][1][1][1][1]}_{5}\underbrace{[0][0][0][0][0][0][0]}_{7}].$$

Rasporedimo nule tako da dobijemo pet sekvenci od po dva bita i dvije sekvence sastavljene od jednog bita:

$$[\underbrace{[10][10][10][10][10]}_{5}\underbrace{[0][0]}_{2}].$$

Tada ćemo raspodijeliti preostale nule na isti način, tako da dobijemo:

$$[\underbrace{[100][100]}_{2}\underbrace{[10][10][10]}_{3}].$$

Sada distribuiramo sekvencu [10], što dovodi do:

$$[\underbrace{[10010][10010]}_{2}\underbrace{[10]}_{1}].$$

Proces se završava kada je ostatak (sekvence s najmanjim brojem bitova) točno jedan, ili nemamo više nula za distribuciju. Zatim spojimo rezultat i dobivamo:

$$\underbrace{[100101001010]}_{1}.$$

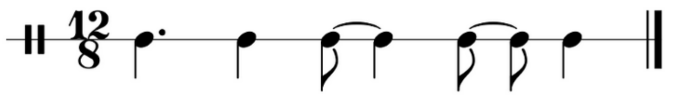
Ovaj opisani postupak naziva se *Bjorklundov algoritam.* Uočimo da Bjorklundov algoritam ima istu strukturu kao Euklidov algoritam (2.2) ako umjesto dijeljenja koristimo oduzimanje. Zaista, tada umjesto (2.3) imamo

$$\begin{aligned}
12-5 &= 7, \text{ (inicijalizacija)}\\
7-5 &= 2,\\
5-2 &= 3,\\
3-2 &= 1, \text{ (stop)}\\
(2-1 &= 1,\\
1-1 &= 0).
\end{aligned}$$

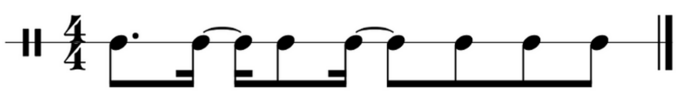
Lako vidimo da umanjitelj i razlika iz prethodnog niza jednakosti (osim zadnje dvije) upravo odgovaraju broju svakog od dva tipa različitih sekvenci u svakom koraku Bjorklundovog algoritma. Broj koraka se podudara s brojem koraka u (2.3).

Niz dobiven Bjorklundovim algoritmom označit ćemo s $E(k, n)$, gdje je k broj jedinica, a n ukupan broj bitova (tj. duljina niza) te nazivati euklidski ritam.

Sada ćemo objasniti kako ćemo nizove nula i jednica dobivenih Bjorklundovim algoritmom protumačiti kao ritam. Najprije ćemo podrazumijevati da se svaki bit razmatra kao jedna jedinica vremena. Bit 0 predstavlja tišinu (ili nenaglašenu notu) dok bit 1 predstavlja početak note. Na slici 2.21 prikazan je ritam $E(5, 12) = [100101001010]$, a na slici 2.22 ritam $E(7, 16) = [1001010100101010]$ u standardnoj notaciji u notnom crtovlju te u različitim mjerama. (Bitno je samo da je glazbeni metar, odnosno broj otkucaja po taktu, djelitelj broja duljine niza n).



Slika 2.21: Ritam $E(5, 12)$ zapisan u notnom crtovlju



Slika 2.22: Ritam $E(7, 16)$ zapisan u notnom crtovlju

Nula-jedan notacija nije idealna za predstavljanje binarnih ritmova jer je teško vizualizirati mjesto početka kao i trajanje intervala između početaka. U literaturi o muzikologiji uobičajeno je koristiti oznaku "x" za bit 1 i " . " za nulu. U ovoj notaciji euklidski ritam

$$E(5,13) = [1001010010100]$$

se zapisuje kao

$$E(5,13) = [\texttt{x..x.x..x.x..}].$$

Ritam $E(5,13)$ je ciklički ritam s vremenskim rasponom (mjerom) od 13 vremenskih jedinica. Ovo nije uobičajena mjera u standardnoj glazbi.

Razmotrimo euklidski ritam niza [11100000]:

$$E(3,8) = [10010010] = [\texttt{x..x..x.}].$$

Ovaj ritam je ilustriran kao poligon (trokut) na slici 2.23 (a), kao još jedan koristan i uobičajeni način predstavljanja cikličkih ritmova, gdje se pretpostavlja da ritam kreće na mjestu označenom s "0", vrijeme teče u smjeru kazaljke na satu, i brojevi nad stranicama trokuta označavaju trajanje intervala između početaka nota. Euklidski ritam $E(3,8)$ prikazan na slici 2.23 (a) je jedan od najpoznatijih ritmova na svijetu. Na Kubi nosi ime *tresillo*, a u SAD-u se često naziva *Habanera* ritam korišten u stotinama rockabilly pjesama tijekom 1950-ih.

