

# Poopćenja Cassinijevog identiteta

---

**Martinjak, Ivica**

Source / Izvornik: **Matematičko fizički list, 2015, 262, 83 - 87**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:734515>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



## Poopćenja Cassinijevog identiteta

Ivica Martinjak<sup>1</sup>

Mnogi identiteti za niz Fibonaccijevih brojeva  $(F_n)_{n \geq 0}$  imaju svoje geometrijske reprezentacije, jednako kao i kombinatorne. Tako relacija

$$1 + \sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2}, \quad (1)$$

gdje je  $n \in \mathbb{N}_0$ , očividno slijedi iz svojstava jednakostraničnog trokuta s upisanim rombovima i trapezima čija su dva kuta  $60^\circ$ . Najprije nacrtamo jednakostranični trokut s duljinama stranica jednakim 1. Zatim produljujemo dvije stranice za  $F_1 = 1$  pa novi trokut ima stranice duljine  $F_2 = 2$  budući smo slijedili rekurziju

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

koja definira Fibonaccijeve brojeve. Nadalje, u  $k$ -tom koraku produljujemo stranice za  $F_k$  i pritom trokutu upisujemo romb sa stranicama  $F_k$  i trapez s kracima  $F_k$  te osnovicama  $F_{k-1}$  i  $F_{k+1}$  [8].

Promotrimo li brojeve u Fibonaccijevom nizu,

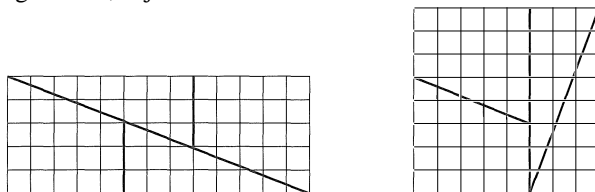
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

na način da usporedimo kvadrat nekog broja i umnožak njegovih dvaju susjeda, zapažamo da je njihova razlika uvijek 1. Tu pravilnost izražava relacija

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (3)$$

poznata pod nazivom Cassinijev identitet, a ponekad se naziva i Simsonova formula. Obično je predstavljamo kao geometrijski paradoks, uz pitanje "gdje je nestao kvadratić" (slika 1). Nacrtamo pravokutnik primjerice sa stranicama  $a = 5$ ,  $b = 13$  te podijelimo njegovu površinu najprije dijagonalom, a zatim još jednom svaki dio. U drugu ruku, kvadrat stranice  $c = 8$  također se može podijeliti na naizgled jednaka takva četiri dijela. Cassinijev identitet nam kaže da je razlika između površine pravokutnika i kvadrata uvijek 1 kada su  $a, c, b$  uzastopni Fibonaccijevi brojevi. Točnije, pravokutnik ima za 1 veću površinu za parni  $n$ , a kvadrat za neparni  $n$ .

Cassinijev identitet se može jednostavno dokazati na nekoliko načina među kojima su najpoznatiji, dokaz pomoću Binetove formule, dokaz matematičkom indukcijom, dokaz pomoću matričnog računa, bijectivni dokaz.



Slika 1. Slučaj Cassinijevog identiteta za  $n = 6$ .

<sup>1</sup> Autor je asistent s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu; e-pošta: imartinjak@phy.hr.

Dokaz indukcijom ide ovako. Za  $n = 1$  jednakost vrijedi jer je  $F_0F_2 - F_1^2 = -1 = (-1)^1$ . Nadalje treba pokazati da ako je tvrdnja valjana za  $n = k$ , onda je valjana i za  $n = k + 1$  tj. onda vrijedi  $F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ . Primjenom rekurzije (2) te pretpostavke indukcije dobivamo

$$\begin{aligned} F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k(F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}(F_k + F_{k-1}) \\ &= (-1)(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2) \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

čime je identitet dokazan.

U ovom radu ćemo prikazati nekoliko poopćenja i analogija ovog identiteta. Pritom ćemo vidjeti da osim lijepog geometrijskog i algebarskog prikaza, iz Cassinijevog identiteta izravno slijede još neki. To će se jasno vidjeti iz elementarnih dokaza u nastavku.

## Cassinijev i Catalanov identitet

Prije samih poopćenja Cassinijevog identiteta navedimo još jednu od osnovnih relacija koje vrijede za Fibonaccijeve brojeve

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, \quad (4)$$

a koja će nam poslužiti za dokazivanje Catalanovog identiteta te identiteta (7). Ova se relacija također može dokazati matematičkom indukcijom, no u nastavku je dokazujemo kombinatorno.

Promotrimo rastav prirodnog broja  $n$  na sumande koji mogu biti samo jedinice i dvojke. Primjerice, broj 4 ima pet takvih rastava, pa pišemo  $f_4 = 5$ .

