# Konvergencija i redovi potencija

**Maslać, Maja**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Maja Maslać

# KONVERGENCIJA I REDOVI POTENCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Mojoj mami i mome tati!* ♡

# Sadržaj

# Uvod

U ovom diplomskom radu proučavat će se temeljni pojmovi za vezani konvergenciju redova potencija. Kako bi rad bio razumljivi, najprije ćemo navesti osnovne definicije i teoreme vezane za redove i konvergenciju. Sam diplomski rad je podijeljen na tri temeljna poglavlja, a to su: redovi, neprekidnost i derivabilnost te redovi potencija.

U prvom poglavlju ćemo definirati nizove i redove te njihova svojstva. U skladu s tim, nezaobilazno je spomenuti tri kriterija konvergencije: Leibnizov, d'Alemberov te Cauchyjev kriterij. Također, pojam niza ćemo proširiti na način da ćemo promatrati nizove $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

Kroz drugo poglavlje ćemo definirati neprekidnost funkcije te navesti nekoliko primjera neprekidnih funkcija. Nakon toga uvodimo pojam limesa fukcije te pojam derivabilnosti te ćemo također razmotriti vezu neprekidnosti i derivabilnosti.

Naposljetku, u trećem poglavlju ćemo definirati red potencija te radijus konvergencije reda potencija. Kroz razne teoreme i propozicije konačni cilj nam je doći do zadnjeg potpoglavlja u kojem proučavamo derivabilnost funkcija određenih redovima potencija.

# Poglavlje 1

# Redovi

## 1.1 Nizovi

**Definicija 1.1.1.** *Neka je $S$ skup. Za bilo koju funkciju kojoj je domena $\mathbb{N}$, a kodomena $S$ kažemo da je **niz** u $S$. Ako je $x$ niz u $S$ (to jest $x : \mathbb{N} \to S$), onda za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo $x_n$. Niz $x$ označavamo i s $(x_n)$ ili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Za niz $(x_n)$ u $\mathbb{R}$ kažemo da je niz realnih brojeva.*

**Definicija 1.1.2.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ te neka je $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz $(x_n)$ **teži** ili **konvergira** broju $L$ i pišemo $x_n \to L$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle$. U tom slučaju još kažemo da je $L$ **limes** niza $(x_n)$.*

**Napomena 1.1.3.** *Za sve $u, v \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi:*

$$\begin{aligned} |u - v| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < u - v < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow v - \varepsilon < u < v + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow u \in \langle v - \varepsilon, v + \varepsilon\rangle. \end{aligned}$$

*Dakle,*

$$|u - v| < \varepsilon \Leftrightarrow u \in \langle v - \varepsilon, v + \varepsilon\rangle.$$

*Stoga, ako je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ i $L \in \mathbb{R}$, vrijedi $x_n \to L$ ako i samo za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - L| < \varepsilon$.*

**Primjer 1.1.4.** *Neka je $K \in \mathbb{R}$. Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva definiran s $x_n = K$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to K$.*
*Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo bilo koji $n_0 \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi*

$$x_n \in \langle K - \varepsilon, K + \varepsilon\rangle$$

*(jer je $x_n = K$, za svaki $n \in \mathbb{N}$).*

**Propozicija 1.1.5.** *(Jedinstvenost limesa niza) Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to L_1$ i $x_n \to L_2$. Tada je*

$$L_1 = L_2.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $L_1 \neq L_2$.
Imamo dva slučaja:

1. $L_1 < L_2$
   Tada je $0 < L_2 - L_1$ pa je $0 < \frac{L_2 - L_1}{2}$.
   Odaberimo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da $0 < \varepsilon < \frac{L_2 - L_1}{2}$. Iz toga slijedi $2\varepsilon < L_2 - L_1$, pa je $L_1 + \varepsilon < L_2 - \varepsilon$. Ovo povlači da je
   $$\langle L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon\rangle \cap \langle L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon\rangle = \emptyset. \tag{1.1}$$
   Iz $x_n \to L_1$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi
   $$x_n \in \langle L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon\rangle.$$
   Iz $x_n \to L_2$ slijedi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_1$ vrijedi
   $$x_n \in \langle L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon\rangle.$$
   Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ i $n \geq n_1$. Tada je $x_n \in \langle L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon\rangle$ i $x_n \in \langle L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon\rangle$.
   Dakle,
   $$x_n \in \langle L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon\rangle \cap \langle L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon\rangle,$$
   no to je u kontradikciji s (1.1).

2. $L_2 < L_1$
   Analogno kao u prethodnom slučaju vidimo da ova pretpostavka vodi na kontradikciju.

Zaključak: $L_1 = L_2$. □

**Definicija 1.1.6.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $m, M \in \mathbb{R}$. Kažemo da je $M$* ***gornja međa*** *skupa $S$ ako za svaki $x \in S$ vrijedi*

$$x \leq M.$$

*Kažemo da je $m$* ***donja međa*** *skupa $S$ ako za svaki $x \in S$ vrijedi*

$$m \leq x.$$

**Definicija 1.1.7.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za $S$ kažemo da je* ***odozgo omeđen skup*** *ako $S$ ima barem jednu gornju među. Za $S$ kažemo da je* ***odozdo omeđen skup*** *ako $S$ ima barem jednu donju među.*

**Definicija 1.1.8.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je $a$* ***supremum skupa*** *$S$ ako je $a$ najmanja gornja međa skupa $S$, to jest ako vrijedi sljedeće:*

1. *$a$ je gornja međa skupa $S$*
2. *za svaku gornju među $M$ skupa $S$ vrijedi $a \leq M$.*

**Propozicija 1.1.9.** *(Jedinstvenost supremuma) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da su $a_1, a_2$ supremumi skupa $S$. Tada je*

$$a_1 = a_2.$$

*Dokaz.* Kad bi vrijedilo $a_1 < a_2$, to bi značilo da postoji gornja međa skupa $S$ manja od $a_2$. što je nemoguće jer je $a_2$ supremum od $S$. Analogno vidimo da je $a_2 < a_1$ nemoguće. Slijedi

$$a_1 = a_2.$$

□

Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$, onda supremum skupa $S$, ako postoji, označavamo sa $\sup S$.

**Primjer 1.1.10.** *Neka je $S = \langle -\infty, 0 \rangle$. Tvrdimo da je $0$ supremum skupa $S$.*
*Za svaki $x \in S$ vrijedi $x < 0$ pa je svakako $x \leq 0$. Stoga je $0$ gornja međa skupa $S$. Neka je $M$ gornja međa skupa $S$. Pretpostavimo da je $M < 0$. Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da*

$$M < x < 0 \tag{1.2}$$

*Iz $x < 0$ slijedi da je $x \in S$ i budući da je $M$ gornja međa skupa slijedi $x \leq M$, što je u kontradikciji s (1.2).*
*Zaključujemo da je*

$$0 \leq M.$$

*Prema tome, $0$ je supremumu skupa $S$.*

**Primjer 1.1.11.** *Neka je* $S = [0, 1\rangle$ *. Tvrdimo da je* 1 *supremum skupa* $S$*.*
*Očito je* 1 *gornja međa od* $S$*. Neka je* $b$ *gornja međa od* $S$*. Pretpostavimo da je* $b < 1$*. Tada je*

$$max\{0, b\} < 1,$$

*pa postoji* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $\max\{0, b\} < x < 1$*. Slijedi* $0 < x < 1$*, pa je* $x \in S$*. Također iz načina na koji smo odabrali* $x$ *slijedi*

$$b < x.$$

*No ovo je u kontradikciji s činjenicom da je* $x \in S$ *i* $b$ *gornja međa od* $S$*. Dakle,*

$$1 \leq b.$$

*Prema tome,* 1 *je supremum skupa* $S$*.*

**Definicija 1.1.12.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *i* $s_0 \in S$*. Kažemo da je* $s_0$ ***maksimum skupa*** $S$ *ako za svaki* $x \in S$ *vrijedi*

$$x \leq s_0.$$

Dakle, $s_0 \in S$ je maksimum skupa $S$ ako i samo ako je $s_0$ gornja međa skupa $S$.

Uočimo: Ako je $s_0$ maksimum skupa $S$, onda je $s_0$ supremum skupa $S$.
Naime, po definiciji maksimuma vrijedi da je $s_0$ gornja međa skupa $S$. Nadalje, ako je $M$ gornja međa skupa $S$, onda je $x \leq M$, za svaki $x \in S$, pa je posebno i $s_0 \leq M$.
Dakle, $s_0$ je supemum skupa $S$.

**Napomena 1.1.13.** *Pretpostavimo da su* $s_1$ *i* $s_2$ *maksimumi skupa* $S$*. Tada je*

$$s_1 = s_2.$$

*Naime, to slijedi iz propozicije 1.1.9 i činjenice da su* $s_1$ *i* $s_2$ *ujedno supremumi skupa* $S$*.*

**Napomena 1.1.14.** *Supremum skupa ne mora biti element tog skupa (primjer 1.1.10), pa samim tim ne mora biti ni maksimum tog skupa.*

*Uočimo sljedeće: Ako je* $a$ *supremum skupa* $S$ *i* $a \notin S$*, onda* $S$ *nema maksimuma: kada bi* $s_0$ *bio maksimum skupa* $S$*, onda bi* $s_0$ *bio i supremum skupa* $S$*, pa bi iz propozicije 1.1.9 slijedilo* $s_0 = a$*, što je nemoguće jer je* $s_0 \in S$ *i* $a \notin S$*.*

Posebno, skup $S$ iz primjera 1.1.10 nema maksimum.
Ako skup $S$ ima supremum, onda je $S$ očito odozgo omeđen. Nadalje, mora vrijediti $S \neq \emptyset$.
Naime, prazan skup nema supremum (svaki realan broj je gornja međa praznog skupa, pa

stoga ne postoji najmanja gornja međa od $\emptyset$.)
Dakle, skup koji ima supremum mora biti neprazan i odozgo omeđen. Vrijedi i obrat ove tvrdnje. Iskažimo prvo jednu važnu činjenicu o realnim brojevima.

**Aksiom potpunosti:** Neka su $A$ i $B$ neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$, za svaki $x \in A$ i za svaki $y \in B$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z$, za svaki $x \in A$ i $z \leq y$, za svaki $y \in B$.

**Propozicija 1.1.15.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $S \neq \emptyset$. Pretpostavimo da je $S$ odozgo omeđen. Tada $S$ ima supremum.*

*Dokaz.* Neka je $B = \{y \mid y \text{ gornja međa od } S\}$. Vrijedi $B \neq \emptyset$ jer je $S$ odozgo omeđen. Za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in B$ vrijedi
$$x \leq y.$$
Prema aksiomu potpunosti, postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da
$$x \leq z \quad \text{i} \quad z \leq y,$$
za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in B$. Iz
$$x \leq z,$$
za svaki $x \in S$, zaključujemo da je $z$ gornja međa skupa $S$. Iz
$$z \leq y,$$
za svaki $y \in B$, sada zaključujemo da je $z$ supremum skupa $S$, čime je propozicija dokazana. □

**Definicija 1.1.16.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $A \in \mathbb{R}$. Kažemo da je $A$* ***infimum skupa*** *$S$ ako je $A$ najveća donja međa skupa $S$, to jest ako vrijedi sljedeće:*

1. *$A$ je donja međa skupa $S$*
2. *za svaku donju među $m$ skupa $S$ vrijedi $m \leq A$.*

Sljedeću propoziciju dokazujemo analogno kao propoziciju 1.1.9.

**Propozicija 1.1.17.** *(Jedinstvenost infimuma) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da su $A_1, A_2$ infimumi skupa $S$. Tada je*
$$A_1 = A_2.$$

Ako je $S \subseteq \mathbb{R}$, onda infimum skupa $S$, ako postoji, označavamo s $\inf S$.

**Definicija 1.1.18.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $m_0 \in S$. Kažemo da je $m_0$* ***minimum skupa*** *$S$, ako za svaki $x \in S$ vrijedi*

$$m_0 \leq x.$$

Lako se vidi sljedeće: ako je $m$ minimum skupa $S$, onda je $m$ infimum skupa $S$.
Sljedeću propoziciju dokazujemo analogno kao propoziciju 1.1.15.

**Propozicija 1.1.19.** *Svaki neprazan odozdo omeđen skup ima infimum.*

**Definicija 1.1.20.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $S$* ***omeđen skup****, ako je $S$ odozgo i odozdo omeđen.*

**Definicija 1.1.21.** *Za niz $(x_n)$ u $\mathbb{R}$ kažemo da je* ***omeđen*** *ako je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

**Propozicija 1.1.22.** *Neka su $S$ i $T$ omeđeni skupovi. Tada je $S \cup T$ omeđen skup.*

*Dokaz.* Budući da su $S$ i $T$ omeđeni skupovi, postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a$ gornja međa od $S$ i $b$ gornja međa od $T$. Odaberimo $c \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a \leq c \quad \text{i} \quad b \leq c.$$

Tada vrijedi da je $c$ gornja međa od $S$ i $c$ gornja međa od $T$. Stoga je $c$ gornja međa skupa $S \cup T$, stoga je $S \cup T$ odozgo omeđen skup. Analogno dobrivamo da je $S \cup T$ odozdo omeđen skup.
Dakle, $S \cup T$ je omeđen skup. □

**Korolar 1.1.23.** *Ako je $n \in \mathbb{N}$ te ako su $S_1, S_2, ..., S_n$ omeđeni skupovi, onda je $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n$ omeđen skup.*

*Dokaz.* Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom po $n$.
Za $n = 1$ tvrdnja je očita.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $S_1, S_2, ..., S_{n+1}$ omeđeni skupovi.
Prema induktivnoj pretpostavci skup $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n$ je omeđen, pa iz

$$S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n \cup S_{n+1} = (S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n) \cup S_{n+1}$$

i propozicije 1.1.22 slijedi da je $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n \cup S_{n+1}$ omeđen skup.
Dakle, tvrdnja vrijedi za $n + 1$. Time je korolar dokazan. □

**Definicija 1.1.24.** *Za niz $(x_n) \in \mathbb{R}$ kažemo da je* ***konvergentan*** *ako postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to L$.*

**Propozicija 1.1.25.** *Svaki konvergentan niz je omeđen.*

*Dokaz.* Neka je $(x_n)$ konvergentan niz. Tada postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to L$. Odaberimo $\varepsilon = 1$. Slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$, to jest

$$x_n \in \langle L - 1, L + 1 \rangle.$$

Stoga je

$$\{x_n \mid n \geq n_0\} \subseteq \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle.$$

Iz ovoga je očito da je skup $\{x_n \mid n \geq n_0\}$ omeđen. Svaki jednočlan podskup od $\mathbb{R}$ je očito omeđen. Vrijedi:

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup ... \cup \{x_n \mid n \geq n_0\},$$

pa iz korolara 1.1.23 slijedi da je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup.
Prema tome, $(x_n)$ je omeđen niz. □

Obrat prethodne propozicije ne vrijedi.

**Primjer 1.1.26.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = (-1)^n$. Imamo $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$, pa je $(x_n)$ očito omeđen niz. No, $(x_n)$ nije konvergentan.*
*Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to L$. Definirajmo $\varepsilon = \frac{1}{2}$.*
*Iz $x_n \to L$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vrijedi*

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

*Odaberimo $m, n \geq n_0$ takve da $m$ bude paran broj, a $n$ neparan.*
*Vrijedi:*

$$2 = |x_m - x_n| = |x_m - L + L - x_n| \leq |x_m - L| + |L - x_n| < 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

*Dakle, $2 < 1$, što je kontradikcija.*

**Definicija 1.1.27.** *Za niz realnih brojeva $(x_n)$ kažemo da je* ***rastući*** *ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

**Propozicija 1.1.28.** *Neka je $(x_n)$ rastući niz u $\mathbb{R}$. Tada za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da $n \leq m$ vrijedi*

$$x_n \leq x_m.$$

*Dokaz.* Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo matematičkom indukcijom po $m, m \geq n$, da je $x_n \leq x_m$.
Za $m = n$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}, m \geq n$. Dakle,

$$x_n \leq x_m,$$

a po definiciji rastućeg niza vrijedi $x_m \leq x_{m+1}$. Stoga je

$$x_n \leq x_{m+1}$$

Dakle, $x_n \leq x_m$, za svaki $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \geq n$.
Time je propozicija dokazana. □

**Propozicija 1.1.29.** *Neka je $(x_n)$ rastući niz realnih brojeva. Pretpostavimo $L = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to L$.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $L - \varepsilon < x_{n_0}$.
Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_{n_0} \leq L - \varepsilon.$$

Ovo znači da je $L - \varepsilon$ gornja međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, što je nemoguće jer je $L$ najmanja gornja međa tog skupa.
Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$L - \varepsilon < x_{n_0}.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Prema propoziciji 1.1.28 vrijedi $x_{n_0} \leq x_n$. Zbog $L = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ vrijedi $x_n \leq L$. Imamo

$$L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Dakle,

$$x_n \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
Zaključak, $x_n \to L$. □

**Korolar 1.1.30.** *Svaki omeđen rastući niz je konvergentan.*

*Dokaz.* Neka je $(x_n)$ omeđen rastući niz. Skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen, pa prema propoziciji 1.1.15 ima supremum. Neka je

$$L = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Iz propozicije 1.1.29 slijedi

$$x_n \to L.$$

Dakle, $(x_n)$ je konvergentan niz. □

**Propozicija 1.1.31.** *Neka su $(x_n)$ i $(y_n)$ nizovi realnih brojeva. Pretpostavimo da su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to L_1$ i $y_n \to L_2$. Tada niz $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teži prema $L_1 + L_2$.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Iz definicije konvergencije niza i $x_n \to L_1$, slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Analogno, iz $y_n \to L_2$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi

$$|y_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4}$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 \geq n_0$ i $k_0 \geq m_0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq k_0$. Uočimo da za taj $n$ vrijedi (1.3) i (1.4). Imamo

$$|(x_n + y_n) - (L_1 + L_2)| = |(x_n - L_1) + (y_n - L_2)| \leq |x_n - L_1| + |y_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle,

$$|(x_n + y_n) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon,$$

za svaki $n \geq k_0$.
Time je propozicija dokazana. □

**Propozicija 1.1.32.** *Pretpostavimo da je $(x_n)$ niz realnih brojeva te da je $L \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to L$. Tada niz $(-x_n)$ teži prema $-L$ i niz $(|x_n|)$ teži prema $|L|$.*

*Dokaz.*

1. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi

$$|(-x_n) - (-L)| = |x_n - L|. \tag{1.5}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Iz činjenice da $x_n \to L$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

Iz jednakosti (1.5) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|(-x_n) - (-L)| < \varepsilon.$$

Prema tome, $-x_n \to -L$.

2. Iz činjenice da za sve $u, v \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$||u| - |v|| \leq |u - v|,$$

slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$||x_n| - |L|| \leq |x_n - L|. \tag{1.6}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - L| < \varepsilon$. Iz (1.6) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$||x_n| - |L|| < \varepsilon.$$

Dakle, $|x_n| \to |L|$.

