Prostori konfiguracija i operade malih kocaka

Crnković, Vlatko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Vlatko Crnković

PROSTORI KONFIGURACIJA I OPERADE MALIH KOCAKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **v**

Uvod **2**

1 Operade u topologiji **3**
1.1 Operade 3
1.2 A_∞ i E_∞ operade 6
1.3 Monade 8
1.4 Boardman-Vogtova rezolventa 11

2 Operade malih kocaka **15**
2.1 Operade malih kocaka 15
2.2 Višestruki prostori petlji 17
2.3 Prostori konfiguracija i operade 21

3 Ulaganja i dugi uzlovi **27**
3.1 Dugi uzlovi 27
3.2 Homotopski tip prostora $\hat{\mathcal{K}}$ 34

Dodatak **41**
A Teorija kategorija 41
B Topologija 43

Bibliografija **47**

Uvod

Temeljni pojam ovog rada je pojam *operade*. Današnju definiciju pojma operade, a i sam pojam, uvodi J. Peter May u svom radu karakterizacije višestrukih prostora petlji, [7]. Osnova tog rada je operada malih kocaka koja potiče iz rada J.M. Boardmana i R.M. Vogta, [1]. Premda Boardman i Vogt nisu koristili operade, nego srodni pojam **PROP**, koji uvodi MacLane, njihov rad je bitan u teoriji operada jer se njihova $W-$konstrukcija, koju razvijaju za *teorije* i **PROP**-ove u [2], kasnije primjenjuje i na operade. Iako je pojam operade originalno stvoren za svrhe teorije homotopije, u 90−im godinama prošlog stoljeća upotreba operada se širi u teoriju deformacija i teoriju kvantnih polja te kasnije i u homološku algebru, algebarsku geometriju, kombinatoriku, računarstvo...

Uz operadu, osnovni pojam teorije je i algebra nad operadom $\mathcal{P}$, odnosno $\mathcal{P}-$prostor. Operade u stvari opisuju temeljna algebarska svojstava svojih algebri. Osnovi primjeri bit će nam **Ass** i **Comm** operade čije ćemo pripadne algebre karakterizirati kao asocijativne monoide, odnosno komutativne monoide. Premda se danas pojam operade najčešće definira u općenitoj simetričnoj monoidalnoj kategoriji, mi promatramo samo *topološke operade*, odnosno operade u kategoriji kompaktno-generiranih Hausdorffovih prostora **Top**. Osnovni primjer topološke operade je *operada endomorfizma*. Preciznije, za objekt X u kategoriji kompaktno-generiranih Hausdorffovih prostora s baznom točkom, $\mathbf{Top}_*$, operada endomorfizma prostora X je kolekcija $\{\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X^n, X) : n \in \mathbb{N}_0\}$, opskrbljena kompozicijama te djelovanjem simetrične grupe, odnosno permutacijom varijabli. U radu ćemo uz same operade i njima bliske pojmove promatrati i prostore konfiguracija $F(\mathbb{R}^n, \cdot)$ te djelovanje operade malih kocaka na određeni model za prostor dugih uzlova $\mathcal{K}$. Ukratko, prostori konfiguracija $F(\mathbb{R}^n, k)$ sastoje se od uređenih $k-$torki različitih točaka u $\mathbb{R}^n$, a pod duge uzlove smatramo određena ulaganja realnog pravca u $\mathbb{R}^3$. Glavni rezultati koje prolazimo u ovom radu su Mayev teorem karakterizacije višestrukih prostora petlji, aproksimacijski teorem, koji je jedan od ključnih koraka u dokazu teorema karakterizacije, te rezultat R. Budneya koji opisuje (slabi) homotopski tip prostora dugih uzlova.

