

# Diskontinuirana Galerkinova metoda jednadžbe konvekcije difuzije

---

**Bošnjak, Domagoj**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:699001>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-28**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Domagoj Bošnjak

**DISKONTINUIRANA GALERKINOVA  
METODA JEDNADŽBE KONVEKCIJE  
DIFUZIJE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc Mladen Jurak

Zagreb, Rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Diskontinuirana Galerkinova metoda jednadžbe konvekcije difuzije</b>	<b>3</b>
1.1 Skalarna nestacionarna jednadžba konvekcije difuzije . . . . .	3
1.2 Diskretizacija . . . . .	5
1.3 Apstraktna ocjena greške . . . . .	12
1.3.1 Konzistencija konveksijske forme u slučaju Dirichletovih rubnih uvjeta . . . . .	13
1.3.2 Konzistencija konveksijske forme u slučaju pomiješanih rubnih uvjeta	14
1.3.3 Procjena greške metode linija . . . . .	16
1.4 Ocjena greške u terminima finoće mreže $h$ . . . . .	17
1.5 Jednolika ocjena greške obzirom na difuzijski koeficijent . . . . .	19
1.5.1 Nепrekidni problem . . . . .	19
1.5.2 Diskretizacija problema . . . . .	21
1.5.3 Procjena greške . . . . .	24
<b>2 Numerička rješenja</b>	<b>29</b>
2.1 Općenito o <i>DUNE</i> radnoj okolini . . . . .	29
2.2 Ilustracije simulacija . . . . .	32
<b>Bibliografija</b>	<b>39</b>

# Uvod

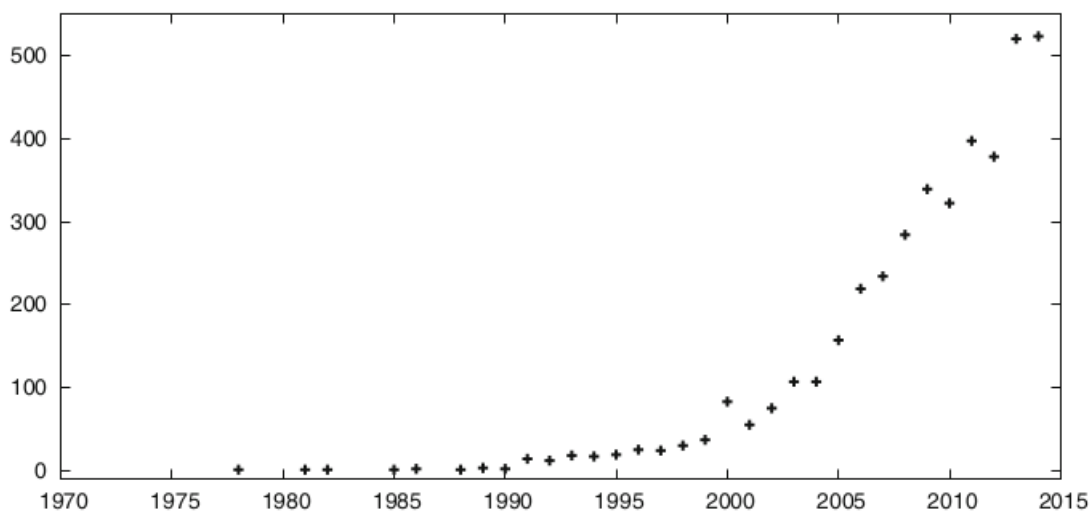
Analiziranje jednadžbe konvekcije difuzije je prisutno i u teoretskim i u primijenjenim istraživanjima. Mnogi prirodni procesi i pojave iz područja dinamike fluida, hidrologije, toka poroznih sredina, financijskih analiza, pa čak i računalnog vida se mogu modelirati jednadžbom konvekcije difuzije, ali do rješenja iste analitičkim putem često ne možemo doći. To je standardna značajka (sustava) parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Iz tog razloga su razvijene razne numeričke metode u svrhu pronalaska numeričkog rješenja koje je aproksimacija egzaktnog, do na neku grešku. Osnovne dvije razvijene tehnike su *metoda konačnih elemenata* i *metoda konačnih volumena*:

- *metoda konačnih elemenata*(MKE) se temelji na aproksimaciji nepoznate funkcije sa po dijelovima neprekidnim polinomima, obično nižih stupnjeva i najkorisnija je kod primjera eliptičkih i paraboličkih jednadžbi, tj. *difuzijskih* problema,
- *metoda konačnih volumena*(MKV) se temelji na aproksimaciji nepoznate funkcije sa po dijelovima konstantnim funkcijama i najkorisnija je kod primjera hiperboličkih ili *konveksijskih* jednadžbi te jednadžbi koje opisuju tok fluida.

Kao i uvijek, svaka metoda ima svoje prednosti i mane. Primjeri kao što su perturbacije, nelinearni zakoni sačuvanja, kompresibilni tokovi i sl. imaju rješenja koja sadrže nagle promjene, tj. ekstremne gradijente ili pak prekide. Aproksimativna rješenja dobivena sa konačnim elementima zbog toga pate od tzv. *Gibsonovog fenomena*, odnosno oscilacija. Također, aproksimirati prekidnu funkciju sa neprekidnim se ne čini kao prirodan odabir. S tom činjenicom se mogu iskoristiti konačni volumeni jer su funkcije koje opisuju egzaktno rješenje prekidne na granicama susjednih elemenata diskretizirane domene. Problem je pak što volumeni imaju, u pravilu, niži red točnosti.

Prekidna ili diskontinuirana Galerkinova metoda(DGM) je zapravo kombinacija prethodnih dviju metoda. Ona uključuje značajke metode konačnih elemenata i volumena jer daje aproksimativno rješenje visoke preciznosti i to na prirodan način. Poput metode konačnih volumena ne sadrži uvjet neprekidnosti aproksimativnih funkcija na granici susjednih elemenata diskretizirane domene. Preciznost aproksimacije se dobije korištenjem polinoma viših stupnjeva, slično kao u metodi konačnih elemenata, dok prekidnost utječe

na fleksibilnost metode, posebno u situacijama u kojima tražene funkcije imaju velike gradijente ili pak prekide. Numerička rješenja PDJ-a koja koriste DGM su se krenule razvijati 70-ih godina prošlog stoljeća. Od tada, više od 10 različitih varijanti metode su razvijene. Slika 0.1 pokazuje porast objavljenih zapisa o DGM-u kroz taj period.



Slika 0.1: Broj članaka u bazi podataka World of Web asocijacije pod ključnim riječima *discontinuous Galerkin* kroz vrijeme.

U ovom radu se opisuje navedena metoda primijenjena na linearnoj nestacionarnoj jednažbi konvekcije difuzije. U prvom dijelu se opisuje inicijalno-rubna zadaća i pretpostavke na involvirane objekte. U drugoj sekciji se opisuje proces diskretizacije domene i involviranih funkcija u cilju pretvaranja diferencijalne jednažbe u sustav algebarskih jednažbi koji je tada spreman za manipulaciju unutar računala. Poslije toga se izlažu ocjene greške metode u nekim varijantama te se uspoređuju rezultati numeričkih rješenja DGM-a i MKE-a dobivenih implementacijom u *DUNE* radnoj okolini.

# Poglavlje 1

## Diskontinuirana Galerkinova metoda jednadžbe konvekcije difuzije

### 1.1 Skalarna nestacionarna jednadžba konvekcije difuzije

Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  poliedarska domena sa Lipschitzovim rubom:

$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ ,  $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$  i  $T > 0$ . Pretpostavljamo da je površina ruba pozitivna te označavamo  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ .

Zanima nas sljedeći općeniti nestacionarni problem konvekcije difuzije sa pomiješanim Dirichletovim i Neumannovim rubnim uvjetima:

Potrebno je pronaći funkciju  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  tako da vrijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^d \frac{\partial f_s(u)}{\partial x_s} = \epsilon \Delta u + g \quad \text{u } Q_T, \quad (1.1.1)$$

$$u = u_D \quad \text{na } \partial\Omega_D \times (0, T), \quad (1.1.2)$$

$$\epsilon \mathbf{n} \cdot \nabla u = g_N \quad \text{na } \partial\Omega_N \times (0, T), \quad (1.1.3)$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{u } \Omega. \quad (1.1.4)$$

Nadalje, pretpostavljamo da podaci zadovoljavaju:

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d), f_s \in C^1(\mathbb{R}), f_s \text{ su ograničene i } f_s(0) = 0, s = 1, \dots, d. \quad (1.1.5)$$

$$\epsilon > 0, \quad (1.1.6)$$

$$g \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (1.1.7)$$

$$u_D \text{ trag od } u^* \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \text{ na } \partial\Omega_D \times (0, T), \quad (1.1.8)$$

$$g_N \in C([0, T]; L^2(\partial\Omega_N)), \quad (1.1.9)$$

$$u^0 \in L^2(\Omega). \quad (1.1.10)$$

Konstanta  $\epsilon$  je *difuzijska konstanta*,  $f_s$ ,  $s = 1, \dots, d$ , su *(ne)linarni konvekcijski fluksovi (tokovi)* i  $g$  predstavlja *izvor/ponor*. Slijedi da pretpostavka  $f_s(0) = 0$  nije ograničavajuća. Naime, ako  $u$  zadovoljava 1.1.1 onda također zadovoljava

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^d \frac{\partial(f_s(u) - f_s(0))}{\partial x_s} = \epsilon \Delta u + g$$

i novi konvektivni fluksovi  $\tilde{f}_s(u) := f_s(u) - f_s(0)$ ,  $s = 1, \dots, d$  zadovoljavaju 1.1.5. Napomenimo da se jednažba 1.1.1 ponekad zapisuje i u sljedećem obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = \epsilon \Delta u + g$$

gdje je  $\mathbf{v}$  *brzina konvekcije*; ukoliko je brzina konstantna, npr.  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , govorimo o *linear-noj jednažbi konvekcije difuzije*. Suprotno, za npr.  $\vec{v} = \begin{bmatrix} x^2 \\ 2y \end{bmatrix}$ , jednažba je *nelinearna*.

Generalniji oblik su tzv. *jednažbe konvekcije-difuzije-reakcije* gdje još postoji član bez derivacije  $c(x)u$ , koji može predstavljati neku kemijsku reakciju.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u + cu = \epsilon \Delta u + g$$

Definiramo poseban prostor funkcija,

$$H_{0D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega_D} = 0\},$$

zajedno sa sljedećim formama:

$$(u, v) = (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx, \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

$$a(u, v) = \epsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{s=1}^d \frac{\partial f_s(u)}{\partial x_s} v \, dx, \quad u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad v \in L^2(\Omega)$$



$$(u, v)_N = \int_{\partial\Omega_N} uv \, dS, \quad u, v \in L^2(\partial\Omega_N)$$

**Definicija 1.1.1** Funkciju  $u$  zovemo *slabim rješenjem* zadaće 1.1 ako zadovoljava uvjete

$$u - u^* \in L^2(0, T; H_{0D}^1(\Omega)), \quad u \in L^\infty(Q_T) \quad (1.1.11)$$

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + b(u(t), v) + a(u(t), v) = (g(t), v) + (g_N(t), v)_N, \quad \forall v \in H_{0D}^1(\Omega) \quad (1.1.12)$$

$$u(0) = u^0, \quad \text{na } \Omega \quad (1.1.13)$$

Ovdje smo sa  $u(t)$  označili funkciju na  $\Omega$  tako da je  $u(t)(x) = u(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ . Nadalje, za funkciju  $u$  koja zadovoljava 1.1.11 i 1.1.12 vrijedi i  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  pa uvjet 1.1.13 ima smisla i slijedi da postoji jedinstveno rješenje od 1.1.11–1.1.13.

Također zadovoljava uvjet  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T)$ . Tada se uvjet 1.1.12 može zapisati kao

$$\left( \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right) + b(u(t), v) + a(u(t), v) = (g(t), v) + (g_N(t), v)_N$$

Kažemo da je  $u$  koje zadovoljava 1.1.11–1.1.13 *jako rješenje* ili *rješenje u klasičnom smislu* ako je

$$u \in L^2([0, T]; H^2(\Omega)) \ \&\& \ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H^1(\Omega)) \quad (1.1.14)$$

Može se pokazati da jako rješenje  $u$  zadovoljava 1.1 s.s. po točkama i da je  $u \in C([0, T]; H^1(\Omega))$

## 1.2 Diskretizacija

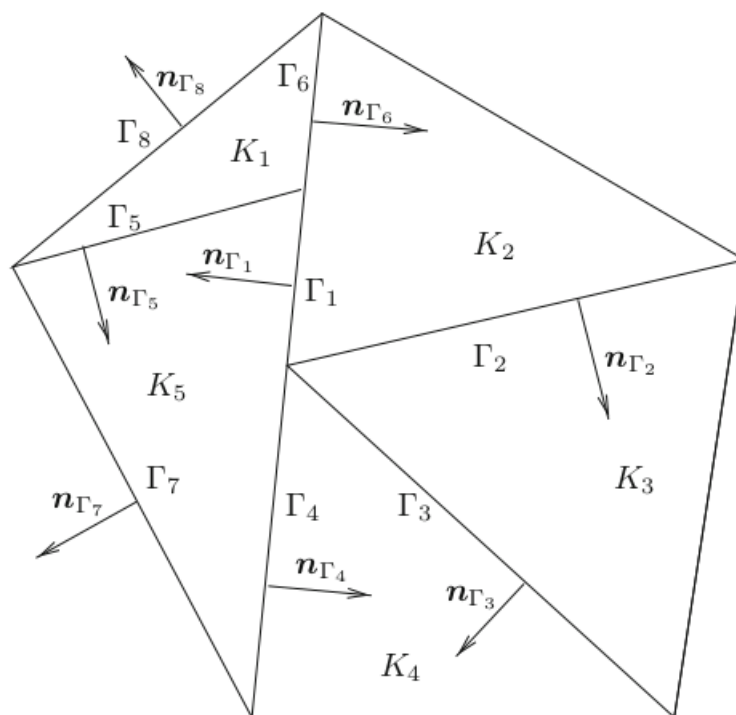
Označimo sa  $\mathcal{T}_h$  particiju zatvarača  $\bar{\Omega}$  domene  $\Omega$  na konačno mnogo  $d$ -dimenzionalnih jednostavnih podskupova  $K$  čiji su presjeci interiora prazni te za koje vrijedi:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

Jednostavni podskupovi koji se koriste kao elementi u dvije prostorne dimenzije su trokuti i četverokuti, a u tri prostorne dimenzije koristimo tetraedre, kvadre i piramide. Općenito pretpostavljamo da su elementi mreže *poliedri* premda se ponekad koriste i elementi sa zakrivljenim stranicama. Parametar  $h > 0$  predstavlja *finoću mreže* i definira se kao *dijametar najvećeg elementa u mreži*.