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 1 + 2 + 1 \\ &= 1 + 1 + 2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Nadalje se lako uvjerimo da je  $f_5 = 8$ ,  $f_6 = 13, \dots$  odnosno da brojevi  $f_i$  rastu jednako kao Fibonaccijeve brojevi. Naime, rastav broja  $n$  počinje jedinicom ili dvojkom pa je broj svih rastava od  $n$  jednak zbroju brojeva rastava od  $n - 1$  i  $n - 2$ . Dakle,  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  s tim da ovaj niz počinje brojevima 1, 2 pa vrijedi

$$f_n = F_{n+1}, \quad n \geq -1. \quad (5)$$

Sada ćemo ovu činjenicu iskoristiti za jednostavni dokaz relacije (4). Neka je

$$m + n = a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_N$$

pri čemu brojevi  $a_i$  poprimaju vrijednosti 1 i 2. Prema definiciji, broj ovih rastava je  $f_{m+n}$ . Primijetimo da za pojedini rastav postoji ili ne postoji  $1 \leq i \leq N$  takav da je  $\sum_{j=1}^i a_j = m$ . Prvi od tih skupova ima  $f_m f_n$  elemenata, a drugi  $f_{m-1} f_{n-1}$ :

$$f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}.$$

Sada supstituiramo  $f_n = F_{n+1}$  i tvrdnja odmah slijedi.

Za  $r \in \mathbb{N}_0$ , Catalanov identitet proširuje Cassinijev na bilo koja dva Fibonaccijeva broja koja su u nizu za  $r$  mjesta udaljena od  $n$ -tog člana:

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2 \quad (6)$$

Razlika u površinama pripadnih pravokutnika i kvadrata tada je jednaka kvadratu  $r$ -tog Fibonaccijevog broja. Nadalje se pokazuje da analogna relacija vrijedi i kada broj  $n$  nije aritmetička sredina rednih brojeva drugih dvaju članova niza:

$$F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} = (-1)^nF_iF_j. \quad (7)$$

Oba ova poopćenja slijede iz identiteta (3) i (4). Dokazat ćemo općenitiji slučaj. Prema (4) slijedi

$$\begin{aligned} F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} &= (F_nF_{i+1} + F_{n-1}F_i)(F_nF_{j+1} + F_{n-1}F_j) - F_n(F_{n+i}F_{j+1} + F_{n+i-1}F_j) \\ &= F_{n-1}F_nF_{i+1}F_j + F_{n-1}^2F_iF_j - F_nF_j(F_nF_i + F_{n-1}F_{i-1}) \\ &= F_{n-1}F_nF_j(F_{i+1} - F_{i-1}) + F_iF_j(F_{n-1}^2 - F_n^2) \end{aligned}$$

Naposlijetku primjenjujemo Cassinijev identitet i time dokazujemo tvrdnju:

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_nF_jF_i + F_iF_j(F_{n-1}F_{n+1} - F_nF_{n-1} - F_n^2) &= F_{n-1}F_nF_jF_i + F_iF_j((-1)^n - F_nF_{n-1}) \\ &= (-1)^nF_iF_j. \end{aligned}$$

Napomenimo da se niz Fibonaccijevih brojeva prirodno može proširiti i na skup  $\mathbb{Z}$  te tada vrijedi

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n.$$

Dakle, Catalanov identitet daje Cassinijev za  $r = 1$ , dok se relacija (7) svodi na Catalanov identitet za  $i = -r, j = r$ , a na Cassinijev za  $i = -1, j = 1$ .

## Posljedice Cassinijevog identiteta

Dok Cassinijev identitet datira iz sredine 18. stoljeća, identitet poznat pod nazivom Gelin-Cesàro,

$$F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} - F_n^4 = -1, \quad (8)$$

je zapažen stoljeće kasnije. Taj izraz je izravna posljedica Cassinijevog identiteta. Primjenom ujedno i Catalanovog identiteta tvrdnja odmah slijedi:

$$\begin{aligned} F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} &= F_{n-1}F_{n+1}F_{n-2}F_{n+2} \\ &= ((-1)^n + F_n^2)(F_n^2 - (-1)^{n-2}) \\ &= F_n^4 - (-1)^{2n-2} \\ &= F_n^4 - 1. \end{aligned}$$

Postavlja se sada pitanje postoji li slična relacija i za kubove Fibonaccijevih brojeva. Poznata je sljedeća jednakost, koju dokazujemo na elementaran način [6]:

$$F_{n+1}F_{n+2}F_{n+6} - F_{n+3}^3 = (-1)^nF_n. \quad (9)$$

Najprije višestrukim korištenjem rekurzije (2) izrazimo  $F_{n+3}$  i  $F_{n+6}$  pomoću  $F_{n+1}$  i  $F_{n+2}$  te na desnoj strani jednakosti zamijenimo

$$(-1)^n = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2.$$

Time dobivamo

$$2F_{n+1}F_{n+2}^2 - F_{n+1}^3 - F_{n+2}^3 = (F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2)F_n.$$

Kada i desnu stranu jednakosti izrazimo pomoću  $F_{n+1}$  i  $F_{n+2}$ , dobivamo jednakost (9).