□

## 1.2 Redovi

**Definicija 1.2.1.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$. Definirajmo niz $(s_n)$ sa $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, ..., s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Za uređeni par $((x_n), (s_n))$ kažemo da je **red** i označavamo ga s $\sum x_n$ ili $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Za niz $(s_n)$ kažemo da je **niz parcijalnih suma** reda $\sum x_n$.*

**Definicija 1.2.2.** *Neka je $\sum x_n$ red te neka je $(s_n)$ pripadni niz parcijalnih suma. Pretpostavimo da je $L \in \mathbb{R}$ takav da $s_n \to L$. Tada za $L$ kažemo da je **suma reda** $\sum x_n$.*

**Definicija 1.2.3.** *Za red $\sum x_n$ kažemo da je **konvergentan** ako postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da je $L$ suma toga reda. Dakle, red $\sum x_n$ je konvergentan ako i samo ako je pripadni niz parcijalnih suma toga reda konvergentan.*

**Napomena 1.2.4.** *Neka je $\sum x_n$ konvergentan red. Tada postoji jedinstveni $L \in \mathbb{R}$ takav da je $L$ suma reda $\sum x_n$ (propozicija 1.1.5). Broj $L$ označavamo s $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.*

**Primjer 1.2.5.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva definiran s $x_n = 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Red $\sum x_n$ nije konvergentan.*

*Naime, za niz parcijalnih suma $(s_n)$ ovog reda vrijedi $s_n = n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je očito da niz $(s_n)$ nije omeđen, a samim tim nije konvergentan.*

**Lema 1.2.6.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $A$ infimum skupa $S$. Tada je $-A$ supremum skupa $\{-x \mid x \in S\}$.*

*Dokaz.* Budući da je $A$ donja međa od $S$, za svaki $x \in S$ vrijedi

$$A \leq x.$$

Stoga je $-x \leq -A$, za svaki $x \in S$. Prema tome, $-A$ je gornja međa skupa $\{-x \mid x \in S\}$. Preostaje dokazati da je $-A$ najmanja gornja međa ovog skupa.
Pretpostavimo da je $B$ gornja međa skupa $\{-x \mid x \in S\}$. Tada je

$$-x \leq B,$$

za svaki $x \in S$, pa je $-B \leq x$, za svaki $x \in S$. Iz ovog slijedi da je $-B$ donja međa skupa $S$. Budući da je $A$ infimum skupa $S$, vrijedi

$$-B \leq A,$$

pa je $-A \leq B$.
Zaključak: $-A$ je najmanja gornja međa skupa $\{-x \mid x \in S\}$, tj. $-A$ je supremum skupa $\{-x \mid x \in S\}$. □

**Definicija 1.2.7.** *Za niz realnih brojeva $(x_n)$ kažemo da je **padajući** ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$x_n \geq x_{n+1}.$$

**Korolar 1.2.8.** *Neka je $(x_n)$ padajući niz realnih brojeva. Pretpostavimo da je $L$ infimum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to L$.*

*Dokaz.* Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \geq x_{n+1}$, tj.

$$-x_n \leq -x_{n+1}.$$

Stoga je niz $(-x_n)$ rastući. Prema lemi 1.2 slijedi da je $-L$ supremum skupa $\{-x_n \mid x \in \mathbb{N}\}$.
Iz propozicije 1.1.29 slijedi da

$$-x_n \to -L.$$

Iz propozicije 1.1.32 slijedi da

$$-(-x_n) \to -(-L),$$

odnosno

$$x_n \to L.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

**Primjer 1.2.9.** *Neka je $(x_n)$ niz definiran s $x_n = \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada*

$$x_n \to 0.$$

*Naime, niz $(x_n)$ je očito padajući. Nadalje, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, a infimum ovog skupa je $0$, što vidimo na sljedeći način.*

*Očito je* $0$ *donja međa skupa* $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$*. Pretpostavimo da postoji* $a > 0$ *takav da je* $a$ *donja međa skupa* $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$*. Odaberimo* $n \in \mathbb{N}$ *takav da*

$$\frac{1}{a} < n.$$

*Slijedi da je*

$$\frac{1}{n} < a,$$

*što je u kontradikciji s činjenicom da je* $a$ *donja međa promatranog skupa.*
*Stoga je* $0$ *najveća donja međa skupa* $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$*. Iz korolara 1.2.8 slijedi*

$$x_n \to 0.$$

**Propozicija 1.2.10.** *Neka je* $q = \langle 0, 1\rangle$ *. Tada je* $\inf\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

*Dokaz.* Uočimo da je $0$ donja međa skupa $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dakle, ovaj skup je odozdo omeđen i očito neprazan, pa prema propoziciji 1.1.19 ima infimum. Neka je

$$A = \inf\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.7}$$

Iz činjenice da je $0$ donja međa skupa $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zaključujemo da je

$$0 \leq A.$$

Želimo dokazati da je $A = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. $A > 0$. Iz $q < 1$ slijedi

$$1 < \frac{1}{q},$$

pa je

$$A < A \cdot \frac{1}{q}.$$

Iz ovoga slijedi da $A \cdot \frac{1}{q}$ nije donja međa skupa $\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$q^n < A \cdot \frac{1}{q},$$

što povlači

$$q^{n+1} < A,$$

no to je očito u kontradikciji s (1.7).
Zaključak: $A = 0$.
Time je propozicija dokazana. □

**Korolar 1.2.11.** *Neka je $q \in \langle 0, 1\rangle$. Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva definiran na sljedeći način: $x_n = q^n$. Tada $x_n \to 0$.*

*Dokaz.* Budući da je $q \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi $0 < q < 1$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $0 < q$ tada je

$$0 < q^n.$$

Sada iz $q < 1$ slijedi

$$q \cdot q^n < 1 \cdot q^n,$$

tj. $q^{n+1} < q^n$. Dakle, $x_{n+1} < x_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, niz $(x_n)$ je padajući. Očito je

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

pa iz propozicije 1.2.10 slijedi da je

$$0 = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Prema korolaru 1.2.8 $x_n \to 0$. □

**Propozicija 1.2.12.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $L \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to L$. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada*

$$cx_n \to cL.$$

*Dokaz.* Ako je $c = 0$, tvrdnja slijedi iz primjera 1.1.4. Pretpostavimo da je $c \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $x_n \to L$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vrijedi

$$|c| \cdot |x_n - L| < \varepsilon,$$

to jest

$$|cx_n - cL| < \varepsilon.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

**Propozicija 1.2.13.** *Neka je $q \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ konvergentan i $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.*

*Dokaz.* Neka je $(s_n)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$. Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} s_n &= q + q^2 + ... + q^n \\ &= q^n \cdot (1 + q + ... + q^{n-1}) \\ &= q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= \frac{q}{1-q} - \frac{q}{1-q} \cdot q^n. \end{aligned}$$

Dakle,

$$s_n = \frac{q}{1-q} - \frac{q}{1-q} \cdot q^n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Definirajmo nizove $(x_n)$ i $(y_n)$ s $x_n = \frac{q}{1-q}$, $y_n = -\frac{q}{1-q} \cdot q^n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_n = x_n + y_n.$$

Prema primjeru 1.1.4

$$x_n \to \frac{q}{1-q}.$$

Iz korolara 1.2.11 i propozicije 1.2.12 slijedi da

$$y_n \to 0.$$

Iz propozicije 1.1.31 slijedi

$$x_n + y_n \to \frac{q}{1-q} + 0 = \frac{q}{1-q},$$

to jest

$$s_n \to \frac{q}{1-q}.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Lema 1.2.14.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva, neka je $L \in \mathbb{R}$ te neka je $k_0 \in \mathbb{N}$. Definirajmo niz $(y_n)$ s $y_n = x_{n+k_0}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi*

$$x_n \to L \Leftrightarrow y_n \to L.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da $x_n \to L$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Tada je $n + k_0 \geq n_0$, pa slijedi

$$\left|x_{n+k_0} - L\right| < \varepsilon,$$

to jest

$$|y_n - L| < \varepsilon.$$

Prema tome, $y_n \to L$.

Pretpostavimo da $y_n \to L$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vrijedi

$$|y_n - L| < \varepsilon.$$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0 + k_0$. Tada je $n - k_0 \geq n_0$. Stoga je

$$\left|y_{n-k_0} - L\right| < \varepsilon.$$

No,

$$y_{n-k_0} = x_{(n-k_0)+k_0} = x_n.$$

Dakle, $|x_n - L| < \varepsilon$, za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 + k_0$. Prema tome, $x_n \to L$. □

**Propozicija 1.2.15.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je red $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergentan. Tada $x_n \to 0$.*

*Dokaz.* Neka je $(s_n)$ niz parcijalnih suma ovoga reda. Prema pretpostavci, postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da $s_n \to L$. Prema lemi 1.2.14 vrijedi

$$s_{n+1} \to L.$$

Definirajmo niz $(y_n)$ s $y_n = s_{n+1} + (-s_n)$.
Prema propoziciji 1.1.32 vrijedi

$$-s_n \to -L,$$

pa iz propozicije 1.1.31 slijedi

$$y_n \to L + (-L),$$

to jest

$$y_n \to 0.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} y_n &= s_{n+1} - s_n \\ &= (x_1 + x_2 + ... + x_{n+1}) - (x_1 + x_2 + ... + x_n) \\ &= x_{n+1}. \end{aligned}$$

Dakle, $y_n = x_{n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Prema tome, $x_{n+1} \to 0$, pa iz leme 1.2.14 slijedi

$$x_n \to 0.$$

□

**Primjer 1.2.16.** *Red* $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ *nije konvergentan. Dokažimo to.*

*Neka je* $(s_n)$ *niz parcijalnih suma ovoga reda. Tvrdimo da za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

*Dokažimo to indukcijom.*
*Za* $n = 1$ *tvrdnja je jasna jer je*

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}.$$

*Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki* $n \in \mathbb{N}$. *Imamo*

$$s_{2^{n+1}} = \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^n+1}^{2^n+2^n} \frac{1}{i} = s_{2^n} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + i}.$$

*Za svaki* $i \in \{1, ..., 2^n\}$ *vrijedi*

$$\frac{1}{2^{2n} + i} \geq \frac{1}{2^n + 2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

*Stoga je*

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + i} \geq s_{2^n} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2}.$$

*Dakle,* $s_{2^{n+1}} \geq s_{2^n} + \frac{1}{2}$.
*Iz induktivne pretpostavke sada slijedi*

$$s_{2^{n+1}} \geq (1 + \frac{n}{2}) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

*Dakle,* $s_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$. *Prema tome,*

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

*vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.*
*Pretpostavimo da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ konvergentan. Tada je niz $(s_n)$ konvergentan, pa je prema propoziciji 1.1.25 $(s_n)$ omeđen niz. Dakle skup $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen pa postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $M$ gornja međa ovog skupa. Slijedi*

$$s_n \leq M,$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da $2 \cdot (M-1) < n$. Slijedi*

$$M < 1 + \frac{n}{2}.$$

*Iz $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ slijedi $M < s_{2^n}$. To je u kontradikciji s $s_{2^n} \leq M$.*
*Zaključak, red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ nije konvergentan.*

Za red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ kažemo da je **harmonijski red**. Prema prethodnom primjeru, harmonijski red nije konvergentan. Uočimo da $\frac{1}{n} \to 0$, što slijedi iz primjera 1.2.9. Prema tome, obrat propozicije 1.2.15 ne vrijedi općenito.

**Definicija 1.2.17.** *Za funkciju $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kažemo da je **strogo rastuća** ako je*

$$p_n < p_{n+1},$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

**Definicija 1.2.18.** *Neka je $(x_n)$ niz u skupu $S$ te neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Neka je $(y_n)$ niz definiran s $y_n = x_{p_n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada za niz $(y_n)$ kažemo da je **podniz** niza $(x_n)$.*

Neka je $(x_n)$ niz u skupu $S$. Tada je $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ podniz niza $(x_n)$. Naime, funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p_n = 2n$ je očito strogo rastuća i vrijedi $x_{2n} = x_{p_n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Analogno vidimo da su $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ i $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ podnizovi niza $(x_n)$.

**Lema 1.2.19.** *Neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$n \leq p_n.$$

*Dokaz.* Dokažimo ovu tvrdnju matematičkom indukcijom po $n$.
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi

$$1 \leq p_1.$$

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leq p_n$. Budući da je $p$ strogo rastuća funkcija vrijedi
$$p_n < p_{n+1}.$$
Iz $n \leq p_n$ slijedi
$$n \leq p_{n+1}.$$
Budući da su $n$ i $p_{n+1}$ prirodni brojevi zaključujemo da je
$$n + 1 \leq p_{n+1}.$$
Time je tvrdnja leme dokazana. $\square$

**Propozicija 1.2.20.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ te neka je $L \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to L$. Neka je $(y_n)$ podniz niza $(x_n)$. Tada*
$$y_n \to L.$$

*Dokaz.* Prema pretpostavci propozicije postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je
$$y_n = x_{p_n},$$
za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $x_n \to L$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je
$$|x_n - L| < \varepsilon,$$
za svaki $n \geq n_0$. Neka je $n \geq n_0$. Prema lemi 1.2.19 vrijedi $p_n \geq n$, pa slijedi $p_n \geq n_0$. Stoga je
$$\left|x_{p_n} - L\right| < \varepsilon,$$
to jest $|y_n - L| < \varepsilon$.
Dakle, $|y_n - L| < \varepsilon$, za svaki $n \geq n_0$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

**Primjer 1.2.21.** *Obrat prethodne propozicije ne vrijedi općenito.*
*Naime, moguće je da niz koji nije konvergentan ima konvergentan podniz.*
*Neka je $(x_n)$ niz iz primjera 1.1.26. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*
$$x_{2n} = 1.$$
*Stoga je niz $(x_{2n})$ konvergentan po primjeru 1.1.4. Nadalje, $(x_{2n})$ je podniz niza $(x_n)$. No, niz $(x_n)$ nije konvergentan.*

**Lema 1.2.22.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva. Pretpostavimo da je $L \in \mathbb{R}$ takav da $x_{2n} \to L$ i $x_{2n-1} \to L$. Tada $x_n \to L$.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog $x_{2n} \to L$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ povlači

$$|x_{2n} - L| < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Zbog $x_{2n-1} \to L$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq m_0$ povlači

$$|x_{2n-1} - L| < \varepsilon. \tag{1.9}$$

Neka je

$$k_0 = \max\{2n_0, 2m_0 - 1\}.$$

Neka je $k \geq k_0$. Tvrdimo

$$|x_k - L| < \varepsilon.$$

Imamo 2 slučaja:

1. $k$ paran
   Tada je $k = 2n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Iz $k \geq k_0$ slijedi $k \geq 2n_0$, to jest $2n \geq 2n_0$ pa je $n \geq n_0$. Iz (1.8) slijedi $|x_{2n} - L| < \varepsilon$, to jest

   $$|x_k - L| < \varepsilon.$$

2. $k$ neparan
   Tada je $k = 2n-1$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Iz $k \geq k_0$ slijedi $k \geq 2m_0-1$, to jest $2n-1 \geq 2m_0-1$, pa je $n \geq m_0$. Iz (1.9) slijedi $|x_{2n-1} - L| < \varepsilon$, to jest

   $$|x_k - L| < \varepsilon.$$

Dakle, $|x_k - L| < \varepsilon$, za svaki $k \geq k_0$.
Time je tvrdnja leme dokazana. □

**Definicija 1.2.23.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva.*
*Ako je*

$$x_n < x_{n+1},$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda za niz $(x_n)$ kažemo da je* ***strogo rastući****.*
*Ako je*

$$x_n > x_{n+1},$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda za niz $(x_n)$ kažemo da je* ***strogo padajući****.*

## 1.3 Kriteriji konvergencije

**Teorem 1.3.1.** *(Leibnizov kriterij)*
*Neka je $(x_n)$ strogo padajući niz ralnih brojeva. Pretpostavimo da je $x_n \geq 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te da $x_n \to 0$. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}x_n$ konvergentan i vrijedi*

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n < x_1.$$

*Dokaz.* Neka je $(s_n)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}x_n$. Uočimo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_i - x_{i+1} > 0 \tag{1.10}$$

(jer je niz $(x_n)$ strogo padajući). Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + ... + x_{2n-1} - x_{2n} \\ &= (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + ... + (x_{2n-1} - x_{2n}). \end{aligned}$$

Stoga za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} + (x_{2n+1} - x_{2n+2}).$$

Iz ovog i (1.10) slijedi da je

$$s_{2n} < s_{2(n+1)},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, dakle niz $(s_{2n})$ je rastući. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća jednakost:

$$s_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - ... - (x_{2n-2} - x_{2n-1}) - x_{2n}.$$

Iz ovoga, (1.10) i $x_{2n} > 0$ slijedi

$$s_{2n} < x_1. \tag{1.11}$$

Prema propoziciji 1.1.28 vrijedi

$$s_2 \leq s_{2n},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz ovog i (1.11) slijedi da je skup $\{s_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen. Dakle, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ je omeđen i rastući niz. Neka je $L = \sup\{s_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Prema propoziciji 1.1.29

$$s_{2n} \to L.$$

Iz definicije broja $L$ očito je da je

$$s_2 \leq L.$$

Vrijedi $s_2 = x_1 - x_2 > 0$. Stoga je $L > 0$.
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$y_n = (-1)^{n+1} x_n.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog $x_n \to 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - 0| < \varepsilon$, to jest $|x_n| < \varepsilon$. Dakle, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left|(-1)^{n+1} x_n\right| < \varepsilon,$$

to jest $|y_n - 0| < \varepsilon$. Iz ovog zaključujemo da $y_n \to 0$. Uočimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= y_1 + ... + y_{2n-1} + y_{2n} \\ &= s_{2n-1} + y_{2n}. \end{aligned}$$

Dakle, $s_{2n} = s_{2n-1} + y_{2n}$, pa je

$$s_{2n-1} = s_{2n} - y_{2n}. \tag{1.12}$$

Očito je $(y_{2n})$ podniz niza $(y_n)$, pa prema propoziciji 1.2.20 $y_{2n} \to 0$. Iz propozicije 1.1.32 slijedi da $-y_{2n} \to 0$. Prema (1.12), za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$s_{2n-1} = s_{2n} + (-y_{2n}).$$

Prema propoziciji 1.1.31 vrijedi $s_{2n-1} \to L + 0$, odnosno $s_{2n-1} \to L$. Iz leme 1.2.22 slijedi $s_n \to L$. Dakle, red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} x_n$ je konvergentan.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= (y_1 + ... + y_{2n-1}) + y_{2n} + y_{2n+1} \\ &= s_{2n-1} + (-1)^{2n+1} x_{2n} + (-1)^{(2n+1)+1} x_{2n+1} \\ &= s_{2n-1} - (x_{2n} - x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Dakle,

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (x_{2n} - x_{2n+1}).$$

Zbog (1.10) je

$$x_{2n} - x_{2n+1} > 0,$$

pa je $s_{2n+1} < s_{2n-1}$. Iz ovog zaključujemo da je niz $(s_{2n-1})$ padajući. Taj niz je i omeđen (jer je konvergentan, propozicija (1.1.25)), pa prema korolaru 1.2.8 vrijedi

$$s_{2n-1} \to A,$$

gdje je $A = \inf\{s_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Iz propozicije 1.1.5 slijedi

$$L = A.$$

Prema definiciji infimuma vrijedi

$$L \leq s_{2n-1},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Posebno, $L \leq s_3$, a zbog $s_3 < s_1$ imamo

$$L \leq s_1.$$

Uočimo $s_1 = x_1$. Dakle,

$$L \leq x_1.$$

Zaključak: Vidjeli smo da je $0 < L$, a vrijedi $L \leq x_1$, stoga je

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n < x_1.$$

□

**Primjer 1.3.2.** *Red* $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ *je konvergentan.*

*Naime, neka je* $(x_n)$ *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran s* $x_n = \frac{1}{n}$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Očito je* $(x_n)$ *padajući niz te* $x_n \to 0$ *(primjer 1.2.9). Nadalje,* $x_n > 0$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Prema teoremu 1.3.1, red* $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ *je konvergentan.*

**Definicija 1.3.3.** *Za red* $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ *kažemo da je* ***apsolutno konvergentan****, ako je red* $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ *konvergentan.*

Konvergentan red ne mora biti apsolutno konvergentan. Naime, red iz primjera 1.3.2 je konvergentan, no nije apsolutno konvergentan što slijedi iz primjera 1.2.16.