U dva prethodna primjera ($E(5,13)$ i $E(3,8)$) broj jedinica manji je od broja nula. Ako je umjesto toga broj jedinica veći od broja nula, Bjorklundov algoritam donosi sljedeće korake s, na primjer $k = 5$ i $n = 8$:

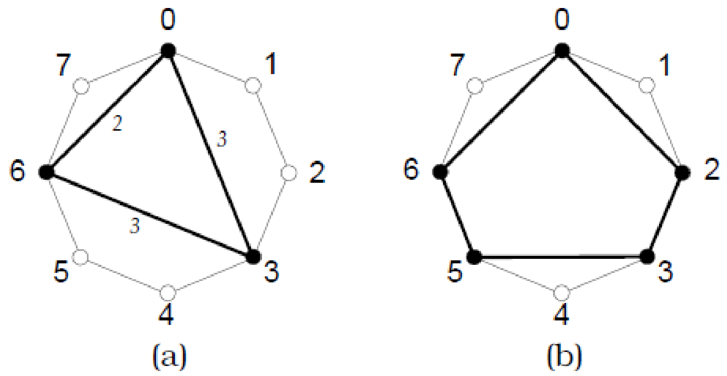
$$\begin{aligned}
&[11111000],\\
&[10][10][10][1][1],\\
&[101][101][10],\\
&[10110110].
\end{aligned}$$

Dobiveni euklidski ritam je

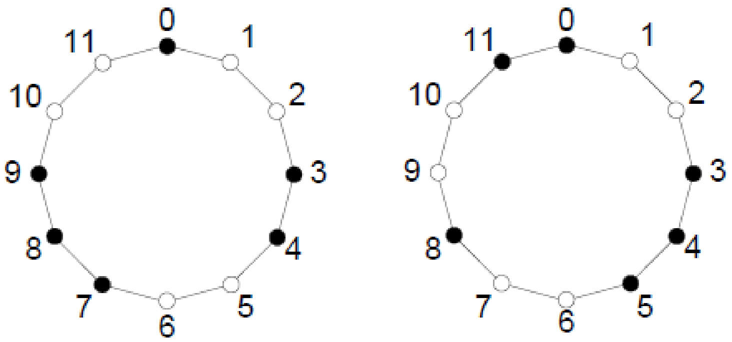
$$E(5,8) = [\texttt{x.xx.xx.}].$$

Ovaj ritam je prikazan kao poligon (peterokut) na slici 2.23 (b). To je još jedan poznati ritam na svjetskoj sceni. Na Kubi taj ritam skriva se pod imenom *cinquillo* i usko je povezan s *tresillom*. Cinquillo uzorak se također naširoko koristi u zapadnoafričkoj tradicionalnoj glazbi.

U nekim slučajevima euklidski ritam je rotirana verzija uobičajenog ritma. Ako je ritam rotirana verzija nekog drugog ritma, kažemo da oba ritma pripadaju istoj *ogrlici*. Primjer dvaju ritmova koji pripadaju istoj ogrlici prikazani su na slici 2.24.



Slika 2.23: (a) Euklidski ritam $E(3,8)$ je kubanski tresillo, (b) Euklidski ritam $E(5,8)$ je kubanski cinquillo



Slika 2.24: Euklidski ritmovi koji pripadaju istoj ogrlici

Poznatiji euklidski ritmovi:
$E(2,3) =$ [x.x] je uobičajeni afrokubanski uzorak bubnja.
$E(2,5) =$ [x.x..] je perzijski ritam iz 13. stoljeća nazvan *Khafif-e-ramal*.
$E(3,7) =$ [x.x.x..] je *Ruchenitza* ritam korišten u bugarskom folklornom plesu.
$E(3,8) =$ [x..x..x.] je kubanski tresillo uzorak o kojem smo raspravljali u prethodnom poglavlju.
$E(5,9) =$ [x.x.x.x.x] je popularni arapski ritam nazvan *Agsag-Samai*.
$E(7,16) =$ [x..x.x.x..x.x.x.] je *Samba* ritam ogrlica iz Brazila.

$E(9,16) =$ [x.xx.x.x.xx.x.x.] je ritmička ogrlica koja se koristi u Srednjoafričkoj Republici.

Postoje mnogi generatori ritma koji, između ostalog, nude euklidske ritmove.

Poglavlje 3

Vertikalna struktura

3.1 *Glazbeni* val

Glazbu možemo analizirati i kao mehanički val s frekvencijom u rasponu od 16 Hz do 20 kHz, to jest u rasponu u kojem ga čuje ljudsko uho. Zvuk nastaje iz izvora i prenosi se s jedne na drugu susjednu česticu tako što u neposrednoj okolini uzrokuje promjenu tlaka. Te promjene su periodične i šire se u obliku longitudinalnih valova u plinovima i tekućinama, odnosno transverzalnih valova u krutim tvarima. Bez sredstva energija se ne bi mogla na ovaj način širiti. Stoga se zvuk ne može širiti kroz vakuum.

Filozofska razlika između tona, šuma i buke može biti pomalo nejasna, ali znanstveno, postoji dobro definirana razlika s obzirom na pravilnost titranja. Ton je zvuk koji se sastoji od harmoničkih titraja, odnosno oscilacije titranja su konstantne. Šum i buka sastoje od titraja različitih frekvencija i amplituda pa u toj mješavini uho ne opaža neku spefičnu frekvenciju. Dobar primjer za to je ljudski glas. Ako recitiramo riječi, na primjer neke pjesme, u svom normalnom govornom glasu, zvukovi koje stvaraju naše glasnice sastoje se od više frekvencija. Međutim, ako iste riječi artikuliramo, s točnom jednom frekvencijom za svaki slog, tada pjevamo, tj. tada ljudski glas postaje glazbeni instrument. Glasnice titraju vrlo slično titranju žicama, na primjer, gitare.