Cassinijev identitet nam pokazuje da razlika dvaju susjednih omjera Fibonaccijevih brojeva alternira te teži određenoj vrijednosti kako se  $n$  povećava,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}.$$

Ta je vrijednost upravo omjer zlatnog reza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (10)$$

Cassinijev identitet nam također daje vezu između Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva. Niz Lucasovih brojeva  $(L_n)_{n \geq 0}$  je definiran istom formulom rekurzije kao i Fibonaccijev, ali s početnim uvjetima  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$ . Iz (2) i (3) se lako dobije relacija

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n. \quad (11)$$

koja pokazuje da su brojevi  $F_n, L_n$  rješenja diofantske jednadžbe  $x^2 - 5y^2 = 4(-1)^n$ .

### Još neki identiteti

Vrijedi spomenuti da i identitet (4) ima zanimljive posljedice. Tako,

$$\begin{aligned} F_{2n} = F_{n+n} &= F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}), \end{aligned}$$

što daje

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2. \quad (12)$$

Nadalje se može pokazati da za  $F_{3n}$  vrijedi

$$F_{3n} = 3F_n F_{n+1}^2 - 3F_n^2 F_{n+1} + 2F_n^3.$$

Ako nas ova relacija asocira na binomni poučak, odnosno binomne koeficijente, to nije slučajno. Ne samo da se Fibonaccijev broj može dobiti kao suma brojeva u Pascalovom trokutu,

$$F_{n+2} = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k+1}{k},$$

nego ćemo vidjeti da postoji čitava familija identiteta (13), kojoj su prethodna dva specijalni slučajevi, i kod kojih se javljaju binomni koeficijenti.

$$F_{kn+c} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} F_{c-i} F_n^i F_{n+1}^{k-i}, \quad k, c \in \mathbb{N}_0. \quad (13)$$

Dokaz ove relacije ćemo izvesti istim pristupom kao i kod dokaza identiteta (4). Broj  $kn + c - 1$  možemo rastaviti na  $f_{kn+c-1}$  načina na sumande koji su jedinice ili dvojke. Podijelimo sada svaki od tih rastava na  $k + 1$  dijelova, tako da zbroj  $j_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  sumanada u pojedinom od prvih  $k$  podrastava bude  $n$ , a kada to nije moguće onda  $n - 1$ :

$$kn + c - 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 2}_{j_1} + \dots + \underbrace{1 + 2 + \dots + 1}_{j_k} + \underbrace{2 + 1 + \dots + 2}_{j_{k+1}}$$

$$kn + c - 1 = j_1 + j_2 + \dots + j_k + j_{k+1}$$

Sada se pojedini rastav broja  $kn + c - 1$  sastoji od

- i)  $i$  rastava broja  $n - 1$ ,
- ii)  $k - i$  rastava broja  $n$  i
- iii)  $(k + 1)$ -og rastava od  $c - 1 - i$ .

Broj tih rastava je, redom,  $f_{n-1}^i$ ,  $f_n^{k-i}$  te  $f_{c-i-1}$ . Kada još uzmemo u obzir sve moguće kombinacije redosljeda  $i$  podrastava na  $k$  mjesta, dobivamo

$$f_{kn+c-1} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_{c-i-1} f_{n-1}^i f_n^{k-i},$$

iz čega supstitucijom (2) odmah dobivamo identitet (13).

Fibonaccijski brojevi imaju i mnoga druga zanimljiva i intrigantna svojstva te su prisutni kako u matematici tako i puno šire.

**Zadatak 1.** Kolika je razlika između kvadrata  $n$ -tog trokutastog broja  $t_n$ ,  $t_n = \sum_{i=1}^n i$ , i umnoška brojeva  $t_{n-1}$  i  $t_{n+1}$ ?

**Zadatak 2.** Dokažite da za Lucasove brojeve Cassinijeva formula glasi

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1}.$$

## Literatura

- [1] B. BAKULA, Z. FRANUŠIĆ, *Matrice s Fibonaccijskim brojevima*, math.e **26**, [http://e.math.hr/broj\\_26/Bakula](http://e.math.hr/broj_26/Bakula)
- [2] A. T. BENJAMIN, J. J. QUINN, *Proofs that Really Count*, The Mathematical Association of America, Washington, 2003.
- [3] ANDREJ DUJELLA, *Fibonaccijski brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.
- [4] ANDREJ DUJELLA, *Fibonaccijski brojevi i geometrija*, Matka **14** (1995), 60–65.
- [5] LJ. KULJANAC, S. VAROŠANEC, *Dokazi bez riječi*, 64 = 65 i zlatni rez, math.e **8**, <http://e.math.hr/old/64je65/index.html>
- [6] R. S. MELHAM, *A Fibonacci Identity in the Spirit of Simson and Gelin-Cesàro*, Fibonacci Quart. **41** (2) (2003), 142–143.
- [7] DARKO VELJAN, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.
- [8] H. R. WALSER, *Proof Without Words: Fibonacci Trapezoids*, Math. Mag. **84** (2011), 295.

\*\*\*

Čestit Božić i sretnu  
novu 2016. godinu  
želi Vam uredništvo  
MFL-a

