

Opći oblik III. Keplerovog zakona

Tamajo, Ettore

Source / Izvornik: **Matematičko fizički list, 2003, 211, 186 - 190**

Journal article, Published version

Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:244679>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

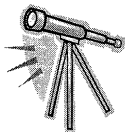
Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)

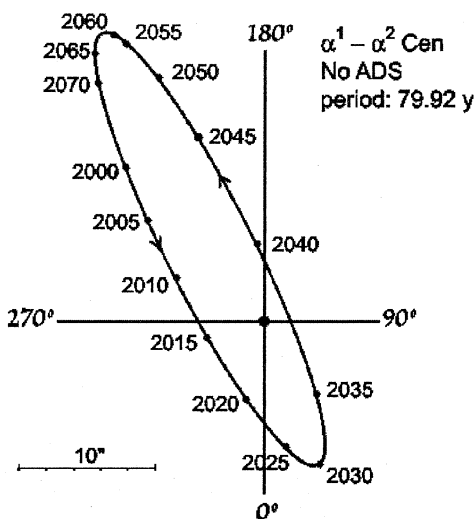




Opći oblik III. Keplerovog zakona

Ettore Tamajo¹, Zagreb

Više od polovice zvijezda u Galaksiji nalazi se u dvojnim ili višestrukim sustavima zvijezda. U dvojnem sustavu zvijezde kruže oko zajedničkog centra mase sustava. Uzmimo dvije zvijezde s masama M_1 i M_2 koje obilaze centar mase sustava C (sl. 1) u kružnim orbitama s polumjerima r_1 i r_2 .



Slika 1. Dvojni sustav α Centauri u kojem komponente kruže oko gravitacijskog središta s periodom 80 godina.

U svakoj točki staze pojedine zvijezde gravitacijska sila između zvijezda F_g jednaka je centripetalnoj sili F_c :

$$\frac{GM_1M_2}{(r_1 + r_2)^2} = M_1r_1\Omega^2, \quad (1)$$

$$\frac{GM_1M_2}{(r_1 + r_2)^2} = M_2r_2\Omega^2, \quad (2)$$

gdje je G konstanta gravitacije, a Ω kutna brzina zvijezda, i za obje mora biti jednaka. Sređene, jedn. (1) i (2) možemo napisati u obliku:

$$\frac{GM_2}{(r_1 + r_2)^2} = r_1\Omega^2, \quad (3)$$

¹ Autor je mlađi asistent u Fizičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-mail: etamajo@phy.hr

$$\frac{GM_1}{(r_1 + r_2)^2} = r_2 \Omega^2. \quad (4)$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{(r_1 + r_2)^3}. \quad (5)$$

U slučaju kružnih staza kutna brzina Ω određena je iznosom perioda kruženja P

$$\Omega = \frac{2\pi}{P}. \quad (6)$$

Uvrstimo izraz za kutnu brzinu Ω u jedn. (5) i preuredimo dobiveni izraz tako da izrazimo sumu masa zvijezda pomoću ostalih veličina

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2}. \quad (7)$$

Gornji je izraz poopćeni oblik III. Keplerovog zakona gibanja planeta. Johannes Kepler (1571. – 1630.) je 1619. godine otkrio da su kvadrati sideričkih perioda obilaska planeta oko Sunca razmjerni s kubovima velikih poluosi njihovih eliptičnih staza

$$\frac{P^2}{a_p^3} = \text{konstanta}.$$

U planetarnim sustavima, poput Sunčevog, gdje se masa planeta u odnosu na matičnu zvijezdu (Sunce) može zanemariti, vrijedi Keplerov harmonijski zakon. U slučaju dvojnih zvijezda takva aproksimacija više nije opravdana i potrebno je koristiti opći oblik III. Keplerovog zakona (jedn. 7).

Podijelivši jedn. (3) i (4) dobivamo uvjet za polumjere staza

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1} \quad (8)$$

ili

$$M_1 r_1 = M_2 r_2.$$

Drugim riječima, točka C je centar mase dvojnog sustava (vrijedi zakon poluge).