Već smo spomenuli da ton s većom frekvencijom doživljavamo kao viši, a s manjom kao niži. Nadalje, spomenuli smo da ako se tonovima frekvencije odnose 1 : 2 onda ih čujemo kao oktave. Žica koja je učvršćena na krajevima i vibrira stvara tzv. osnovni ton. Veza između frekvencije tona f i duljine žice l je

$$f = \frac{v}{2l},$$

gdje je v brzina zvuka (koji u zraku i temperaturi od 20° C iznosi 343 m/s). Odnosno, frekvencija i duljina žice su obrnuto proporcionalni. Stoga, ako želimo da je frekvencija tona dva puta veća, žicu moramo skratiti na pola.

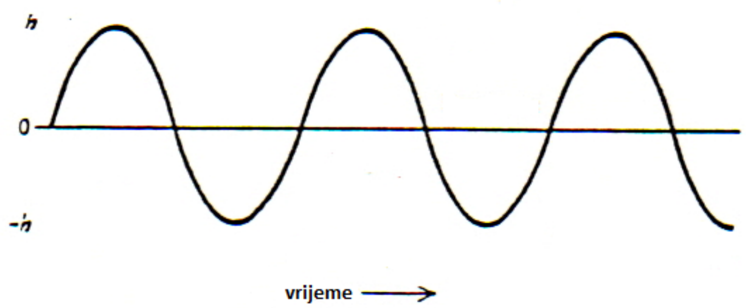
Harmonijsko titranje u vremenu opisuje se funkcijom sinus, odnosno

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

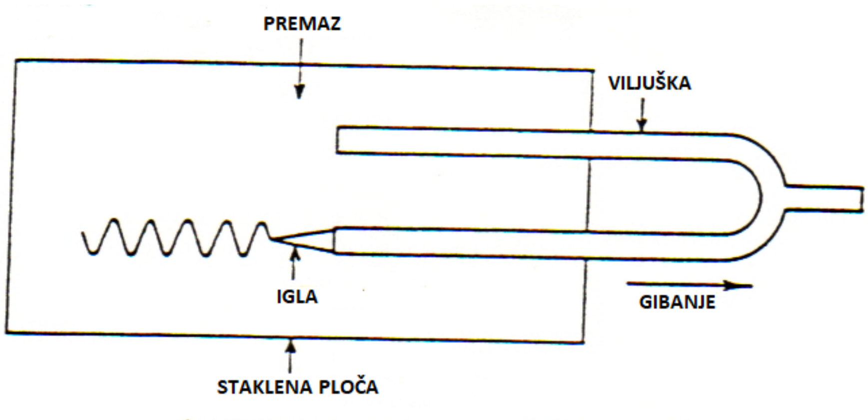
gdje je A amplituda vala a $1/T$ frekvencija. Što je amplituda vala veća to percipiramo kao glasniji ton.

Amplituda ili glasnoća zvuka mjeri se u decibelima (dB). Ljudske uši počinju doživljavati zvuk na razini od oko 5 dB. To se naziva prag sluha. Na oko 130 dB razina amplitude zvuka je zapravo dovoljno visoka da preoptereti naša ljudska ograničenja i, zapravo, povrijedi naše uši; to je poznato kao prag boli.

Kada bismo grafički prikazali val jedne savršene glazbene note specifične frekvencije u koordinatnom sustavu, s frekvencijom na osi x, a amplitudom na osi y, rezultat bi izgledao kao na slici 3.1. Taj val koji se u vremenu diže i pada sinusoidalno naziva se, jednostavno, sinusni val. Sinusni val je najsavršenija vrsta zvučnog vala, i obično postoji samo u laboratoriju, ili u zvučnom valu koji proizvodi viljuška za ugađanje. Zapravo, kada viljuška za ugađanje vibrira, gibanje zubaca je sinusoidalno. Jednostavan eksperiment prikazan na slici 3.2 to pokazuje. Jedan zubac viljuške ima svjetlosnu iglu kao što je prikazano. Staklena ploča je obložena slojem čađe ili drugog materijala koji će dati finu liniju kada se vrh igle povuče preko nje. Tada se viljuška podesi na vibracije i vibrirajući igla se povlači preko ploče pomicanjem vilice u smjeru strelice. Igla zatim ucrtava liniju u premaz, odnosno graf svoje vibracije, za koju se utvrdi da ima oblik sinusoidalnog vala.



Slika 3.1: Sinusni val



Slika 3.2: Viljuška crta graf svoje vibracije

Većina akustički proizvedenih zvučnih valova nisu savršeni sinusni valovi zbog harmonije i drugih čimbenika. Također, stvarni oblik vala može se promijeniti elektronički, kao u slučaju sintisajzera i drugih elektroničkih glazbenih instrumenata.