Za dva elementa mreže  $K, K' \in \mathcal{T}_h$  kažemo da su *susjedni elementi* ili samo *susjedni* ako skup  $\partial K \cap \partial K'$  ima pozitivnu  $(d-1)$ -dimenzionalnu mjeru. Nadalje, kaže se da je  $\Gamma \subseteq K$  *lice* elementa  $K$ , ako je maksimalni povezani otvoreni podskup skupa  $\partial K \cap \partial K'$  ili  $\partial K \cap \partial\Omega_D$  ili

$\partial K \cap \partial\Omega_N$ .  $|\Gamma|$  označava  $(d-1)$ -dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru od  $\Gamma$ , odnosno to su duljina stranice i površina stranice u 2D i 3D slučaju, respektivno. Primjer jedne triangulacije domene je dan na slici 1.1



Slika 1.1: Elementi  $K_l$ ,  $l = 1, \dots, 5$  sa licima  $\Gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, 8$  sa pripadajućim normalama  $\mathbf{n}_{\Gamma_l}$

U daljnjim analizama će biti korisno uvesti još neke skupove, npr. skup svih *graničnih lica*:

$$\mathcal{T}_h^B = \{\Gamma \in \mathcal{T}_h : \Gamma \subseteq \partial\Omega\}$$

koji se prirodno može prikazati kao unija sljedeća dva disjunktna skupa.

*Dirichletova granična lica*

$$\mathcal{T}_h^D = \{\Gamma \in \mathcal{T}_h : \Gamma \subseteq \partial\Omega_D\}$$

*Neumannova granična lica*

$$\mathcal{T}_h^N = \{\Gamma \in \mathcal{T}_h : \Gamma \subseteq \partial\Omega_N\}$$

Također se uvodi i skup svih *unutarnjih lica*:

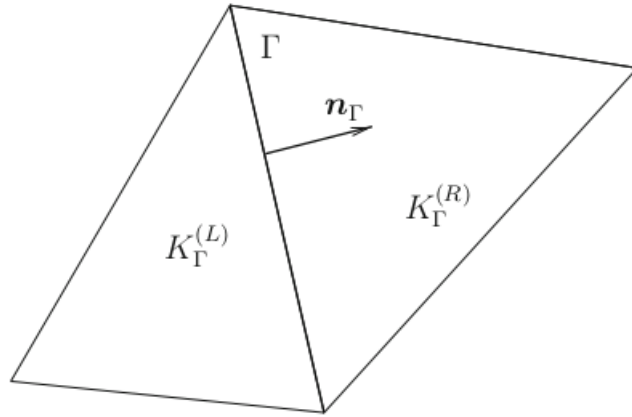
$$\mathcal{T}_h^I = \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_h^B$$

Iz svega navedenoga odmah slijede jednakosti:  $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^I \cup \mathcal{T}_h^D \cup \mathcal{T}_h^N$  i  $\mathcal{T}_h^B = \mathcal{T}_h^D \cup \mathcal{T}_h^N$ . Radi lakšeg zapisivanja se ponekad koristi:

$$\mathcal{T}_h^{ID} = \mathcal{T}_h^I \cup \mathcal{T}_h^D$$

Za svaki se  $\Gamma \in \mathcal{T}_h$  definira vanjska normala  $\mathbf{n}_\Gamma$ . Podrazumijeva se da je smjer vanjske normale na elementu iz  $\mathcal{T}_h^B$  jednak onom na rubu domene  $\partial\Omega$ . Za svaki  $\Gamma \in \mathcal{T}_h^I$  orijentacija vanjske normale  $\mathbf{n}_\Gamma$  je proizvoljna, ali fiksna.

Za  $\Gamma \in \mathcal{T}_h^I$  postoje dva susjedna elementa  $K_\Gamma^{(L)}$  i  $K_\Gamma^{(R)}$  tako da je  $\Gamma \subseteq K_\Gamma^{(L)} \cap K_\Gamma^{(R)}$ , tj. susjedni elementi imaju zajednički brid. Tada je dogovor da je normala  $\mathbf{n}_\Gamma$  vanjska za  $K_\Gamma^{(L)}$ , odnosno unutarnja za  $K_\Gamma^{(R)}$ , prikazano na slici 1.2



Slika 1.2: Konvencija orijentacije vanjske normale na zajednički brid

Prekidna Galerkinova metoda koristi polinomijalne aproksimacije koje nisu neprekidne na unutarnjim licima. Ovo motivira uvođenje tzv. *polomljenih Soboljevjevih prostora* nad mrežom  $\mathcal{T}_h$ :

**Definicija 1.2.1** Za svaki  $k \in \mathbb{N}$  *polomljeni Soboljevjev prostor* je dan sa:

$$H^k(\Omega, \mathcal{T}_h) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^k(\Omega) \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

Očito, da općenito  $H^k(\Omega, \mathcal{T}_h) \not\subseteq H^k(\Omega)$ .

Za  $v \in H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)$  je definirana norma:

$$\|v\|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^k(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

i polunorma

$$|v|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^k(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Uvedimo još neke oznake koje ćemo koristiti u daljnjim analizama. Neka je  $\Gamma \in \mathcal{T}_h^I$  i  $K_\Gamma^{(L)}$  i  $K_\Gamma^{(R)}$  susjedni, tj.  $\Gamma \subseteq K_\Gamma^{(L)} \cap K_\Gamma^{(R)}$ . Za  $v \in H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)$  označavamo:

$$\begin{aligned} v_\Gamma^{(L)} &= \text{trag od } v|_{K_\Gamma^{(L)}} \text{ na } \Gamma, \\ v_\Gamma^{(R)} &= \text{trag od } v|_{K_\Gamma^{(R)}} \text{ na } \Gamma, \\ \langle v \rangle_\Gamma &= \frac{1}{2} (v_\Gamma^{(L)} + v_\Gamma^{(R)}) \text{ (srednja vrijednost tragova od } v \text{ na } \Gamma), \\ [v]_\Gamma &= v_\Gamma^{(L)} - v_\Gamma^{(R)} \text{ (skok od } v \text{ na } \Gamma). \end{aligned}$$

Uz napomenu da vrijednost  $[v]_\Gamma$  ovisi o orijentaciji normale  $\mathbf{n}_\Gamma$ .

Nadalje, neka je  $\Gamma \in \mathcal{T}_h^B$  i  $K_\Gamma^{(L)} \in \mathcal{T}_h$  takav da je  $\Gamma \subseteq \partial K_\Gamma^{(L)} \cap \partial\Omega$ , tada za  $v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  uvodimo

$$\begin{aligned} v_\Gamma^{(L)} &= \text{trag od } v|_{K_\Gamma^{(L)}} \text{ na } \Gamma, \\ \langle v \rangle_\Gamma &= [v]_\Gamma = v_\Gamma^{(L)}. \end{aligned}$$

Sa  $v_\Gamma^{(R)}$  se formalno može označiti vanjski trag od  $v$  na  $\Gamma$  dan ili sa rubnim uvjetom iz zadaće ili ekstrapolacijom iz nutrine domene  $\Omega$ .

Uvedimo sada jedan konačnodimenzionalni podskup polomljenog Soboljevjevog prostora  $H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)$  gdje će se nalaziti naše aproksimativno rješenje. Neka je  $p \geq 0$ , prostor *prekidnih po dijelovim polinomijalnih funkcija* je dan sa

$$S_{hp} = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_p(K) \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

gdje je  $P_p(K)$  prostor polinoma nad  $K$  stupnja manjeg ili jednakog  $p$ ,  $p$  se još naziva i *stupanj polinomijalne aproksimacije*. Očito je da je  $S_{hp} \subseteq H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)$  i njegova dimenzija je  $\dim S_{hp} < \infty$ .

Neka je  $u$  iz 1.1.14 i pomnožimo 1.1.1 sa proizvoljnom funkcijom  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ . Nakon integriranja po svakom elementu iz  $\mathcal{T}_h$  i primjenom Gaussovog teorema slijedi jednakost:

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\partial u(t)}{\partial t} v \, dx + \int_{\partial K} \sum_{s=1}^d f_s(u(t)) n_s v \, dS - \int_K \sum_{s=1}^d f_s(u(t)) \frac{\partial v}{\partial x_s} \, dx + \\ \epsilon \int_K \nabla u(t) \nabla v \, dx - \epsilon \int_{\partial K} (\mathbf{n} \cdot \nabla u(t)) v \, dS = \int_K g \, dx \end{aligned}$$

Ovdje je  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$  vanjska normala u točkama ruba domene  $\partial\Omega$ . Sumirajući 1.2.1 po svim  $K \in \mathcal{T}_h$  dobivamo sljedeći izraz:

$$\left( \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right) + A_h(u(t), v) + \tilde{b}(u(t), v) = l_h(v)(t), \quad (1.2.1)$$

gdje su:

$$A_h(w, v) = \epsilon a_h(w, v) + \epsilon J_h^\sigma(w, v), \quad (1.2.2)$$

$$a_h(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u \nabla v dx - \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^{ID}} \int_{K \in \mathcal{T}_h} (\langle \nabla u \rangle) \cdot \mathbf{n} [v] + \Theta \langle \nabla v \rangle \cdot \mathbf{n} [u] dS, \quad (1.2.3)$$

$$J_h^\sigma(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_\Gamma \sigma [u] [v] dS, \quad (1.2.4)$$

$$\tilde{b}_h(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\partial K} \sum_{s=1}^d f_s(u(t)) n_s v dS - \int_K \sum_{s=1}^d f_s(u(t)) \frac{\partial v}{x_s} dx \right\}, \quad (1.2.5)$$

$$l_h(v)(t) = (g(t), v) + (g_N(t), v)_N + \epsilon \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^D} \int_\Gamma ((\sigma v - \Theta \langle \nabla v \cdot \mathbf{n} \rangle) u_D(t)) dS. \quad (1.2.6)$$

Ovdje se  $a_h$  zove *difuzijska forma*, a  $J_h^\sigma$  *unutrašnja-rubna kaznena forma*. *Kaznena (penalizacijska) težina*  $\sigma$  je definirana kao:

$$\sigma|_\Gamma = \sigma_\Gamma = \frac{C_w}{h_\Gamma}$$

gdje je  $C_w > 0$  povoljno odabrana konstanta, a  $h_\Gamma$  mjera brida  $\Gamma$ .  $\tilde{b}_h$  odgovara konvekcij-skim terminima. Ovisno o parametru  $\Theta$ , možemo promatrati 3 varijante metode:

- $\Theta = -1$  *nesimetrična unutrašnja penalizacija Galerkina* (engl. *nonsymmetric interior penalty Galerkin (NIPG)*)
- $\Theta = 0$  *nepotpuna unutrašnja penalizacija Galerkina* (engl. *incomplete interior penalty Galerkin (IIPG)*)
- $\Theta = 1$  *simetrična unutrašnja penalizacija Galerkina* (engl. *symmetric interior penalty Galerkin (SIPG)*)

U nastavku se okrećemo diskretizaciji konvekcij-skih dijelova jednadžbe reprezentirani simbolom  $\tilde{b}_h$ . Integral  $\int_{\partial K} \sum_{s=1}^d f_s(u(t)) n_s v dS$  ćemo zapisati kao  $\int_\Gamma \sum_{s=1}^d f_s(u(t)) n_s v dS$  koji se diskretizira uz pomoć tzv. *numeričkog fluksa*  $H(u, w, \mathbf{n})$ :

$$\int_\Gamma \sum_{s=1}^d f_s(u(t)) n_s v dS \approx \int_\Gamma H(u_\Gamma^{(L)}, u_\Gamma^{(R)}, \mathbf{n}) v_\Gamma^{(L)} dS, \quad \Gamma \in \mathcal{T}_h. \quad (1.2.7)$$

Ovdje je  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  *prikladno* definirana funkcija (svaka definicija nudi novi primjer diskretizacije termina konvekcije) a  $B_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{n}\| = 1\}$  sfera u  $\mathbb{R}^d$ . Sada pokazujemo različite varijante numeričkog fluksa:

- Najjednostavniji primjer je *centralni numerički fluks*

$$H(v_1, v_2, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d f_s\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)n_s, \quad H(v_1, v_2, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d \frac{f_s(v_1) + f_s(v_2)}{2}n_s.$$

- U najviše primjena koristi se *decentrirani numerički fluks*, npr.

$$H(u_1, u_2, \mathbf{n}) = \begin{cases} \sum_{s=1}^d f_s(u_1)n_s, & \text{za } P > 0 \\ \sum_{s=1}^d f_s(u_2)n_s, & \text{za } P \leq 0 \end{cases} \quad \text{gdje je } P = \sum_{s=1}^d f'_s\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)n_s \quad (1.2.8)$$

- ili pak *Lax-Friedrichs numerički fluks*

$$H(v_1, v_2, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d \frac{f_s(v_1) + f_s(v_2)}{2}n_s - \lambda|v_1 - v_2|, \quad \text{gdje je } \lambda > 0 \text{ prikladno odabrana.}$$

Za  $\Gamma \in \mathcal{T}_h^B$  nije baš jasno što bi značio izraz  $u_\Gamma^{(R)}$ . Njega možemo dobiti ekstrapolacijom podataka iz unutrašnjosti domene i jednostavno definirati:

$$u_\Gamma^{(R)} := u_\Gamma^{(L)}, \quad \Gamma \in \mathcal{T}_\Gamma^B.$$

U teorijskim razmatranjima, prirodno je staviti sljedeće nužne uvjete na numerički fluks:

- *neprekidnost*:  $H(u, v, \mathbf{n})$  je *Lipschitz-neprekidna* s obzirom na  $u, v$ : postoji konstanta  $L_H > 0$  tako da je:

$$|H(u, v, \mathbf{n}) - H(u^*, v^*, \mathbf{n})| \leq L_H(|u - u^*| + |v - v^*|), \quad u, v, u^*, v^* \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in B_1 \quad (1.2.9)$$

- *konzistencija*:

$$H(u, u, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d f_s(u)n_s, \quad u \in \mathbb{R}, \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in B_1 \quad (1.2.10)$$

- *konzervativnost:*

$$H(u, v, \mathbf{n}) = -H(u, v, -\mathbf{n}), \quad u \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in B_1. \quad (1.2.11)$$

Iz uvjeta 1.2.9 i 1.2.10 slijedi da su funkcije  $f_s$ ,  $s = 1, \dots, d$  Lipschitz neprekidne sa Lipschitzovom konstantom  $L_f = 2L_H$ . Iz 1.1.5 i 1.2.10 slijedi da je

$$H(0, 0, \mathbf{n}) = 0, \quad \forall \mathbf{n} \in B_1$$

Koristeći konzervativnost numeričkog fluksa 1.2.11 slijedi da je

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\Gamma \subseteq \partial K, \Gamma \in \mathcal{T}_h} \int_{\Gamma} H(u_{\Gamma}^{(L)}, u_{\Gamma}^{(R)}, \mathbf{n}) v_{\Gamma}^{(L)} dS = \\ & = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^I} H(u_{\Gamma}^{(L)}, u_{\Gamma}^{(R)}, \mathbf{n}) (v_{\Gamma}^{(L)} - v_{\Gamma}^{(R)}) dS + \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^B} \int_{\Gamma} H(u_{\Gamma}^{(L)}, u_{\Gamma}^{(R)}, \mathbf{n}) v_{\Gamma}^{(L)} dS \\ & = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h} H(u_{\Gamma}^{(L)}, u_{\Gamma}^{(R)}, \mathbf{n}) [v] dS \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Sada, koristeći 1.2.7 i 1.2.12 izvodimo *konvekcijsku formu*  $b_h(u, v)$  koja aproksimira  $\tilde{b}_h(u, v)$ :

$$b_h(u, v) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h} \int_{\Gamma} H(u_{\Gamma}^{(L)}, u_{\Gamma}^{(R)}, \mathbf{n}) [v] dS - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f}(u) \cdot \nabla v dx, \quad (1.2.13)$$

$$u, v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h), \quad u \in L^\infty(\Omega)$$

Po definiciji 1.2.13, 1.2.12 i 1.2.5 slijedi jednakost:

$$b_h(u, v) = \tilde{b}_h(u, v), \quad \forall u \in H^2(\Omega) \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$$

**Definicija 1.2.2** Kažemo da je  $u_h : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  *poludiskretno aproksimativno rješenje* ako zadovoljava sljedeće uvjete:

$$u_h \in C^1([0, T]; S_{hp}) \quad (1.2.14)$$

$$\frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v_h + A_h(u_h(t), v_h) + b_h(u_h(t), v_h) = l_h(v_h)(t), \quad \forall v_h \in S_{hp}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.2.15)$$

$$(u_h(0), v_h) = (u^0, v_h) \quad (1.2.16)$$

Može se primijetiti da se početni uvjet može zapisati kao  $u_h(0) = \Pi_{hp} u^0$ , gdje je  $\Pi_{hp} L^2(\Omega)$ -projekcija na prostor  $S_{hp}$ .