**Lema 1.3.4.** *Neka je* $(x_n)$ *rastući niz realnih brojeva te neka je* $L \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to L$. *Tada je* $x_n \leq L$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

*Dokaz.* Prema propoziciji 1.1.25 niz $(x_n)$ je omeđen, dakle $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen skup. Neka je $a = \{\sup x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Iz propozicije 1.1.29 slijedi

$$x_n \to a.$$

Prema propoziciji 1.1.9 vrijedi

$$L = a.$$

Očito je $x_n \leq a$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle

$$x_n \leq L,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

**Lema 1.3.5.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \geq 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je red $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergentan. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{k} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

*Dokaz.* Za $k \in \mathbb{N}$, neka je $s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$. Znamo da $s_k \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$s_{k+1} = s_k + x_{k+1},$$

pa zbog $x_{k+1} \geq 0$ imamo

$$s_k \leq s_{k+1}.$$

Prema tome, niz $(s_k)$ je rastući, pa iz leme 1.3.4 slijedi da je

$$s_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, što je upravo tvrdnja leme. □

**Propozicija 1.3.6.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \geq 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $A \in \mathbb{R}$ takav da je $\sum_{n=1}^{k} x_n \leq A$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada je red $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergentan i vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq A$.*

*Dokaz.* Neka je $(s_k)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Kao u dokazu leme 1.3.5, vidimo da je $(s_k)$ rastući niz.
Prema pretpostavci propozicije vrijedi

$$s_k \leq A,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Stoga je skup $\{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen i $A$ mu je gornja međa.
Neka je $L = \{\sup \{s_k \mid k \in \mathbb{N}\}\}$. Očito je

$$L \leq A.$$

Prema propoziciji 1.1.29 vrijedi $s_k \to L$. Stoga je $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergentan i $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = L$.

Dakle, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq A$. □

**Propozicija 1.3.7.** *Neka su* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *i* $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ *konvergentni redovi. Neka je* $c \in \mathbb{R}$. *Tada su redovi* $\sum_{n\in\mathbb{N}} cx_n$ *i* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n + y_n)$ *konvergentni, te vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c\sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad i \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

*Dokaz.* Neka je $(s_k)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, neka je $(s'_k)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$, neka je $(s''_k)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n + y_n)$ te neka je $(\gamma_k)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} cx_n$. Neka je $k \in \mathbb{N}$.
Vrijedi:

$$\gamma_k = \sum_{n=1}^{k} cx_n = c\sum_{n=1}^{k} x_n = cs_k.$$

Dakle, $\gamma_k = cs_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.
Prema propoziciji 1.2.12 vrijedi $\gamma_k \to c\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Stoga je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} cx_n$ konvergentan i

$$\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} s''_k &= \sum_{n=1}^{k}(x_n + y_n) \\ &= \sum_{n=1}^{k} x_n + \sum_{n=1}^{k} y_n \\ &= s_k + s'_k. \end{aligned}$$

Dakle, $s''_k = s_k + s'_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.
Iz propozicije 1.1.31 slijedi

$$s''_k \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Stoga je red $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n + y_n)$ konvergentan i

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

□

**Propozicija 1.3.8.** *Neka je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ apsolutno konvergentan red. Tada je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan red.*

*Dokaz.* Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $x_n^+ = \begin{cases} x_n, & x_n \geq 0, \\ 0, & x_n \leq 0. \end{cases}$ i $x_n^- = \begin{cases} 0, & x_n \geq 0, \\ -x_n, & x_n \leq 0. \end{cases}$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n^+, x_n^- \geq 0$, $x_n = x_n^+ - x_n^-$, $x_n^+ \leq |x_n|$ i $x_n^- \leq |x_n|$.
Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{k} x_n^+ \leq \sum_{n=1}^{k} |x_n|.$$

Prema lemi 1.3.5 vrijedi

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Stoga je

$$\sum_{n=1}^{k} x_n^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 1.3.6 red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^+$ je konvergentan. Analogno, red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^-$ je konvergentan. Iz propozicije 1.3.7 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-x_n^-)$ konvergentan, pa iz iste propozicije slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n^+ - x_n^-)$ konvergentan, no to je upravo red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. □

**Teorem 1.3.9.** *(d'Alembertov kriterij) Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva.*

1. *Pretpostavimo da postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je $x_n \neq 0$, za svaki $n \geq m$ i*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q, \text{ za svaki } n \geq m. \tag{1.13}$$

   *Tada red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ apsolutno konvergira.*

2. *Pretpostavimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \neq 0$, za svaki $n \geq m$ i $|\frac{x_{n+1}}{x_n}| \geq 1$, za svaki $n \geq m$. Tada red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nije konvergentan.*

*Dokaz.* a) Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq m$. Tada iz (1.13) slijedi

$$|x_{n+1}| \leq q \cdot |x_n|. \tag{1.14}$$

Tvrdimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|x_{m+k}| \leq q^k \cdot |x_m|. \tag{1.15}$$

Dokažimo to indukcijom po $k$.
Za $k = 1$ tvrdnja slijedi iz (1.14).
Pretpostavimo da (1.15) vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Iz (1.15) slijedi

$$q \cdot |x_{m+k}| \leq q^{k+1} \cdot |x_m|,$$

a iz (1.14) za $n = m + k$ dobivamo

$$|x_{m+k+1}| \leq \cdot |x_{m+k}|\,.$$

Time smo dokazali da (1.15) vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.
Neka je $A = \sum\limits_{n=1}^{m} |x_n| + |x_m| \cdot \dfrac{q}{1-q}$. Neka je $N \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq A.$$

Promotrimo dva slučaja:

1. $N \leq m$
   Tada je

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n| + |x_m| \cdot \frac{q}{1-q} = A.$$

   Dakle,

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq A.$$

2. $m \leq N$
   Koristeći (1.15) dobivamo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |x_n| &= \sum_{n=1}^{m} |x_n| + \sum_{n=m+1}^{N} |x_n| \\ &= \sum_{n=1}^{m} |x_n| + \sum_{k=1}^{N-m} |x_{m+k}| \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n| + \sum_{k=1}^{N-m} \left(q^k \cdot |x_m|\right) \\ &= \sum_{n=1}^{m} |x_n| + |x_m| \sum_{k=1}^{N-m} q^k \\ &= \sum_{n=1}^{m} |x_n| + |x_m| \cdot q \cdot \frac{1-q^{N-m}}{1-q} \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n| + |x_m| \cdot \frac{q}{1-q} \\ &= A.\end{aligned}$$

   Dakle,

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq A.$$

   Prema tome, $\sum\limits_{n=1}^{N} |x_n| \leq A$, za svaki $N \in \mathbb{N}$.
   Iz propozicije (1.3.6) slijedi da je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ konvergentan. Stoga je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ apsolutno konvergentan.

b) Iz pretpostavke slijedi da je

$$|x_n| \leq |x_{n+1}|,$$

za svaki $n \geq m$. Lako se indukcijom dobiva da je

$$|x_m| \leq |x_n|, \tag{1.16}$$

za svaki $n \geq m$.
Pretpostavimo da je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan. Tada iz propozicije 1.2.15 slijedi da

$$x_n \to 0.$$

Neka je $\varepsilon = \frac{|x_m|}{2}$. Tada je $\varepsilon > 0$, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - 0| < \varepsilon$, to jest $|x_n| < \frac{|x_m|}{2}$.
Iz $\frac{|x_m|}{2} < |x_m|$ slijedi

$$|x_n| < |x_m|, \tag{1.17}$$

za svaki $n \geq n_0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq m$ i $n \geq n_0$. Tada vrijedi(1.16) i (1.17) što je nemoguće.
Dakle, red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nije konvergentan.

Time je teorem dokazan. □

**Teorem 1.3.10.** *(Cauchyjev kriterij) Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva.*

1. *Pretpostavimo da postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$, za svaki $n \geq m$. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ apsolutno konvergentan.*

2. *Pretpostavimo da je $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$, za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. Tada red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nije konvergentan.*

*Dokaz.* 1. Iz pretpostavke da je $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$, za svaki $n \geq m$, slijedi da je

$$|x_n| \leq q^n, \text{ za svaki } n \geq m. \tag{1.18}$$

Neka je $A = \sum_{n=1}^{m} |x_n| + \frac{1}{1-q}$. Tvrdimo da je

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq A,$$

za svaki $N \in \mathbb{N}$.
Ako je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $N \leq m$, onda je

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n| \leq A.$$

Pretpostavimo da je $N \in \mathbb{N}$, takav da je $m \leq N$. Koristeći (1.18) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |x_n| &= \sum_{n=1}^{m} |x_n| + \sum_{n=m+1}^{N} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n| + \sum_{n=m+1}^{N} q^n = \\
&= \sum_{n=1}^{m} |x_n| + q^{m+1} \cdot \frac{1-q^{N-m}}{1-q} < \sum_{n=1}^{m} |x_n| + 1 \cdot \frac{1}{1-q} = \\
&= A.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq A.$$

Prema tome, $\sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq A$, za svaki $N \in \mathbb{N}$.

Iz propozicije 1.3.6 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ konvergentan. Stoga je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ apsolutno konvergentan.

2. Iz pretpostavke slijedi $|x_n| \geq 1$, za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan. Tada iz propozicije 1.2.15 slijedi da $x_n \to 0$. Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
   Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - 0| < \varepsilon$, to jest

   $$|x_n| < \frac{1}{2}.$$

   Dakle, $|x_n| < \frac{1}{2}$, za svaki $n \geq n_0$. To je u kontradikciji s činjenicom da je $|x_n| \geq 1$, za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$.
   Dakle, red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nije konvergentan.

□

**Propozicija 1.3.11.** *Neka su $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ i $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ redovi. Pretpostavimo da postoji $K > 0$ takav da je $|x_n| \leq K \cdot |y_n|$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ apsolutno konvergentan. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ apsolutno konvergentan i vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n| \leq K \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |y_n|.$$

*Dokaz.* Neka je $k \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{k} |x_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}^{k} K \cdot |y_n| = K \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}}^{k} |y_n| \leq K \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |y_n|,$$

pri čemu smo koristili lemu 1.3.5. Dakle,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{k} |x_n| \leq K \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |y_n|, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Prema propoziciji 1.3.6 red $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ je konvergentan i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n| \leq K \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |y_n| \, .$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Propozicija 1.3.12.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $M \in \mathbb{R}$ takav da je $x_n \leq M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $x_n \to a$. Tada je $a \leq M$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno. Tada je $M < a$. Definirajmo $\varepsilon = a - M$. Tada je $\varepsilon > 0$, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in < a - \varepsilon, a + \varepsilon > .$$

Posebno, $a - \varepsilon < x_n$, za svaki $n \geq n_0$. No, $a - \varepsilon = M$, pa je $M < x_n$, za svaki $n \geq n_0$. To je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije.
Dakle, $a \leq M$. □

**Korolar 1.3.13.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $M \in \mathbb{R}$ takav da je $M \leq x_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $x_n \to a$. Tada je $M \leq a$.*

*Dokaz.* Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $-x_n \leq -M$. Prema propoziciji 1.1.32 vrijedi

$$-x_n \to -a.$$

Iz propozicije 1.3.12 slijedi

$$-a \leq -M.$$

Stoga je $M \leq a$. □

**Korolar 1.3.14.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka su $b, c \in \mathbb{R}, b < c$, takav da je $x_n \in [b, c]$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a \in [b, c]$.*

*Dokaz.* Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$b \leq x_n \leq c,$$

pa iz korolara 1.3.13 i propozicije 1.3.12 slijedi

$$b \leq a \leq c.$$

Dakle, $a \in [b, c]$. □

**Propozicija 1.3.15.** *Neka je* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *apsolutno konvergentan red. Tada je*

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n|\,.$$

*Dokaz.* Neka je $(s_k)$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Neka je $k \in \mathbb{N}$.
Vrijedi:

$$|s_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,,$$

pri čemu smo koristili lemu 1.3.5. Dakle,

$$|s_k| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|\,.$$

Prema tome,

$$s_k \in \left[-\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\right]. \tag{1.19}$$

Znamo da $s_k \to \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, pa iz korolara 1.3.14 slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \left[-\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\right]$$

stoga je

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,.$$

□

**Primjer 1.3.16.** *Promotrimo red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$.
*Označimo* $x_n = \frac{1}{n!}$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \frac{1}{n+1},$$

*pa je očito da je*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \frac{1}{2},$$

*za svaki $n \geq 2$.*
*Prema teoremu 1.3.9 imamo da je red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ *konvergentan.*

## 1.4 Nizovi $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$

Proširimo pojam niza. Od sad pa nadalje, pod nizom u skupu $S$ podrazumijevat ćemo i svaku funkciju $x : \mathbb{N}_0 \to S$. Niz $x : \mathbb{N}_0 \to S$ ćemo označavati i s $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, a za $n \in \mathbb{N}_0$ umjesto $x(n)$ pišemo $x_n$.
Da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u $\mathbb{R}$ teži prema $a \in \mathbb{R}$, što označavamo s $x_n \to a$, definiramo na isti način kao i prije. Isto tako, u slučaju nizova $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiramo pojmove konvergentan niz, omeđen niz, rastući niz, padajući niz i limes niza. Analogno definiramo pojmove strogo rastuće funkcije $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ te pojam da je $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ podniz niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tvrdnje propozicija 1.1.5, 1.1.25, 1.1.28, 1.1.29, 1.1.31, 1.1.32, 1.2.12, 1.2.20, 1.3.12, korolara 1.1.30, 1.2.8, 1.3.13, 1.3.14 te lema 1.2.14, 1.2.19 i 1.3.4 vrijede i u slučaju nizova $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

Proširimo sada pojam reda na sljedeći način. Neka je $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ niz u $\mathbb{R}$. Neka je $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ niz definiran s $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$. Tada za uređeni par $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right)$ kažemo da je red i označavamo ga s $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$, a za $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ kažemo da je niz parcijalnih suma tog reda. Za broj $L \in \mathbb{R}$ kažemo da je suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ ako je $L$ limes niza $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. U tom slučaju, broj $L$ označavamo s $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Za red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ kažemo da je konvergentan ako mu je niz parcijalnih suma konvergentan.
Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz u $\mathbb{R}$. Dakle, $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ je funkcija. Promotrimo restrikciju te funkcije $x|_{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. To je niz u $\mathbb{R}$. Taj niz označavamo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Propozicija 1.4.1.** *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz u $\mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ teži prema $a$ ako i samo ako niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ teži prema $a$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Neka je $n_0' = \max\{n_0, 1\}$. Tada je $n_0' \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0'$ vrijedi $n \geq n_0$, pa je $|x_n - a| < \varepsilon$. Prema tome, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a$.
Pretpostavimo da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $a$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Očito je $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ takav da je $n \geq n_0$. Slijedi $n \in \mathbb{N}$, pa je $|x_n - a| < \varepsilon$. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$.
Prema tome, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ teži prema $a$. □

Ako je $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ red, onda red određen nizom $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ označavamo s $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

**Propozicija 1.4.2.** *Neka je* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *red. Tada je* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *konvergentan red ako i samo ako je* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *konvergentan red, te u tom slučaju vrijedi da je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

*Dokaz.* Neka je $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ te neka je $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Neka je $k \in \mathbb{N}$.
Vrijedi:

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=0}^{k} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{k} x_n \\ &= x_0 + t_k. \end{aligned}$$

Dakle,

$$s_k = x_0 + t_k, \text{za svaki } k \in \mathbb{N}. \tag{1.20}$$

Pretpostavimo da je $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ konvergentan red. Tada niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ teži prema $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, pa i niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ teži prema istom broju prema propoziciji 1.4.1. Iz (1.20) slijedi da je

$$t_k = s_k - x_0,$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Iz propozicije 1.1.31 i primjera 1.1.4 slijedi da niz $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ teži prema $\sum_{n=0}^{\infty} x_n - x_0$.

Prema tome, red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentan i $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n - x_0$, to jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Pretpostavimo da je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan red. Tada niz $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ teži prema $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Iz (1.20), primjera 1.1.4 i propozicije 1.1.31 slijedi da niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ teži prema $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + x_0$. Iz propozicije 1.4.1 slijedi da niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ teži prema $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + x_0$, pa je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ konvergentan. □

**Propozicija 1.4.3.** *Neka je* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *konvergentan red. Tada niz* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *teži prema* 0.