3.2 Modularna aritmetika u glazbi

Intervali

U odsječku 1.3 govorili smo o modularnoj aritmetici s matematičkog stajališta. No, taj pojam može se lako približiti i svakom matematičkom laiku. Naime, modularnu aritmetiku još nazivamo i *aritmetika sata*. Ako zamislimo sat numeriran brojevima od 0 do 11, gdje je 0 u položaju koji označava 12 sati, lako možemo objasniti princip modularne aritmetike. Naime, ako sat pokazuje, na primjer, 10 sati, jasno nam je da će nakon 5 sati pokazivati 3 sata. To zapisujemo kao $10 +_{12} 5 = 3$. Zbrajati modulo, u našem slučaju, 12 znači "koračati" brojčanikom sata u smjeru kazaljke na satu. Oduzimanje modulo m je kretanje po satu u suprotnom smjeru kazaljke na satu. Množenje modulo m možemo shvatiti kao skraćeno zbrajanje modulo m.

No, modularna aritmetika modulo 12 nije samo zanimljiva zbog snalaženja u vremenu, već i za glazbu. Već smo spominjali da naš sluh prirodno čuje oktavu, tj. tonove čija je razlika 12 polutonova. Zato je bitno izučiti odnose između 12 tonova koji su sadržani u oktavi, odnosno 12 tipki na klaviru. U tom smislu, naše ljudske uši su stvorene za aritmetiku modulo 12. Pretpostavimo da tonovima, bilo koje oktave, pridružimo sljedeće numeričke vrijednosti:

$$C \mapsto 0,\ C^\sharp = D^\flat \mapsto 1,\ D \mapsto 2,\ D^\sharp = E^\flat \mapsto 3,\ E \mapsto 4,\ F \mapsto 5,$$

$$F^\sharp = G^\flat \mapsto 6,\ G \mapsto 7,\ G^\sharp = A^\flat \mapsto 8, A \mapsto 9, A^\sharp = B \mapsto 10, H \mapsto 11.$$

Ovim smo ustanovili preslikavanje između jedne oktave i prstena

$$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Označimo ga s $f : \{C, Cis, D, Dis, E, F, Fis, G, Gis, A, Ais, H\} \to \mathbb{Z}_{12}$. Na primjer, C-dur ljestvicu zapisujemo kao

$$\{C, D, E, F, G, A, H\} = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}.$$

Sada ćemo definirati funkcije koje su u vezi s glazbenim intervalima.

Definicija 3.1. *Neka je $n \in \mathbb{Z}_{12}$. Funkcija*

$$T_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12},\ T_n(x) = x +_{12} n$$

naziva se transpozicija *za n.*

Napominjemo da se u matematici funkcija T_n naziva translacija, no ovdje želimo istaknuti vezu s teorijom glazbe.

Funkcija T_n poslužit će nam u generiranju intervala pri čemu n odgovara veličini intervala u polutonovima (v. tablicu 1.2). Ako, na primjer, želimo odrediti čistu kvintu od početnog tona A_3 računamo sljedeće:

$$T_7(9) = 9 +_{12} 7 = 4.$$

Kako 4 odgovara noti E, tražena čista kvinta je A_3-E_4.

Obrat intervala se tvori tako što se niži ton prebaci za oktavu više ili viši ton za oktavu niže. Pretpostavimo da želimo obrat intervala F_4-Ais_4, čista kvarta. Obrat daje Ais_4-F_5 (ili Ais_3-F_4 - što je isti interval samo za oktavu niže), a to je čista kvinta. U teoriji glazbe se uči napamet pravilo da u obratu prima postaje oktava, sekunda postaje septima, terca seksta, kvarta kvinta, kvinta kvarta, seksta terca, septima sekunda, oktava prima. Nadalje, čisti intervali uvijek ostaju čisti, veliki intervali postaju mali i obratno, te smanjeni postaju povećani i obratno. Matematički je to gotovo trivijalno. Na primjer, obrat velike terce, čija je veličina $n = 4$, je $12 - n = 8$, a to je mala seksta.

interval	n	$12-n$	obrat intervala
č1	0	12	č8
m2	1	11	v7
v2	2	10	m7
m3	3	9	v6
v3	4	8	m6
č4	5	7	č5
p4 (s5)	6	6	s5 (p4)
č5	7	5	č4
m6	8	4	v3
v6	9	3	m3
m7	10	2	v2
v7	11	1	m2
č8	12	0	č1

Tablica 3.1: Obrat intervala

Akordi

Akord u glazbi označava barem tri tona različite visine koji zvuče istodobno (ili se mogu svirati i zasebno). Konkretno ćemo se pozabaviti s tzv. *trozvucima* ili *kvintakordima*. Kvintakord se sastoji od niza od tri note, prve dvije note čine tercu a prva i treća kvintu. U glazbi se ističu četiri kvintakorda koja prikazujemo u tablici 3.2. Najjednostavniji primjer durskog kvintakorda je $\{C, E, G\}$ odnosno numerički $\{0, 4, 7\}$. Glazbenici često transponiraju akorde, tj. spuštaju u niži tonalitet ili dižu u viši tonalitet početni akord, a pri tome intervali ostaju očuvani. Očito je da će djelovanje funkcije T_n na svaku od nota iz akorda očuvati intervale. Ako transponiramo akord $\{C, E, G\}$ za malu tercu dobit ćemo

$$\{T_3(0), T_3(4), T_3(7)\} = \{3, 7, 10\}$$

što odgovara kvintakordu $\{Dis, G, Ais\}$.