Gore opisani diskretni problem je ekvivalentan inicijalnoj zadaći sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Posebno, neka je  $\{\phi_i : i = 1, \dots, N_h\}$  baza prostora  $S_{hp}$ , gdje je  $N_h = \dim S_{hp}$ . Aproksimativno rješenje  $u_h$  tražimo u obliku

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u^j(t) \phi_j(x) \quad (1.2.17)$$

gdje su  $u^j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, N_h$  nepoznate funkcije. Zbog jednostavnosti zapisa stavljamo:

$$B_h(u_h, v_h) = l_h(v_h) - A_h(u_h, v_h) - b_h(u_h, v_h), \quad u_h, v_h \in S_{hp}$$

Zamjenom 1.2.17 u gornji izraz i substitucijom  $v_h := \phi_i$  slijedi identitet:

$$\sum_{j=1}^{N_h} \frac{du^j(t)}{dt} (\phi_j, \phi_i) = B_h \left( \sum_{j=1}^{N_h} u^j(t) \phi_j, \phi_i \right), \quad i = 1, \dots, N_h$$

što predstavlja sistem običnih diferencijalnih jednadžbi za nepoznate funkcije  $u^j$ ,  $j = 1, \dots, N_h$ . Ova opisana tehnika se još ponekad zove i *metoda linija*.

Uzimajući u obzir da egzaktno rješenje  $u$  sa svojstvom 1.1.14 zadovoljava  $[u]_{\Gamma} = 0$  za  $\Gamma \in \mathcal{T}_h^I$ ,  $u|_{\partial\Omega_D \times (0, T)} = u_D$  zajedno sa uvjetima 1.2.13 i 1.2.1 zaključujemo da  $u$  također zadovoljava *identitet konzistencije*:

$$\left( \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v_h \right) + A_h(u(t), v_h) + b_h(u(t), v_h) = l_h(v_h)(t), \quad \forall v_h \in S_{hp}, \quad \text{s.s. } t \in (0, T) \quad (1.2.18)$$

To svojstvo će se koristiti u danljnim analizama greške metode.

### 1.3 Apstraktna ocjena greške

U ovoj sekciji se analizira ponašanje greške metode 1.2.15. U analizi greške sljedeće pretpostavke su uzete da vrijede:

$$\text{Pretpostavke} \quad (1.3.1)$$

- Pretpostavke 1.1.5 nad podacima u početnoj zadaći 1.1.1.
- Pretpostavke 1.2.9-1.2.11 na numerički fluks  $H$ .
- $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, \bar{h})}$  je sistem triangulacije domene  $\Omega$  koji zadovoljava:



i. *regularnost oblika*-postoji pozitivna konstanta  $C_R$  tako da je ispunjeno

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_R, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \forall h \in (0, \bar{h}). \quad (1.3.2)$$

Ovdje  $\rho_K$  predstavlja polumjer najveće kugle koja se može upisati u  $K$ .  $h_K$  je jednostavno dijamer od  $K$ , tj.  $h_K = \sup_{x,y \in K} |x - y|$

ii. *ekvivalencija od  $h_\Gamma$  i  $h_K$* -postoje konstante  $C_T, C_G > 0$  neovisne o  $h, K, \Gamma$  tako da vrijedi:

$$C_T h_K \leq h_\Gamma \leq C_G h_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{T}_h, \quad \Gamma \subseteq \partial K, \quad \forall h \in (0, \bar{h})$$

Ovdje  $h_\Gamma$  predstavlja mjeru brida  $\Gamma$ .

- Penalizacijska konstanta  $C_W$  zadovoljava uvjete korolara 1.3.3 za SIPG, NIPG i IIPG verzije diskretizacije difuzijske forme  $a_h$ .

**Korolar**

$$A_h(v_h, v_h) \geq C_C \|v_h\|^2, \quad \forall v_h \in S_{hp} \quad (1.3.3)$$

uz:

$$C_C = 1 \quad \text{za } A_h = A_h^{n,\sigma}, \quad \text{ako je } C_W > 0,$$

$$C_C = \frac{1}{2} \quad \text{za } A_h = A_h^{s,\sigma}, \quad \text{ako je } C_W \geq 4C_G C_M (1 + C_I),$$

$$C_C = \frac{1}{2} \quad \text{za } A_h = A_h^{i,\sigma}, \quad \text{ako je } C_W \geq 4C_G C_M (1 + C_I),$$

### 1.3.1 Konzistencija konvekcijske forme u slučaju Dirichletovih rubnih uvjeta

U ovom poglavlju od interesa je konzistencija i Lipshitz-neprekidnost forme  $b_h$ . Analiza konzistencije je podijeljena u dva dijela. U ovom dijelu se obrađuje slučaj kada je cijeli rub domene Dirichletov, tj.  $\partial\Omega = \partial\Omega_D, \partial\Omega_N = \emptyset$  i općenito jednostavniji nego slučaj pomiješanih rubnih uvjeta. Sljedeće definiramo interpolacijski operator  $\Pi_{K,p}$  na prostor  $P_p(K)$  te izložimo lemu bez dokaza uz pretpostavku  $s \geq 2, p \geq 1, s, p \in \mathbb{N}$ .

**Definicija 1.3.1** Neka je  $\mathcal{T}_h$  triangulacija domene  $\Omega$ . Tada za svaki  $K \in \mathcal{T}_h$  definiramo preslikavanje  $\pi_{K,p} : L^2(K) \rightarrow P_p(K)$ , takvo da za svaki  $\phi \in L^2(\Omega)$

$$\pi_{K,p}\phi \in P_p(K), \quad \int_K (\pi_{K,p}\phi)v \, dx = \int_K \phi v \, dx, \quad \forall v \in P_p(K)$$

Na osnovu preslikavanja  $\pi_{K,p}$  uvedimo interpolacijski operator za prostor  $S_{hp} - \Pi_{hp}$ , definiran za sve  $\phi \in L^2(\Omega)$

$$(\Pi_{hp}\phi)|_K = \pi_{K,p}(\phi|_K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (1.3.4)$$

Također se može pokazati da za  $\phi \in L^2(\Omega)$  vrijedi:

$$\Pi_{hp}\phi \in S_{hp}, \quad \int_{\Omega} (\Pi_{hp}\phi)v \, dx = \int_{\Omega} \phi v \, dx, \quad \forall v \in S_{hp}$$

Pa je  $\Pi_{hp} L^2(\Omega)$  projekcija na prostor  $S_{hp}$ .

**Lema 1.3.2** Neka je  $\partial\Omega_N = \emptyset$  (tada je i  $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^{ID}$ ). Tada postoje konstante  $C_{b1}, ..C_{b4}$  tako da vrijedi

$$|b_h(u, v) - b_h(\bar{u}, v)| \leq C_{b1} \|v\| \left( \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{K \in \mathcal{T}_H} h_K \|u - \bar{u}\|_{L^2(\partial K)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u, \bar{u} \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h) \cap L^\infty(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h), \quad h \in (0, \bar{h})$$

$$|b_h(u_h, v_h) - b_h(\bar{u}_h, v_h)| \leq C_{b2} \|v\| \|u_h - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad u_h, \bar{u}_h, v_h \in S_{hp}, \quad h \in (0, \bar{h}) \quad (1.3.5)$$

Neka je  $\Pi_{hp}$  interpolacijski operator za prostor  $S_{hp}$  nad elementima prostora  $H^s(\Omega)$  i stavimo  $\eta = u - \Pi_{hp}u$  tada vrijedi:

$$|b_h(u, v_h) - b_h(\Pi_{hp}u, v_h)| \leq C_{b3} \|v\| \|R_b(\eta)\| \|v_h\|, \quad v_h \in S_{hp}, \quad h \in (0, \bar{h}) \quad (1.3.6)$$

gdje je

$$R_b(\eta) = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\eta\|_{L^2(K)}^2 - h_K^2 |\eta|_{H^1(K)}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.7)$$

Nadalje, ako je  $\xi = u_h - \Pi_{hp}u$ , tada pod gornjim pretpostavkama,

$$|b_h(u, v_h) - b_h(u_h, v_h)| \leq C_{b4} \|v_h\| (R_b(\eta) + \|\xi\|_{L^2(\Omega)}), \quad v_h \in S_{hp}, \quad h \in (0, \bar{h}) \quad (1.3.8)$$

### 1.3.2 Konzistentija konvekcijske forme u slučaju pomiješanih rubnih uvjeta

Pošto lema 1.3.2 vrijedi samo u slučaju čiste Dirichletove zadaće, tj.  $\partial\Omega = \partial\Omega_D$ , u ovom dijelu analiziramo konzistentnost forme  $b_h$  u slučaju pomiješanih Dirichletovih i Nemanovih rubnih uvjeta. I u ovom dijelu izložimo dodatne rezultate bez strogog dokazivanja. Prva lema pokazuje egzistenciju vektorske funkcije sa prikladnim svojstvima. Dokaz se

temelji na već pretpostavljenoj domeni sa Lipshitzovim rubom.

**Lema 1.3.3** Postoji vektorska funkcija  $\vec{\phi} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$  takva da vrijedi:

$$\vec{\phi} \cdot \mathbf{n} \geq 1, \text{ na } \partial\Omega.$$

gdje je  $\mathbf{n}$  jedinična vanjska normala na  $\partial\Omega$ .

Sljedeće se izlaže generalizirani teorem o tragu.

**Lema 1.3.4** Postoji konstanta  $C'_M > 0$  tako da vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C'_M \left\{ \|v\| \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|v\|_{L^2(\partial K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}$$

Koristeći gornje tvrdnje, izvodimo pretpostavke na konzistentnost forme  $b_h$ . Forma se može zapisati kao:

$$b_h(w, v) = b_h^{ID}(w, v) + b_h^N(w, v)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} b_h^{ID}(w, v) = & - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sum_{s=1}^d f_s(w) \frac{\partial v}{\partial x_s} dx + \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^I} \int_{\Gamma} H(w|_{\Gamma}^{(L)}, w|_{\Gamma}^{(R)}, \mathbf{n}) [v]_{\Gamma} dS + \\ & + \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^D} \int_{\Gamma} H(w|_{\Gamma}^{(L)}, w|_{\Gamma}^{(L)}, \mathbf{n}) v|_{\Gamma}^{(L)} dS \end{aligned}$$

i zbog 1.2.10

$$b_h^N(w, v) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^N} \int_{\Gamma} H(w|_{\Gamma}^{(L)}, w|_{\Gamma}^{(L)}, \mathbf{n}) v|_{\Gamma}^{(L)} dS = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^N} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^d f_s(w|_{\Gamma}^{(L)}) n_s v|_{\Gamma}^{(L)} dS$$

Postavimo  $\xi = u_h - \Pi_{hp}u \in S_{hp}$ . Zanima nas ocjena izraza

$$b_h(u, \xi) - b_h(u_h, \xi) = (b_h^{ID}(u, \xi) - b_h^{ID}(u_h, \xi)) + (b_h^N(u, \xi) - b_h^N(u_h, \xi)) \quad (1.3.9)$$

Tada iz 1.3.8 uz  $v_h = \xi$

$$|b_h^{ID}(u, \xi) - b_h^{ID}(u_h, \xi)| \leq C_{b4} \|\xi\| (R_b(\eta) + \|\xi\|_{L^2(\Omega)})$$

Ostaje nam još ocijeniti desnu stranu iz 1.3.9. Za to će nam poslužiti sljedeća lema.

**Lema 1.3.5** Neka je  $u \in H^s(\Omega)$ ,  $u_h \in S_{hp}$ ,  $\xi = u_h - \Pi_{hp}u$ . Tada je ispunjeno

$$|b_h^N(u, \xi) - b_h^N(u_h, \xi)| \leq C_N (R_c(\eta)^2 + \|\xi\| \|\xi\|_{L^2(\Omega)} + \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

gdje je

$$R_c(\eta) = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^{-1} \|\eta\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|\eta\|_{H^1(K)}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.10)$$

a konstanta  $C_N$  je neovisna o  $u, u_h$  i  $h$ . Suma gornjih tvrdnji navodi na zaključak:

**Korolar 1.3.6** Neka je  $u \in H^s(\Omega)$ ,  $s \geq 2$ ,  $u_h \in S_{hp}$ ,  $\xi = u_h - \Pi_{hp}u$ ,  $\eta = \Pi_{hp}u - u$ . Tada slijedi:

$$|b_h(u, \xi) - b_h(u_h, \xi)| \leq C_b \{ \|\xi\| \left( R_b(\eta) + \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \right) + \delta_N \left( R_c(\eta)^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \right) \}$$

gdje je  $\delta_N = 0$  ako je zadaća čista Dirichletova, tj  $\partial\Omega_N = \emptyset$  i  $\delta_N = 1$  ako  $\partial\Omega_N \neq \emptyset$ .