*Dokaz.* Prema propoziciji 1.4.2 red $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentan, pa iz propozicije 1.2.15 slijedi da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema 0. Iz propozicije 1.4.1 slijedi da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ teži prema 0. □

**Primjer 1.4.4.** *Neka je* $q \in \langle 0, 1\rangle$. *Znamo da je red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ *konvergentan (propozicija 1.2.13) te da je* $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$. *Iz propozicije 1.4.2 slijedi da je red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} q^n$ *konvergentan i*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^n &= q^0 + \frac{q}{1-q} \\ &= 1 + \frac{q}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

*Dakle,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

**Definicija 1.4.5.** *Za red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *kažemo da je* ***apsolutno konvergentan*** *ako je red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |x_n|$ *konvergentan.*

**Primjer 1.4.6.** *Neka je* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niz definiran s* $x_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ (-1)^n \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

*Red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *je konvergentan jer je red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *konvergentan (propozicija 1.4.2 i primjer*

*1.3.2). No, red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *nije apsolutno konvergentan. Naime, u suprotnom bi red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |x_n|$ *bio konvergentan, pa bi prema propoziciji 1.4.2 red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ *bio konvergentan, a to je harmonijski red, za kojeg znamo da nije konvergentan (primjer 1.2.16).*
*Dakle, red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *je konvergentan, ali nije apsolutno konvergentan.*

**Propozicija 1.4.7.** *Neka je* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *apsolutno konvergentan red. Tada je* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ *konvergentan red.*

*Dokaz.* Imamo da je $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |x_n|$ konvergentan red, pa je prema propoziciji 1.4.2 $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ konvergentan red. Prema propoziciji 1.3.8 slijedi da je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergentan red, pa iz propozicije 1.4.2 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ konvergentan. □

Lema 1.3.5, propozicije 1.3.6, 1.3.7, 1.3.11, 1.3.15 i teorem 1.3.9 vrijede i u slučaju redova $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$, što vidimo iz dokaza tih tvrdnji ili korištenjem propozicije 1.4.2.

# Poglavlje 2

# Neprekidnost i derivabilnost

## 2.1 Neprekidne funkcije

**Definicija 2.1.1.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in S$. *Kažemo da je* ***funkcija*** $f$ ***neprekidna u točki*** $x_0$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in S$ *vrijedi implikacija:*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

**Napomena 2.1.2.** *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$ *te neka je* $r > 0$. *Tada je*

$$|b - a| < r \Leftrightarrow b \in \langle a - r, a + r \rangle .$$

*Naime, vrijedi*

$$\begin{aligned} |b - a| < r &\Leftrightarrow -r < b - a < r \\ &\Leftrightarrow a - r < b < a + r. \end{aligned}$$

*Stoga ako je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in S$, *onda je* $f$ *neprekidna u* $x_0$ *ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in S$ *vrijedi implikacija*

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle . \tag{2.2}$$

**Primjer 2.1.3.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ *i* $K \in \mathbb{R}$. *Neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = K$, *za svaki* $x \in S$. *Tada je* $f$ *neprekidna u točki* $x_0$.
*Naime, neka je* $\varepsilon > 0$. *Tada za svaki* $x \in S$ *vrijedi*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

*Stoga za bilo koji* $\delta > 0$ *vrijedi implikacija (2.1).*

**Primjer 2.1.4.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = x$, za svaki $x \in S$. Tada je $f$ neprekidna u točki $x_0$.*
*Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo $\delta = \varepsilon$. Tada očito vrijedi implikacija (2.1).*

**Definicija 2.1.5.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Kažemo da je $f$* ***neprekidna funkcija*** *ako za svaki $x_0 \in S$ vrijedi da je $f$ neprekidna u točki $x_0$.*

**Napomena 2.1.6.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki $x_0$. Neka je $T \subseteq S$ takav da je $x_0 \in T$. Tada je funkcija $f|_T : T \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0$.*
*Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi implikacija (2.1). Tada je očito da (2.1) vrijedi i za svaki $x \in T$. Stoga, za svaki i $x \in T$ vrijedi implikacija*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f|_T(x) - f|_T(x_0)| < \varepsilon.$$

**Propozicija 2.1.7.** *Neka je te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki $x_0$. Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Tada*

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi implikacija (2.2). Budući da $x_n \to x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle .$$

Iz (2.2) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$f(x_n) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle .$$

Time je tvrdnja dokazana. □

**Lema 2.1.8.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $x_n \in \left\langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right\rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to x_0$.*

*Dokaz.* Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \tag{2.3}$$

(napomena 2.1.2). Neka je $\varepsilon > 0$. Iz primjera 1.2.9 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

to jest $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Iz (2.3) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

□

**Teorem 2.1.9.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n)$ u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ vrijedi $f(x_n) \to f(x_0)$. Tada je $f$ neprekidna u $x_0$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, to jest da $f$ nije neprekidna u $x_0$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in S$ takav da je

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle ,$$

ali

$$f(x) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle .$$

Stoga, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in S$ takav da je $x_n \in \left\langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right\rangle$, ali

$$f(x_n) \notin \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle . \tag{2.4}$$

Dakle, imamo niz realnih brojeva $(x_n)$ za kojeg vrijedi $x_n \in S$ i $x_n \in \left\langle x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right\rangle$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz leme 2.1.8 slijedi da $x_n \to x_0$. Iz pretpostavke teorema slijedi da $f(x_n) \to f(x_0)$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$. Ovo je u kontradikciji sa (2.4). Prema tome, $f$ je neprekidna u $x_0$. □

## 2.2 Limes funkcije

**Definicija 2.2.1.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ i $L \in \mathbb{R}$. Kažemo da je $L$ **limes funkcije $f$ u točki** $a$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S, x \neq a$ vrijedi sljedeća implikacija:*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

**Definicija 2.2.2.** *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki $x_0$. Tada je $f(x_0)$ limes od $f$ u $x_0$.*
*Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi implikacija (2.1). Stoga za svaki $x \in S$ očito vrijedi implikacija (2.5) ako stavimo $a = x_0$ i $L = f(x_0)$.*

**Propozicija 2.2.3.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Tada je $f$ neprekidna u $x_0$ ako i samo ako je $f(x_0)$ limes funkcije u točki $x_0$.*

*Dokaz.* Ako je $f$ neprekidna u $x_0$, onda je $f(x_0)$ limes funkcije u točki $x_0$ prema napomeni 2.2.2.
Obratno, pretpostavimo da je $f(x_0)$ limes funkcije $f$ u točki $x_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da implikacija (2.5) vrijedi za svaki $x \in S, x \neq x_0$, pri čemu je $a = x_0$ i $L = f(x_0)$. Dakle, imlikacija (2.1) vrijedi za svaki $x \in S, x \neq x_0$. No, očito je da (2.1) vrijedi i za $x = x_0$. Prema tome, $f$ je neprekidna u $x_0$. □

**Primjer 2.2.4.** *Neka je* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = 1$, *za svaki* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Tada je* 1 *limes funkcije* $f$ *u točki* 0.
*Dokažimo to. Neka je* $\varepsilon > 0$. *Odaberimo bilo koji* $\delta > 0$. *Tada za svaki* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *vrijedi implikacija:*

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon,$$

*jer je* $|f(x) - 1| = 0$, *za svaki* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
*Analogno vidimo da vrijedi sljedeće:*
*Ako su* $S \subseteq \mathbb{R}$ *i* $c \in \mathbb{R}$ *te ako je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = c$, *za svaki* $x \in S$ *onda je* $c$ *limes funkcije* $f$ *u točki* $a$, *za svaki* $a \in \mathbb{R}$.

**Propozicija 2.2.5.** *Neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *funkcija te neka je* $L$ *limes funkcije* $f$ *u točki* $a$. *Pretpostavimo da je* $(x_n)$ *niz realnih brojeva takav da je* $x_n \in S \setminus \{a\}$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *te takav da* $x_n \to a$. *Tada* $f(x_n) \to L$.

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S \setminus \{a\}$ vrijedi:

$$x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle . \tag{2.6}$$

Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$. Iz (2.6) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $f(x_n) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$. Prema tome, $f(x_n) \to L$. □

**Teorem 2.2.6.** *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *te* $f : S \to \mathbb{R}$. *Neka su* $a, L \in \mathbb{R}$. *Pretpostavimo da za svaki niz realnih brojeva* $(x_n)$ *takav da je* $x_n \in S \setminus \{a\}$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *te takav da* $x_n \to a$ *vrijedi* $f(x_n) \to L$. *Tada je* $L$ *limes funkcije* $f$ *u točki* $a$.

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$ takav da je $x \in S \setminus \{a\}$ i $f(x_n) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$. Stoga za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji

$$x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right\rangle$$

takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$ i

$$f(x_n) \notin \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle . \tag{2.7}$$

Na ovaj način smo dobili niz $(x_n)$ za kojeg prema lemi 2.1.8 vrijedi $x_n \to a$. Iz pretpostavke teorema slijedi da $f(x_n) \to L$. No to je u kontradikciji s tim da (2.7) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

**Primjer 2.2.7.** *Neka je* $f : \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s*

$$f(x) = 1.$$

*Neka je $L \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tvrdimo da je $L$ limes funkcije $f$ u točki 2.*
*Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo $\delta = 1$. Tada je*

$$\langle 2 - \delta, 2 + \delta \rangle = \langle 1, 3 \rangle,$$

*pa očito ne postoji $x \in \langle -\infty, 0]$ takav da je $x \in \langle 2 - \delta, 2 + \delta \rangle$. Stoga za svaki $x \in \langle -\infty, 0] \setminus \{2\}$ trivijalno vrijedi sljedeća implikacija: ako je $x \in \langle 2 - \delta, 2 + \delta \rangle$ onda je $f(a) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$. Dakle, $L$ je limes funkcije $f$ u točki 2. Na isti način zaključujemo da je $L$ limes funkcije $g$ u točki 2, gdje je $g(x) = 1, g : \langle -\infty, 0] \cup \{2\} \to \mathbb{R}$.*

Ovaj primjer pokazuje da limes funkcije ne mora biti jedinstven.

**Definicija 2.2.8.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je $a$ **akumulacijska točka** skupa $S$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $x \neq a$ i $|x - a| < \varepsilon$. Dakle, $a$ je akumulacijska točka skupa $S$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:*

$$\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

**Primjer 2.2.9.** *Broj 2 nije akumulacijska točka skupa $[0, 1]$.*
*Naime, za $\varepsilon = 1$ vrijedi*

$$\langle 2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon \rangle \cap ([0, 1] \setminus \{2\}) = \langle 1, 3 \rangle \cap ([0, 1] \setminus \{2\}) = \emptyset.$$

*Nadalje, 2 nije akumulacijska točka niti skupa $[0, 1] \cup \{2\}$.*

**Napomena 2.2.10.** *Neka su $S$ i $T$ podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $S \subseteq T$. Pretpostavimo da je $a$ akumulacijska točka od $S$. Tada je $a$ akumulacijska točka od $T$.*
*Ovo slijedi direktno iz definicije akumulacijske točke (ako je $x \in S$, onda je $x \in T$).*

**Propozicija 2.2.11.** *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tada su $a$ i $b$ akumulacijske točke skupa $\langle a, b \rangle$.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Vrijedi:

$$a < \min \{a + \varepsilon, b\}$$

pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $a < x < \min \{a + \varepsilon, b\}$. Slijedi $a < x < a + \varepsilon$ i $a < x < b$. Stoga je $x \in \langle a, b \rangle \setminus \{a\}$ i $x \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$. Prema tome, $a$ je akumulacijska točka od $\langle a, b \rangle$. Analogno dobivamo da je $b$ akumulacijska točka od $\langle a, b \rangle$. □

Ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ onda je $a$ akumulacijska točka skupa $[a, b]$. Naime, to slijedi iz propozicije 2.2.11, napomene 2.2.10 i $\langle a, b \rangle \subseteq [a, b]$.

**Korolar 2.2.12.** *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je $x \in \langle a, b \rangle$. Tada je $x$ akumulacijska točka skupa $\langle a, b \rangle$.*

*Dokaz.* Prema propoziciji 2.2.11, $x$ je akumulacijska točka od $\langle x, b\rangle$, a očito je

$$\langle x, b\rangle \subseteq \langle a, b\rangle .$$

Tvrdnja korolara slijedi iz napomene 2.2.10. □

Uočimo sljedeće: ako je $x \in \mathbb{R}$ onda je $x$ je akumulacijska točka od $\mathbb{R}$. Naime, $x$ je akumulacijska točka od $\langle x, x+1\rangle$.

**Propozicija 2.2.13.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je $a$ akumulacijska točka skupa $S$ ako i samo ako postoji niz realnih brojeva $(x_n)$ takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $a$ akumulacijska točka skupa $S$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in S \setminus \{a\}$ takav da je

$$x_n \in \left\langle a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right\rangle .$$

Na ovaj način smo dobili niz realnih brojeva $(x_n)$ za kojeg prema lemi 2.1.8 vrijedi $x_n \to a$.
Obratno, pretpostavimo da postoji niz realnih brojeva $(x_n)$ takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Odaberimo bilo koji $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.
Imamo:

$$x_n \in S \setminus \{a\} \quad \text{i} \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Dakle, $a$ je akumulacijska točka skupa $S$. □

**Propozicija 2.2.14.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, f : S \to \mathbb{R}$ te neka je $a$ je akumulacijska točka skupa $S$. Pretpostavimo da su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $L_1$ limes funkcije $f$ u točki $a$ te $L_2$ limes funkcije $f$ u točki $a$. Tada je $L_1 = L_2$.*

*Dokaz.* Prema propoziciji 2.2.13 postoji niz realnih brojeva $(x_n)$ takav da vrijedi
$x_n \in S \setminus \{a\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$.
Prema propoziciji 2.1.4 slijedi $f(x_n) \to L_1$ i $f(x_n) \to L_2$.
Iz propozicije 1.1.5 slijedi $L_1 = L_2$. □

**Napomena 2.2.15.** *Ako je $a$ akumulacijska točka skupa $S$, onda je $a$ akumulacijska točka skupa $S \setminus \{a\}$.*

## 2.3 Derivabilne funkcije

**Definicija 2.3.1.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Pretpostavimo da je $x_0$ akumulacijska točka skupa $S$. Neka je $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Pretpostavimo da je $L$ limes funkcije $F$ u točki $x_0$. Tada za $L$ kažemo da je* ***derivacija funkcije f u točki*** $x_0$. *Derivaciju funckije $f$ u točki $x_0$ označavamo s $f'(x_0)$.*

Uočimo da je, uz pretpostavke iz definicije 2.3.1, $x_0$ akumulacijska točka od $S \setminus \{x_0\}$ (prema napomeni 2.2.15). Stoga je prema propoziciji 2.2.14 derivacija funkcije $f$ u točki $x_0$, ako postoji, jedinstvena.

**Definicija 2.3.2.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Ako je $x_0 \in S$ točka takva da postoji derivacija od $f(x_0)$, onda kažemo da je funkcija derivabilna u točki $x_0$. Ako je $f$ derivabilna u $x_0$, za svaki $x_0 \in S$ tada kažemo da je $f$* ***derivabilna funkcija****.*

**Primjer 2.3.3.** *Neka je $c \in \mathbb{R}$. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija s vrijednošću $c$. Dakle,*

$$f(x) = c,$$

*za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je $f$ derivabilna funkcija.*
*Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Znamo da je $x_0$ akumulacijska točka od $\mathbb{R}$. Neka je $F : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ vrijedi $F(x) = 0$. Prema primjeru 2.2.4 vrijedi da je $0$ limes funkcije $F$ u točki $x_0$. Stoga je funkcija $f$ derivabilna u točki $x_0$ te da je*

$$f'(x_0) = 0.$$

**Primjer 2.3.4.** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$f(x) = x,$$

*za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je $f$ derivabilna funkcija. Neka je $F : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ vrijedi*
*$F(x) = 1$. Prema primjeru 2.2.4 vrijedi da je $1$ limes funkcije $F$ u točki $x_0$. Stoga je funkcija $f$ derivabilna u točki $x_0$ te je*

$$f'(x_0) = 1.$$

**Propozicija 2.3.5.** *Neka su $S$ i $T$ podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $T \subseteq S$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija.*

1. *Pretpostavimo da je $L$ limes funkcije $f$ u točki $a$. Tada je $L$ limes od $f|_T$ u točki $a$.*

2. *Pretpostavimo da je $x_0 \in S$ te da je $f$ derivabilna u točki $x_0$. Nadalje, pretpostavimo da je $x_0$ akumulacijska točka skupa $T$. Tada je funkcija $f|_T$ derivabilna u točki $x_0$ te je $(f|_T)'(x_0) = f'(x_0)$.*

*Dokaz.* 1. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S \setminus \{a\}$ vrijedi implikacija:

$$x \in \langle a-\delta, a+\delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle L-\varepsilon, L+\varepsilon\rangle .$$

Budući da je $T \subseteq S$, očito je da prethodna implikacija vrijedi za svaki $x \in T \setminus \{x_0\}$. Prema tome, $L$ je limes funkcije $f|_T$ u točki $a$.

2. Neka je $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, za svaki $x \in S \setminus \{x_0\}$. Znamo da je $f'(x_0)$ limes funkcije od $F$ u $x_0$. Definirajmo funkciju $G : T \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ s $G(x) = \frac{f|_T(x)-f|_T(x_0)}{x-x_0}$, za svaki $x \in T \setminus \{x_0\}$. Za svaki $x \in T \setminus \{x_0\}$ vrijedi $G(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = F(x)$, dakle

$$G(x) = F(x).$$

Stoga je $G = F|_{T\setminus\{x_0\}}$. Iz 1. tvrdnje ove propozicije slijedi da je $f'(x_0)$ limes funkcije $G$ u točki $x_0$. To znači da je $f'(x_0)$ derivacija funkcije $f|_T$ u točki $x_0$.

□

**Propozicija 2.3.6.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je funkcija $f$ derivabilna u točki $x_0$. Nadalje, pretpostavimo da je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ te takav da $x_n \to x_0$. Tada*

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0).$$

*Dokaz.* Neka je $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Tada je $f'(x_0)$ limes funkcije $F$ u točki $x_0$. Iz propozicije 2.1.4 slijedi $F(x_n) \to F(x_0)$. Time je tvrdnja dokazana. □

**Propozicija 2.3.7.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $x_0$ akumulacijska točka skupa $S$ te da za svaki niz realnih brojeva $(x_n)$ takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ vrijedi $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to L$. Tada je $f$ derivabilna u $x_0$ te je derivacija funkcije $f$ u $x_0$ jednaka $L$.*

*Dokaz.* Neka je $F : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Dovoljno je dokazati da je $L$ limes funkcije $F$ u točki $x_0$. Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \in (S \setminus \{x_0\}) \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, te takav da $x_n \to x_0$. Prema pretpostavci propozicije vrijedi $F(x_n) \to L$. Iz teorema 2.2.6 zaključujemo da je $L$ limes funkcije $F$ u točki $x_0$. Time je tvrdnja dokazana. □

**Primjer 2.3.8.** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$f(x) = |x|,$$

*za svaki $x \in \mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je niz realnih brojeva $(x_n)$ takav da $x_n \to x_0$. Prema propoziciji 1.1.32 vrijedi*

$$|x_n| \to |x_0|,$$

*to jest*

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

*Prema teoremu 2.1.9 funkcija $f$ je neprekidna u točki $x_0$. Prema tome, funkcija $f$ je neprekidna. Tvrdimo da funkcija $f$ nije derivabilna u točki $0$. Pretpostavimo suprotno. Definirajmo niz realnih brojeva $(x_n)$ s*

$$x_n = -\frac{1}{n},$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 1.1.32 i primjeru 1.2.9*

$$x_n \to 0.$$

*Očito je da je $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz propozicije 2.3.6 slijedi:*

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \to f'(0). \tag{2.8}$$

*Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\left|-\frac{1}{n}\right| - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = -1.$$

*Prema primjeru 1.1.4 vrijedi $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} \to -1$. Iz ovog, (2.8) i propozicije 1.1.5 slijedi*

$$f'(0) = -1.$$

*Definirajmo niz realnih brojeva $(y_n)$ s*

$$y_n = \frac{1}{n},$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $y_n \to 0$, pa iz propozicije 2.3.6 slijedi*

$$\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} \to f'(0).$$

*Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \frac{\left|\frac{1}{n}\right| - 0}{\frac{1}{n} - 0} = 1.$$

*Stoga* $\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0} \to 1$, *pa zaključujemo da je*

$$f'(0) = 1.$$

*Kontradikcija.*
*Prema tome, funkcija $f$ nije derivabilna u točki* $0$.