Inverzija je još jedan način stvaranja glazbene varijacije uz očuvanje intervalnog zvuka melodije, iako to ne čuva točne intervale. Nju opisujemo sljedećom funkcijom:

Definicija 3.2. *Neka je $n \in \mathbb{Z}_{12}$. Funkcija*

$$I_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12},\ I_n(x) = -x +_{12} n$$

naziva se inverzija *za n, pri čemu je $-x$ suprotni element od x u grupi $\mathbb{Z}_{12}$.*

kvintakord $\{x, y, z\}$	interval $\{x, y\}$	interval $\{x, z\}$	oznaka	formula
durski	v3	č5	d5/3	$\{x, T_4(x), T_7(x)\}$
molski	m3	č5	m5/3	$\{x, T_3(x), T_7(x)\}$
povećani	v3	p5	p5/3	$\{x, T_4(x), T_8(x)\}$
smanjeni	m3	s5	s5/3	$\{x, T_3(x), T_6(x)\}$

Tablica 3.2: Vrste kvintakorda

Akord $\{C, E, G\}$ je dio glavne teme Haydnove simfonije iznenađenja. Prvi dio glavne teme je $\langle C, C, E, E, G, G, E, F, F, D, D, B, B, G\rangle$ koji se može napisati

$$\langle 0, 0, 4, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 2, 2, 11, 11, 7\rangle.$$

Te kutne (šiljaste) zagrade $\langle\rangle$ često koriste teoretičari glazbe kako bi naglasili da se note događaju tim redoslijedom. mogli bismo invertirati segmente tonova za temu Haydnove simfonije oko 0, iako Haydn to nije učinio,

$$I_0\langle 0, 0, 4, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 2, 2, 11, 11, 7\rangle = \langle 0, 0, 8, 8, 5, 5, 8, 7, 7, 10, 10, 1, 1, 5\rangle.$$

Na slici 3.3 je primjer inverzije. Tema je

$$\langle C, G, F, A, G, F, E, D, D, H, C\rangle$$

odnosno numeričkim zapisom

$$\langle 0, 7, 5, 9, 7, 5, 4, 2, 2, 11, 0\rangle.$$

Slika 3.3: Primjer inverzije

Ako primijenimo inverziju I_7 na ovaj glazbeni odsječak dobit ćemo

$$\langle -0+7, -7+7, -5+7, -9+7, -7+7, -5+7, -4+7, -2+7, -2+7, -11+7, -0+7\rangle,$$

pri čemu smo s $+$ označili zbrajanje modulo 12, tj.

$$\langle 7, 0, 2, 10, 0, 2, 3, 5, 5, 8, 7\rangle.$$

U notnom zapisu:

$$\langle G, C, D, Ais, C, D, Dis, F, F, Gis, G\rangle.$$

Inverzija sa slike 3.3 glasi

$$\langle G, C, D, \underline{H}, C, D, \underline{E}, F, F, \underline{A}, G\rangle.$$

Podcrtane note ne uklapaju se u "našu formulu", no za to ima objašnjenje. Naime, gornja kompozicija pisana je u C-duru (bez predznaka), a note Ais, Dis, Gis ne pripadaju tom tonalitetu. "Zaokruživanjem" prema gore na najbližu notu iz C-dura dobili smo upravo H, E, A.

3.3 Ljestvice

Durska ljestvica

Durska je ljestvica dijatonski niz od osam tonova, koji počinje i završava tonovima istog imena razmaknutima za oktavu. Svaku dursku ljestvicu karakteriziraju polutonovi između 3. i 4. te 7. i 8. stupnja dok su svi ostali stupnjevi međusobno razmaknuti za cijeli stupanj. Na primjer, C-dur ljestvica glasi $\{C, D, E, F, G, A, H, C\}$. U prethodnom odjeljku smo notama pridružili numeričke vrijednosti u $\mathbb{Z}_{12}$, $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 0\}$. Ukoliko želimo izgraditi dur s početnim tonom $D(2)$ potrebno je samo djelovati funkcijom T_2 na C-dur i dobit ćemo

$$\{2, 4, 6, 7, 9, 11, 1, 2\},$$

odnosno

$$\{D, E, Fis, G, A, H, Cis, D\}.$$

Dakle, D-dur je karateriziran s dva povišena tona, odnosno dvije povisilice Fis i Cis. Postoji točno 12 durskih ljestvica, koliko i različitih nota. Zanimljivo je da se one grade uzastopnim dodavanjem kvinte ili kvarte. Transpozicija za kvintu odgovara djelovanju funkcije T_7, a za kvartu funkcije T_5. Budući da su 5 i 7 relativno prosti brojevi s brojem 12, znači da su oni generatori grupe $\mathbb{Z}_{12}$ pa ćemo uzastopnim zbrajanjem s 5 (ili 7) proći čitavim skupom nota. Kako je $5 +_{12} 7 = 0$, odnosno 5 i 7 su međusobno suprotni elementi u grupi $\mathbb{Z}_{12}$, onda niz koji dobijemo uzastopnim dodavanjem broja 5 modulo 12, odgovara u suprotnom poretku nizu kojeg dobijemo uzastopnim dodavanjem broja 7 modulo 12 kao u sljedećoj tablici:

$+_5 \rightarrow$	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	0	$\leftarrow +_7$
	C	F	$A^\sharp$	$D^\sharp$	$G^\sharp$	$C^\sharp$	$F^\sharp$	H	E	A	D	G	C	
			B	$E^\flat$	$A^\flat$	$D^\flat$	$G^\flat$							

||———————————————-||

kvartni krug

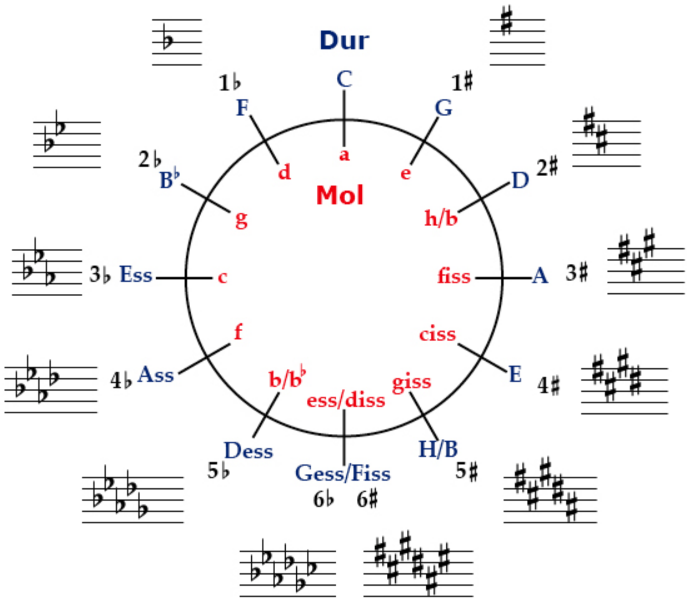
||——————————————||

kvintni krug

Ljestvice pamtimo prema tzv. *kvintnom*, odnosno *kvartnom* krugu označenim u gornjoj tablici. Na slici 3.4 vidimo prikazane ljestvice sa njihovim predznacima na kružnici. Kad transponiramo svaki od tonova ljestvice po kvintnom i kvartnom krugu uočit ćemo i pravilnost u redanju predznaka. Uobičajeno je predznake u kvintnom krugu označiti povisilicama, a u kvartnom krugu sa snizilicama.

									$\sharp$,$\flat$
C-dur	0	2	4	5	7	9	11	0	
G-dur	7	9	11	0	2	4	$\underline{6}$	7	$F^\sharp$
D-dur	2	4	$\underline{6}$	7	9	11	$\underline{1}$	2	$F^\sharp$,$C^\sharp$
A-dur	9	11	$\underline{1}$	2	4	$\underline{6}$	$\underline{8}$	9	$F^\sharp$,$C^\sharp$, $G^\sharp$
E-dur	4	$\underline{6}$	$\underline{8}$	9	11	$\underline{1}$	$\underline{3}$	4	$F^\sharp$,$C^\sharp$, $G^\sharp$, $D^\sharp$
H-dur	11	$\underline{1}$	$\underline{3}$	4	6	$\underline{8}$	$\underline{10}$	11	$F^\sharp$,$C^\sharp$, $G^\sharp$, $D^\sharp$, $A^\sharp$
Fis-dur Ges-dur	$\underline{6}$ $\underline{6}$	$\underline{8}$ $\underline{8}$	$\underline{10}$ $\underline{10}$	11 11	1 1	$\underline{3}$ $\underline{3}$	$\underline{5!}$ $\underline{5!}$	$\underline{6}$ $\underline{6}$	$F^\sharp$,$C^\sharp$, $G^\sharp$, $D^\sharp$, $A^\sharp$, $E^\sharp(F)$ B, $E^\flat$, $A^\flat$, $D^\flat$, $G^\flat$, $C^\flat(H)$
Des-dur	$\underline{1}$	$\underline{3}$	5	$\underline{6}$	$\underline{8}$	$\underline{10}$	0	$\underline{1}$	B, $E^\flat$, $A^\flat$, $D^\flat$, $G^\flat$
As-dur	$\underline{8}$	$\underline{10}$	0	$\underline{1}$	$\underline{3}$	5	7	$\underline{8}$	B, $E^\flat$, $A^\flat$, $D^\flat$
Es-dur	$\underline{3}$	5	7	$\underline{8}$	$\underline{10}$	0	2	$\underline{3}$	B, $E^\flat$, $A^\flat$
B-dur	$\underline{10}$	0	2	$\underline{3}$	5	7	9	$\underline{10}$	B, $E^\flat$
F-dur	5	7	9	$\underline{10}$	0	2	4	5	B
C-dur	0	2	4	5	7	9	11	0	

U prethodnoj tablici note koje su povišene ili snižene su podcrtane.