### 1.3.3 Procjena greške metode linija

Sada slijedi izvod ocjene greške kod metode linija 1.2.17 pod pretpostavkom da egzaktno rješenje  $u$  zadovoljava:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H^s(\Omega)), \quad (1.3.11)$$

gdje je  $s \geq 2$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Pretpostavka 1.3.11 implicira  $u \in C([0, T]; H^s(\Omega))$ .

Neka je  $\Pi_{hp}u(t)$  interpolacijski operator za prostor  $S_{hp}$  od  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Postavimo

$$\xi = u_h - \Pi_{hp}u \in S_{hp}, \quad \eta = \Pi_{hp}u - u \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h).$$

Tada se greška  $e_h$  može izraziti sa

$$e_h = u_h - u = \xi + \eta$$

Oduzimajući 1.2.18 od 1.2.15 uz substituciju  $v_h := \xi$  slijedi

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial t}, t \right) + A_h(\xi, \xi) = b_h(u, \xi) - b_h(u_h, \xi) - \left( \frac{\partial \eta}{\partial t}, \xi \right) - A_h(\eta, \xi) \quad (1.3.12)$$

Spomenimo da su funkcije  $\xi, \eta$  ovisne o vremenu, tj  $\xi = \xi(t)$  i  $\eta = \eta(t)$ , za  $t \in [0, T]$ .

Sada se daju ocjene na pojedine članove u 1.3.12. Cauchy–Schwarz nejednakost implicira:

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial t}, \xi \right) \leq \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\xi\|_{L^2(\Omega)}$$

Iz prijašnjih razmatranja vrijedi:

$$|A_h(\eta, \xi)| \leq \epsilon \tilde{C}_B R_a(\eta) \|\xi\|$$

za

$$R_a(\eta) = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( |\eta|_{H^1(K)}^2 + h_K^2 |\eta|_{H^2(K)}^2 + h_K^{-2} \|\eta\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.13)$$

Konačno, definiramo član:

$$R_Q(\eta) = \frac{2C_1^2}{\epsilon C_C} (R_b(\eta) + \epsilon R_a(\eta))^2 + 2C_1 \left( R_c(\eta)^2 + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad (1.3.14)$$

$R_b(\eta)$  je definirano sa 1.3.7 i  $R_c(\eta)$  sa 1.3.10. Konstanta  $C_1$  je definirana kao  $C_1 = \max(C_b + 1, \tilde{C}_b)$ .

Greška metode linija završava sa tzv. *apstraktnom ocjenom greške*:

**Teorem 1.3.1.** *Neka vrijede pretpostavke 1.3.1. Neka je  $u$  rješenje u klasičnom smislu početne zadaće 1.1.1 koje zadovoljava 1.3.11 i neka je  $u_h$  numeričko rješenje dobiveno tehnikom 1.2.15. Tada greška  $e_h = u_h - u$  zadovoljava*

$$\begin{aligned} & \|e_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon C_C \epsilon \int_0^T \|e_h(\vartheta)\|^2 d\vartheta \\ & \leq C_2(\epsilon) \left( \int_0^T R_Q(\eta(t)) dt + \|\eta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_C \int_0^T \|\eta(\vartheta)\|^2 d\vartheta \right), \quad t \in (0, T), h \in (0, \bar{h}) \end{aligned}$$

$C_C$  je konstanta koercitivne nejednakosti,  $C_2(\epsilon)$  je konstanta neovisno o  $h$  i  $u$  te ovisna o  $\epsilon$ .

## 1.4 Ocjena greške u terminima finoće mreže $h$

U ovom dijelu se navodi prva značajnija ocjena greške rješenja kod metode linija, općenito nestacionarne, nelinearne jednadžbe konvekcije difuzije. Pristup će biti ocijeniti desnu stranu izraza u teoremu 1.3.1. Pretpostavlja se da je  $s \geq 2$  i da je egzaktno rješenje  $u$  regularno u sljedećem smislu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H^s(\Omega))$$

Tada je  $u \in C([0, T], H^s(\Omega))$ . Stavimo  $\eta(t) = u(t) - \Pi_{hp} u(t)$ ,  $t \in (0, T)$  i  $\mu = \min(p + 1, s)$ . Vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} \|\eta(t)\|_{L^2(K)} & \leq C_A h_K^\mu |u(t)|_{H^\mu(K)}, & K \in \mathcal{T}_h, t \in (0, T) \\ |\eta(t)|_{H^1(K)} & \leq C_A h_K^{\mu-1} |u(t)|_{H^\mu(K)}, & K \in \mathcal{T}_h, t \in (0, T) \\ |\eta(t)|_{H^2(K)} & \leq C_A h_K^{\mu-2} |u(t)|_{H^\mu(K)}, & K \in \mathcal{T}_h, t \in (0, T) \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Manipulacijom gornjih nejednakosti slijedi:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( |\eta(t)|_{H^1(K)}^2 + h_K^2 |\eta(t)|_{H^2(K)}^2 + h_K^{-2} \|\eta(t)\|_{L^2(K)} \right) \leq 3C_A^2 h^{2(\mu-1)} |u(t)|_{H^\mu(\Omega)}^2, \quad \forall t \in (0, T). \quad (1.4.2)$$

1.4.2 zajedno sa 1.3.13 implicira:

$$R_a(\eta(t)) = R_a(u(t) - \Pi_{hp}u(t)) \leq \sqrt{3}C_A h^{\mu-1} |u(t)|_{H^\mu(\Omega)}, \quad t \in (0, T) \quad (1.4.3)$$

Slicno iz 1.3.7 dobijemo

$$R_b(\eta(t)) = R_b(u(t) - \Pi_{hp}u(t)) \leq \sqrt{2}C_A h^\mu |u(t)|_{H^\mu(\Omega)}, \quad t \in (0, T) \quad (1.4.4)$$

Nadalje, 1.3.10 i 1.4.1 daju:

$$R_c(\eta(t)) \leq \sqrt{2}C_A h^{\mu-\frac{1}{2}} |u(t)|_{H^\mu(\Omega)}, \quad t \in (0, T) \quad (1.4.5)$$

Definicija 1.3.4 interpolacijskog operatora  $\Pi_{hp}$  i relacija

$$\partial_t(\Pi_{hp}u(t)) = \Pi_{hp}(\partial_t u(t)) \in \mathcal{S}_{hp} \quad (1.4.6)$$

impliciraju

$$\|\partial_t \eta\|_{L^2(\Omega)} = \|\partial_t(\Pi_{hp}u - u)\|_{L^2(\Omega)} = \|\Pi_{hp}(\partial_t u) - \partial_t u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_A h^\mu |\partial_t u|_{H^\mu(\Omega)} \quad (1.4.7)$$

Koristeći 1.3.14 sa 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5 i 1.4.7, za sve  $t \in (0, T)$  vrijedi:

$$R_Q(\eta(t)) \leq C_4 h^{2(\mu-1)} \left( \epsilon^{-1} h^2 + h + \epsilon + h^2 \right) \left( |u(t)|_{H^\mu(\Omega)}^2 + |\partial_t u(t)|_{H^\mu(\Omega)}^2 \right), \quad (1.4.8)$$

gdje je

$$C_4 = 4C_A^2 \max \left( \frac{\sqrt{6}C_1^2}{C_C}, 1 \right)$$

Za član  $\eta(t)$  vrijedi ocjena:

$$\|\eta(t)\|^2 \leq C_5 h^{2(\mu-1)} |u(t)|_{H^\mu(\Omega)}^2, \quad t \in (0, T)$$

gdje je  $C_5 = C_A^2(4C_W C_M C_T^{-1} + 1)$  Sada smo spremni izložiti tvrdnju najavljenju na početku sekcije.

**Teorem 1.4.1.** *Neka vrijede pretpostavke 1.3.1. Neka je  $u$  rješenje u klasičnom smislu početne zadaće 1.1.1 koje zadovoljava 1.3.11 i neka je  $u_h$  numeričko rješenje dobiveno tehnikom 1.2.15. Tada greška  $e_h = u_h - u$  zadovoljava*

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|e_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon C_C \int_0^T \|e_h(\vartheta)\|^2 d\vartheta \\ \leq \tilde{C}_2(\epsilon) h^{2(\mu-1)} \left( |u|_{L^2([0, T]; H^\mu(\Omega))}^2 + |\partial_t u|_{L^2([0, T]; H^\mu(\Omega))}^2 \right), \quad h \in (0, \bar{h}) \end{aligned}$$

*Napomena.* Ocjena 1.4.1 se ne može iskoristiti za male vrijednosti od  $\epsilon$ . Razlog leži u definiciji konstante  $\tilde{C}_2$  koja sadrži član  $e^{C/\epsilon}$  koji eksplodira kako  $\epsilon \rightarrow 0_+$ .

## 1.5 Jednolika ocjena greške obzirom na difuzijski koeficijent

U prošlom dijelu smo vidjeli da metoda postaje vrlo nestabilna kada  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . To znači da ocjene nisu primjenjive za mali  $\epsilon$ . Postavlja se pitanje je li uopće moguće dobiti jednoliku ocjenu greške difuzijskog koeficijenta  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . U ovoj sekciji se analiziraju ocjene greške koje su uniformne za difuzijski koeficijent  $\epsilon \rightarrow 0_+$  zadaće konvekcije difuzije, koja sada sadrži i reaktivni član, a koeficijenti zadovoljavaju posebne pretpostavke koje se koriste u analizi numeričke aproksimacije za linearnu jednadžbu konvekcije difuzije. Kao rezultat, slijede ocjene greške, uniformne za difuzijski koeficijent  $\epsilon \rightarrow 0_+$  valjane čak i za  $\epsilon = 0$ .

### 1.5.1 Nепrekidni problem

Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  poliedarski skup sa Lipshitzovim rubom  $\partial\Omega$  i  $T > 0$ . Definiramo kao i prije  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ .

Neka je  $\mathbf{v} : \overline{Q_T} = \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  dana *brzina transporta toka*. Pretpostavlja se da je  $\partial\Omega = \partial\Omega^- \cup \partial\Omega^+$  i za sve  $t \in (0, T)$ :

$$\mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) < 0 \text{ na } \partial\Omega^-, \text{ ulazna granica}$$

$$\mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0 \text{ na } \partial\Omega^-, \text{ izlazna granica}$$

$\mathbf{n}$  je jedinična vanjska normala ruba  $\Omega$ . Nadalje, pretpostavljamo da su rubovi  $\partial\Omega^-$  i  $\partial\Omega^+$  neovisni o vremenu. Dio u kojem je  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  opisuje nepropusne dijelove.

U ovom dijelu analiziramo sljedeći linearni problem konvekcije difuzije:

Potrebno je pronaći  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  tako da vrijede:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \epsilon \Delta u + cu = g, \text{ u } Q_T \quad (1.5.1)$$

$$u = u_D, \text{ na } \partial\Omega^- \times (0, T) \quad (1.5.2)$$

$$\epsilon \nabla u = g_N, \text{ na } \partial\Omega^+ \times (0, T) \quad (1.5.3)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \text{ } x \in \Omega \quad (1.5.4)$$

U slučaju  $\epsilon = 0$ , stavljamo  $g_N = 0$  i zanemarujemo Neumannove rubne uvjete 1.5.3. Jednadžba 1.5.1 opisuje prijenos i difuziju u fluidu veličine  $u$  kao što je npr. temperatura ili koncentracija nekog materijala. Veličina  $\epsilon$  je kao i prije difuzijska konstanta,  $c$  predstavlja reaktivni član i  $g$  predstavlja izvor/ponor. Takve klase jednadžbi se pojavljuju npr. u dinamici fluida, kod prijenosa topline, mase i sl. Sljedeće pretpostavke vrijede na gore opisane objekte:

$$g \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (1.5.5)$$

$$u_0 \in L^2(\Omega) \quad (1.5.6)$$

$$u_D \text{ je trag od nekog } u^* \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \text{ na } \partial\Omega^- \times (0, T) \quad (1.5.7)$$

$$\mathbf{v} \in C([0, T]; W^{1,\infty}), |\mathbf{v}| \leq C_v \text{ na } \bar{\Omega} \times [0, T], |\nabla \mathbf{v}| \leq C_v \text{ s.s u } Q_T \quad (1.5.8)$$

$$c \in C([0, T]; L^\infty(\Omega)), |c(x, t)| \leq C_c \text{ s.s u } Q_T \quad (1.5.9)$$

$$c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} \geq \gamma_0 > 0 \text{ u } Q_T \quad (1.5.10)$$

$$g_n \in C([0, T]; L^2(\partial\Omega^+)) \quad (1.5.11)$$

$$\epsilon \geq 0 \quad (1.5.12)$$

Pretpostavka 1.5.10 nije ograničavajuća, naime substitucijom  $u = e^{\alpha t} w$  ( $\alpha = \text{const}$ ) u 1.5.1 proizlazi jednažba po  $w$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w - \epsilon \Delta w - (c + \alpha)w = g e^{-\alpha t}.$$

Iz uvjeta 1.5.10 je sad  $c + \alpha - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} \geq \gamma_0 > 0$  i zadovoljen je za odabir dovoljno velikog  $\alpha$ . Slaba formulacija, tj. varijacijska jednadžba se formulira na standardan način. Jednadžba 1.5.1 se pomnoži sa test funkcijom  $\phi \in V = \{\phi \in H^1(\Omega); \phi|_{\partial\Omega^-} = 0\}$ . Nakon toga se primijeni teorem o divergenciji i iskoristi se uvjet 1.5.3.

**Definicija 1.5.1** Kažemo da je funkcija  $u$  *slabo rješenje* jednadžbe 1.5.1 ako zadovoljava

$$u - u^* \in L^2([0, T]; V), u \in L^\infty(Q_T)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \phi \, dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_{\partial\Omega^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \phi \, dx - \int_{\Omega} u \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \, dx + \\ \int_{\Omega} c u \phi \, dx = \int_{\Omega} g \phi \, dx + \int_{\partial\Omega^+} g_N \phi \, dS, \quad \forall \phi \in V \text{ u smislu distribucija na } (0, T) \end{aligned}$$

$$u(0) = u^0, \text{ u } \Omega.$$

Pretpostavljamo da slabo rješenje  $u$  postoji i dovoljno je glatko, npr.