Astronomi najčešće udaljenosti planeta od zvijezda, ili zvijezda u dvojnog sustavu, izražavaju u astronomskim jedinicama AJ, orbitalni period u godinama, a mase u jedinicama Sunčeve mase M_\odot . Tada je konstanta $4\pi^2/G$ u jedn. (7) jednaka jedinici. (Provjerite za vježbu!)

Zadatak 1. Izračunajte mase zvijezda u dvojnog sustavu Cyg X-1 na osnovi podataka da je udaljenost među komponentama 0.21 AJ, a period ophoda je 5.6 d, te da se udaljenosti komponenata od centra mase odnose kao 1 : 3. Jedna od zvijezda u tom sustavu je kandidat za crnu rupu.

Rješenje. Iz uvjeta

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

i jednadžbe (8) slijedi

$$M_1 = 3M_2. \quad (10)$$

Kao drugu jednadžbu po masama (imamo dvije jednadžbe jer imamo dvije nepoznanice), iskoristit ćemo opći oblik III. Keplerovog zakona (jedn. 7),

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{P^2},$$

gdje smo s r označili udaljenost među komponentama ($r = r_1 + r_2$). Sve poznate veličine stavili smo na desnu stranu jednadžbe. Nakon uvrštenja njihovih numeričkih vrijednosti ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$) dobivamo:

$$M_1 + M_2 = 40 M_{\odot}. \quad (11)$$

Rješenje sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice (jedn. (10) i (11)) daje pojedinačne mase komponentata u dvojnog sustavu Cyg X-1:

$$M_1 = 30 M_{\odot},$$

$$M_2 = 10 M_{\odot}.$$

Cyg X-1, kao što sam naziv objekta govori, jedan je od prvih otkrivenih i vrlo snažnih izvora rendgenskog zračenja. U spektru se vidi samo komponenta manje mase, dok je komponenta s trostruko većom masom skrivena. Zbog toga je Cyg X-1 kandidat za crnu rupu.

Zadatak 2. Izvedite izraz za brzinu kruženja tijela u dvojnog sustavu ako je period ophoda sustava P , komponente sustava kruže na udaljenostima r_1 i r_2 od gravitacijskog središta, a mase su im M_1 i M_2 . Iskoristite podatke iz prethodnog zadatka i odredite kojim se brzinama kreću komponente u sustavu Cyg X-1.

Rješenje. Brzine tijela dvojnog sustava na kružnoj stazi komponentata su

$$v_1 = \frac{2r_1\pi}{P}, \quad (12)$$

$$v_2 = \frac{2r_2\pi}{P}. \quad (13)$$

Treći Keplerov zakon za dvojni sustav glasi

$$M_1 + M_2 = \frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2} \frac{4\pi^2}{G}. \quad (14)$$

Iz čega je period

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{G(M_1 + M_2)}}. \quad (15)$$

Uvrštavanjem izraza za period u izraze za brzine, dobijemo:

$$v_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r_1 + r_2}}, \quad (16)$$

$$v_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{r_1 + r_2}}. \quad (17)$$

Uvrštavanjem poznatih veličina za Cyg X-1 dobili bismo $v_1 = 72 \text{ km s}^{-1}$ i $v_2 = 216 \text{ km s}^{-1}$. Uočimo da komponenta veće mase ima manju brzinu kruženja i bliže je centru mase od komponente čija je masa manja.

Zadatak 3. Jupiter se nalazi 5.2 AJ od Sunca i ima masu od $0.001 M_{\odot}$. Koliki je polumjer Sunčeve staze oko zajedničkog centra mase zbog gravitacijske sile Jupitera? ($1 \text{ AJ} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$)

Uputa. Sunčeva staza zbog privlačenja Jupitera ima polumjer $7.8 \cdot 10^8 \text{ m}$, što je malo veće od Sunčevog polumjera i , prema tome, pojava koja se može utvrditi preciznim mjerenjima.