Slika 3.4: Kvintni krug

Pitagorejska ljestvica

U 13. stoljeću francuska akademija *Notre Dame* proglasila je kako se do točne ljestvice može doći samo Pitagorinim savršenim kvintama, čiji stalni omjer 3 : 2 nazivamo "božanski", gdje 3 označava Sveto Trojstvo, a 2 predstavlja razne dualizme (neba i zemlje, dobra i zla, itd.). Pretpostavit ćemo da je frekvencija tona C jedinična, odnosno $f_C = 1$. Tada vrijedi da je veličina intervala jednaka omjeru njihovih frekvencija. Pitagorejska ljestvica, kao i svi tonovi dijatonske i kromatske ljestvice mogu se dobiti jednostavnim matematičkim postupkom koji koristi sljedeće pretpostavke: frekvencije osnovnog tona i tona koji je za oktavu viši odnose se 1 : 2. Dakle, ako osnovni ton ima frekvenciju f, kvinta prema gore ima frekvenciju $\frac{3}{2}f$, a oktava prema gore frekvenciju $2f$. Tako se, na primjer, kvintu iznad tona C nalazi G čija je frekvencija $f_G = \frac{3}{2}$, a kvintu iznad G, nalazi se d s frekvencijom $f_d = (\frac{3}{2})^2$ no kako se taj ton ne nalazi između C i c snizimo ga za oktavu i dobivamo D s frekvencijom $f_D = \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{8}$. Analogno dobivamo note E, F, A, H i c pripadnih frekvencija $f_E = \frac{81}{64}$, $f_F = \frac{4}{3}$, $f_A = \frac{27}{16}$, $f_H = \frac{243}{128}$, $f_c = 2$. Tako smo dobili sve „bijele tipke" dijatonske ljestvice. Ako se spustimo od tona F još za dvije kvinte te uz pomak za oktavu više dobivamo frekvenciju $f_B = 2^2(\frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$ note B te na taj način možemo ugoditi sve tonove kromatske ljestvice. Postupak koji smo opisali zove se *Pitagorino ugađanje*.

nota	C	$C^\sharp$ ($D^\flat$)	D	$D^\sharp$ ($E^\flat$)	E	F	$F^\sharp$ ($G^\flat$)	G	$G^\sharp$ ($A^\flat$)	A	$A^\sharp$ (B)	H	c
f	$\frac{1}{1}$	$\frac{2178}{2048}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$

Tablica 3.3: Pitagorino ugađanje - kromatska ljestvica

Iako se Pitagorini intervali smatraju tzv. *prirodnom intonacijom*, probleme predstavljaju različiti polutonovi koji zbog toga onemogućavaju vjernu transpoziciju (tj. promjenu tonaliteta). Naime, ukoliko bi glazbalo bilo ugođeno po takvoj ljestvici, promjena tonaliteta bi zahtjevala ponovo preštimavanje. To najbolje možemo vidjeti ako note dobivene Pitagorinim ugađanjem prikažemo u logaritamski izračunatim centilama (uz cjelobrojno zaokruživanje):

nota	C	$C^\sharp$ ($D^\flat$)	D	$D^\sharp$ ($E^\flat$)	E	F	$F^\sharp$ ($G^\flat$)	G	$G^\sharp$ ($A^\flat$)	A	$A^\sharp$ (B)	H	c
cent	0	114	204	294	408	498	612	702	792	906	996	1110	1200

Tablica 3.4: Pitagorino ugađanje u centilama

Vrijednosti u centilama u tablici 3.4 dobivene su prema formuli

$$1200 \cdot \frac{\ln m/n}{\ln 2},$$

gdje je m/n omjer frekvencija.

Iz tablice 3.4 vidimo da polutonovi poprimaju vrijednosti 114 cent (*Pitagorin apotom*) ili 90 cent (*Pitagorin dijatonski poluton*). Cijeli ton može imati 204 cent ili 180 cent. Nadalje, jedan od nedostataka je i posljednja kvinta koju dobivamo ovakvim ugađanjem $\{G^\sharp, e^\flat\}$. Ona ima 678 centi i ne zvuči dobro. Naziva se *vučji interval* jer zvuči kao vučje zavijanje. Dakle, prirodna intonacija nije praktična za transponiranje, moduliranje i harmonizaciju. To se može ispraviti tzv. *temperiranjem* kojim se gubi točnost intervala, ali se omogućava harmonizacija. Mnogi su predlagali jednoliku ugođenu skalu, jedan od njih bio je francuski svećenik i matematičar. Veliki Johann Sebastian Bach je bio oduševljen time te je napisao djelo *Dobro ugođeni glasovir* koje sadrži 24 preludija i fuga, u svakom od različitih tonaliteta. Napomenimo da je jednoliko ugađenje prihvaćeno kao standard tek u 20. stoljeću.

Fibonaccijev niz u ljestvici

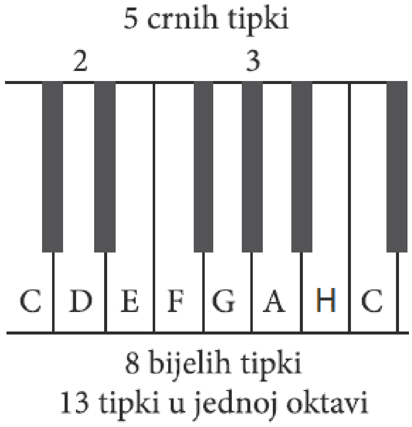
Fibonaccijev niz je niz brojeva koji počinje brojevima 0 i 1, a zbrajanjem prethodna dva broja dobijemo svaki sljedeći broj u nizu:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Tako nastaje Fibonaccijev niz: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Vrijedi sljedeće:

- Oktava na klavijaturi sastoji se od 13 tipki. 8 je bijelih tipki, a 5 je crnih.
- Ljestvica se sastoji od 8 nota, od kojih 3. i 5. nota čine osnovu akorda baziranu na cijelim tonovima, što je 2 koraka od *tonike*, a tonika je 1. ton ljestvice.
- U ljestvici, *dominanta* je peta nota, koja je ujedno i osma nota od 13 nota koje čine oktavu, a 13 : 8 je jednako 1.625 što je približno jednako zlatnom rezu.