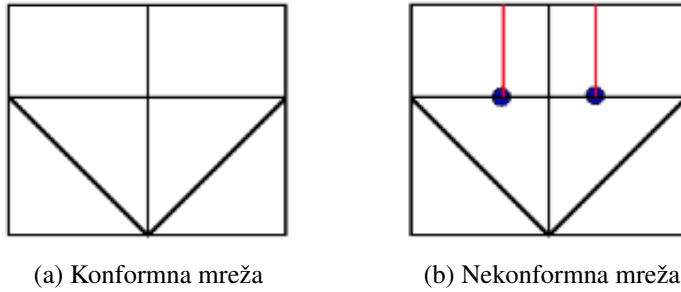
$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H^s(\Omega)) \quad (1.5.13)$$

za prirodni broj  $s \geq 2$ . Tada je također  $u \in C([0, T]; H^s(\Omega))$ . Moguće je i pokazati da rješenje  $u$  zadovoljava 1.5.1 po točkama gotovo svuda. Također, ukoliko je  $\epsilon > 0$ , postoji jedinstveno slabo rješenje koje zadovoljava i  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T)$ .



## 1.5.2 Diskretizacija problema

Neka je  $\mathcal{T}_h$  klasična triangulacija domene  $\Omega$ , sastavljena od trokuta i tetraedara u dimenziji 2 i 3, respektivno. Takva mreža predstavlja primjer *konformne* nasuprot *nekonformnim* mrežama koje sadrže barem jedan *viseći vrh*. U takvoj mreži element može dijeliti sa svojim susjedom samo dio stranice ili samo dio brida. U primjeru na slici 1.3b dva crvena brida narušavaju konformnost mreže uvodeći dva vrha (označena plavim krugovima) koji nisu vrhovi trokuta na čijim se stranicama nalaze. Takve vrhove nazivamo *visećim* (engl. *hanging nodes*).



Također se pretpostavlja uvjet *regularnosti oblika* 1.3.2 mreže. Za svaki element  $K \in \mathcal{T}_h$  analogno definiramo:

$$\partial K^-(t) = \{x \in \partial K; \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}, \quad (1.5.14)$$

$$\partial K^+(t) = \{x \in \partial K; \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0\} \quad (1.5.15)$$

Gornje jednakosti impliciraju da  $\partial K^-(t)$  i  $\partial K^+(t)$  označavaju izlaznu i ulaznu granicu elementa  $K$ , respektivno. Množeći konvektivni član  $\mathbf{v} \cdot \nabla u$  sa proizvoljnom  $\phi \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  i primjenom teorema o divergenciji nakon integriranja po elementu  $K$  slijedi:

$$\begin{aligned} \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \phi \, dx &= - \int_K u \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \, dx + \int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \phi \, dS \\ &= - \int_K u \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \, dx + \int_{\partial K^-} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \phi \, dS + \int_{\partial K^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \phi \, dS \end{aligned}$$

Na ulaznom dijelu granice elementa  $K$  koristimo informaciju van  $K$ . To je motiviralo uvođenje  $u^-$  umjesto  $u$ . Za  $x \in \Omega^-$  tada definiramo  $u^-(x) := u_D(x)$ . Integrali na dijelu  $\partial K^+$  gdje informacija izlazi van, ostaju nepromijenjeni. U obzir se uzima da je  $[u] = 0$  na  $\Gamma \in \mathcal{T}_h^I$  i  $u|_{\partial\Omega^-}$  zadovoljava Dirichletov uvjet 1.5.2. Premještanjem članova u gornjem

izrazu slijedi:

$$\begin{aligned}
\int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \phi \, dx &= \\
&= - \int_K u \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \, dx + \int_{\partial K^-} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u^- \phi \, dS + \int_{\partial K^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \phi \\
&= - \int_K u \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \, dx + \underbrace{\int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \phi \, dS}_{=0} - \int_{\partial K^+ \cup \partial K^-} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \phi \\
&\quad + \int_{\partial K^-} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u^- \phi \, dS + \int_{\partial K^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \phi \\
&= \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \phi \, dx + \int_{\partial K^-} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (u^- - u) \phi \, dS \\
&= \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \phi \, dx - \int_{\partial K^- \setminus \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) [u] \phi \, dS - \int_{\partial K^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (u - u_D) \phi \, dS,
\end{aligned} \tag{1.5.16}$$

gdje je  $[u]$  postavljen  $[u] = u - u^-$  na  $\partial K^- \setminus \partial \Omega$ .

*Napomena.* Gornji identitet se može izvesti iz relacije

$$\int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \phi \, dx = - \int_K u \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \, dx + \sum_{\Gamma \subseteq \partial K} \int_{\Gamma} H(u_{\Gamma}^{(L)}, u_{\Gamma}^{(R)}, \mathbf{n}_{\Gamma}) \phi \, dS,$$

gdje je  $H$  numerički fluks zadan analogno sa 1.2.8

$$H(u_1, u_2, \mathbf{n}) = \begin{cases} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} u_1, & \text{za } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} u_2, & \text{za } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \end{cases}$$

Sada slijedi disrektizacijski proces. Krećemo od jednadžbe 1.5.1 uz pretpostavku 1.5.13, standardno množeći ju sa test funkcijom  $\phi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  integrirajući po svim elementima mreže te primijenjujući teorem o divergenciji. Za konvektivni član koristimo izraz 1.5.16 te u nekim dijelovima dodajemo iste članove sa različitim predznacima i koristimo zadane rubne uvjete. Prisjetimo se da je  $\partial \Omega_D = \partial \Omega^- = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} (\partial K^- \cap \partial \Omega)$ . Uvažavajući gornje činjenice, slijedi da egzaktno rješenje  $u$  zadovoljava  $\forall \phi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$

$$\left( \frac{\partial u(t)}{\partial t}, t \right) + A_h(u(t), \phi) + b_h(u(t), \phi) + c_h(u(t), \phi) = l_h(\phi)(t), \text{ s.s. } t \in (0, T). \tag{1.5.17}$$

Forme u 1.5.17 su definirane:

$$(u, \phi) = \int_{\Omega} u \phi \, dx, \tag{1.5.18}$$

$$A_h(u, \phi) = \epsilon a_h(u, \phi) + \epsilon J_h^\sigma(u, \phi), \quad (1.5.19)$$

$$\begin{aligned} a_h(u, \phi) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h^I} \int_{\Gamma} (\langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n}[\phi] + \Theta \langle \nabla \phi \rangle \cdot \mathbf{n}[u]) \, dS \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K^- \cap \partial \Omega} ((\nabla u \cdot \mathbf{n})\phi + \Theta(\nabla \phi \cdot \mathbf{n})u) \, dS, \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

$$J_h^\phi = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_h^I} \int_{\Gamma} \sigma[u][\phi] \, dS + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K^- \cap \partial \Omega} \sigma u \phi \, dS, \quad (1.5.21)$$

$$\begin{aligned} b_h(u_h, \phi) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \phi \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K^- \setminus \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})[u] \phi \, dS \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})u \phi \, dS, \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

$$c_h(u, \phi) = \int_{\Omega} cu \phi \, dx, \quad (1.5.23)$$

$$\begin{aligned} l_h(\phi)(t) &= \int_{\Omega} g(t) \phi \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K^+ \cap \partial \Omega} g_N(t) \phi \, dS \\ &\quad + \epsilon \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K^- \cap \partial \Omega} \sigma u_D(t) \phi \, dS \\ &\quad + \epsilon \Theta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K^- \cap \partial \Omega} u_D(t) (\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) \, dS \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})u_D(t) \phi \, dS \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

Kao i prije difuzijska forma, tj. forma koja diskretizira difuzijski član može imati tri varijance obzirom na parametar  $\Theta$ . Aproksimativno rješenje će biti traženo u konačnodimenzionalnom prostoru  $S_{hp}$  za svaki  $t \in (0, T)$

$$S_{hp} = \{ \phi \in L^2(\Omega); \phi|_K \in P_p(K) \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (1.5.25)$$

gdje je  $p \geq 1$ , a  $P_p(K)$  prostor polinoma nad elementom  $K$  stupnja najviše  $p$ .

**Definicija 1.5.2** Diskontinuirano aproksimativno rješenje zadaće 1.5.1 je funkcija  $u_h$  koja zadovoljava

$$u_h \in C^1([0, T]; S_{hp}), \quad (1.5.26)$$

$$\left( \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, \phi_h \right) + A_h(u_h(t), \phi_h) + b_h(u_h(t), \phi_h) + c_h(u_h(t), \phi_h) = l_h(\phi_h)(t) \quad \forall \phi_h \in S_{hp}, \quad \forall t \in (0, T), \quad (1.5.27)$$

$$(u_h(0), \phi_h) = (u^0, \phi_h), \quad \forall \phi_h \in S_{hp} \quad (1.5.28)$$

Za  $\epsilon = 0$ , možemo odabrati  $p = 0$ . Taj slučaj se onda zapravo svodi na metodu konačnih volumena, pa se može reći da je ona poseban slučaj diskontinuirane Galerkinove metode.

### 1.5.3 Procjena greške

Procjena greške uvelike ovisi o pripadnoj mreži koja opisuje (aproksimira) domenu  $\Omega$ . Neka je zadana konformna mreža  $\{T_h\}_{h \in (0, \bar{h})}$ ,  $\bar{h} > 0$  i neka je  $\Pi_{hp}$  interpolacijski operator definiran sa 1.3.4. Označimo

$$\xi = u_h - \Pi_{hp}u, \quad \eta = \Pi_{hp}u - u$$

gdje je  $u$  egzaktno rješenje koje zadovoljava uvjet 1.5.13, a  $u_h$  aproksimativno. Tada je greška  $e_h = u_h - u = \xi + \eta$ . Vrijedi sljedeći niz nejednakosti:

$$\|\eta\|_{L^2(K)} \leq C_A h^\mu |u|_{H^\mu(K)} \quad (1.5.29)$$

$$|\eta|_{H^1(K)} \leq C_A h^{\mu-1} |u|_{H^\mu(K)} \quad (1.5.30)$$

$$|\eta|_{H^2(K)} \leq C_A h^{\mu-2} |u|_{H^\mu(K)} \quad (1.5.31)$$

$$\|\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq C_A h^\mu |u|_{H^\mu(\Omega)} \quad (1.5.32)$$

$$\|\partial_t \eta\|_{L^2(\Omega)} \leq C_A h^\mu |\partial_t u|_{H^\mu(\Omega)} \quad (1.5.33)$$

Uvodi se sljedeća norma na  $\omega$  podskupu od ruba  $\Omega$  ili rubu od  $K$ :

$$\|\phi\|_{\mathbf{v}, \omega} = \|\sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|} \phi\|_{L^2(\omega)} \quad (1.5.34)$$

$\mathbf{n}$  je, kao i obično, odgovarajuća vanjska normala. U sljedećoj lemi se izlažu ocjene na forme 1.5.19, 1.5.22, 1.5.23.

**Lema 1.5.3** Postoje pozitivne konstante  $\bar{C}'_b, \bar{C}$  neovisne o  $u, h \in$  tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} |b_h(\eta, \xi)| &\leq \frac{1}{4} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \|\xi\|_{\mathbf{v}, \partial K^+ \cap \partial \Omega}^2 + \|[\xi]\|_{\mathbf{v}, \partial K^- \setminus \partial \Omega}^2 \right) \\ &\quad + \bar{C}_b \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\eta\|_{L^2(K)} \|\xi\|_{L^2(K)} + R_2(\eta), \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

gdje je

$$R_2(\eta) = \bar{C}'_b \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \|\eta\|_{L^2(K)} \|\eta\|_{H^1(K)} + h_K^{-1} \|\eta\|_{L^2(K)}^2 \right)$$

Nadalje vrijedi:

$$|A_h(\eta, \xi)| \leq \frac{\epsilon}{4} \|\xi\|^2 + \epsilon R_1(\eta)$$

gdje je

$$R_1(\eta) = \bar{C}_b^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \|\eta\|_{H^1(K)} + h_K^2 \|\eta\|_{H^2(K)}^2 + h_K^{-2} \|\eta\|_{L^2(K)}^2 \right)$$

i konačno:

$$|c_h(\eta, \xi)| \leq C_c \|\eta\|_{L^2(\Omega)} \|\xi\|_{L^2(\Omega)},$$

$$|(\partial_t \eta, \xi)| \leq \|\partial_t \eta\|_{L^2(\Omega)} \|\xi\|_{L^2(\Omega)},$$

Sada se izlaže glavni rezultat ove sekcije, koji predstavlja ocjenu greške s obzirom na *finoću mreže*  $h$ .

**Teorem 1.5.1.** *Neka je dana triangulacija mreže  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, \bar{h})}$  i neka su zadovoljene pretpostavke 1.5.5-1.5.12. Pretpostavimo nadalje da konstanta  $C_W$  zadovoljava uvjete korolara 1.3.3. Neka je u egzaktno rješenje zadatke 1.5.1 regularno u 1.5.13 smislu i  $u_h$  numeričko rješenje dobiveno metodom linija 1.5.26. Tada vrijedi ocjena greške  $e_h = u_h - u$ :*

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|e_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + \left( \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \|\|e_h(\vartheta)\|\|^2 d\vartheta + 2\gamma_0 \|e_h\|_{L^2(Q_T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left( \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \int_0^T \left( \|e_h(t)\|_{\mathbf{v}(t), \partial K \cap \partial \Omega}^2 + \|\|e_h(t)\|\|_{\mathbf{v}(t), \partial K^- \setminus \partial \Omega}^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \tilde{C} h^{\mu-1} (\sqrt{\epsilon} + \sqrt{h}), \end{aligned} \quad (1.5.36)$$

gdje je  $\tilde{C} > 0$  konstanta neovisna o  $\epsilon$  i  $h$ .

*Napomena.* Recimo da ispuštimo integrale po  $\partial K^- \cap \partial \Omega$  i  $\partial K^- \setminus \partial \Omega$  u formi  $b_h$  i iste članove u formi  $l_h$  (što zapravo znači da smo maknuli *tehniku decentriranja*) i ponovimo analogan račun. Dobili bismo izraz oblika

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|\xi\|^2 + 2 \int_{\Omega} \left( c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \xi^2 dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \xi^2 dS \\ \leq C \epsilon h^{2(\mu-1)} + C h^{2\mu} + \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

Nije teško primijetiti da je član  $\int_{\partial K} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \xi^2 dS$  teško apriori ocijeniti na način koji smo dobivali u prethodnim računima, najviše jer član  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  može biti pozitivan i negativan.