Ovaj rad organiziran je u tri poglavlja uz dodatak koji uključuje neke osnovne pojmove i rezultate teorije kategorija i topologije. Prva dva poglavlja prate *The geometry of iterated loop spaces, J.P. May*. U prvom poglavlju postavljamo temelj za ostatak rada: uvodimo pojmove topološke operade, $\mathcal{P}-$prostora, monade pridružene operadi, algebre nad monadom. Navodimo karakterizaciju $\mathcal{P}-$prostora kao algebri nad monadom pridruženoj operadi $\mathcal{P}$. Na primjerima operada **Ass** i **Comm** pokazujemo kako operade opisuju osnovna algebarska svojstva pripadnih prostora te uvodimo pojmove A_∞ i E_∞ operada koje su svojevrsna poopćenja operada **Ass** i **Comm**. Na kraju prvog poglavlja opisujemo Boardman-Vogtovu $W-$konstrukciju koja operadi $\mathcal{P}$ pridružuje, njoj homotopski ekvivalentnu operadu $W(\mathcal{P})$.

U drugom poglavlju detaljnije se bavimo operadom malih $n-$kocaka C_n. Drugi odjeljak ovog poglavlja posvećen je originalnom razlogu uvođenja teorije operada, višestrukim prostorima petlji. Pokazujemo da su višestruki prostori petlji $\Omega^n X$ prirodno C_n-prostori. Navodimo Mayev teorem karakterizacije višestrukih prostora petlji, koji nam govori o dovoljnom uvjetu da C_n prostor Y bude homotopski ekvivalentan nekom višestrukom prostoru petlji, te zalazimo u dokaz teorema aproksimacije koji se temelji na konstruiranju morfizma monada $\alpha_n : C_n \to \Omega^n\Sigma^n$, gdje je C_n monada pridružena operadi C_n. Na kraju poglavlja dokazujemo da je operada malih $n-$kocaka homotopski ekvivalentna prostorima konfiguracija $F(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Također promatramo kompaktifikaciju prostora konfiguracija, $C[\cdot]$, te njoj pripadnu strukturu operade, poznatiju kao Kontsevich-eva operada, i pokazujemo, upotrebom Boardman-Vogtove rezolvente, da je Kontsevich-eva operada homotopski ekvivalentna operadi malih kocaka.

U trećem poglavlju promatramo jednu od primjena teorije operada, konkretnije, u teoriji dugih uzlova. Prostor dugih uzlova definiran je kao prostor glatkih ulaganja $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ s kompaktnim "nosačem". Preciznije

$$\mathcal{K} = \{f \in Emb(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) : f(t) = (t, 0, 0), \forall |t| \geq 1\}$$

te na $\mathcal{K}$ imamo operaciju sume $\# : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, koju zamišljamo kao dovezivanje uzlova. Prateći rad Ryana Budneya, *Little cubes and long knots*, djelomično opisujemo (slabi) homotopski tip prostora $\mathcal{K}$. Odabirom pogodnog modela $\hat{\mathcal{K}}$, za $\mathcal{K}$, na kojem promatramo strukturu C_2-prostora pokazujemo $\mathcal{K} \simeq C_2(\mathcal{P} \sqcup \{*\})$ (teorem 3.2.2), gdje je $\mathcal{P}$ prostor takozvanih prostih uzlova. Rad se temelji na Schubertovim rezultatima da operacija sume # na $\pi_0\mathcal{K}$ inducira strukturu komutativnog monoida, te da je svaki uzao prikaziv kao suma prostih, gdje je taj prikaz jedinstven do na poredak pribrojnika i izotopiju. Spomenutu komutativnost dokazujemo koristeći djelovanje operade C_2, te opisujemo kako Budney svodi dokaz na promatranje grupa difeomorfizama određenih $3-$mnogostrukosti. Budneyev dokaz uključuje i razne metode diferencijalne i algebarske topologije, no mi se fokusiramo na dijelove dokaza koji uključuju djelovanje operade malih kocaka te ostale korake samo navodimo.

