

Domena kompozicije funkcija

Žugec, Petar

Source / Izvornik: **Matematičko fizički list, 2014, 258, 96 - 101**

Journal article, Published version

Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:912068>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-08**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Domena kompozicije funkcija

Petar Žugec¹

Kompozicija dviju funkcija $f(x)$ i $g(x)$ – u oznaci $(f \circ g)(x)$ – definirana je s

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)). \quad (1)$$

Riječima, kompozicija je nova funkcija dobivena uvrštavanjem funkcije $g(x)$ na mjesto argumenta funkcije $f(x)$. Pri tome je poredak funkcija bitan, u što se možemo uvjeriti konstrukcijom jednostavnog primjera. Npr., neka je $f(x) = x^2$ te $g(x) = \sin x$. Tada je $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin^2 x$, dok je $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin x^2$. Ove dvije kompozicije očito nisu jednake, stoga općenito *ne* vrijedi: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Drugim riječima, kompozicije funkcija nisu komutativne. Kompozicija više funkcija – $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, ... – također je definirana:

$$(f \circ g \circ h \circ \dots)(x) \equiv f(g(h(\dots(x))))). \quad (2)$$

te je možemo shvatiti uzastopnim uvrštavanjem jedne funkcije u drugu, u točno zadanome poretku.

Domena $\mathcal{D}(f)$ funkcije $f(x)$ skup je svih vrijednosti argumenta x za koji je funkcija $f(x)$ dobro definirana, odnosno skup svih x -ova za koje funkcija $f(x)$ vraća neku vrijednost iz skupa brojeva nad kojim je definirana. Npr. domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, definirane nad skupom realnih brojeva, čini skup svih nenegativnih realnih brojeva: $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$ jer za $x < 0$ rezultat funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ nije realan broj. Primijetimo da i negativni x -ovi postaju dozvoljeni argumenti proširimo li dozvoljene vrijednosti od $f(x)$ na skup kompleksnih brojeva. Štoviše, u tom slučaju čitav skup kompleksnih brojeva postaje domenom funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, tj. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$. Stoga je pitanje skupa nad kojim je funkcija definirana od središnje važnosti pri određivanju njene domene. U ovom članku sve funkcije promatrat ćemo nad skupom realnih brojeva. U praktičnim primjenama ovakvo ograničenje domene nije naprosto proizvoljno. Na primjer, u fizici sve funkcije koje izravno opisuju neki element stvarnosti, moraju biti realne.

Kompozicije funkcija također imaju – i moraju imati – jasno definiranu domenu, pa makar ona bila prazan skup. No pri tome treba uzeti u obzir da i svaka potkompozicija cjelovite kompozicije mora biti dobro definirana. Na primjer, unutar kompozicije $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ prvo funkcija $h(x)$ mora biti dobro definirana za svaki x iz domene završne kompozicije. Zatim isto mora biti zadovoljeno za potkompoziciju $g(h(x))$ pa tek onda za cjelovitu kompoziciju $f(g(h(x)))$. Težina ovog zahtjeva postaje savršeno jasnom na primjeru kompozicije $(f \circ g)(x)$ gdje su obje potfunkcije jednake $f(x) = g(x) = 1/x$. Izravnim uvrštavanjem slijedi: $f(g(x)) = 1/(1/x) = x$ te se na prvi pogled može učiniti da je kompozicija definirana za svaki realni broj. No prisjetimo se da prvo sama funkcija $g(x) = 1/x$ mora biti definirana, a nije za $x = 0$. Stoga je rezultat kompozicije $(f \circ g)(x)$ preslikavanje $f(g(x)) = x$ koje nije definirano za $x = 0$!^{2, 3}

¹ Autor je magistar fizike na Zavodu za eksperimentalnu fiziku na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: pzugec@phy.hr

² Iako se čini da se kod $1/(1/x)$ nedefiniranosti od $1/x$ u zapisu međusobno "pokrate", takvo razmišljanje je pogrešno. Naime, kompozicije treba shvatiti kao djelovanje potfunkcija korak po korak, umjesto čitave kompozicije "odjednom". Stoga, ako je rezultat djelovanja prve funkcije u $x = 0$ neodređen – u slikovitom zapisu: $g(0) = ?$ – sljedeća funkcija u nizu ne može iz nepoznatog argumenta rekonstruirati jasnu vrijednost: $f(?) = 0$. Za pomoć u shvaćanju koliko ovo nije tek puka matematička formalnost ne treba ići dalje od kalkulatora. Kakav bi rezultat kalkulator vratio nakon unosa ovakve linije: $1/(1/0)$?