Alternativno bi se mogla u račun ubaciti standardna Gronwallova Lemma, ali ocjena s desne strane bi opet sadržavala izraz oblika  $e^{\frac{ct}{\epsilon}}$  koji nije prikladan jer izraz vrlo brzo raste za  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . Stoga, račun koji sadrži u sebi metodu decentriranja (engl. *upwinding*) je bitan dio za dobivanje jednolike ocjene u pogledu na član  $\epsilon$ . Pomoću upwind sheme stabiliziramo numerički model za aproksimaciju rješenja. Problemi nastaju kada je konvektivni član dominantan u odnosu na difuzijski, taj omjer je poznat kao *Pécletov broj*. Drugim riječima, za velike Pécletove brojeve na grafu numeričkog rješenja dolazi do pojave *rubnih slojeva*: malo područje na rubu domene u kojem se dešava značajna promjena rješenja. U metodi konačnih elemenata, npr. u slučaju funkcije realne varijable tražimo rješenje u obliku

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N w_j(x) u_j$$

Željeli bismo modificirati metodu konačnih elemenata tako da modificirana metoda daje shemu koja odgovara općenitoj upwind metodi konačnih diferencija. Ideja je promijeniti test funkcije. Umjesto funkcije  $w_j$  uzet ćemo test funkciju oblika  $w_j + \beta_j \phi_j$ , gdje je  $\beta_j$  neka konstanta, a  $\phi_j$  funkcija, koja ima isti nosač kao i  $w_j$ , a koju trebamo odrediti. Ova izmjena test funkcija ima za posljedicu povećanje numeričke difuzije. Ovakva modificirana metoda konačnih elemenata ne ulazi u okvire varijacijske aproksimacije. Naime, prostor iz kojega uzimamo test funkcije razlikuju se od prostora u kojemu tražimo rješenje. Varijacijska jednadžba koja se dobije se može apstraktno zapisati sa

Naći  $u \in V$  tako da vrijedi

$$\forall v \in W, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle, \quad (1.5.38)$$

gdje su  $V$  i  $W$  Hilbertovi prostori,  $a : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  bilinearna forma i  $F \in W'$ , linearan i neprekidan funkcional. Numeričke metode sa ovakvom postavom varijacijske jednadžbe gdje je općenito  $V \neq W$  nazivamo *Petrov-Galerkine metode*. Kod njih, rezultati iz Lax-Milgramove leme očito ne vrijede. Stoga se koristi sljedeća generalizacija.

**Teorem 1.5.2.** (*Nečas*) *Neka su  $V$  i  $W$  dva Hilbertova prostora,  $a : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  bilinearna i neprekidna forma i  $F \in W'$  linearan i neprekidan funkcional. Zadaća 1.5.38 je korektno postavljena, tj. ima jedno i samo jedno rješenje koje neprekidno ovisi o podacima, ako i samo su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

- *Postoji konstanta  $\alpha > 0$ , takva da je*

$$\inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha,$$

- *Vrijedi,*

$$\forall w \in W, (\forall v \in V, a(v, w) = 0) \Rightarrow (w = 0)$$

*Napomena.* Nečasov teorem predstavlja profinjenje Lax-Milgramove leme za slučaj  $V = W$ .

Označimo sa  $w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  elemente kanonske baze u konformnom prostoru konačnih elemenata  $V_h \subseteq H_0^1(\Omega)$ . Htjeli bismo izmijeniti test funkcije dodajući bilinearnoj formi iz varijacijske formulacije član oblika

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla u_h, \mathbf{v} \cdot \nabla w_i),$$

što je ekvivalentno dodavanju člana  $\mathbf{v} \cdot \nabla w_i$  test funkciji  $w_i$  pri računu konvektivnog člana. Umjesto da za test funkcije uzimamo elemente  $w_i$ , uzimat ćemo:

$$\psi_i(x) = Mw_i(x) = w_i(x) + \rho_K \mathbf{v}(x) \cdot \nabla w_i(x), \quad \text{na } K \in \mathcal{T}_h.$$

Sa  $M$  je označeno preslikavanje  $M : w_i \rightarrow \psi_i$ . Funkciju  $\rho^h$  definiramo kao po elementima konstantu funkciju  $\rho^h|_K = \rho_K$  za svako  $K \in \mathcal{T}_h$ . Vrijednost funkcije  $\rho^h$  na elementu  $K$  često se bira po pravilu

$$\rho_K \max_{x \in K} |\mathbf{v}|^2 = \max \{ \max_{x \in K} |\mathbf{v}(x)| h_K - \epsilon, 0 \}.$$

Budući da test funkcije ne pripadaju prostoru  $H_0^1(\Omega)$ , nećemo vršiti parcijalnu integraciju u onim članovima u kojima to nije moguće. Te dijelove bilinearne forme promatramo kao sume po svim elementima. Pa imamo za  $u_h \in V_h$

$$\begin{aligned} a(u_h, \phi_i) &= \epsilon \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_i \, dx - \epsilon \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta u_h (\rho_K \mathbf{v} \cdot \nabla w_i) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h) \psi_i \, dx \end{aligned}$$

Metoda sada glasi: naći  $u_h \in V_h$ , takav da je

$$a_h(u_h, \psi_i) = \int_{\Omega} f \psi_i \, dx, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Ovo je tzv. **SUPG** metoda (engl. *streamline upwind Petrov-Galerkin*) i predstavlja način kako se mogu stabilizirati diskontinuirani elementi u slučaju velikog Pécletovog broja.





# Poglavlje 2

## Numerička rješenja

### 2.1 Općenito o *DUNE* radnoj okolini

Implementaciju DGM-a i MKE-a je napravljen u *DUNE* radnoj okolini. *DUNE* (engl. **D**istributed and **U**nified **N**umerics **E**nvironment) je softver razvijen ranih 2000.-ih godina na inicijativu profesora njemačkih sveučilišta. Projekt je izdan pod GNU GPL licencom što znači da je softver *open-source*. Drugim riječima, implementacijski kod projekta je otvoren za svakoga da ga pogleda, podijeli i neprekidno ažurira u cilju stvaranja istog što robusnijim. S obzirom da je napisan u C++ programskom jeziku za očekivati je brže izvođenje programa, za razliku od nekih drugih softvera za rješavanje PDJ-a prisutnih na tržištu, kao što je npr. *FreeFEM*. Također, prilikom implementacije softvera, tendencija je bila laka nadogradnja novih dijelova koda nad starim(*program dependencies*.) Framework(verzija 2.6.1) se sastoji od 10-ak *modula*, npr.

- *dune-common* - Modul u kojem su sadržane definicije baznih klasa i funkcija za sve ostale module.
- *dune-grid* - Sadrži esencijalno najbitniju stvar koju program nudi, a to je *mreža*. U njemu su implementirane razne klase mreža, npr: *AlbertaGrid*, *GeometryGrid*, *OneDGrid* i *YaspGrid*.
- *dune-istl* - Sadrži klase i funkcije koje možemo povezati sa linearnom algebram. Dakle, definicije vektora, matrica, rješavača linearnih sustava, npr. rješavač *Krylov-ljevom metodom*.
- *dune-pdelab* - Modul koji pruža visok stupanj apstrakcije kod rješavanja PDJ-a. Ima implementirane razne prostorne i vremenske operatore, npr: *StationaryLinearProblemSolver* i *ImplicitEulerParameter*.

Kao i svaka radna okolina (engl. *framework*) DUNE pruža automatizaciju velikog broja koraka, u ovome slučaju, potrebnih za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Na taj način olakšava korisniku da se brine i implementira samo dijelove koji se mijenjaju "od PDJ-a do PDJ-a", kao što su npr. domena, početni/rubni uvjeti, globalni koeficijenti i sl. Ideja je da se svaki element mreže dobije putem *geometrijskog preslikavanja*, koje je afina bijekcija, sa *referentog elementa*. Slika geometrijskog preslikavanja se još zove i *fizički element*. Sve potrebno za izračun na jednom elementu (npr. integracijske točke, lokalne bazne funkcije i sl.) imamo na referentnom elementu, a potom lako u računu zamjenimo varijable i svedemo izraz na fizički element. DUNE, tj. točnije dunedelab pruža dodatno da korisnik implementira račune samo na jednom fizičkom elementu, a on se kasnije onda pobrine za iteriranje i obavljanje tog računa nad svim ostalim elementima mreže za nas. Jednom riješeni zadaci su spremni za grafički prikaz ili neki drugi oblik manipulacije. DUNE također pruža uslugu spremanja rezultata u *vtk* formatu, koji se mogu tada vizualizirati sa nekim softverom, npr. ovdje korištenim *Paraview-om*.

Na slici 2.1 je dan primjer koda za konstrukciju mreže. Mreža je strukturirana (što znači da su stranice paralelne(okomite) na osi  $x, y$ ) i predstavlja podskup  $\mathbb{R}^2$  (kvadrat  $(0,1) \times (0,1)$ ). Mreža koja ima ova svojstva je implementirana klasom *YaspGrid*. Iz koda se vidi da je mreža podijeljena na 100 ekvidistantnih točaka duž  $x$  i  $y$  osi. U kodu je prisutno i tzv. *profinjenje mreže* (*globalRefine()*). Funkcija koja kao parametar prima prirodan broj koji signalizira na koliko će se svaki element dodatno podijeliti. Na primjer, ako se na početku naša mreža sastoji od samo jednog elementa, nakon poziva *globalRefine(4)* mreža će sadržavati 32 ekvidistantne točke u smjeru  $x$  i  $y$ , tj. sastojat će se od 1024 elementa (ćelije). Postoje još i *nestrukturirane mreže*. One se sastoje od elemenata čije stranice nisu nužno orijentirane duž koordinatnih osi. Njihova je prednost što se mogu koristiti za subdiviziju složenih domena, no njihovo je pamćenje i generiranje složenije pa se stoga najčešće čitaju iz datoteke koju kreira neki od generatora mreže, npr. *gms*.

```
Dune::FieldVector<double, dim> L(1.0);
std::array<int, dim> N{100, 100};
std::bitset<dim> periodic(false);
int overlap = 0;
Dune::YaspGrid<dim> grid(L, N, periodic, overlap);
grid.globalRefine(level);
const auto &gv = grid.leafGridView();
```

Slika 2.1: Kod koji predstavlja konstrukciju mreže

Na slici 2.2 je primjer dijela koda u kojem se definiraju i inicijaliziraju objekti potrebni

za stvaranje rješavača PDJ-a. *FEM* predstavlja tip konačnih elemenata, u ovom slučaju u prostoru  $\mathbb{Q}_2$ . To znači da su lokalne bazne funkcije pridružene, osim vrhovima pravokutnika i polovištima njegovih stranica. *SLOP* i *TLOP* predstavljaju prostorne i vremenske operatore, pošto se u ovom slučaju radilo o evolucijskoj jednažbi. S njima inicijaliziramo objekt *igo* koji predstavlja potpuni grid operator. *LS* predstavlja tip kojim ćemo rješavati linearni sustav, ovdje je to sekvencijalni rješavač sa *SSOR* prekondicionerom. Za diskretizaciju vremenskih slojeva odabrana je jednokoračna implicitna Eulerova metoda. *BCTypeParam* klasa predstavlja definiciju Dirichletovih rubnih uvjeta. Klasa je dovoljno fleksibilna da dopušta implementaciju i rubnih uvjeta koji se mijenjaju kroz vrijeme. Ta klasa ide često uz klasu koja definira vrijednost funkcije na Dirichletovim rubovima kroz vremenske slojeve. Te vrijednosti se prirodno interpoliraju u vektor rješenja. Pozivom metode *apply()* se kreće u rješavanje jednažbe. Spomenimo da lokalni operatori u sebi imaju metode kao što su, npr. *alpha\_volume* i *alpha\_boundary*. Unutar metode *alpha\_volume* korisnik implementira varijacijsku jednažbu po kontrolnim volumenima, dok se Neumannovi rubni uvjeti implementiraju unutar *alpha\_boundary* metode. Nakon toga, PDELab se sam brine da te lokalne račune proširi kroz cijelu mrežu i akumulira rezidual s kojim potom barata linearni rješavač. Za svaki vremenski sloj on riješava linearni sustav jednažbi, čije rješenje predstavlja vektor koeficijenata iz 1.2.17. Što se tiče implementacijskih detalja, većina varijabli(objekata) su instancirani kao *reference(konstantan pokazivač)* i kao takve se prenose internim funkcijama. Koristeći *prenošenje preko referenci* kod je znatno brži. Naime, funkcijama smo mogli objekte prenijeti i *po vrijednostima*. Takav pristup uključuje kopiranje potpunog objekta prije prijenosa, bez obzira na njegovu veličinu. Apriori ne znamo koliko ti objekti uistinu mogu biti veliki i kod učestalih poziva funkcija izvršavanje programa bi moglo dugo trajati. Stoga umjesto da kopiramo cijeli objekt, instanciramo referencu na taj objekt koji sadrži memorijsku adresu objekta. Na taj način kada prenosimo objekt funkciji zapravo uvijek prenosimo njegovu adresu, što je ogromna ušteda vremena, ali i prostora. Naime, ovisno o arhitekturi računala, možemo reći da će ovakav prijenos uvijek involvirati prijenos samo 32 bita, koji predstavljaju adresu objekta. Funkcija potom ima pristup svemu što se nalazi na toj adresi, drugim riječima atributima i metodama objekta. Na ovaj način implementacija je znatno efikasnija.

```

const int Qk_order = 2;
using FEM = Dune::PDELab::QkLocalFiniteElementMap<GV,Coord,double,Qk_order>;
using GFS = Dune::PDELab::GridFunctionSpace<GV,FEM,CON,VBE>;
using SLOP = StationaryLocalOperator<BCTypeParam,FEM>;
using TLOP = TimeLocalOperator<FEM>;
using G00 = Dune::PDELab::GridOperator<GFS,GFS,SLOP,MBE,double,double,double,CC,CC>;
using G01 = Dune::PDELab::GridOperator<GFS,GFS,TLOP,MBE,double,double,double,CC,CC>;
using IGO = Dune::PDELab::OneStepGridOperator<G00,G01>;
using LS = Dune::PDELab::ISTLBackend_SEQ_BCGS_SSOR;
using PDESOLVER = Dune::PDELab::StationaryLinearProblemSolver<IGO,LS,U>;
using OSM = Dune::PDELab::OneStepMethod<double,IGO,PDESOLVER,U,U>;
using TDM = Dune::PDELab::ImplicitEulerParameter<double>;

FEM fem(gv);
GFS gfs(gv,fem);
BCTypeParam bctype;
bctype.setTime(time);
G bcond(gv);
bcond.setTime(time);
SLOP slop(bctype,4);
TLOP tlop(4);
G00 go0(gfs,cc,gfs,cc,slop,mbe);
G01 go1(gfs,cc,gfs,cc,tlop,mbe);
IGO igo(go0,go1);
PDESOLVER pdesolver(igo,ls,1e-10);
TDM method;
OSM osm(method,igo,pdesolver);
osm.apply(time,dt,uold,bcond,unew);

```

Slika 2.2: Dio koda koji predstavlja implementaciju rješavača evolucijske jednadžbe

## 2.2 Ilustracije simulacija

U ovom dijelu se izlaže primjer linearne nestacionarne jednadžbe konvekcije-difuzije-reakcije koja se numerizira metodom konačnih elemenata u prostoru( $\mathbb{Q}_2$ ) i DGM-om(SIIPG) te ilustracije dobivenih rješenja. Inicijalno-rubna zadaća glasi: Potrebno je pronaći  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  tako da vrijede

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \epsilon \Delta u + cu = f, \text{ u } Q_T \quad (2.2.1)$$

$$u = u_D, \text{ na } \Gamma_D \times (0, T) \quad (2.2.2)$$

$$\epsilon \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N, \text{ na } \Gamma_N \times (0, T) \quad (2.2.3)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.2.4)$$

gdje je  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $c = x^2 y^2$ , a  $\epsilon > 0$  je difuzijska konstanta koja se u kodu tretira varijablom, tj. dopušteno je njeno mijenjanje radi ispitivanja stabilnosti metode.