**Lema 2.3.9.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ omeđen skup. Tada postoji $M \in \mathbb{R}, M > 0$ takav da je*

$$|x| < M,$$

*za svaki $x \in S$.*

*Dokaz.* Budući da je $S$ omeđen skup, postoje gornja i donja međa skupa $S$. Dakle, postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da

$$a \leq x \leq b,$$

za svaki $x \in S$. Slijedi da je $-x \leq -a$ i $x \leq b$, za svaki $x \in S$. Dakle,

$$-x, x \leq \max\{-a, b\},$$

pa je $|x| \leq \max\{-a, b\}$, za svaki $x \in S$. Odaberimo $M > 0$ takav da je $\max\{-a, b\} < M$. Tada je

$$|x| < M,$$

za svaki $x \in S$. □

**Propozicija 2.3.10.** *Neka su $(x_n)$ i $(y_n)$ nizovi realnih brojeva te neka su $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $x_n \to L_1$ i $y_n \to L_2$. Tada niz $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $L_1 L_2$.*

*Dokaz.* Budući da je $(x_n)$ omeđen niz, skup $\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen, pa prema lemi 2.3.9 postoji $M > 0$ takav da je $|x_n| \leq M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $N = \max\{M, |L_2|\}$. Očito je $N > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$.
Tada je

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - L_1 L_2| &= |x_n y_n - x_n L_2 + x_n L_2 - L_1 L_2| \\
&= |x_n(y_n - L_2) - (x_n - L_1)L_2| \\
&\leq |x_n(y_n - L_2)| + |(x_n - L_1)L_2| \\
&= |x_n| \cdot |y_n - L_2| + |x_n - L_1| \cdot |L_2| \\
&\leq M \cdot |y_n - L_2| + |x_n - L_1| \, |L_2| \\
&\leq N \cdot |y_n - L_2| + |x_n - L_1| \cdot N.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$|x_n y_n - L_1 L_2| \leq N \cdot |y_n - L_2| + |x_n - L_1| \cdot N, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi:

$$|x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2N}. \tag{2.10}$$

Nadalje, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi:

$$|y_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2N}. \tag{2.11}$$

Neka je $k_0 = \max\{n_0, m_0\}$. Neka je $n \geq k_0$. Tada vrijedi (2.10) i (2.11), pa iz (2.9) slijedi:

$$|x_n y_n - L_1 L_2| < N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2N} \cdot N = \varepsilon.$$

Dakle, $|x_n y_n - L_1 L_2| < \varepsilon$, za svaki $n \geq k_0$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Lema 2.3.11.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada $x_n \to a$ ako i samo ako $x_n - a \to 0$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da $x_n \to a$. Definirajmo niz $(y_n)$ s $y_n = -a$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema primjeru 1.1.4

$$y_n \to -a.$$

Prema propoziciji 1.1.31 niz $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teži prema 0. Dakle,

$$x_n - a \to 0.$$

Obratno, pretpostavimo da niz $x_n - a \to 0$. Neka je $(y_n)$ niz definiran s $y_n = a$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $y_n \to a$, pa iz propozicije 1.1.31 slijedi da

$$(x_n - a) + y_n \to a.$$

Dakle, $x_n \to a$. □

**Propozicija 2.3.12.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je funkcija $f$ derivabilna u točki $x_0$. Tada je $f$ neprekidna u $x_0$.*

*Dokaz.* Dovoljno je prema propoziciji 2.2.3 dokazati da je $f(x_0)$ limes funkcije $f$ u $x_0$. Pretpostavimo da je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Iz propozicije 2.3.6 slijedi da

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0).$$

Iz leme 2.3.11 slijedi da

$$x_n - x_0 \to 0.$$

Prema propoziciji 2.3.10 vrijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot (x_n - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0,$$

to jest

$$f(x_n) - f(x_0) \to 0.$$

Prema lemi 2.3.11 slijedi $f(x_n) \to f(x_0)$. Dakle, $f(x_n) \to f(x_0)$, za svaki niz realnih brojeva $(x_n)$ takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Prema lemi 2.2.6 vrijedi da je $f(x_0)$ limes funkcije $f$ u točki $x_0$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Propozicija 2.3.13.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki $x_0$. Tada je funkcija $f + g : S \to \mathbb{R}$ derivabilna u $x_0$ te je $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

*Dokaz.* Očito je $x_0$ akumulacijska točka skupa $S$. Pretpostavimo da je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Tvrdimo da

$$\frac{(f + g)(x_n) - (f + g)(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0). \tag{2.12}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x_n) - (f + g)(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{f(x_n) - f(x_0) + g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \\ &= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

Prema propoziciji 2.3.6 vrijedi $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to f'(x_0)$ i $\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} \to g'(x_0)$, pa iz propozicije 1.1.31 slijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dakle, vrijedi (2.12). Iz propozicije 2.3.7 slijedi da je $f + g$ derivabilne u točki $x_0$, te da je

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

□

**Propozicija 2.3.14.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki $x_0$. Tada je funkcija $f \cdot g : S \to \mathbb{R}$ derivabilna u $x_0$ te je*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

*Dokaz.* Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x_n)-(fg)(x_0)}{x_n-x_0} &= \frac{f(x_n)\cdot g(x_n)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x_n-x_0}\\
&= \frac{f(x_n)\cdot g(x_n)-f(x_n)\cdot g(x_0)+f(x_n)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x_n-x_0}\\
&= \frac{f(x_n)\cdot (g(x_n)-g(x_0))+g(x_0)\cdot (f(x_n)-f(x_0))}{x_n-x_0}\\
&= f(x_n)\cdot \frac{g(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}+\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\cdot g(x_0).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{(fg)(x_n)-(fg)(x_0)}{x_n-x_0} = f(x_n)\cdot \frac{g(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}+\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\cdot g(x_0), \tag{2.13}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Iz propozicije 2.3.6 slijedi

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to f'(x_0)$$

i

$$\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} \to g'(x_0).$$

Prema propoziciji 2.3.12 $f$ je neprekidna u $x_0$, pa iz propozicije 2.1.7 slijedi da

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Iz propozicija 1.2.12, 2.3.10 i 1.1.31 slijedi

$$f(x_n)\cdot \frac{g(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}+\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\cdot g(x_0) \to f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Dakle, prema (2.13) vrijedi:

$$\frac{(fg)(x_n)-(fg)(x_0)}{x_n-x_0} \to f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Iz propozicije 2.3.7 sijedi da je funkcija $f\cdot g$ derivabilna u $x_0$ te je

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

$\square$

**Korolar 2.3.15.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilne u točki $x_0$ te neka je $c \in \mathbb{R}$. Neka je $g : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $g(x) = c \cdot f(x)$, za svaki $x \in S$. Tada je $g$ derivabilna u $x_0$ te je $g'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.*

*Dokaz.* Neka je $h : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $h(x) = c$, za svaki $x \in S$. Za svaki niz realnih brojeva $(x_n)$ takav da je $x_n \in S \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ vrijedi

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \to 0$$

jer je $\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.2.5 $h$ je derivabilna u $x_0$ te je $h'(x_0) = 0$. Vrijedi $g = h \cdot f$, pa iz propozicije 2.3.14 slijedi da je $g$ derivabilna u $x_0$ te je

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= h'(x_0) \cdot f(x_0) + h(x_0) \cdot f'(x_0) \\ &= 0 \cdot f(x_0) + c \cdot f'(x_0) \\ &= c \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

Dakle, $g'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$. □

**Propozicija 2.3.16.** *Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$h_n(x) = x^n,$$

*za svaki $x \in \mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $h_n$ derivabilna funkcija te da je*

$$h_n'(x) = n \cdot x^{n-1},$$

*za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

*Dokaz.* Dokažimo ovu tvrdnju matematičkom indukcijom po $n$. Za $n = 1$ tvrdnja slijedi iz primjera 2.3.4. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da je

$$h_{n+1} = h_n \cdot h_1.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Iz propozicije 2.3.14 slijedi da je $h_{n+1}$ derivabilna u točki $x$ te iz iste propozicije i induktivne pretpostavke slijedi da je

$$\begin{aligned} h_{n+1}'(x) &= h_n'(x) \cdot h_1(x) + h_n(x) \cdot h_1'(x) \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 \\ &= (n+1) \cdot x^n. \end{aligned}$$

Dakle, $h_{n+1}$ je derivabilna funkcija i

$$h_{n+1}'(x) = (n+1) \cdot x^n,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Korolar 2.3.17.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $c \in \mathbb{R}$. Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$h(x) = c \cdot x^n,$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $h$ derivabilna funkcija te je*

$$h'(x) = cn \cdot x^{n-1},$$

*za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

*Dokaz.* Ovo je direktna posljedica propozicije 2.3.16 i korolara 2.3.15. □

**Korolar 2.3.18.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ te $f_1, f_2, ..., f_n : S \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki $x_0$. Tada je $f_1 + f_2 + ... + f_n$ derivabilna u točki $x_0$ te je*

$$(f_1 + f_2 + ... + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + ... + f_n'(x_0).$$

*Dokaz.* Dokažimo ovu tvrdnju matematičkom indukcijom po $n$. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $f_1, f_2, ..., f_{n+1} : S \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki $x_0$.
Vrijedi:

$$f_1 + f_2 + ... + f_{n+1} = (f_1 + f_2 + ... + f_n) + f_{n+1}.$$

Iz induktivne pretpostavke slijedi da je $f_1 + f_2 + ... + f_n$ derivabilna u točki $x_0$ te je

$$(f_1 + f_2 + ... + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + ... + f_n'(x_0).$$

Iz propozicije 2.3.13 slijedi da je $(f_1 + f_2 + ... + f_{n+1})$ derivabilna u točki $x_0$ te da je

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2 + ... + f_{n+1})'(x_0) &= (f_1 + f_2 + ... + f_n)'(x_0) + f_{n+1}'(x_0)\\ &= f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + ... + f_n'(x_0) + f_{n+1}'(x_0).\end{aligned}$$

Dakle,

$$(f_1 + f_2 + ... + f_{n+1})'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + ... + f_{n+1}'(x_0).$$

Time je tvrdnja korolara dokazana. □

**Definicija 2.3.19.** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kažemo da je **f polinom** ako postoje $n \in \mathbb{N}_0$ i $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0,$$

*za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

**Definicija 2.3.20.** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Definirajmo funkciju $f' : S \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: za svaki $x \in S$ vrijednost funkcije $f'$ u točki $x$ je derivacija funkcije $f$ u točki $x$.*

Uočimo da za svaki $x \in S$ oznaku $f'(x)$ možemo promatrati na dva načina: Kao derivaciju funkcije $f$ u točki $x$ i kao vrijednost funkcije $f'$ u točki $x$. No, u oba slučaja se radi o istom broju.

# Poglavlje 3

# Redovi potencija

## 3.1 Redovi potencija i radijus konvergencije

**Primjer 3.1.1.** *Red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}$ *je konvergentan prema propoziciji 1.4.2 i primjeru 1.3.16. Sumu ovog reda* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}$ *označavamo s e. Broj e nazivamo baza prirodnog logaritma.*

**Primjer 3.1.2.** *Neka je* $x \in \mathbb{R}$. *Promotrimo red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}x^n$. *Tvrdimo da je ovaj red konvergentan.*
*To je očito ako je* $x = 0$. *Pretpostavimo da je* $x \neq 0$. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *označimo* $z_n = \frac{1}{n!}x^n$. *Da je red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ *konvergentan dokazujemo primjenom teorema 1.3.9.*
*Za* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

*Odaberimo* $m \in \mathbb{N}$ *takav da* $2|x| - 1 < m$. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n \geq m$. *Tada je* $2|x| - 1 < n$, *pa slijedi* $2|x| < n + 1$, *što povlači* $\frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2}$.
*Dakle,*

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < \frac{1}{2}, \text{ za svaki } n \geq m.$$

*Prema teoremu 1.3.9 red* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}x^n$ *je konvergentan.*

**Definicija 3.1.3.** *Neka je $\mathcal{R}$ skup svih redova. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz u $\mathbb{R}$. Za funkciju $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, $x \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ kažemo da je* **red potencija** *određen nizom $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Red potencija određen nizom $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ označavamo s $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$.*

**Definicija 3.1.4.** *Neka je $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ red potencija. Neka je $K = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \text{konvergentan}\right\}$.*
*Ako je skup $\{|x| \mid x \in K\}$ neomeđen, definiramo $r = \infty$.*
*Ako je skup $\{|x| \mid x \in K\}$ omeđen, definiramo $r = \sup\{|x| \,|x \in K\}$ (uočimo da je skup $K$ neprazan, naime $0 \in K$). Za $r$ kažemo da je* **radijus konvergencije** *reda potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$. Uzimamo da je $x < \infty$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Nadalje, smatramo da za niti jedan $x \in \mathbb{R}$ ne vrijedi $\infty \leq x, \infty < x$ (to jest $x \geq \infty$ i $x > \infty$).*

**Primjer 3.1.5.** *Promotrimo red potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!} x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$.*
*Neka je $K = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!} \text{konvergentan}\right\}$. Prema primjeru 3.1.2 vrijedi $K = \mathbb{R}$. Stoga je $\{|x\} \mid x \in K\} = [0, \infty\rangle$, pa zaključujemo da je $r = \infty$ radijus konvergencije ovog reda potencija.*

**Primjer 3.1.6.** *Neka je $S = [0, 1\rangle$. Tvrdimo da je $1$ supremum skupa $S$. Očito je $1$ gornja međa od $S$.*
*Neka je $b$ gornja međa od $S$. Pretpostavimo da je $b < 1$. Tada je*

$$\max\{0, b\} < 1,$$

*pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $\max\{0, b\} < x < 1$. Slijedi*

$$0 < x < 1,$$

*pa je $x \in S$.*
*Također iz načina na koji smo birali $x$ slijedi $b < x$. No ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $x \in S$ i $b$ gornja međa od $S$.*
*Dakle,*

$$1 \leq b.$$

*Prema tome, $1$ je supremum skupa $S$.*

**Napomena 3.1.7.** *Neka je $S = [a, b\rangle$. Analogno kao u primjeru 3.1.6 vidimo da je $b$ supremum skupa $S$.*

**Primjer 3.1.8.** *Promotrimo red potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$.*

*Neka je $K = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n \text{konvergentan}\right\}$. Neka je $x \in \langle -1, 1\rangle$. Tvrdimo da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$ konvergentan.*

*To je očito ako je $x = 0$. Pretpostavimo da je $x \neq 0$. Tada je*

$$0 < |x| < 1,$$

*pa iz primjera 1.4.4 slijedi da je $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |x|^n$ konvergentan red. Dakle, $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |x^n|$ je konvergentan red, što znači da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$ apsolutno konvergentan. Prema propoziciji 1.4.7 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$ konvergentan.*

*Dakle, $x \in K$. Prema tome,*

$$\langle -1, 1\rangle \subseteq K.$$

*Pretpostavimo da je $q \in \mathbb{R}$ takav da je $q \geq 1$. Tada indukcijom lako dobivamo da je*

$$q^n \geq 1,$$

*za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Iz ovoga je jasno da niz $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ne teži u $0$.*

*Pretpostavimo da postoji $x \in \mathbb{R}\backslash\langle -1, 1\rangle$ takav da je $x \in K$. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$ konvergentan, pa iz propozicije 1.4.3 slijedi da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ teži u $0$. Iz propozicije 1.1.32 slijedi da $(|x^n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ teži u $0$, to jest $(|x|^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ teži u $0$. No, ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $|x| \geq 1$ (jer $x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$).*

*Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$ vrijedi $x \neq K$. Stoga je*

$$K = \langle -1, 1\rangle.$$

*Slijedi*

$$\{|x \mid x \in K\} = [0, 1\rangle,$$

*pa je*

$$\sup\{|x|\, |x \in K\} = 1$$

*prema primjeru 3.1.6.*

*Dakle, $r = 1$ je radijus konvergencije reda potencija* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$.

**Propozicija 3.1.9.** *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz u $\mathbb{R}$ te neka je $r$ radijus konvergencije reda potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$. Ako je $x \in \mathbb{R}$ takav da*

$$|x| < r,$$

*tada red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ apsolutno konvergira. Ako je $x \in \mathbb{R}$ takav da*

$$|x| > r,$$

*tada red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ ne konvergira.*

*Dokaz.* Neka je $K = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \text{red} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \text{ konvergira}\right\}$. Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da $|x| < r$. Pretpostavimo da je skup $\{|z| \mid z \in K\}$ neomeđen. Tada $|x|$ nije gornja međa ovog skupa, pa postoji $z \in K$ takav da je

$$|x| < |z|.$$

Pretpostavimo da je skup $\{|z| \mid z \in K\}$ omeđen. Tada je $r = \sup\{|z| \mid z \in K\}$. Iz $|x| < r$ zaključujemo da $|x|$ nije gornja međa skupa $\{|z| \mid z \in K\}$, pa postoji $z \in K$ takav da je

$$|x| < |z|.$$

U svakom slučaju, postoji $z \in K$ takav da je

$$|x| < |z|. \tag{3.1}$$

Budući da je $z \in K$, red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n z^n$ je konvergentan.
Iz propozicije 1.2.15 slijedi

$$a_n z^n \to 0,$$

dakle niz $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je konvergentan.
Iz propozicije 1.1.25 slijedi da je niz $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ omeđen, dakle skup $\{a_n z^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ je omeđen.
Prema lemi 2.3.9 postoji $M > 0$ takav da

$$|a_n z^n| < M, \text{za svaki } n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2}$$

Tvrdimo da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ apsolutno konvergentan.
To je očito ako je $x = 0$. Pretpostavimo da je $x \neq 0$.
Definirajmo $q = \left|\frac{x}{z}\right|$ (uočimo da je prema (3.1) $z \neq 0$). Iz (3.1) slijedi $0 < q < 1$.
Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Koristeći (3.2) dobivamo:

$$|a_n x^n| = \left|a_n \left(\frac{x}{z}\right)^n z^n\right| = |a_n z^n| \cdot \left|\frac{x}{z}\right|^n < M \cdot \left|\frac{x}{z}\right|^n = Mq^n.$$

Dakle,

$$|a_n x^n| < Mq^n, \text{za svaki } n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.3}$$

Iz primjera 1.4.4 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} q^n$ konvergentan, pa iz propozicije 1.3.7 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} Mq^n$ konvergentan. Iz ovoga, (3.3) i propozicije 1.3.11 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ apsolutno konvergentan.
Pretpostavimo sada da je $x \in \mathbb{R}$ takav da $|x| > r$. Stoga je $r \in \mathbb{R}$, pa zaključujemo da je $r$ gornja međa skupa $\{|z| \mid z \in K\}$.
Pretpostavimo da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ konvergentan. Tada je $x \in K$, pa je $|x| \in \{|z| \mid z \in K\}$, što povlači da je

$$|x| \leq r.$$

Kontradikcija.
Prema tome, red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ nije konvergentan. □

## 3.2 Limes inferior i limes superior

**Definicija 3.2.1.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Za $a$ kažemo da je **gomilište niza** $(x_n)$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da*

$$x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle .$$

**Napomena 3.2.2.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Tada je $a$ gomilište niza $(x_n)$.*
*Naime, neka su $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Tada, zbog činjenice da $x_n \to a$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi*

$$x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle .$$

*Definirajmo $n \in \mathbb{N}$ takav da $n = \max\{n_0, N\}$. Tada je $n \geq n_0$, pa je $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$. Očito je*

$$n \geq N.$$

*Prema tome, a je gomilište niza* $(x_n)$.