Ovim putem htio bih se zahvaliti svom mentoru, doc. dr. sc. Matiji Bašiću, na iznimnom strpljenju i neprocjenjivoj pomoći u pripremi ovog rada. Također bih se htio zahvaliti profesorici Barici Kosić čije me vodstvo kroz osnovnu školu usmjerilo na ovaj put.

Poglavlje 1

Operade u topologiji

U ovom poglavlju uvodimo pojmove operade, monade, monade pridružene operadi, $\mathcal{P}-$prostor za neku operadu $\mathcal{P}$ te navodimo neke osnovne primjere ovakvih objekata. S **Top** i **Top**$_*$ označimo kategoriju kompaktno-generiranih Hausdorffovih prostora i kompaktno-generiranih Hausdorffovih prostora s istaknutom točkom.

1.1 Operade

Za neprazan skup T, lijevo djelovanje simetrične grupe S_n na T^n dano je sa

$$\sigma(t_1, ..., t_n) = (t_{\sigma^{-1}(1)}, ..., t_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Premutaciju $\sigma \in S_n$ ćemo obično poistovjećivati s uređenom $n-$torkom $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ te ćemo s e_n označiti neutralni element u S_n. Za permutacije $\tau_i \in S_{k_i},\ i \in \{1, ..., n\}$ definiramo permutaciju $\tau_1 \times ... \times \tau_n$ kao sliku od $(\tau_1, ..., \tau_n)$ pod očitom inkluzijom $S_{k_1} \times ... \times S_{k_n} \hookrightarrow S_k$, gdje je $k = \sum_{i=1}^n k_i$. Također, za $\sigma \in S_n$ i $k_i \in \mathbb{N}_0,\ i \in \{1, ..., n\}$ definiramo permutaciju $\sigma[k_1, ..., k_n] \in S_k,\ k = \sum_{i=1}^n k_i$ za koju je $(\sigma[k_1, ..., k_n])(x_1, ..., x_k) = \sigma((x_1, ..., x_{k_1}), (x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+k_2}), ..., (x_{k_1+...+k_{n-1}+1}, ..., x_{k_1+...+k_n}))$ odnosno $\sigma[k_1, ..., k_n]$ na uređene $k-$torke $(x_1, ..., x_k)$ djeluje isto kao i σ na uređenu $n-$torku koja je određena particijom od $(x_1, ..., x_n)$ induciranom s $(k_1, ..., k_n)$. Još napomenimo da je S_0 jednočlan skup s elemetnom koji smatramo jedinstvenom permutacijom na praznom skupu.

Primjer 1.1.1. *Neka je* $\sigma \in S_3, \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$. *Tada za* $\sigma[2, 2, 3]$, *po definiciji, vrijedi* $\sigma[2, 2, 3](x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \sigma((x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6, x_7)) = ((x_5, x_6, x_7), (x_1, x_2), (x_3, x_4)) = (x_5, x_6, x_7, x_1, x_2, x_3, x_4)$. *Prethodni račun daje* $\sigma[2, 2, 3] = (4, 5, 6, 7, 1, 2, 3)$.

Definicija 1.1.2. Operada $\mathcal{P}$ *u* **Top** *je kolekcija* $\{\mathcal{P}(n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *objekata u* **Top**, *takvih da je* $\mathcal{P}(0) = \{*\}$ *zajedno sa sljedećom strukturom:*
• *Kompozicijski produkt, zadan morfizmima*

$$\mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(k_1) \times ... \times \mathcal{P}(k_n) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}(k),\ k = \textstyle\sum_{j=1}^{n} k_j$$

koji zadovoljavaju sljedeću formulu asocijativnosti:

$$\gamma(\gamma(c; d_1, ..., d_n); e_1, ..., e_k) = \gamma(c; f_1, ..., f_n)$$

gdje je $f_i = \gamma(d_i; e_{k_1+...+k_{i-1}+1}, ..., e_{k_1+...+k_i})$, *i* $f_i = *$ *ako je* $k_i = 0$.
• *Jedinica* $1 \in \mathcal{P}(1)$, *takva da je* $\gamma(1; d) = d$ *i* $\gamma(c; 1^k) = c$.
• *Permutacija varijabli, zadana desnim djelovanjem simetrične grupe* S_n *na* $\mathcal{P}(n)$, *koja zadovoljava formule:*

$$\gamma(c\sigma; d_1, ..., d_n) = \gamma(c; d_{\sigma^{-1}(1)}, ..., d_{\sigma^{-1}(n)})\sigma[k_1, ..., k_n]$$

$$\gamma(c; d_1\tau_1, ..., d_n\tau_n) = \gamma(c; d_1, ..., d_n)(\tau_1 \times ... \times \tau_n).$$

Za operadu $\mathcal{P}$ *kažemo da je* Σ-slobodna *ako je djelovanje* S_n *na* $\mathcal{P}(n)$ *slobodno za svaki* $n \in \mathbb{N}_0$.

Operade možemo shvaćati kao apstraktne prostore funkcija više varijabli s jednim "izlazom", a prostore na kojima ih možemo realizirati kao doslovne prostore funkcija više varijabli zvat ćemo $\mathcal{P}-$prostori. Promatranje strukture $\mathcal{P}-$prostora nam omogućuje da, proučavanje nekog prostora X svedemo, djelomično ili potpuno, na proučavanje operade $\mathcal{P}$ ukoliko pokažemo da je X $\mathcal{P}-$prostor. Neformalno, recimo da je objekt A u **Top** $\mathcal{P}-$prostor ako je obogaćen preslikavanjima $\mathcal{P}(n) \times A \times \overset{(n)}{...} \times A \longrightarrow A$ koja su "kompatibilna" s jedinicom, kompozicijskim produktom i djelovanjem simetrične grupe. Vizualizaciju kompozicijskog produkta vidimo na slikama 2.1 i 2.2 u drugom poglavlju.

Primjer 1.1.3. *Neka je* $X = (X, *)$ *objekt u* $\mathbf{Top}_*$. *Promatrajmo kolekciju objekata* $\mathcal{E}_X = \{\mathcal{E}_X(n) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X^n, X) : n \in \mathbb{N}_0\}$. *Definirajmo desno djelovanje simetrične grupe* S_n *na* $\mathcal{E}_X(n)$ *s* $f\sigma(y) = f(\sigma y)$, *te prelikavanja* $\gamma : \mathcal{E}_X(n) \times \mathcal{E}_X(k_1) \times ... \times \mathcal{E}_X(k_n) \longrightarrow \mathcal{E}_X(k)$ *s*

$$\gamma(c; d_1, ..., d_n) = c \circ (d_1 \times ... \times d_n).$$

Kolekcija $\mathcal{E}_X$, *s ovako definiranim djelovanjem simetrične grupe i kompozicijskim produktom te* id_X *kao jedinicom, ima strukturu operade.*

Definicija 1.1.4. *Operadu* $\mathcal{E}_X$ *iz primjera* 1.1.3 *zovemo* operadom endomorfizma *na X.*

Definicija 1.1.5. **Morfizam** *operada* $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ *je niz preslikavanja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $f_n : \mathcal{P}(n) \longrightarrow \mathcal{Q}(n)$ *koja su kompatibilna s jedinicom, kompozicijskim produktom i permutacijom varijabli, tj. takvi da je* $f_1(1) = 1, \sigma \circ f_n = f_n \circ \sigma$ *te da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(k_1) \times ... \times \mathcal{P}(k_n) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{P}(k) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_n \times f_{k_1} \times ... \times f_{k_n}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_k} \\ \mathcal{Q}(n) \times \mathcal{Q}(k_1) \times ... \times \mathcal{Q}(k_n) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Q}(k) \end{array}$$

gdje je $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

Definicija 1.1.6. *Neka je X objekt u* $\mathbf{Top}_*$. **Djelovanje** *operade* $\mathcal{P}$ *na X je morfizam operada* $\theta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{E}_X$, *a uređeni par* (X, θ) *nazivamo* $\mathcal{P}-$*prostor.* **Morfizam** $\mathcal{P}-$*prostora* $f : (X, \theta) \longrightarrow (X', \theta')$ *je preslikavanje* $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X, X')$ *takvo da je* $f \circ \theta_n(c) = \theta'_n(c) \circ f^n$.