Za početak se možemo zapitati kako ćemo testirati korektnost našeg programa. Program koji ćemo napisati prilično je složen pa u njemu postoje brojna mjesta na kojima se greške lako mogu previdjeti. Program je stoga nužno testirati na više test-primjera u kojima znamo točno rješenje kontinuirane zadaće, kako bismo mogli izračunati grešku metode. Jedan jednostavan način testiranja je *fabriciranjem* točnog rješenja. To je metoda u kojoj za rješenje  $u$  odabiremo proizvoljnu glatku funkciju. Uvrštavajući u diferencijalnu jednadžbu lako izračunavamo funkciju desne strane  $f$ . Pri tome za rubni Dirichletov uvjet uzimamo  $g := u$ . Ako riješimo zadaću sa tako konstruiranim  $f$  i  $g$ , moramo dobiti aproksimaciju funkcije  $u$ . Stoga smo u prilici mjeriti razliku točnog i aproksimativnog rješenja. Dodatno se može potvrditi da ta razlika teži u 0 kako finoća mreže( $h$ ) teži u 0. To se može napraviti sa profinjenjem mreže nekoliko puta.

Pa neka je

$$u(x, y, t) = \sin(4\pi x) \sin(4\pi y) \sin(t)$$

tada slijedi

$$u_t(x, y, t) = \cos(t) \sin(4\pi x) \sin(4\pi y)$$

$$u_x(x, y, t) = 4\pi \cos(4\pi x) \sin(4\pi y) \sin(t)$$

$$u_y(x, y, t) = 4\pi \sin(4\pi x) \cos(4\pi y) \sin(t)$$

$$u_{xx}(x, y, t) = -16\pi^2 \sin(4\pi x) \sin(4\pi y) \sin(t)$$

$$u_{yy}(x, y, t) = -16\pi^2 \sin(4\pi x) \sin(4\pi y) \sin(t)$$

$$\nabla u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}.$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Inicijalni uvjet je očito  $u(x, y, 0) = 0$ . Funkcija desne strane je

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= \cos(t) \sin(4\pi x) \sin(4\pi y) + 4\pi \sin(t) (\cos(4\pi x) \sin(4\pi y) + \sin(4\pi x) \cos(4\pi y)) \\ &\quad + (x^2 y^2 - 32\epsilon\pi^2) \sin(4\pi x) \sin(4\pi y) \sin(t) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Za vremenski korak  $\Delta t$  je uzeto 0.01, dok je  $T = 2$ . Postavimo sada punu zadaću, za  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \epsilon \Delta u + cu = f \quad \text{u } \Omega \times (0, T) = Q_T \quad (2.2.6)$$

$$u(x, y, t) = \sin(4\pi x) \sin(4\pi y) \sin(t) =: u_D \quad \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \quad (2.2.7)$$

$$\epsilon \nabla u(x, y, t) \cdot \mathbf{n} = g_N \quad \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \quad (2.2.8)$$

$$u(x, y, t) = 0 \quad \text{na } \Omega \times \{t = 0\} \quad (2.2.9)$$

Dirichletov rub je dan sa:  $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \{0\} \times [0, 1]$ , Neumannov rub:  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ . *Varijacijska jednadžba.* Pomnožimo 2.2.1 i primijenimo teorem o divergenciji nakon što prointegriramo po domeni  $\Omega$  te iskoristimo uvjete 2.2.2 i 2.2.3

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} uv \, dx + \int_{\Omega} \frac{d}{dx} uv \, dx + \int_{\Omega} \frac{d}{dy} uv \, dx - \epsilon \int_{\Omega} \Delta uv \, dx + c \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V_h. \quad (2.2.10)$$

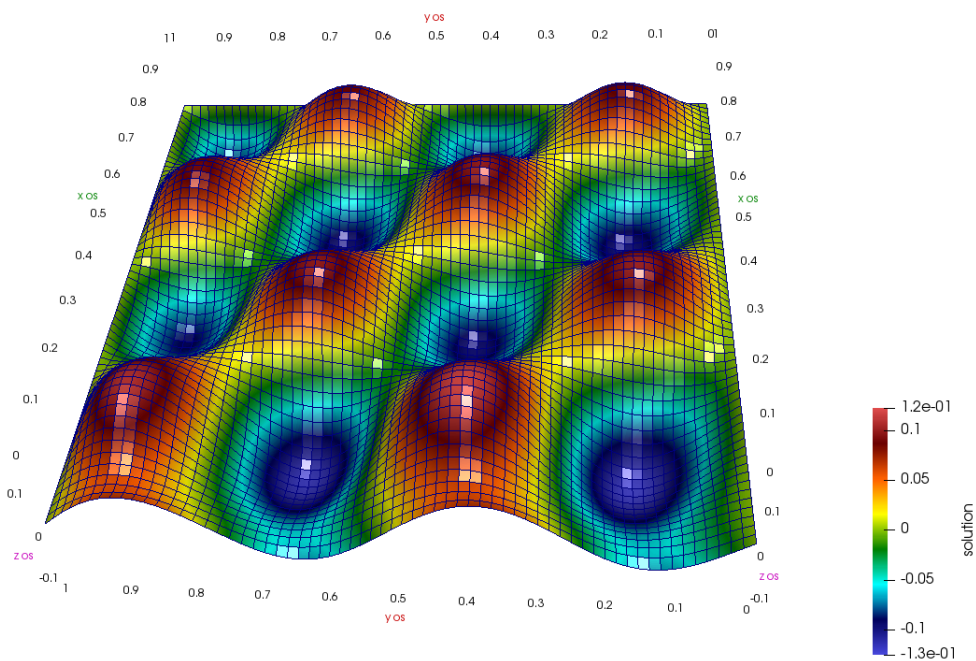
$\mathbf{n}$  je kao i obično, pripadna jedinična vanjska normala  $\vec{\mathbf{n}} = (n_x, n_y)$ . Za ovaj slučaj je  $\vec{\mathbf{n}} = (-1, 0)$  Raspišimo integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d}{dx} uv \, dx &= \int_{\Gamma_N} u v n_x \, dS - \int_{\Omega} u \frac{d}{dx} v \, dx = - \int_{\Gamma_N} uv \, dS - \int_{\Omega} u \frac{d}{dx} v \, dx \\ \int_{\Omega} \frac{d}{dy} uv \, dx &= \underbrace{\int_{\Gamma_N} u v n_y \, dS}_{=0} - \int_{\Omega} u \frac{d}{dy} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{d}{dy} v \, dx \\ &- \epsilon \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} v \, dS = \epsilon \int_{\Gamma_N} \frac{d}{dx} uv \, dS \end{aligned}$$

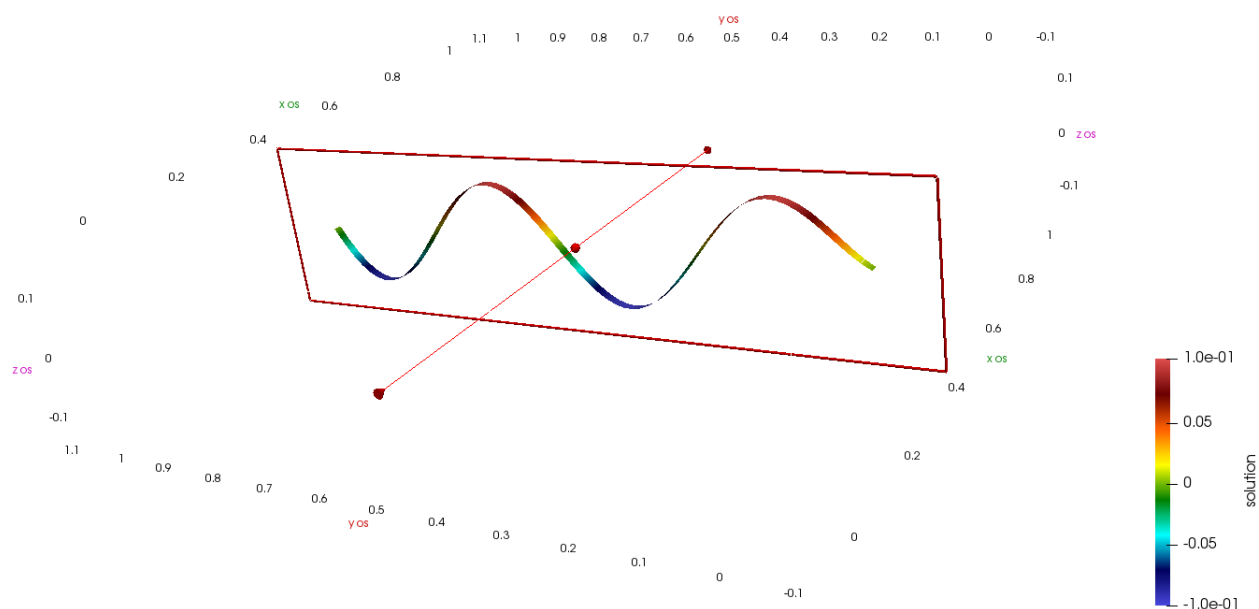
Rastavimo izraz 2.2.10 na dijelove koji doprinose reziudalu integriramo li po nutrini, odnosno po rubu.

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{vol}} &= - \int_{\Omega} u \frac{d}{dx} v \, dx - \int_{\Omega} u \frac{d}{dy} v \, dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + c \int_{\Omega} uv - \int_{\Omega} f v \\ \alpha_{\text{bdry}} &= - \int_{\Gamma_N} uv \, dS + \epsilon \int_{\Gamma_N} \frac{d}{dx} uv \, dx \end{aligned}$$

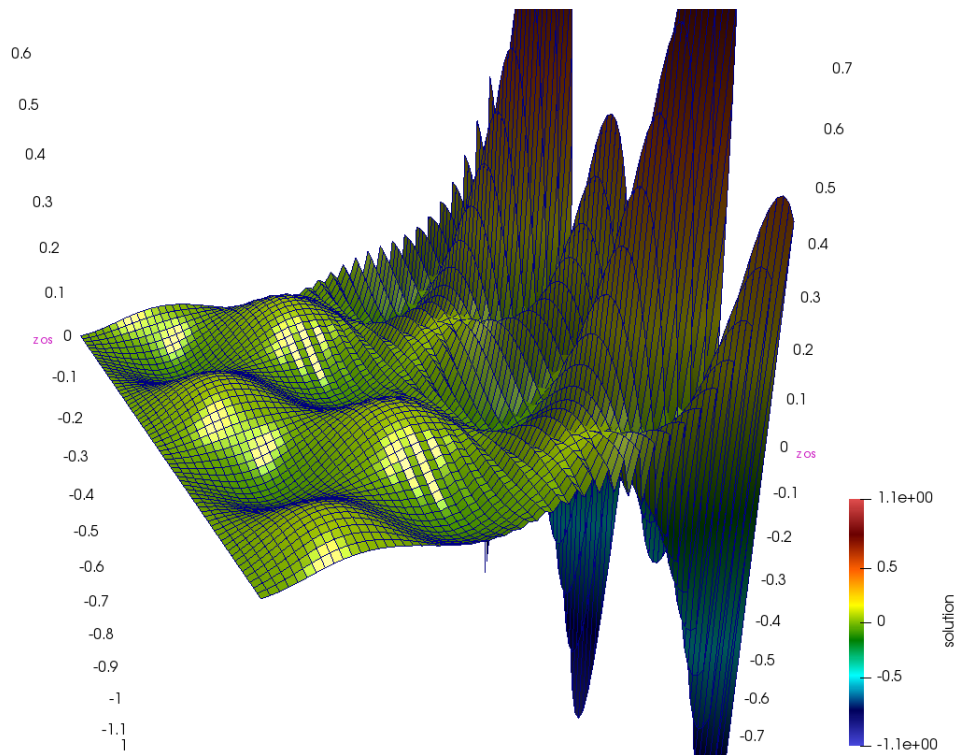
Slijedi prikaz grafova aproksimativnog rješenja jednadžbe 2.2.1 za difuzijske koeficijente  $\epsilon = 10^{-2}$  i  $\epsilon = 10^{-6}$  kroz vremenske slojeve, konkretno u trenucima  $t = 0.9$  i  $t = 1.7$ . Korak diskretizacije je bio  $h = \frac{1}{64}$ . Za vremensku diskretizaciju je iskorištena implicitna Eulerova metoda, koja ima 1. red točnosti. Na prvom i trećem paru slika je prikazano rješenje dobiveno koristeći DG metodu(SIIPG), dok su na drugom i četvrtom rješenja dobiveni metodom konačnih elemenata u prostoru( $\mathbb{Q}_2$ ). Uspoređujući metode općenito, DGM je zahtjevnija u broju stupnjeva slobode za isti red točnosti greške. S druge strane, numerička rješenja dobivena konformnom MKE-a i DGM-a su vrlo različita u situacijama kada je konvektivni član dominantan nad difuzijskim(što je realnost u većini fizikalnih modela), drugim riječima za veliki *Pécletov broj*. Sa slika je vidljiv rast amplituda oscilacija sa padom difuzijskog koeficijenta kod MKE-a, dok DG pokazuje stabilnost čak i za  $\epsilon \ll 1$ . Trodimenzionalnim numeričkim rješenjima su dodane projekcije rješenja na ravnine  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ ,  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  i na sferu sa centrom u  $(0.5, 0.5, 0)$  i radijusom 0.5.