³ Svaka funkcija definirana je trima elementima: (1) domenom, (2) kodomenom, (3) pravilom preslikavanja (svojim "zapisom"). Prema tome, funkcija x i rezultat kompozicije $1/(1/x)$ nisu jednake funkcije jer im domene nisu jednake!

U ovom članku pokazat ćemo kako odrediti domene kompozicija na nekoliko složenijih primjera. Iako će ovdje izabrani primjeri uglavnom biti artifičijelni – odabrani zbog svoje matematičke privlačnosti – postupci nalaženja domena složenih funkcija svakako imaju i praktične primjene. U fizici, na primjer, kad je neki fizikalni parametar argument neke funkcije, tada domena funkcije određuje koje je vrijednosti tog parametra moguće, a koje nije ostvariti u danoj fizikalnoj situaciji.

Zadatak 1. Odredite domene kompozicija $f_1(x) = \sin x \circ \ln x$ i $f_2(x) = \ln x \circ \sin x$.

Ovaj zadatak poslužit će tek kao uvodni primjer, odnosno priprema za kasnije složenije probleme. Zadane funkcije jednake su: $f_1(x) = \sin(\ln x)$ i $f_2(x) = \ln(\sin x)$. Promotrimo prvo funkciju f_1 . Argument x isprva je ograničen domenom prirodnog logaritma: $x > 0$. Slika⁴ prirodnog logaritma čitav je skup realnih brojeva. Isto tako, domena sljedeće funkcije u nizu – $\sin(\ln x)$ – također je čitav skup realnih brojeva, stoga sinus ne postavlja dodatna ograničenja na dozvoljene vrijednosti od $\ln x$, a prema tome niti na x . Dakle, domena kompozicije f_1 određena je jedino prvim ograničenjem:

$$\mathcal{D}(f_1) = \langle 0, \infty \rangle . \quad (3)$$

Unutar kompozicije f_2 početna funkcija $\sin x$ ne postavlja nikakva ograničenja na x , osim onoga koje smo sami nametnuli: zatvorenost unutar skupa realnih brojeva: $x \in \mathbf{R}$. No sljedeća funkcija u nizu – $\ln(\sin x)$ – prihvaća jedino pozitivne vrijednosti od $\sin x$, dok se slika sinusa proteže i preko negativnih vrijednosti: $\mathcal{S}(\sin x) = [-1, 1]$. Stoga moramo postaviti primjereno ograničenje na argument prirodnog logaritma: $\sin x > 0$. Ova nejednakost zadovoljena je za x unutar svakog intervala $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$ gdje je k proizvoljan cijeli broj: $k \in \mathbf{Z}$. S obzirom da kompozicija f_2 ne postavlja daljnja ograničenja, njenu domenu zapisujemo kao uniju svih ovakvih intervala:

$$\mathcal{D}(f_2) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle . \quad (4)$$

Na ovome primjeru postalo je sasvim jasno da općenito ne samo da ne vrijedi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, već isto tako ne vrijedi niti $\mathcal{D}[(f \circ g)(x)] = \mathcal{D}[(g \circ f)(x)]$. Vrlo je lako uvjeriti se da niti slike kompozicija općenito ne zadovoljavaju $\mathcal{S}[(f \circ g)(x)] = \mathcal{S}[(g \circ f)(x)]$.

Zadatak 2. Za dani n , odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \circ \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \circ \dots \circ \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1}}^{n \text{ parova}} . \quad (5)$$

par

Čemu teži domena za $n \rightarrow \infty$?

Ovdje smo odlučili indeksirati kompoziciju indeksom n kad je u njoj n parova potfunkcija, tj. ukupno $2n$ potfunkcija. Stoga ćemo za kompozicije s neparnim brojem potfunkcija koristiti oznaku $f_{n-1/2}$. Promotrimo kompozicije za nekoliko najnižih

⁴ Slika $\mathcal{S}(f)$ funkcije f skup je svih vrijednosti koje funkcija f može poprimiti. Npr. slika funkcije $\sin x$ je interval svih realnih brojeva između -1 i 1 : $\mathcal{S}(\sin x) = [-1, 1]$.

vrijednosti indeksa. Za početni član očito vrijedi

$$f_{1/2} = \frac{1}{x-1} \quad (6)$$

te kao takav na domenu svake kasnije kompozicije u nizu postavlja ograničenje: $x \neq 1$. Zatim

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \circ f_{1/2}(x) = x - 1 \quad (7)$$