U prethodnim činjenicama upravo smo vidjeli gdje se u ljestvici pojavljuju Fibonaccijevog brojevi: 1, 2, 3, 5, 8 i 13.



Slika 3.5: Brojevi Fibonaccijevog niza u ljestvici

Bibliografija

[1] E. Adžaga, *Fibonaccijev niz u glazbi*, Matka: časopis za mlade matematičare, HMD, Vol. 22, Broj 88 (2014), 254 – 255, dostupno na https://hrcak.srce.hr/file/195226 (svibanj 2019)

[2] J.H. David Jr., *The Mathematics of Music*, Austin Community College, MATH 1513.5097 (1995), dostupno na http://jackhdavid.thehouseofdavid.com/papers/math.html (svibanj 2019)

[3] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 1 – 4, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf (svibanj 2019)

[4] T. M. Fiore, *Music and Mathematics*, Chicago REU Lectures on Mathematical Music Theory (2006), 8 – 12, dostupno na http://www-personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/musictotal.pdf (svibanj 2019)

[5] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna aglebra 1*, skripta za nastavničke studije na PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf (svibanj 2019)

[6] T. Godfried, *The Euclidean Algorithm Generates Traditional Musical Rhythms*, School of Computer Science,McGill University, Canada (2005), dostupno na http://www-cgrl.cs.mcgill.ca/~godfried/publications/banff.pdf (svibanj 2019)

[7] J. Holtzkener, *Euclidean Rhythms*, Code/Music/Noise (2018), dostupno na https://medium.com/code-music-noise/euclidean-rhythms-391d879494df (svibanj 2019)

[8] M. Karaga, A. Petrovečki, *Primjena teorije grupa u teoriji glazbe ili kako smjestiti Beethovena na torus*, math.e, 25, dostupno na http://e.math.hr/broj_25/Karaga (lipanj 2019)

[9] S. Šamanić, *Glazbeni ključ*, metodički priručnik za glazbeni praktikum, Hrvatska znanstvena bibliografija (2011), dostupno na `https://bib.irb.hr/datoteka/611198.Lektorirani_Prirunik1.pdf` (svibanj 2019)

[10] Z. Šikić, Z. Šćekić, *Matematika i muzika*, Profil Knjiga, Zagreb, 2013

[11] K. Vidaković, *My piano and me*, (2014), dostupno na `https://mypianoandme.wordpress.com/about/` (svibanj 2019)

[12] D. Wright, *Mathematics and Music*, AMS Mathematical World Series, volume 28, 2009, dostupno na `https://www.math.wustl.edu/~wright/Math109/00Book.pdf`(svibanj 2019)

[13] *Mjera i ritam*, Matematika i glazba, dostupno na `https://matematikaiglazba.wordpress.com/mjera-i-ritam/` (svibanj 2019)

Sažetak

Glazba i matematika imaju vrlo bliski odnos koji se proteže tisućama godina, do samih početaka glazbe i civilizacije. Obično se organiziraju u dvije odvojene kategorije, bez očiglednog preklapanja. Ljudi su dobri u matematici i znanosti, umjetnosti i glazbi, kao da se ta dva elementa ne mogu logično smjestiti zajedno. U radu vidimo u kojoj su mjeri zapravo matematika i glazba povezani, te kako tu vezu upotrijebiti u nastavi matematike. Ako bi jedna osoba rekla da je glazba skup matematičkih odnosa koji se mogu objasniti algebarskim jednadžbama, a druga osoba da je glazba dar od Boga, koji čovječanstvo nikada neće u potpunosti shvatiti, obje ove osobe bi bile u pravu.

Summary

Music and math have a very close relationship that stretches back thousands of years, to the very origins of music and civilization. They are usually organized into two distinct categories, without obvious overlapping. People are good in math and science, art and music, as if these two elements can not logically accommodate together. In this paper we can see the extent to which mathematics and music are connected, and how to use this relationship in math teaching. If one person were to say that music is a set of mathematical relationships that can be explained with algebraic equations, and another person were to say that music is a gift from God, that mankind will never really totally comprehend, both of those individuals would be absolutely correct.

Životopis

Rođen sam u Koprivnici 1995. godine. Pohađao sam OŠ prof. Franje Viktora Šignjara u Virju te sam od 3. razreda krenuo i u osnovnu glazbenu školu prvo u Đurđevcu, a zatim u Bjelovaru. Nakon toga upisao sam Gimnaziju Bjelovar, prirodoslovno – matematički smjer te srednju glazbenu školu Vatroslava Lisinskog u Bjelovaru, smjer: gitara. Kroz osnovnu i srednju školu rasla je u meni ljubav prema glazbi, a iako manjim intenzitetom rasla je i ljubav prema matematici. Nisam ni slutio koliko su te moje čežnje zapravo spojive i da je veza između matematike i glazbe tako vidljiva. Ipak bez obzira na veliku ljubav prema glazbi svoje obrazovanje nastavljam upisavši Preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer 2014. godine, a nakon toga i Diplomski studij matematike i informatike, nastavnički smjer 2017. godine. Tijekom studija bio sam demonstrator iz Linearne algebre 1 te sam po završetku Diplomskog studija primio pohvalnicu Fakultetskog vijeća za izuzetan uspjeh u studiju.