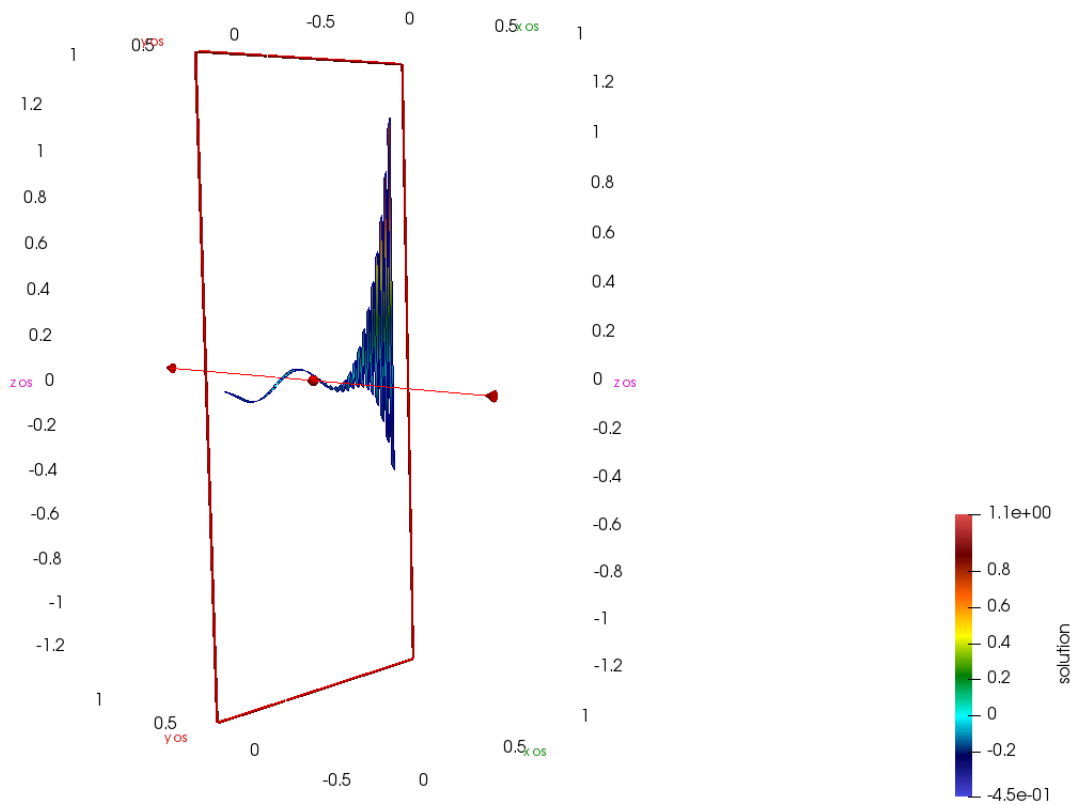
(a) 3D prikaz DGM rješenja za  $\epsilon = 1e-2$ ,  $t = 0.9$ ,  $L^2$  norma greške:  $5.6e-2$ .



(b) DGM rješenje za  $\epsilon = 1e-2$ ,  $t = 0.9$  (rez za  $x = 0.44$ )

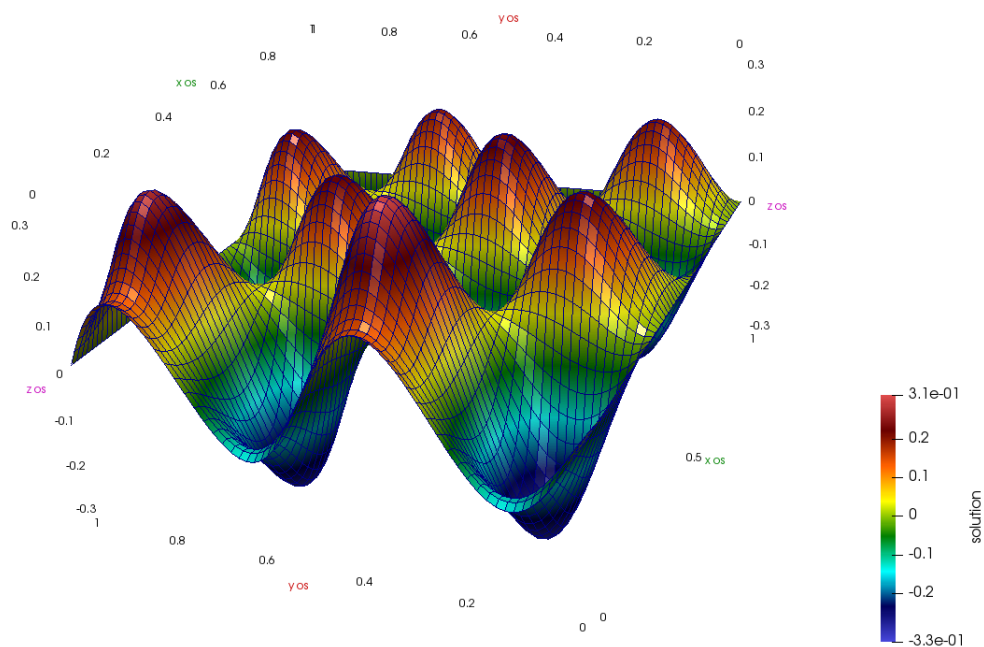


(a) 3D prikaz MKE rješenja za  $\epsilon = 1e-2$ ,  $t = 0.9$ ,  $L^2$  norma greške:  $1.34e3$ . Na slici se vidi početak pojave rubnih slojeva.

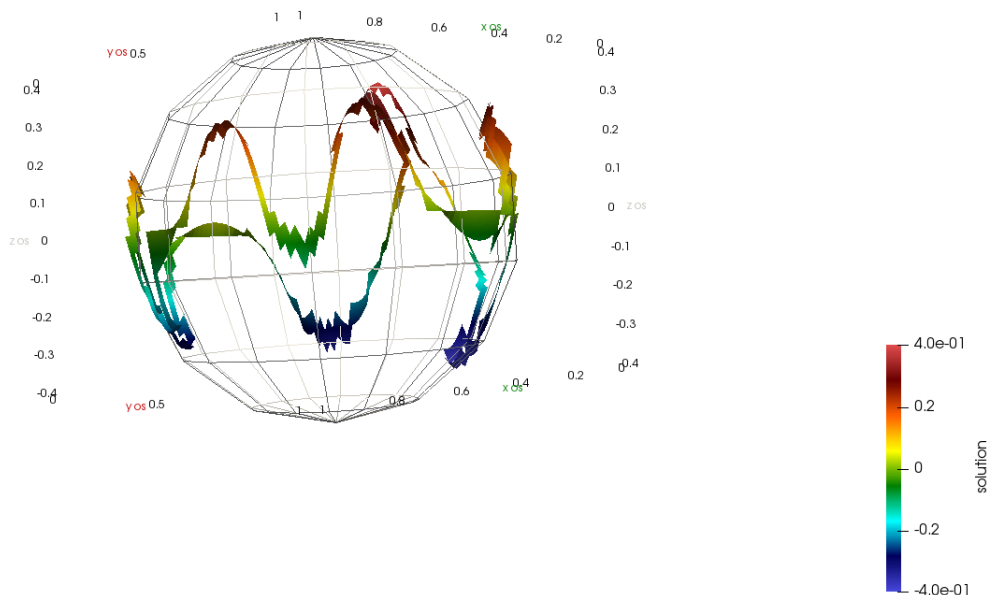


(b) MKE rješenje za  $\epsilon = 1e-2$ ,  $t = 0.9$  (rez za  $y = 0.31$ )

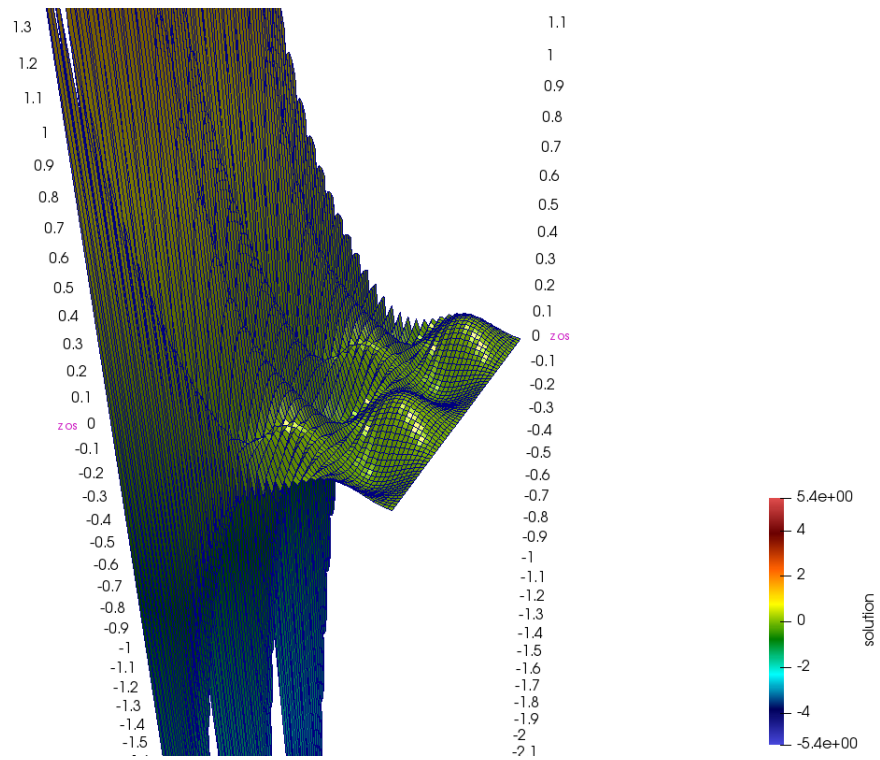




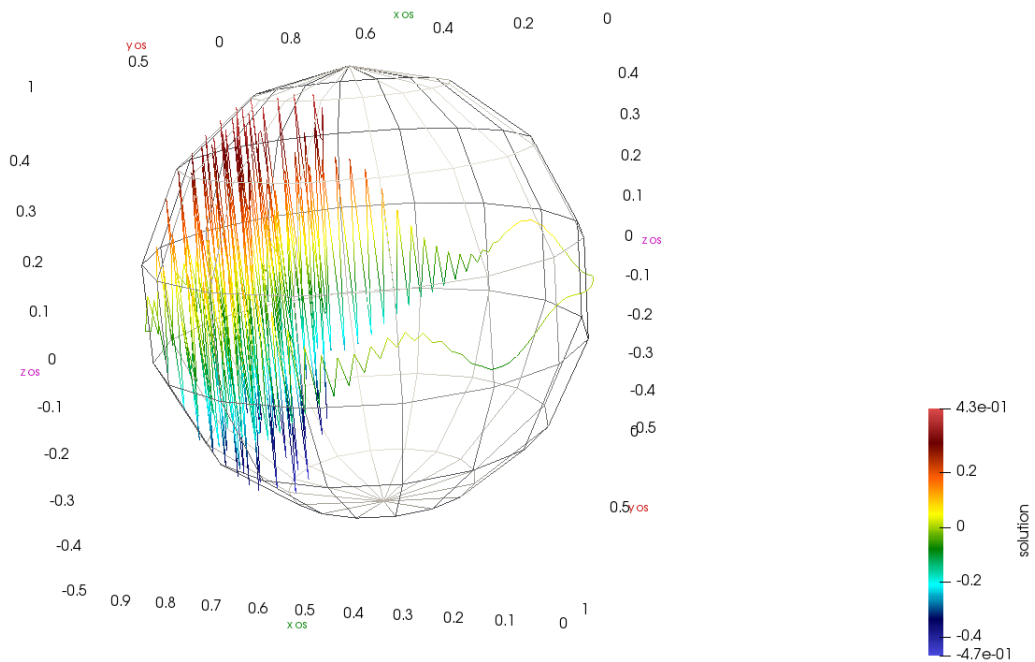
(a) 3D prikaz DGM rješenja za  $\epsilon = 1e-6$ ,  $t = 1.7$ ,  $L^2$  norma greške:  $7.1e-2$ .



(b) DGM rješenje za  $\epsilon = 1e-6$ ,  $t = 1.7$  (prikaz na sferi  $S(0.5, 0.5, 0)$ ;  $r = 0.5$ )



(a) 3D prikaz MKE rješenja za  $\epsilon = 1e-6$ ,  $t = 1.7$ ,  $L^2$  norma greške:  $2.3e5$



(b) MKE rješenje za  $\epsilon = 1e-6$ ,  $t = 1.7$  (prikaz na sferi  $S(0.5, 0.5, 0)$ ;  $r = 0.5$ )

# Bibliografija

- [1] V. Dolejší, M. Feistauer, *Discontinuous Galerkin Method. Analysis and Application to Compressible Flow*, Springer, 2015.



# Sažetak

U ovom radu proučavali smo diskontinuiranu Galerkinovu metodu te njenu primjenu na linearnu nestacionarnu jednadžbu konvekcije-difuzije. Iznešeni su rezultati ocjena greške metode u različitim varijantama jednadžbe i rubnih uvjeta. Pokazano je da u slučaju linearne zadaće konvekcije-difuzije-reakcije postoji uniformna ocjena u pogledu difuzijskog člana  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . Dan je opis *SUPG* metode kojom se stabiliziraju diskontinuirani elementi u slučaju velikog *Pécletovog broja*. Predstavili smo dva dijela koda koji su opisivali implementaciju dva važna koraka u rješavanju jednadžbe unutar *DUNE* okoline: definiciju i formiranje mreže koja predstavlja diskretiziranu domenu te inicijalizaciju objekata potrebnih za numerizacijski proces. U većini fizikalnih modela konvektivni član iz jednadžbe je dominantan u odnosu na difuzijski. To dovodi do situacije u kojoj je kontinuirani problem dobro postavljen i ima jedinstveno rješenje na osnovu Lax-Milgramove leme, ali numeričko rješenje, dobiveno standardnom metodom konačnih elemenata, nije stabilno. Pojavljuju se oscilacije rješenja koje se propagiraju kroz vremenske slojeve, štoviše, amplitude im rastu. Numeričkim eksperimentima smo potvrdili stabilnost diskontinuirane Galerkinove metode za velike *Pécletove brojeve* za razliku od metode konačnih elemenata koja proizvodi rubne slojeve i zahtijeva dodatne napredne stabilizacijske tehnike.



# Summary

In this paper, we studied discontinuous Galerkin method as well as its application of linear evolutionary convection diffusion equation. We shown error estimate results under different variances of equation and boundary conditions. Furthermore, it was stated that there exists uniform error estimate with respect to the diffusion coefficient  $\epsilon \rightarrow 0_+$  for linear convection diffusion reaction equation. We introduced *SUPG* method used for stabilization of discontinuous elements for large *Péclet numbers*. We presented two code snippets which implement two crucial steps when solving equations using *DUNE* framework: grid definition, which is used for representing discretization of a domain, and instantiation of objects needed for numerization process. Within most models describing some physical phenomena, convective part is dominant compared to diffusion part. It leads to a well posed continuous problem which, according to Lax-Milgram lemma, has an unique solution. Numerical solutions obtained using conforming method of finite elements, however, suffered from severe instabilities. They often contain oscillations which only amplify through time. Quality of discontinuous Galerkin method was confirmed by numerical experiment for large *Péclet numbers*, contrary to finite element method which yields boundary layers in solution and requires extra sophisticated stabilization techniques.





# Životopis

Domagoj Bošnjak je rođen 19.06.1992. u Slavonskom Brodu. Pohađao je osnovnu školu "Bogoslav Šulek", a zatim Prirodoslovno-matematičku gimnaziju "Matija Mesić". Godine 2011. upisuje preddiplomski smjer "Matematika" na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2015. godine je upisao diplomski studij "Primijenjena matematika" na istom.