Do sada već znamo da je ova funkcija jednaka $x - 1$ samo u pojednostavnjenom zapisu, s obzirom da u točki $x = 1$ nije definirana: $\mathcal{D}(f_1) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Nadalje

$$f_{3/2}(x) = \frac{1}{x-1} \circ f_1(x) = \frac{1}{x-2}, \quad (8)$$

odakle za svaku kasniju kompoziciju, pa tako i za

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \circ f_{3/2}(x) = x - 2, \quad (9)$$

slijedi novi zahtjev: $x \neq 2$. Do sada smo domenu ograničili na: $\mathcal{D}(f_2) = \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$. Nastavimo li ovakvo određivanje uzastopnih kompozicija, vrlo brzo opazit ćemo sljedeću pravilnost⁵:

$$f_{n-1/2}(x) = \frac{1}{x-n} \quad \text{i} \quad f_n = x - n \quad (10)$$

Pri tome svaka neparna kompozicija $f_{n-1/2}$ izbacuje dodatnu točku ($x \neq n$) iz domene svih kasnijih kompozicija. Stoga je lako zaključiti da se nagomilavanjem svih ovakvih ograničenja domena kompozicije f_n svodi na:

$$\mathcal{D}(f_n) = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^n \{k\} \quad (11)$$

što u limesu $n \rightarrow \infty$ rezultira izbacivanjem čitavog skupa prirodnih brojeva:

$$\mathcal{D}(f_\infty) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}. \quad (12)$$

Zadatak 3. Slično prethodnom zadatku, za dani n odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\left(\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \right) \circ \left(\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \right) \circ \dots \circ \left(\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \right)}^{n \text{ parova}}. \quad (13)$$

par

Ovaj put redoslijed određivanja potfunkcija reguliran je pojavom novih zagrada. Rješavanjem svih zagrada možemo zapisati:

$$f_n(x) = (x-1) \circ (x-1) \circ \dots \circ (x-1) \quad (14)$$

pri čemu nijedna $x - 1$ potfunkcija nije definirana u jedinici. Sada se na prvi pogled može učiniti da $x \neq 1$ ostaje jedino ograničenje, s obzirom da nijedna potfunkcija nije osjetljiva niti u jednoj drugoj točki. No provjerimo što se događa s uzastopnim kompozicijama. Za $f_1(x) = x - 1$ već znamo da ne podnosi $x = 1$. No kod f_2 :

$$f_2(x) = (x-1) \circ f_1(x) = \underbrace{f_1(x)}_{\neq 1} - 1 \quad (15)$$

na označeno mjesto ne smije se uvrstiti vrijednost 1 jer lijeva $x - 1$ potfunkcija između dvaju znakova jednakosti nije definirana za vrijednost argumenta 1. A kako je taj

⁵ Jednom kada smo naslutili ove relacije, formalno bismo ih dokazali matematičkom indukcijom. No u ovom slučaju veze iz (10) dovoljno su jednostavne i očite pa ćemo dokaz izostaviti.

argument rezultat prethodne kompozicije, unutar f_2 slijedi sljedeći zahtjev na f_1 :

$$f_1(x) = x - 1 \neq 1 \implies x \neq 2. \quad (16)$$

Ponavljanjem ovog postupka za f_3 :

$$f_3(x) = (x - 1) \circ f_2(x) = f_2(x) - 1 \quad (17)$$

na mjesto argumenta – koje sad zauzima funkcija f_2 – ponovno ne smijemo uvrstiti jedinicu, što vodi na

$$f_2(x) = x - 2 \neq 1 \implies x \neq 3. \quad (18)$$

I ponovno možemo uočiti pravilnost⁶ prema kojoj svaka pojedina kompozicija f_n iz svoje domene izbacuje točku $x = n$, čime rješenje ovog zadatka postaje potpuno identično onome prethodnog zadatka. Ovaj rezultat nije slučajna, već je zajamčen svojstvom asocijativnosti kompozicija: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Zadatak 4. Odredite domenu kompozicije:

$$f(x) = \frac{1}{x} \circ \cos x \circ \ln x \circ \sin x. \quad (19)$$

Prva potfunkcija $\sin x$ ne postavlja nikakva ograničenja na x , dakle:

$$\mathcal{D}(\sin x) = \mathbf{R}. \quad (20)$$

Domenu sljedeće potfunkcije $\ln(\sin x)$ već smo odredili u sklopu zadatka 1:

$$\mathcal{D}(\ln(\sin x)) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi). \quad (21)$$