Lema 1.1.7 ([7])**.** *Djelovanje* $\theta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{E}_X$ *određuje i određeno je preslikavanjima*

$$\tilde{\theta}_n : \mathcal{P}(n) \times X^n \longrightarrow X$$

takvima da je $\tilde{\theta}_1(1; x) = x, \forall x \in X$, $\tilde{\theta}_n(c\sigma; y) = \tilde{\theta}_n(c; \sigma y), \forall c \in \mathcal{P}, \forall y \in X^n$ *te da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(k_1) \times ... \times \mathcal{P}(k_n) \times X^k \arrow[r, "\gamma \times id_{X^k}"] \arrow[d, "id_{\mathcal{P}(n)} \times perm"] & \mathcal{P}(k) \times X^k \arrow[dr, "\tilde{\theta}_k"] & \\ & & X \\ \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(k_1) \times X^{k_1} \times ... \times \mathcal{P}(k_n) \times X^{k_n} \arrow[r, "id_{\mathcal{P}(n)} \times \tilde{\theta}_{k_1} \times ... \times \tilde{\theta}_{k_n}"] & \mathcal{P}(n) \times X^n \arrow[ur, "\tilde{\theta}_n"'] & \end{tikzcd}$$

U nastavku ćemo koristiti oznaku θ *i za pripadno djelovanje i za* $\tilde{\theta}$.

Napomena 1.1.8. *Lema* 1.1.7 *dokazuje se direktnom provjerom. Zbog karakterizacije djelovanja* θ *iz leme* 1.1.7 *imamo da su morfizmi* $\mathcal{P}-$*prostora morfizmi* $f : X \longrightarrow X'$ *u* $\mathbf{Top}_*$ *takvi da sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(n) \times X^n & \xrightarrow{\theta_n} & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle id_{\mathcal{P}(n)} \times f^n} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{P}(n) \times X^n & \xrightarrow{\theta'_n} & X' \end{array}$$

Bitni primjeri operada su nam **Comm** i **Ass** operade koje definiramo u sljedećem odjelku. Također bitna klasa operada su nam operade malih kocaka, i njima analogne operade malih kugala, kojima se detaljnije bavimo u poglavlju 2.

1.2 A_∞ i E_∞ operade

U ovom odjeljku definiramo operade **Comm** i **Ass** te uvodimo njima bliske pojmove A_∞ i E_∞ operada/prostora. Pokazujemo da su **Ass**−prostori, odnosno **Comm**−prostori, topološki monoidi, odnosno komutativni topološki monoidi.

Comm i Ass operade

Operada **Ass** definirana je s $\mathbf{Ass}(n) = S_n$ gdje je djelovanje simetrične grupe dano desnim množenjem, jedinica je zadana trivijalno, a kompozicijski produkt se definira s

$$\gamma(e_n; e_{k_1}, ..., e_{k_n}) = e_k$$

te se proširuje tako da zadovoljava relacije permutacije varijabli iz definicije 1.1.5. Operada **Comm** definirana je kolekcijom $\{\mathbf{Comm}(n) = \{*\} : n \in \mathbb{N}_0\}$ te trivijalnom jedinicom, kompozicijskim produktom i djelovanjem simetrične grupe.