**Primjer 3.2.3.** *Neka je* $(x_n)$ *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran s* $x_n = (-1)^n$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tvrdimo da niz* $(x_n)$ *nije konvergentan.*
*Pretpostavimo suprotno. Tada postoji* $a \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to a$. *Neka je* $\varepsilon = \frac{1}{2}$. *Tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $|x_n - a| < \frac{1}{2}$, *za svaki* $n \geq n_0$. *Odaberimo paran broj n takav da je* $n \geq n_0$ *i neparan broj m takav da je* $m \geq n_0$. *Vrijedi:*

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1,$$

*dakle* $|x_n - x_m| < 1$.
*S druge strane, iz činjenice da je n paran, a m neparan slijedi:*

$$|x_n - x_m| = |1 - (-1)| = 2.$$

*Kontradikcija.*
*Prema tome, niz* $(x_n)$ *nije konvergentan.*
*Tvrdimo da je* $1$ *gomilište niza* $(x_n)$. *Neka su* $\varepsilon > 0$ *i* $N \in \mathbb{N}$. *Odaberimo paran broj n takav da je* $n \geq N$. *Tada je* $x_n = 1$, *pa je očito*

$$x_n \in \langle 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon \rangle .$$

*Dakle,* $1$ *je gomilište niza* $(x_n)$. *Analogno dobivamo da je* $-1$ *je gomilište niza* $(x_n)$.

**Primjer 3.2.4.** *Neka je* $(x_n)$ *niz realnih brojeva definiran s* $x_n = n$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tvrdimo da ovaj niz nema gomilišta.*
*Pretpostavimo suprotno. Tada postoji* $a \in \mathbb{R}$ *takav da je a gomilište niza* $(x_n)$. *Odaberimo prirodan broj N takav da* $a + 1 < N$. *Prema definiciji gomilišta, postoji* $n \geq N$ *takav da* $x_n \in \langle a - 1, a + 1 \rangle$.
*Imamo:*

$$n = x_n < a + 1 < N \leq n.$$

*Kontradikcija.*
*Prema tome, niz* $(x_n)$ *nema gomilište.*

**Definicija 3.2.5.** *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $(x_n)$ *niz u* $\mathbb{R}$. *Kažemo da je* ***skup*** $A$ ***gomilište*** *niza* $(x_n)$ *ako za svaki* $N \in \mathbb{N}$ *postoji* $n \geq N$ *takav da* $x_n \in A$.

Uočimo sljedeće: Ako je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$, onda je $a$ gomilište niza $(x_n)$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ je skup $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ gomilište niza $(x_n)$.

**Propozicija 3.2.6.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ te neka su $S$ i $T$ podskupovi od $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $S \cup T$ gomilište niza $(x_n)$. Tada je $S$ gomilište od $(x_n)$ ili je $T$ gomilište od $(x_n)$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno.
Tada $S$ nije gomilište niza $(x_n)$ i $T$ nije gomilište niza $(x_n)$. Stoga postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N$ vrijedi

$$x_n \notin S$$

te postoji $M \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq M$ vrijedi

$$x_n \notin T.$$

Definirajmo $K = \max\{N, M\}$. Tada za svaki $n \geq K$ vrijedi $n \geq N$ i $n \geq M$, pa imamo $x_n \notin S$ i $x_n \notin T$, to jest

$$x_n \notin S \cup T.$$

Dakle, $x_n \notin S \cup T$, za svaki $n \geq K$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $S \cup T$ gomilište niza $(x_n)$. □

Uočimo sljedeće: Ako je skup $S$ gomilište niza $(x_n)$ te ako je $T \subseteq \mathbb{R}$ takav da $S \subseteq T$, onda je $T$ gomilište niza $(x_n)$.

**Napomena 3.2.7.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $x_n \in S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je $S$ gomilište niza $(x_n)$. Ako je $x_n \notin S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda $S$ nije gomilište niza $(x_n)$.*

**Teorem 3.2.8.** *Neka je $(x_n)$ omeđen niz u $\mathbb{R}$. Tada $(x_n)$ ima gomilište.*

*Dokaz.* Skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen pa postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a$ donja, a $b$ gornja međa ovog skupa. Slijedi

$$a \leq x_n \leq b,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Definirajmo $S = \{z \in \mathbb{R} \mid \langle z, \infty\rangle \text{ je gomilište niza } (x_n)\}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n \in \langle a - 1, \infty\rangle,$$

pa iz napomene 3.2.7 slijedi da je $\langle a - 1, \infty\rangle$ gomilište niza $(x_n)$.
Dakle, $a - 1 \in S$, to jest $S \neq \emptyset$.
Pretpostavimo da je $z \in \mathbb{R}$ takav da je $b < z$. Tada vrijedi da

$$x_n \notin \langle z, \infty\rangle,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa prema napomeni 3.2.7 $\langle z, \infty\rangle$ nije gomilište niza $(x_n)$. Dakle, $z \notin S$. Ovim smo dokazali da za svaki $z \in S$ vrijedi

$$z \leq b.$$

Prema tome, skup $S$ je odozgo omeđen.
Iz propozicije 1.1.15 slijedi da $S$ ima supremum, pa neka je $c = \sup S$. Tvrdimo da je $c$ gomilište niza $(x_n)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo pokazati da je skup $\langle c-\varepsilon, c+\varepsilon\rangle$ gomilište niza $(x_n)$. Budući da je $c$ supremum skupa $S$, to jest najmanja gornja međa, broj $c-\varepsilon$ nije gornja međa skupa $S$, pa postoji $z \in S$ takav da je

$$c - \varepsilon < z.$$

Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je $c < x < c + \varepsilon$. Iz $c < x$ slijedi da $x \notin S$, pa slijedi da $\langle x, \infty\rangle$ nije gomilište niza $(x_n)$. Iz $z \in S$ slijedi da je skup $\langle z, \infty\rangle$ gomilište niza $(x_n)$ te da je $z \leq c$. Stoga je $z < x$, pa vrijedi

$$\langle z, \infty\rangle = \langle z, x] \cup \langle x, \infty\rangle .$$

Dakle, $\langle z, x] \cup \langle x, \infty\rangle$ je gomilište niza $(x_n)$, a $\langle x, \infty\rangle$ nije gomilište $(x_n)$, pa iz propozicije 3.2.6 slijedi da je $\langle z, x]$ gomilište niza $(x_n)$.
Iz $c - \varepsilon < z < x < c + \varepsilon$ slijedi

$$\langle z, x] \subseteq \langle c-\varepsilon, c+\varepsilon\rangle ,$$

pa zaključujemo da je $\langle c-\varepsilon, c+\varepsilon\rangle$ gomilište niza $(x_n)$.
Prema tome, $c$ je gomilište niza $(x_n)$. □

**Definicija 3.2.9.** *Za niz $(x_n)$ u $\mathbb{R}$ kažemo da je* ***omeđen odozgo*** *ako je skup $\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ omeđen odozgo. Za niz $(x_n)$ u $\mathbb{R}$ kažemo da je* ***omeđen odozdo*** *ako je skup $\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ omeđen odozdo.*

**Primjer 3.2.10.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva definiran na sljedeći način: $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ paran}, \\ 0, & n \text{ neparan}. \end{cases}$ Tada je*

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0\} \cup \{2n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

*pa je očito da $(x_n)$ nije omeđen. Nadalje, lako se vidi da je $0$ gomilište niza $(x_n)$.*

**Lema 3.2.11.** *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka je $x \in \langle a, b\rangle$. Tada postoji $r > 0$ takav da*

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq \langle a, b\rangle .$$

*Dokaz.* Definirajmo $r = \min\{x - a, b - x\}$. Zbog $a < x < b$ imamo $x - a > 0$ i $b - x > 0$, pa je $r > 0$. Tvrdimo da je

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq \langle a, b\rangle . \tag{3.4}$$

Iz definicije od $r$ slijedi $r \leq x - a$ i $r \leq b - x$, pa je $a \leq x - r$ i $x + r \leq b$. Stoga, ako je $y \in \langle x - r, x + r\rangle$, imamo $x - r < y < x + r$, pa je $a < y < b$, to jest

$$y \in \langle a, b\rangle .$$

Time smo dokazali da vrijedi (3.4). □

**Teorem 3.2.12.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva. Neka je $A = \{a \in \mathbb{R} | \ a \text{ gomilište od } x_n\}$. Pretpostavimo da je $A \neq \emptyset$.*

1. *Pretpostavimo da je $(x_n)$ odozgo omeđen niz. Tada $A$ ima maksimum.*
2. *Pretpostavimo da je $(x_n)$ odozdo omeđen niz. Tada $A$ ima minimum.*

*Dokaz.* 1. Budući da je $(x_n)$ odozgo omeđen, postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x_n \leq b,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $z \in \mathbb{R}$ takav da $b < z$. Definirajmo $\varepsilon = z - b$. Tada je $\varepsilon > 0$ i $b = z - \varepsilon$, pa je $x_n \leq z - \varepsilon$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga

$$x_n \notin \langle z - \varepsilon, z + \varepsilon\rangle ,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa skup $\langle z - \varepsilon, z + \varepsilon\rangle$ nije gomilište niza $(x_n)$. Prema tome, $z$ nije gomilište niza $(x_n)$, to jest $z \notin A$. Iz ovog zaključujemo, da za svaki $z \in A$ vrijedi

$$z \leq b.$$

Dakle, skup $A$ je odozgo omeđen. Prema pretpostavci propozicije $A \neq \emptyset$ i propoziciji 1.1.15 slijedi da $A$ ima supremum. Neka je $s = \sup A$. Tvrdimo da je $s$ maksimum skupa $A$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je $s \in A$, to jest da je $s$ gomilište niza $(x_n)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati da je $\langle s - \varepsilon, s + \varepsilon\rangle$ gomilište niza $(x_n)$. Budući da je $s$ najmanja gornja međa skupa $A$, broj $s-\varepsilon$ nije gornja međa skupa $A$, pa postoji $d \in A$ takav da $s - \varepsilon < d$. Očito je $d \leq s$, pa je $d < s + \varepsilon$. Dakle,

$$d \in \langle s - \varepsilon, s + \varepsilon\rangle ,$$

pa prema lemi 3.2.11 postoji $r > 0$ takav da

$$\langle d - r, d + r\rangle \subseteq \langle s - \varepsilon, s + \varepsilon\rangle .$$

Zbog činjenice da je $d \in A$ vrijedi da je $d$ gomilište niza $(x_n)$, pa je $\langle d - r, d + r\rangle$ gomilište niza $(x_n)$, što povlači da je skup $\langle s - \varepsilon, s + \varepsilon\rangle$ također gomilište niza $(x_n)$. Dakle, $s \in A$. Prema tome, $s$ je maksimum skupa $A$.

2. Budući da je $(x_n)$ odozdo omeđen, postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je

$$b \le x_n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $z \in \mathbb{R}$ takav da $z < b$. Definirajmo $\varepsilon = b - z$. Tada je $\varepsilon > 0$ i $b = z + \varepsilon$, pa je $z + \varepsilon \le x_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga

$$x_n \notin \langle z - \varepsilon, z + \varepsilon \rangle\,,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa skup $\langle z - \varepsilon, z + \varepsilon \rangle$ nije gomilište niza $(x_n)$. Prema tome, $z$ nije gomilište niza $(x_n)$, to jest $z \notin A$. Iz ovog zaključujemo, da za svaki $z \in A$ vrijedi

$$b \le z.$$

Dakle, skup $A$ je odozdo omeđen. Prema propoziciji 1.1.19 skup $A$ ima infimum. Neka je $m = \inf A$. Tvrdimo da je $m$ minimum skupa $A$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je $m \in A$. Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati da je $\langle m - \varepsilon, m + \varepsilon \rangle$ gomilište niza $(x_n)$. Budući da je $m$ najveća donja međa skupa $A$, broj $m + \varepsilon$ nije donja međa skupa $A$, pa postoji $x \in A$ takav da $x < m + \varepsilon$. Očito je $m \le x$, pa vrijede

$$x \in \langle m - \varepsilon, m + \varepsilon \rangle\,.$$

Prema lemi 3.2.11 postoji $r > 0$ takav da

$$\langle x - r, x + r \rangle \subseteq \langle m - \varepsilon, m + \varepsilon \rangle\,.$$

Budući da je $x \in A$ vrijedi da je $\langle x - r, x + r \rangle$ gomilište niza $(x_n)$, pa slijedi da je skup $\langle m - \varepsilon, m + \varepsilon \rangle$ također gomilište niza $(x_n)$.
Dakle, $m$ je gomilište niza $(x_n)$, pa je $m \in A$.
Prema tome, $m$ je minimum skupa $A$.

□

Od sada pa nadalje, pod pojmom niza podrazumijevamo nizove oblika $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

**Definicija 3.2.13.** *Neka je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$. Definirajmo* ***limes superior niza*** *$(x_n)$, u oznaci* $\limsup x_n$, *na sljedeći način:*

1. *niz $(x_n)$ je odozgo neomeđen, definiramo* $\limsup x_n = \infty$,
2. *niz $(x_n)$ je odozgo omeđen.*
   a. *Ako je skup $A$ svih gomilišta niza $(x_n)$ neprazan, definiramo* $\limsup x_n = \max A$
   b. *Ako niz $(x_n)$ nema nijedno gomilište, definiramo* $\limsup x_n = -\infty$.

Uočimo sljedeće: Ako je $(x_n)$ niz u $\mathbb{R}$, onda:

$$\limsup x_n = \infty \Leftrightarrow (x_n) \text{ odozgo neomeđen niz.}$$

Nadalje, ako je $\limsup x_n = -\infty$, onda je $(x_n)$ odozdo neomeđen niz. Naime, u suprotnom bi $(x_n)$ bio odozdo omeđen, pa bi bio i omeđen, te bi teorem 3.2.8 povlačio da ima gomilište.

**Propozicija 3.2.14.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Tada je* $\limsup x_n = a$.

*Dokaz.* Iz napomene 3.2.2 slijedi da je $a$ gomilište niza $(x_n)$. Tvrdimo da niz $(x_n)$ nema drugih gomilišta. Neka je $b \in \mathbb{R}$ takav da je $b \neq a$. Pretpostavimo da je $a < b$. Odaberimo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}.$$

Slijedi $2\varepsilon < b - a$, pa je $a + \varepsilon < b - \varepsilon$, što povlači da je

$$\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle \cap \langle b-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle = \emptyset. \tag{3.5}$$

U slučaju $b < a$, analogno dolazimo do zaključka da postoji $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi (3.5).
Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je

$$x_n \in \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle.$$

Iz (3.5) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je

$$x_n \notin \langle b-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle.$$

Kada bi skup $\langle b-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle$ bio gomilište niza $(x_n)$, onda bi postojao $n \geq n_0$ takav da je $x_n \in \langle b-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle$, što očito ne vrijedi. Prema tome, skup $\langle b-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle$ nije gomilište niza $(x_n)$, pa $b$ nije gomilište niza $(x_n)$.
Neka je $A$ skup svih gomilišta niza $(x_n)$. Dokazali smo da je

$$A = \{a\}.$$

Prema propoziciji 1.1.25 niz $(x_n)$ je omeđen, pa je i odozgo omeđen. Prema definiciji limesa superiora vrijedi $\limsup x_n = \max A$, dakle $\limsup x_n = a$. □

Uzimamo da je $-\infty \leq x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

**Propozicija 3.2.15.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Pretpostavimo da je $x_n \leq a$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je* $\limsup x_n \leq a$.

2. *Pretpostavimo da je* $a \leq x_n$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je* $a \leq \limsup x_n$.

*Dokaz.* 1. Kao i u dokazu 1. tvrdnje teorema 3.2.12 vidimo da niz $(x_n)$ nema gomilište koje je veće od $a$. Dakle, $a$ je gornja međa skupa $A$, gdje je $A$ skup svih gomilišta niza $(x_n)$. Očito je niz $(x_n)$ odozgo omeđen, pa iz definicije limesa superiora slijedi da je

$$\limsup x_n = \max A,$$

ako je $A \neq \emptyset$ te

$$\limsup x_n = -\infty,$$

ako je $A = \emptyset$.
U oba slučaja vrijedi

$$\limsup x_n \leq a.$$

2. Kao u dokazu 2. tvrdnje teorema 3.2.12 vidimo da niz $(x_n)$ nema gomilište koje je manje od $a$. Dakle, $a$ je donja međa skupa $A$, gdje je $A$ skup svih gomilišta niza $(x_n)$. Ako je niz $(x_n)$ odozgo neomeđen, onda je

$$\limsup x_n = \infty,$$

a ako je niz $(x_n)$ odozgo omeđen, onda je i omeđen, pa je prema teoremu 3.2.8 $A \neq \emptyset$, a tada je

$$\limsup x_n = \max A.$$

U oba slučaja vrijedi da je

$$a \leq \limsup x_n.$$

□

**Propozicija 3.2.16.** *Neka je* $(x_n)$ *niz realnih brojeva te neka je* $(y_n)$ *podniz od* $(x_n)$. *Pretpostavimo da je* $a$ *gomilište niza* $(y_n)$. *Tada je* $a$ *gomilište niza* $(x_n)$.