Nadolazeća potfunkcija $\cos(\ln(\sin x))$ ne unosi dodatne zahtjeve jer je, poput sinusa, definirana na čitavom skupu realnih brojeva te može prihvatiti bilo koju vrijednost iz slike prirodnog logaritma. Dakle:

$$\mathcal{D}(\cos(\ln(\sin x))) = \mathcal{D}(\ln(\sin x)). \quad (22)$$

Konačno, cjelokupna kompozicija $1/\cos(\ln(\sin x))$ ne trpi nulu u nazivniku, stoga uvodi sljedeće ograničenje: $\cos(\ln(\sin x)) \neq 0$, koje je potrebno prevesti u ograničenje na sam x . Funkcija $\cos y$ postiže nulu za svaki argument oblika: $y = (n + 1/2)\pi$, pri čemu je n proizvoljan cijeli broj: $n \in \mathbf{Z}$. Odavde slijedi

$$\ln(\sin x) \neq (n + 1/2)\pi \implies \sin x \neq e^{(n+1/2)\pi}; \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (23)$$

No neka od ovih ograničenja (za određene n) su suvišna jer su vrijednosti izraza $e^{(n+1/2)\pi}$ odozgo neograničene, dok sinus ionako ne može premašiti jedinicu. Prema tome, dovoljno je zadržati samo takve n za koje se ograničenje našlo unutar slike sinusa:

$$e^{(n+1/2)\pi} \leq 1 \implies (n + 1/2)\pi \leq 0. \quad (24)$$

Budući da je n cijeli broj, najveća vrijednost za koju je prethodna nejednakost zadovoljena iznosi $n = -1$. Stoga zadržavamo samo ona ograničenja za koja je $n \leq -1$. I ovakav novi skup vrijednosti možemo elegantno zapisati primijetimo li sljedeće: zahtijevati da je n iz skupa cijelih brojeva manjih ili jednakih -1 , isto je kao i zahtijevati da je $-n$ iz skupa prirodnih brojeva:

$$n \in \mathbf{Z} \quad \text{i} \quad n \leq -1 \iff -n \in \mathbf{N}. \quad (25)$$

Sada (23) možemo zapisati na ovaj način:

$$\sin x \neq e^{(-n+1/2)\pi}; \quad n \in \mathbf{N}, \quad (26)$$

te moramo odrediti sva rješenja jednadžbe $\sin x = z$, pri čemu ćemo kasnije uvrstiti $z = e^{(-n+1/2)\pi}$. Za početak, $x = \arcsin z$ svakako je jedno rješenje jednadžbe. No

⁶ Za ovaj uvid moram zahvaliti Ivici Kičiću, studentu istraživačkog smjera fizike s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

valja se prisjetiti da je sinus periodičan s periodom 2π , stoga je i svaki x oblika $x = 2k\pi + \arcsin z$ ($k \in \mathbf{Z}$) također rješenje jednadžbe $\sin x = z$. U konačnici, ne smijemo zaboraviti još jednu činjenicu: svaki brijeg sinusa – razapet između $2k\pi$ i $(2k+1)\pi$ – zrcalno je simetričan! Prema tome, ako je $x = 2k\pi + \arcsin z$ rješenje jednadžbe $\sin x = z$, tada je također i $x = (2k+1)\pi - \arcsin z$. Temeljem ovih razmatranja, iz (26) slijedi:

$$x \neq 2k\pi + \arcsin \left(e^{(-n+1/2)\pi} \right) \quad \text{i} \quad x \neq (2k+1)\pi - \arcsin \left(e^{(-n+1/2)\pi} \right); \quad n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}. \quad (27)$$

Napokon, moramo sjediniti ovaj uvjet s ograničenjem iz (21), odnosno (22). Primjećujemo da smo iz svakog intervala $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ iz (21), ograničenjem iz (27) dodatno izbacili sve točke pobrojane s n . Stoga domenu cjelokupne kompozicije $f(x) = 1/\cos(\ln(\sin x))$ zapisujemo na način:

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left((2k\pi, (2k+1)\pi) \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left\{ 2k\pi + \arcsin \left(e^{(-n+1/2)\pi} \right), \right. \right. \\ \left. \left. 2(k+1)\pi - \arcsin \left(e^{(-n+1/2)\pi} \right) \right\} \right) \quad (28)$$

Zadatak 5. Za dani $n \in \mathbf{N}$, odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\frac{1}{x+1} \circ \frac{1}{x+1} \circ \dots \circ \frac{1}{x+1}}^{n \text{ članova}} \quad (29)$$

Unutar kojeg intervala su izolirane sve točke izbačene iz domene kompozicije za $n \rightarrow \infty$?