Primijetimo da je djelovanje operade **Comm** na prostor X određeno samo s θ_2. To je zato što je $\theta_n(\mathbf{Comm}(n))$ jednočlan skup koji sadrži $\mu(\cdot, \mu(\cdot, ..., \mu(\cdot, \cdot)...))$, gdje je $\mu = \theta_2(*)$. U tom slučaju (X, μ) zovemo **Comm**−prostor. Budući da su $\mu(\cdot, \mu(\cdot, \cdot))$ i $\mu(\mu(\cdot, \cdot), \cdot)$ elementi od $\theta_3(\mathbf{Comm})$, što je jednočlan skup, dobivamo da je μ asocijativna binarna operacija. Također imamo da je $\mu(*, \cdot) = \gamma(\mu; *, id_X) \in \mathcal{E}_X(1) \cap \theta_1(\mathbf{Comm}(1)) = \{id_X\}$ pa je $\mu(*, \cdot) = id_X$. Analogno slijedi i da je $\mu(\cdot, *) = id_X$ čime dobivamo da su **Comm**−prostori monoidi u $\mathbf{Top}_*$. Činjenica da je djelovanje S_n na $\mathbf{Comm}(n)$ trivijalno za posljedicu ima i to da je μ komutativno. Sljedeća propozicija nam daje sažetak ove diskusije te dokazujemo komutativnost od μ.

Propozicija 1.2.1. *Svaki* **Comm**−*prostor je komutativan monoid u* $\mathbf{Top}_*$.

Dokaz. Prethodna diskusija pokazuje da je $(X, \mu), \mu = \theta_2(*)$ stvarno topološki monoid. Definirajmo $\tilde{\mu} = \mu\sigma$, gdje je $\sigma = (2, 1) \in S_2$. Preciziznije, $\mu(x, y) = \tilde{\mu}(y, x), \forall x, y \in X$. Zbog Σ−invarijatnosti djelovanja θ znamo da je $\mu = \theta_2(*) = \theta_2(*\sigma) = \theta_2(*)\sigma = \mu\sigma = \tilde{\mu}$ pa dobivamo željenu tvrdnju. □

Slično pokazujemo i da su **Ass**−prostori topološki monoidi.

Propozicija 1.2.2. *Svaki* **Ass**−*prostor je monoid u* $\mathbf{Top}_*$.

Dokaz. Neka je X **Ass**−prostor te neka je $\mu = \theta_2(e_2)$. Djelovanje θ potpuno je određeno s μ. Naime, $\theta_2(\sigma) = \theta_2(e_2)\sigma = \mu\sigma$, gdje je $\sigma = (2, 1) \in S_2$ pa vidimo da je θ_2 određen s μ. Najprije vidimo da je $\theta_{n+1}(e_{n+1}) = \theta_n(\gamma(e_2; e_n, e_1)) = \gamma(\theta_2(e_2); \theta_n(e_n), \theta_1(e_1))$ pa induktivno dobivamo da su $\theta(e_n)$ jedinstveno određeni s μ. Sada imamo da je

$$\theta_n(\tau) = \theta_n((2,1)_n(2,1)_n\tau) = \theta_n((2,1)_n)(2,1)_n\tau) =$$

$$= \theta_n(\gamma(e_{n-1};\sigma, e_1, ..., e_1))(2,1)_n\tau = \gamma(\theta_{n-1}(e_{n-1}); \theta_2(\sigma), \theta_1(e_1), ..., \theta_1(e_1))(2,1)_n\tau$$

što pokazuje tvrdnju. Ovo nam daje opravdanje da koristimo oznaku (X,μ) za **Ass**−prostor. Pokažimo još da je (X,μ) monoid. Vrijedi sljedeće:

$$\mu(\mu(\cdot,\cdot),\cdot) = \gamma(\mu;\mu,1) = \gamma(\theta(e_2);\theta(e_2),\theta(e_1)) =$$

$$= \theta(\gamma(e_2;e_2,e_1)) = \theta(e_3) = \theta(\gamma(e_2;e_1,e_2)) =$$

$$= \gamma(\theta(e_2);\theta(e_1),\theta(e_2)) = \gamma(\mu;1,\mu) = \mu(\cdot,\mu(\cdot,\cdot)).$$