*Dokaz.* Znamo da postoji strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $y_n = x_{p_n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ te neka je $N \in \mathbb{N}$. Budući da je $a$ gomilište od $(y_n)$, postoji $n \geq N$ takav da je

$$y_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle .$$

Dakle, $x_{p_n} \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ , a iz leme 1.2.19 slijedi da je $n \leq p_n$, pa je $N \leq p_n$. Definirajmo $m = p_n$. Imamo:

$$x_m \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle \quad \text{i} \quad m \geq N.$$

Stoga je $a$ gomilište niza $(x_n)$. □

**Lema 3.2.17.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka su $a$ i $b$ realni brojevi takvi da je $a \leq x_n \leq b$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $z$ gomilište niza $(x_n)$. Tada je*

$$a \leq z \leq b.$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $z \leq a$. Definirajmo $\varepsilon = a - z$. Tada je $\varepsilon > 0$ i $z + \varepsilon = a$. Stoga je

$$\langle z - \varepsilon, z + \varepsilon \rangle \cap [a, b] = \emptyset,$$

iz čega zaključujemo da $x_n \notin \langle z - \varepsilon, z + \varepsilon \rangle$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovo je nemoguće jer je skup $\langle z - \varepsilon, z + \varepsilon \rangle$ gomilište niza $(x_n)$, jer je $z$ gomilište niza $(x_n)$.
Kontradikcija.
Stoga je $a \leq z$.
Pretpostavimo da je $b \leq z$. Definirajmo $\varepsilon = z - b$. Tada je $\varepsilon > 0$ i $z - \varepsilon = b$. Stoga je

$$\langle z - \varepsilon, z + \varepsilon \rangle \cap [a, b] = \emptyset,$$

pa analogno kao i u gornjem slučaju dobivamo kontadikciju.
Dakle, $z \leq b$. □

**Propozicija 3.2.18.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $a = \limsup x_n$. Pretpostavimo da je $a \in \mathbb{R}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$x_n \leq a + \varepsilon,$$

*za svaki $n \geq n_0$.*

*Dokaz.* Iz činjenice da je $a \in \mathbb{R}$ i definicije limesa superiora slijedi da je niz $(x_n)$ odozgo omeđen. Dakle, postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x_n \leq M,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Pretpostavimo da ne postoji $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \leq a + \varepsilon$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji $n' \geq n$ takav da je $x'_n > a + \varepsilon$. Definirajmo induktivno niz $(p_k)$ u $\mathbb{N}_0$ na sljedeći način: Neka je $p_1$ takav da je

$$x_{p_1} > a + \varepsilon. \tag{3.6}$$

Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}_0$ te da smo definirali $p_k$. Tada postoji $b \geq 1 + p_k$ takav da je $x_b > a + \varepsilon$. Definirajmo $b = p_{k+1}$. Imamo:

$$p_{k+1} > p_k \tag{3.7}$$

i

$$x_{p_{k+1}} > a + \varepsilon. \tag{3.8}$$

Na taj način smo definirali funkciju $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ koja je strogo rastuća (zbog (3.7)). Iz (3.6) i (3.8) slijedi da je $a + \varepsilon < x_{p_k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Budući da je $x_n \leq M$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $x_{p_k} \leq M$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Dakle,

$$a + \varepsilon < x_{p_k} \leq M, \tag{3.9}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Prema teoremu 3.2.8 niz $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ima gomilište, neka je $c$ neko gomilište tog niza. Budući da je niz $(x_{p_k})$ podniz niza $(x_n)$, propozicija 3.2.16 povlači da je $c$ gomilište niza $(x_n)$.
S druge strane, iz (3.9) i leme 3.2.17 slijedi da je

$$a + \varepsilon \leq c \leq M.$$

Iz definicije limesa superiora slijedi da je svako gomilište niza $(x_n)$ manje od $a$ ili jednako $a$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $a < c$ (jer je $a + \varepsilon \leq c$).
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Teorem 3.2.19.** *Neka je $(a_n)$ niz realnih brojeva te neka je $r$ radijus konvergencije reda potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$. Tada je*

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3.10}$$

*s tim da smatramo*

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 0, \text{ za } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$$

*i*

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty, \text{ za } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

*(također uzimamo da je $\sqrt[0]{|a_n|} = 1$).*

*Dokaz.* Neka je $\delta = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ očito vrijedi

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|},$$

pa iz propozicije 3.2.15 slijedi da je

$$0 \leq \delta.$$

1. $\delta = \infty$
Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, takav da red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ konvergira. Prema propoziciji 1.4.3 vrijedi $a_n x^n \to 0$. Dakle, niz $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je konvergentan pa je i omeđen. Prema lemi 2.3.9 postoji $M > 0$ takav da je
$$|a_n x^n| < M, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.11}$$
pri tome možemo pretpostaviti da je $M \geq 1$. Budući da je $\delta = \infty$, niz $(\sqrt[n]{|a_n|})$ je odozgo neomeđen. Slijedi da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\frac{M}{|x|} < \sqrt[n]{|a_n|}.$$
Slijedi:
$$\frac{M^n}{|x|^n} < |a_n|,$$
to jest
$$M^n < |a_n|\,|x|^n.$$
Zbog $M \geq 1$, vrijedi $M \leq M^n$. Stoga je
$$M < |a_n x^n|.$$
Ovo je u kontradikciji sa (3.11).
Zaključak: Ne postoji $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, takav da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ konvergentan. Iz definicije radijusa konvergencije slijedi da je $r = 0$. Stoga (3.10) vrijedi.

2. $\delta \in \mathbb{R}$ i $\delta > 0$
Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| > \frac{1}{\delta}$. Tada je
$$\frac{1}{|x|} < \delta.$$
Definirajmo $\varepsilon = \delta - \frac{1}{|x|}$. Imamo $\varepsilon > 0$, pa je $\langle \delta - \varepsilon, \delta + \varepsilon \rangle$ gomilište niza $(\sqrt[n]{|a_n|})$ (naime, prema definiciji limesa superiora imamo da je $\delta$ maksimum skupa svih gomilišta niza $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, dakle $\delta$ je gomilište tog niza). Uočimo da je
$$\delta - \varepsilon = \frac{1}{|x|}.$$
Dakle,
$$\left\langle \frac{1}{|x|}, \delta + \varepsilon \right\rangle$$

je gomilište niza $(\sqrt[n]{|a_n|})$. Stoga, postoji beskonačan podskup $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}_1$ vrijedi

$$\sqrt[n]{|a_n|} \in \left\langle \frac{1}{|x|}, \delta + \varepsilon \right\rangle,$$

to jest

$$\frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Slijedi $1 < \sqrt[n]{|a_n x^n|}$, za svaki $n \in \mathbb{N}_1$, pa iz drugog dijela teorema 1.3.10 slijedi da red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ nije konvergentan.

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| < \frac{1}{\delta}$. Tvrdimo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$|x| < \frac{1}{\delta + \varepsilon}.$$

Naime, ovo je očito ako je $x = 0$, a ako je $x \neq 0$, onda iz $|x| < \frac{1}{\delta}$ slijedi $\delta < \frac{1}{|x|}$, pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\delta + \varepsilon < \frac{1}{|x|}$, što povlači da je

$$|x| < \frac{1}{\delta + \varepsilon}. \tag{3.12}$$

Iz definicije od $\delta$ i propozicije 3.2.18 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \delta + \frac{\varepsilon}{2},$$

za svaki $n \geq n_0$. Množenjem ovoga i nejednakosti (3.12) dobivamo da je

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} < \frac{\delta + \frac{\varepsilon}{2}}{\delta + \varepsilon},$$

za svaki $n \geq n_0$. Označimo $q = \frac{\delta+\frac{\varepsilon}{2}}{\delta+\varepsilon}$. Imamo $0 < q < 1$ te $\sqrt[n]{|a_n x^n|} < q$, za svaki $n \geq n_0$, pa iz teorema 1.3.10 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ apsolutno konvergentan.

Neka je $K = \left\{ x \in \mathbb{R} | \text{ red } \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \text{konvergentan} \right\}$. Dokazali smo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| > \frac{1}{\delta}$, vrijedi $x \notin K$, te da za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| < \frac{1}{\delta}$, vrijedi $x \in K$. Prema tome,

$$\left\langle -\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta} \right\rangle \subseteq K \subseteq \left[ \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta} \right].$$

Iz ovog slijedi

$$\left[0, \frac{1}{\delta}\right\rangle \subseteq \{|x| \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \left[0, \frac{1}{\delta}\right],$$

pa je $\{|x| \mid x \in \mathbb{R}\} = \left[0, \frac{1}{\delta}\right\rangle$ ili $\{|x| \mid x \in \mathbb{R}\} = \left[0, \frac{1}{\delta}\right]$. Koristeći napomenu 3.1.7 dobivamo da je

$$\sup \{|x| \mid x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{\delta}.$$

Dakle, $r = \frac{1}{\delta}$, to jest

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

3. $\delta = 0$
Neka je je $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Iz propozicije 3.2.18 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \delta + \frac{1}{2\,|x|},$$

to jest $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2|x|}$. Stoga je

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq \frac{1}{2},$$

za svaki $n \geq n_0$, pa iz drugog dijela teorema 1.3.10 slijedi da je red $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$ apsolutno konvergentan. Dakle, red $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$ je konvergentan, za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa slijedi da je $r = \infty$. Prema tome, vrijedi (3.10).

□

**Propozicija 3.2.20.** *Neka je $f$ polinom. Tada je $f$ derivabilna funkcija te je $f'$ također polinom.*

*Dokaz.* Budući da je $f$ polinom, postoje $n \in \mathbb{N}_0$ i $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz korolara 2.3.17 i 2.3.18 slijedi da je $f$ derivabilna funkcija te da je

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + ... + 2a_2 x + a_1,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Time je tvrdnja dokazana. □

## 3.3 Derivabilnost funkcija određenih redovima potencija

**Definicija 3.3.1.** *Neka je* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niz u* $\mathbb{R}$*. Promotrimo red potencija* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$*. Neka je* $r$ *njegov radijus konvergencije. Pretpostavimo da je* $r > 0$*. Neka je* $f : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, za svaki* $x \in \langle -r, r\rangle$*. Uočimo da je ova definicija dobra prema propoziciji 3.1.9. Za funkciju* $f$ *kažemo da je* ***određena redom potencija*** $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$*.*

**Propozicija 3.3.2.** *Neka je* $(x_n)$ *niz u* $\mathbb{R}$*. Pretpostavimo da postoji* $N \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x_n = x_N$*, za svaki* $n \geq N$*. Tada* $x_n \to x_N$*.*

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svaki $n \geq N$ očito vrijedi

$$x_n \in \langle x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon\rangle .$$

Prema tome, $x_n \to x_N$. □

**Primjer 3.3.3.** *Neka je* $f$ *polinom. Neka je* $n \in \mathbb{N}_0$ *te neka su* $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$*, za svaki* $x \in \mathbb{R}$*.*
*Definirajmo niz* $(b_k)$ *u* $\mathbb{R}$ *s* $b_k = \begin{cases} a_k, & k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$
*Tada je* $f$ *funkcija određena redom potencija* $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k x^k\right)_{x\in\mathbb{R}}$*. Dokažimo to.*
*Neka je* $x \in \mathbb{R}$*. Neka je* $(s_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ *niz parcijalnih suma reda* $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k x^k$*.*
*Vrijedi:*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x).$$

*Dakle,* $s_n = f(x)$*.*
*Nadalje, neka je* $m \in \mathbb{N}$ *takav da je* $m > n$*.*

*Vrijedi:*

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=n+1}^{m} b_k x^k \\ &= s_n + 0 \\ &= s_n. \end{aligned}$$

*Dakle,* $s_m = s_n$, *za svaki* $m \in \mathbb{N}$ *takav da je* $m \geq n$. *Iz propozicije 3.3.2 slijedi da* $s_i \to s_n$, *to jest* $s_i \to f(x)$.

*Zaključak: za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *red* $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k x^k$ *je konvergentan i* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = f(x)$. *Prema defininciji radijusa konvergencije imamo da je* $\infty$ *radijus konvergencije reda potencija* $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k x^k\right)_{x\in\mathbb{R}}$.

*Stoga, ako je g funkcija određena tim redom potencija, vrijedi* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, *za svaki* $x \in \mathbb{R}$. *Stoga je*

$$g(x) = f(x),$$

*za svaki* $x \in \mathbb{R}$. *Prema tome, funkcija f je određena redom potencija* $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k x^k\right)_{x\in\mathbb{R}}$.

**Primjer 3.3.4.** *Vrijedi* $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

*Naime, neka je* $\varepsilon > 0$. *Odaberimo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\frac{1}{\varepsilon^2} < n_0$. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n \geq n_0$. *Tada je*

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < n,$$

*pa je* $\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n}$, *to jest* $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. *Dakle,*

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon,$$

*za svaki* $n \geq n_0$. *Time je tvrdnja dokazana.*

**Propozicija 3.3.5.** *(Teorem o sendviču) Neka su* $(x_n), (y_n)$ *i* $(z_n)$ *nizovi realnih brojeva. Pretpostavimo da postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x_n \leq y_n \leq z_n$, *za svaki* $n \geq n_0$. *Nadalje, pretpostavimo da je* $a \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to a$ *i* $z_n \to a$. *Tada* $y_n \to a$.

*Dokaz.* Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle .$$

Nadalje, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq k_0$ vrijedi

$$z_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle .$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq \max\{k_0, m_0, n_0\}$. Tada vrijedi $x_n, z_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ i $x_n \leq y_n \leq z_n$. Stoga je

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon.$$

Dakle, $y_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$, za svaki $n \geq \max\{k_0, m_0, n_0\}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Propozicija 3.3.6.** *Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je $x_n \neq 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te da je $a \neq 0$. Tada $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$.*

*Dokaz.* Iz $x_n \to a$ slijedi $|x_n| \to |a|$. Budući da je $a \neq 0$ imamo $|a| > 0$, pa je $\frac{|a|}{2} > 0$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$|x_n| \in \left\langle |a| - \frac{|a|}{2}, |a| + \frac{|a|}{2} \right\rangle,$$

to jest $|x_n| \in \left\langle \frac{|a|}{2}, \frac{3|a|}{2} \right\rangle$. Stoga je $|x_n| > \frac{|a|}{2}$, za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Dakle, $\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$, za svaki $n \geq n_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $x_n \to a$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq k_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon |a|^2}{2}.$$

Neka je $n \geq \max\{k_0, n_0\}$. Vrijedi:

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n|\,|a|} = |x_n - a| \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot \frac{1}{|a|} < \frac{\varepsilon\,|a|^2}{2} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \frac{1}{|a|} = \varepsilon.$$

Dakle, $\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$, za svaki $n \geq \max\{k_0, n_0\}$. Time je tvrdnja dokazana. □

**Propozicija 3.3.7.** *(Aritmetičko-geometrijska nejednakost) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve nenegativne brojeve $x_1, ..., x_n$ vrijedi*

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}.$$

*Dokaz.* Dokažimo ovu tvrdnju matematičkom indukcijom po $n$.
Za $n = 1$ tvrdnja je očita. Ako su $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$ tada vrijedi

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0,$$

pa je $x - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + y \geq 0$, što povlači $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, dakle $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Prema tome, tvrdnja propozicije vrijedi za $n = 2$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Neka su $x_1, ..., x_n$ nenegativni brojevi. Neka je $A = \frac{x_1 + ... + x_{n+1}}{n+1}$ i $G = \sqrt[n+1]{x_1 \cdot ... \cdot x_{n+1}}$. Tvrdimo da je

$$A \geq G.$$

Možemo pretpostaviti da je $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1}$. Vrijedi:

$$x_1 = \frac{x_1 + ... + x_1}{n+1} \leq \frac{x_1 + ... + x_{n+1}}{n+1} = A.$$

Dakle, $x_1 \leq A$. Nadalje,

$$A = \frac{x_1 + ... + x_{n+1}}{n+1} \leq \frac{x_{n+1} + ... + x_{n+1}}{n+1} = x_{n+1}.$$

Dakle, $A \leq x_{n+1}$. Prema tome,

$$x_1 \leq A \leq x_{n+1}.$$

Očito je $x_1 + x_{n+1} - A \geq 0$. Iz induktivne pretpostavke slijedi

$$\frac{x_2 + x_3 + ... + x_n + (x_1 + x_{n+1} - A)}{n} \geq \sqrt[n]{x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - A)}.$$

Stoga je

$$\left(\frac{x_2 + x_3 + ... + x_n + (x_1 + x_{n+1} - A)}{n}\right)^n \geq x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - A)\,. \tag{3.13}$$

Iz definicije od $A$ slijedi $x_1 + x_2 + ... + x_{n+1} = (n+1) \cdot A$. Uvrštavanjem prethodne jednakosti u (3.13) dobivamo:

$$\left(\frac{(n+1) \cdot A - A}{n}\right)^n \geq x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - A)\,.$$

Dakle,

$$A^n \geq x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - A)\,. \tag{3.14}$$

Iz $A - x_1 \geq 0$ i $x_{n+1} - A \geq 0$ slijedi

$$(A - x_1)(x_{n+1} - A) \geq 0.$$

Stoga je $Ax_{n+1} - x_1 x_{n+1} - A^2 + x_1 A \geq 0$, odnosno

$$A(x_{n+1} - A + x_1) \geq x_1 x_{n+1}. \tag{3.15}$$

Pomonožimo nejednakost (3.14) s $A$ :

$$A^{n+1} \geq x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n \cdot A \cdot (x_1 + x_{n+1} - A)\,.$$

Sada iskoristimo (3.15), pa dobivamo:

$$A^{n+1} \geq x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n \cdot x_1 \cdot x_{n+1}.$$

Slijedi:

$$A \geq \sqrt[n+1]{x_1 \cdot ... \cdot x_{n+1}},$$

to jest $A \geq G$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

**Propozicija 3.3.8.** *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. $\sqrt[n]{n} \to 1$,
2. $\sqrt[n]{n+1} \to 1$,
3. *Neka je* $a \in \mathbb{R}, a > 0$. *Tada* $\sqrt[n]{a} \to 1$.

*Dokaz.* 1. Neka je $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Promotrimo $n$ brojeva $1, 1, ..., 1, \sqrt{n}, \sqrt{n}$. Koristeći propoziciju 3.3.7 dobivamo:

$$\frac{1 + 1 + ... + 1 + \sqrt{n} + \sqrt{n}}{n} \geq \sqrt[n]{n},$$

to jest $\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} \geq \sqrt[n]{n}$. Očito je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, pa zaključujemo da je

$$1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n} \geq 1, \text{ za svaki } n \geq 3. \tag{3.16}$$

Prema primjerima 1.2.9, 3.3.4 i propozicijama 1.2.12 i 1.1.31 vrijedi $x_n \to 1$, gdje je $(x_n)$ niz definiran s

$$x_n = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Neka je $(z_n)$ niz definiran s $z_n = 1$. Prema primjeru 1.1.4 slijedi da

$$z_n \to 1.$$

Prema (3.16) vrijedi

$$x_n \geq \sqrt[n]{n} \geq z_n, \text{ za svaki } n \geq 3.$$

Iz propozicije 3.3.5 slijedi $\sqrt[n]{n} \to 1$.

2. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

pa iz primjera 3.3.4 i propozicije 3.3.5 slijedi da

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{2\sqrt{n+1}}{n} = \frac{2(n+1)}{n\sqrt{n+1}} = (2 + \frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Prema propoziciji 2.3.10

$$(2 + \frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0,$$

to jest $\frac{2\sqrt{n+1}}{n} \to 0$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Primjenom propozicije 3.3.7 na brojeve $1, 1, ..., \sqrt{n+1}, \sqrt{n+1}$ dobivamo:

$$1 - \frac{2}{n} + \frac{2\sqrt{n+1}}{n} \geq \sqrt[n]{n+1}.$$

Analogno, kao u 1. slučaju zaključujemo da $\sqrt[n]{n+1} \to 1$.

3. Pretpostavimo da je $a \geq 1$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 \geq a$. Neka je $n \geq n_0$. Tada je $n \geq a$, pa je

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{a}.$$

Očito je $\sqrt[n]{a} \geq 1$, pa imamo sljedeći zaključak:

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{a} \geq 1,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz propozicije 3.3.5 i 1. tvrdnje slijedi $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Pretpostavimo da je $a < 1$. Tada je $\frac{1}{a} > 1$. Prema dokazanom, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$, to jest $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$. Prema propoziciji 3.3.6 vrijedi $\sqrt[n]{a} \to 1$. Time je propozicija dokazana.

□

**Definicija 3.3.9.** *Neka je* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *red potencija. Za red potencija* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)a_{n+1}x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *kažemo da je dobiven deriviranjem reda potencija* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *član po član.*

**Teorem 3.3.10.** *Neka je* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *red potencija. Tada redovi potencija* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *i* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)a_{n+1}x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *imaju isti radijus konvergencije.*

*Dokaz.* Neka je $r$ radijus konvergencije reda potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$. Promotrimo slučaj kad je $r > 0$. Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 < |x| < r.$$

U dokazu propozicije 3.1.9 vidjeli smo da postoje $M > 0$ i $0 < q < 1$ takvi da vrijedi

$$|a_n x^n| < M \cdot q^n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi:

$$\left|a_{n+1}x^{n+1}\right| < M \cdot q^{n+1}.$$

Kad prethodnu nejednakost pomnožimo s $\frac{n+1}{|x|}$ dobivamo:

$$|(n+1)a_{n+1}x^n| < \frac{(n+1)\cdot M \cdot q^{n+1}}{|x|}.$$

Sada "uzmemo" n-ti korijen te dobivamo:

$$\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}x^n|} < \sqrt[n]{\frac{(n+1)\cdot M\cdot q}{|x|}}\cdot q. \tag{3.17}$$

Definirajmo niz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s $c_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)\cdot M\cdot q}{|x|}}$. Uočimo:

$$c_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)\cdot M\cdot q}{|x|}} = \sqrt[n]{n+1}\cdot\sqrt[n]{\frac{M\cdot q}{|x|}},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz propozicija 3.3.8 i 2.3.10 slijedi $c_n \to 1$. Prema (3.17) vrijedi:

$$\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}x^n|} < c_n \cdot q, \tag{3.18}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Budući da je $q < 1$, možemo odabrati $\varepsilon > 0$ takav da je

$$(1+\varepsilon) \cdot q < 1.$$

Budući da $c_n \to 1$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$c_n \in \langle 1-\varepsilon, 1+\varepsilon \rangle,$$

za svaki $n \geq n_0$. Slijedi $c_n < 1+\varepsilon$, za svaki $n \geq n_0$, pa je $c_n \cdot q < (1+\varepsilon) \cdot q$, za svaki $n \geq n_0$. Iz (3.18) sada zaključujemo da je

$$\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}x^n|} < (1+\varepsilon) \cdot q,$$

za svaki $n \geq n_0$. Prema teoremu 1.3.10 red $\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a_{n+1}x^n$ je konvergentan, pa iz propozicije 1.4.2 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)a_{n+1}x^n$ konvergentan. Iz ovog zaključujemo da je $|x| \leq s$, gdje je $s$ radijus konvergencije reda potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)a_{n+1}x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$. Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 < |x| < r \tag{3.19}$$

vrijedi

$$|x| \leq s. \tag{3.20}$$

Pretpostavimo da je $r = \infty$. Kada bi vrijedilo $s \in \mathbb{R}$, postojao bi $x \in \mathbb{R}$ takav da je $s < |x|$, a za taj $x$ vrijedi (3.19) što znači da vrijedi i (3.20), a to je u kontradikciji s $s < |x|$. Prema tome, $s = \infty$.
Pretpostavimo da je $r \in \mathbb{R}$ te da je $s < r$. Tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $s < x < r$. Tada vrijedi (3.19), pa i (3.20). Kontradikcija.
U svakom slučaju vrijedi

$$r \leq s. \tag{3.21}$$

Obratno, pretpostavimo da je $s > 0$ te da je $x \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < |x| < s$. U dokazu propozicije 3.1.9 smo vidjeli da postoje $M > 0$ i $0 < q < 1$ takvi da vrijedi

$$|(n+1) \cdot a_{n+1}x^n| < M \cdot q^n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|n \cdot a_n x^{n-1}| < M \cdot q^{n-1}.$$

Kada prethodnu nejednakost pomnožimo s $\frac{|x|}{n}$ dobivamo

$$|a_n x^n| < \frac{M \cdot q^n}{q \cdot n} \cdot |x| .$$

Vađenjem n-tog korijena slijedi:

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} < \sqrt[n]{\frac{M \cdot |x|}{q \cdot n}} \cdot q. \tag{3.22}$$

Neka je $(c_n)$ niz definiran s $c_n = \sqrt[n]{\frac{M \cdot |x|}{q \cdot n}}$. Uočimo:

$$c_n = \sqrt[n]{\frac{M \cdot |x|}{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz propozicija 3.3.8, 3.3.6 i 2.3.10 zaključujemo da $c_n \to 1$. Prema (3.22) vrijedi $\sqrt[n]{|a_n x^n|} < c_n \cdot q$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Analogno kao i maloprije zaključujemo da je red $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$ konvergentan, stoga je $|x| < r$. Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < |x| < s$, vrijedi $|x| \leq r$. Kao i maloprije, zaključujemo da je

$$s \leq r. \tag{3.23}$$

Iz (3.21) i (3.23) slijedi da je

$$s = r.$$

□

**Lema 3.3.11.** *Neka je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ niz realnih brojeva takav da je red $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x_n$ konvergentan. Tada je i red $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n-1}$ konvergentan i vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1}$.*

*Dokaz.* Neka je $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x_n$ te neka je $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{n-1}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Imamo:

$$t_k = \sum_{n=1}^{k} x_{n-1} = x_0 + ... + x_{k-1} = s_{k-1}.$$

Dakle, $t_k = s_{k-1}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Znamo da niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ teži prema $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$. Dokažimo da niz $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ također teži prema $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$. Time će tvrdnja leme biti dokazana. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ takav da je

$$\left| s_k - \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right| < \varepsilon,$$

za svaki $k \geq k_0$. Uočimo da je $k_0 + 1 \in \mathbb{N}$. Neka je $k \geq k_0 + 1$. tada je $k - 1 \geq k_0$, pa je

$$\left| s_{k-1} - \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right| < \varepsilon,$$

to jest $\left| t_k - \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right| < \varepsilon$. □

**Napomena 3.3.12.** *Neka su $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ i $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} y_n$ apsolutno konvergentni redovi. Tada je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |x_n + y_n|$ također apsolutno konvergentan.*
*Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \,. \tag{3.24}$$

*Redovi $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |x_n|$ i $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |y_n|$ su konvergentni, pa je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (|x_n| + |y_n|)$ konvergentan prema propoziciji 1.3.7. Sada iz (3.24) i propozicije 1.3.11 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |x_n + y_n|$ apsolutno konvergentan, stoga je i konvergentan, pa je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (x_n + y_n)$ apsolutno konvergentan.*
*Također, iz propozicije 1.3.11 slijedi da je red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} cx_n$ apsolutno konvergentan za svaki $c \in \mathbb{R}$.*

**Lema 3.3.13.** *Neka je $\left( \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \right)_{x\in\mathbb{R}}$ red potencija te neka je $r$ radijus konvergencije ovog reda potencija. Pretpostavimo da je $r > 0$. Neka je $f : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija određena redom potencija $\left( \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \right)_{x\in\mathbb{R}}$ te neka je $f_1 : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija određena redom potencija*

$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)a_{n+1}x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *. Tada postoji funkcija* $M : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ *sa sljedećim svojstvom:*
*Za sve* $u, x, r_1 \in \mathbb{R}$ *takve da je* $|u| \leq r_1, |x| \leq r_1, 0 < r_1 < r$ *i* $u \neq x$ *vrijedi*

$$\left|\frac{f(x)-f(u)}{x-u} - f_1(u)\right| \leq M(r_1)\cdot|x-u|\,.$$

*Dokaz.* Red potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ je dobiven od reda potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)a_{n+1}x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ deriviranjem član po član. Stoga, ta dva reda potencija imaju isti radijus konvergencije. Dakle, $r$ je radijus konvergencije reda potencija $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ .
Neka je $x \in \langle -r, r\rangle$ . Tada red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$ apsolutno konvergira (propozicija 3.1.9), dakle, red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}|(n+1)(n+2)a_{n+}x^n|$ je konvergentan.
Definirajmo funkciju $M : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$,

$$M(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}|(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n|\,,$$

za svaki $x \in \langle -r, r\rangle$ .
Pretpostavimo da su $u, x, r_1 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $|u| \leq r_1, |x| \leq r_1, 0 < r_1 < r$ i $u \neq x$. Neka je $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Imamo:

$$u^k - x^k = (u-x)\left(u^{k-1} + u^{k-2}x + ... + ux^{k-2} + x^{k-1}\right),$$

pa je

$$\begin{aligned}
\left|u^k - x^k\right| &= |u-x|\left|u^{k-1} + u^{k-2}x + ... + ux^{k-2} + x^{k-1}\right| \\
&\leq |u-x|\left(\left|u^{k-1}\right| + \left|u^{k-2}x\right| + ... + \left|ux^{k-2}\right| + \left|x^{k-1}\right|\right) \\
&= |u-x|\left(|u|^{k-1} + |u|^{k-2}|x| + ... + |u||x|^{k-2} + |x|^{k-1}\right) \\
&\leq |u-x|\left(r_1^{k-1} + r_1^{k-1} + ... + r_1^{k-1}\right) \\
&= k\cdot r_1^{k-1}\cdot|u-x|\,.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\left|u^k - x^k\right| \leq k\cdot r_1^{k-1}\cdot|u-x|\,. \tag{3.25}$$

Uočimo da nejednakost (3.25) vrijedi i za $k = 1$. Dakle, (3.25) vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Koristeći (3.25) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^n - u^n}{x - u} - n \cdot u^{n-1}\right| &= \left|\left(x^{n-1} + x^{n-2}u + ... + xu^{n-2} + u^{n-1}\right) - n \cdot u^{n-1}\right| \\
&= \left|\left(x^{n-1} - u^{n-1}\right) + \left(x^{n-2}u - u^{n-1}\right) + ... + \left(xu^{n-2} - u^{n-1}\right) + \left(u^{n-1} - u^{n-1}\right)\right| \\
&\leq \left|x^{n-1} - u^{n-1}\right| + |u| \cdot \left|x^{n-2} - u^{n-2}\right| + ... + |u|^{n-2}\,|x - u| \\
&\leq (n-1) \cdot r_1^{n-2}\,|u - x| + r_1 \cdot (n-2) \cdot r_1^{n-3}\,|u - x| + ... + r_1^{n-2}\,|u - x| \\
&= |u - x| \cdot r_1^{n-2}((n-1) + (n-2) + ... + 1) \\
&= |u - x| \cdot r_1^{n-2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\left|\frac{x^n - u^n}{x - u} - n \cdot u^{n-1}\right| \leq |u - x| \cdot r_1^{n-2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}, \tag{3.26}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ (očito je da navedena nejednakost vrijedi i za $n = 1$).

Koristeći (3.26), napomenu 3.3.12, propozicije 1.3.11, 1.3.15 i 1.4.2 te lemu 3.3.11 dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)-f(u)}{x-u} - f_1(u)\right| &= \left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n}{x-u} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}u^n\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n-u^n}{x-u} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}u^n\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n-u^n}{x-u} - \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n u^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x^n-u^n}{x-u} - n\cdot u^{n-1}\right)\right| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left|\left(\frac{x^n-u^n}{x-u} - n\cdot u^{n-1}\right)\right| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, |u-x| \cdot r_1^{n-2} \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot |u-x| \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}| r_1^{n-1} n\cdot(n+1) \\
&= \frac{1}{2}\cdot |u-x| \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|\, r_1^{n-1} n\cdot(n+1) \\
&= \frac{1}{2}\cdot |u-x| \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}| r_1^{n}(n+1)\cdot(n+2) \\
&= \frac{1}{2}\cdot |u-x|\cdot M(r_1) \\
&\le |u-x|\cdot M(r_1).
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$\left|\frac{f(x)-f(u)}{x-u} - f_1(u)\right| \le |u-x|\cdot M(r_1).$$

□

**Lema 3.3.14.** *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *te neka je* $x \in \langle a, b\rangle$ *. Tada postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je*

$$\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon\rangle \subseteq \langle a, b\rangle .$$

*Dokaz.* Iz $a < x < b$ slijedi $x - a > 0$ i $b - x > 0$. Definirajmo $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$ . Tada je $\varepsilon > 0$ i $\varepsilon \leq x - a$, to jest $a \leq x - \varepsilon$ te je također $\varepsilon \leq b - x$, to jest $x + \varepsilon \leq b$.
Dakle,

$$a \leq x - \varepsilon < x + \varepsilon \leq b,$$

pa je očito $\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ . □

**Napomena 3.3.15.** *Neka je* $(x_n)$ *niz realnih brojeva. Ako* $x_n \to 0$, *onda* $|x_n| \to 0$ *prema propoziciji 1.1.32.*
*Obratno, pretpostavimo da* $|x_n| \to 0$. *Tada* $x_n \to 0$.
*Naime, neka je* $\varepsilon > 0$. *Tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi*

$$||x_n| - 0| < \varepsilon.$$

*Dakle, za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi*

$$|x_n - 0| < \varepsilon.$$

*Prema tome,* $x_n \to 0$.

**Teorem 3.3.16.** *Neka je* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *red potencija te neka je* $r$ *radijus konvergencije ovog reda potencija. Pretpostavimo da je* $r > 0$. *Neka je* $f : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ *funkcija određena redom potencija* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *te neka je* $f_1 : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ *funkcija određena redom potencija* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n\right)_{x\in\mathbb{R}}$ *. Tada je* $f$ *derivabilna funkcija te je* $f'(x) = f_1(x)$, *za svaki* $x \in \langle -r, r\rangle$ *.*

*Dokaz.* Prema lemi 3.3.13 postoji funkcija $M : \langle -r, r\rangle \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi sljedeće: za sve $u, x, r_1 \in \mathbb{R}$ takve da je $|u| \leq r_1, |x| \leq r_1, 0 < r_1 < r$ i $u \neq x$ vrijedi

$$\left|\frac{f(x) - f(u)}{x - u} - f_1(u)\right| \leq M(r_1) \cdot |x - u| .$$

Neka je $x_0 \in \langle -r, r\rangle$ .
Želimo dokazati da je $f_1(x_0)$ derivacija funkcije $f$ u točki $x_0$. U tu svrhu, dovoljno je prema

propoziciji 2.3.7 dokazati da za svaki niz realnih brojeva $(x_n)$ takav da je $x_n \in \langle -r, r\rangle \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$ vrijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f_1(x_0)$$

(uočimo da je $x_0$ akumulacijska točka od $\langle -r, r\rangle$ prema korolaru 2.2.12).
Neka je $(x_n)$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \in \langle -r, r\rangle \setminus \{x_0\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to x_0$. Iz $x_0 \in \langle -r, r\rangle$ i napomene 2.1.2 slijedi

$$|x_0| < r.$$

Odaberimo $r_1 \in \mathbb{R}$ takav da je $|x_0| < r_1 < r$. Slijedi $x_0 \in \langle -r_1, r_1\rangle$. Prema lemi 3.3.14 postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle \subseteq \langle -r_1, r_1\rangle . \tag{3.27}$$

Iz $x_n \to x_0$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle . \tag{3.28}$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Iz (3.28) i (3.27) slijedi $x_n \in \langle -r_1, r_1\rangle$, pa je $|x_n| < r_1$. Znamo da je $|x_0| < r_1 < r$ pa zaključujemo da je

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} - f_1(x_0)\right| \leq M(r_1) \cdot |x_n - x_0| . \tag{3.29}$$

Dakle, (3.29) vrijedi za svaki $n \geq n_0$.
Iz $x_n \to x_0$ slijedi $|x_n - x_0| \to 0$ prema 2.3.11 i propoziciji 1.1.32.
Iz propozicije 1.2.12 slijedi

$$M(r_1) \cdot |x_n - x_0| \to 0.$$

Prema (3.29) vrijedi

$$z_n \leq \left|\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} - f_1(x_0)\right| \leq M(r_1) \cdot |x_n - x_0| ,$$

za svaki $n \geq n_0$, pri čemu je $z_n = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Očito $z_n \to 0$, pa iz propozicije 3.3.5 slijedi

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} - f_1(x_0)\right| \to 0.$$

Iz napomene 3.3.15 slijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} - f_1(x_0) \to 0,$$

pa iz leme 2.3.11 slijedi

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f_1(x_0).$$

Zaključak: funkcija $f$ je derivabilna u točki $x_0$ i $f_1(x_0)$ je derivacija od $f$ u $x_0$. Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

# Bibliografija


[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Mardešić, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu dan je pregled osnovne teorije koja je nužna za razumijevanje konvergencije redova potencija. Obrađeni su redovi potencija te konvergencija redova potencija. Diplomski rad je podijeljen na tri poglavlja te je u svakom poglavlju, osim definicija i teorema, obrađen velik broj primjera na osnovu kojih čitatelj vrlo lako može razumijeti samu pozadinu.

# Summary

The paper presents an overview of the theoretical foundations which are crucial for comprehension of convergence of power series. Scrutinized are both the power series as well as the convergence of power series. The thesis is divided into three chapters in each of which a clear description and review is given, of not only definitions and theorems themselves, but also of a great number of examples based on which the reader could easily comprehend the core of the subject.

# Životopis

Rođena sam 23. prosinca 1994. godine u Dubrovniku. Pohađala sam Osnovnu školu Kardinala Stepinca u Neumu. Nakon završetka osnovne škole upisujem jezičnu gimnaziju u Metkoviću koju završavam 2013. godine. Iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Na istom fakultetu 2017. godine upisujem diplomski studij Matematika, smjer: nastavnički.