Kao i u zadatku 1, krenut ćemo s ispisivanjem kompozicija za nekoliko prvih vrijednosti n te pokušati uočiti pravilnost, ako postoji:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x+1} \implies x_1 \neq -1 \\ f_2(x) &= \frac{1}{x+1} \circ f_1(x) = \frac{x+1}{x+2} \implies x_2 \neq -2 \\ f_3(x) &= \frac{1}{x+1} \circ f_2(x) = \frac{x+2}{2x+3} \implies x_3 \neq -\frac{3}{2} \\ f_4(x) &= \frac{1}{x+1} \circ f_3(x) = \frac{2x+3}{3x+5} \implies x_4 \neq -\frac{5}{3} \\ f_5(x) &= \frac{1}{x+1} \circ f_4(x) = \frac{3x+5}{5x+8} \implies x_5 \neq -\frac{8}{5} \end{aligned} \quad (30)$$

Index n pod x_n označava da se radi o n -toj izbačenoj točki. Obratimo pozornost na brojeve koji se pojavljuju:

$$1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Mnogi će u ovome nizu prepoznati Fibonaccijeve brojeve! Za $n > 1$, pojedini Fibonaccijev broj F_n definiran je zbrojem prethodnih dvaju, uz odgovarajuće početne

vrijednosti:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \quad \text{i} \quad F_1 = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Jednom kad smo naslutili da imamo posla s Fibonaccijevim brojevima, pažljivo namještamo indekse kako bismo rekonstruirali prvih nekoliko primjera iz (30):

$$f_n(x) = \frac{F_{n-1}x + F_n}{F_nx + F_{n+1}} \implies x_n \neq -\frac{F_{n+1}}{F_n}. \quad (32)$$

Na ovoj razini prethodno poopćenje još uvijek je samo slutnja koju tek treba dokazati. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom:

I. *Baza indukcije*: Pokazujemo da (32) vrijedi za $n = 1$:

$$f_1(x) = \frac{F_0x + F_1}{F_1x + F_2} = \frac{0 \cdot x + 1}{1 \cdot x + 1} = \frac{1}{x + 1} \implies x_1 \neq -1. \quad (33)$$

Da je ovo istina, znamo iz (30).

II. *Pretpostavka indukcije*: Pretpostavljamo da za neki $n \geq 1$ vrijedi slutnja iz (32).

III. *Korak indukcije*: Pokazujemo da ako pretpostavka indukcije vrijedi za n , tada vrijedi i za $n + 1$:

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x + 1} \circ f_n(x) = \frac{1}{x + 1} \circ \frac{F_{n-1}x + F_n}{F_nx + F_{n+1}} = \frac{F_nx + F_{n+1}}{(F_n + F_{n-1})x + (F_{n+1} + F_n)}. \quad (34)$$

Sada koristimo definicijsko svojstvo Fibonaccijevih brojeva iz (31) kako bismo članove iz nazivnika sveli na:

$$f_{n+1}(x) = \frac{F_nx + F_{n+1}}{F_{n+1}x + F_{n+2}} = \frac{F_{(n+1)-1}x + F_{(n+1)}}{F_{(n+1)}x + F_{(n+1)+1}}. \quad (35)$$

Dakle, pokazali smo da izraz za $f_{n+1}(x)$ ima isti oblik kao i izraz za $f_n(x)$. Nadalje, $x_{n+1} \neq -\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$. Time je dokaz indukcijom završen.

Konačno, zaključujemo da smo izgradnjom n -te kompozicije f_n kao u (30), iz njene domene izbacili skup od n točaka $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, stoga pišemo:

$$\mathcal{D}(f_n) = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^n \left\{ -\frac{F_{k+1}}{F_k} \right\}. \quad (36)$$

Za sve Fibonaccijeve brojeve vrijedi $F_{n+1} \geq F_n$, što je očito iz same definicije (31). Prema tome: $F_{n+1}/F_n \geq 1$ (gdje uzimamo $n \geq 1$), što za sve izbačene točke povlači: $x_n \leq -1$. S druge strane, za $n \geq 1$ također vrijedi⁷: $F_{n+1} \leq 2F_n$, odnosno $F_{n+1}/F_n \leq 2$. Odavde, pak, za sve izbačene točke vrijedi: $x_n \geq -2$. Prema tome, sve točke izbačene iz domene kompozicije $f_n(x)$ izolirane su unutar intervala $[-2, -1]$.

⁷ Uvrštavanjem izraza za $(n-1)$ -i Fibonaccijev broj ($F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$) iz definicije n -tog, u definiciju $(n+1)$ -og broja ($F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$), slijedi: $F_{n+1} = 2F_n - F_{n-2}$. Kako za svaki Fibonaccijev broj – ovdje posebno za F_{n-2} – vrijedi $F_n \geq 0$ (pri čemu one s negativnim indeksom smatramo 0), zaključujemo: $F_{n+1} \leq 2F_n$.