Ovo pokazuje da je μ asocijativan. Znamo da je $\theta_1(\mathbf{Ass}(1)) = \{1\}$ pa sličnim računom dobivamo da je $\mu(*,\cdot) = 1 = \mu(\cdot,*)$. □

Nije teško vidjeti da vrijede i obrati prethodnih propozicija:

Teorem 1.2.3. (a) (X,μ) *je* **Ass**−*prostor ako i samo je topološki monoid.*
(b) (X,μ) *je* **Comm**−*prostor ako i samo ako je komutativni topološki monoid.*

A_∞ i E_∞ operade

Definicija 1.2.4. *Kažemo da je* (C,ϵ) operada nad diskretnom operadom $\mathcal{D}$ *ako je* $\epsilon : C \to \mathcal{D}$ *morfizam operada takav da je* $\pi_0\epsilon : \pi_0 C \to \mathcal{D}$ *izomorfizam operada. U tom slučaju* ϵ *zovemo* augmentacijom *operade* C. Morfizam $\psi : (C,\epsilon) \to (C',\epsilon')$ *operada nad* $\mathcal{D}$ *je morfizam operada* $\psi : C \to C'$ *takav da je* $\epsilon'\psi = \epsilon$.

Definicija 1.2.5. *Kažemo da je morfizam operada* $\psi : C \to C'$ lokalna ekvivalencija *(odnosno* lokalna Σ-ekvivalencija*) ako je svaki* $\psi_n : C(n) \to C'(n)$ *homotopska ekvivalencija (*Σ−*invarijantna homotopska ekvivalencija).*

Definicija 1.2.6. A_∞ operada *je svaka* Σ−*slobodna operada* C *nad* **Ass** *takva da je augmentacija* $\epsilon : C \to$ **Ass** *lokalna* Σ−*ekvivalencija.* E_∞ operada *je svaka* Σ−*slobodna operada* C *nad* **Comm** *takva da je augmentacija* $\epsilon : C \to$ **Comm** *lokalna ekvivalencija. Kažemo da je* (X,θ) A_∞-prostor*, odnosno* E_∞−prostor*, ako je* (X,θ) C−*prostor za neku* A_∞*, odnosno* E_∞*, operadu* C.

Propozicija 1.2.7 ([7])**.** *Neka je* C *operada nad* **Comm** *takva da je* $\epsilon : C \to$ **Comm** *lokalna* Σ−*ekvivalencija. Svaki povezan* C−*prostor* X *je slabo homotopski ekvivalentan produktu* $\prod_{n\geq 1} K(\pi_n(X), n)$.

1.3 Monade

U ovom odjeljku konstruiramo funktor C pridružen operadi $\mathcal{C}$. Ova konstrukcija nam je bitna u karakterizaciji $\mathcal{C}-$prostora te je ključna u dokazu teorema 2.2.6.

Definicija 1.3.1. Monada (C, μ, η) *u kategoriji* $\mathbf{Top}_*$ *sastoji se od funktora* $C : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Top}_*$ *zajedno s prirodnim transformacijama funktora* $\mu : C^2 \longrightarrow C$ *i* $\eta : 1 \longrightarrow C$ *takvima da su sljedeći dijagrami komutativni za sve* $X \in \mathbf{Top}_*$*:*

$$\begin{tikzcd} CX \arrow[r, "C\eta(X)"] \arrow[dr, equal] & C^2X \arrow[d, "\mu(X)"] & CX \arrow[l, "\eta(CX)"'] \arrow[dl, equal] \\ & CX & \end{tikzcd} \qquad i \qquad \begin{tikzcd} C^3X \arrow[r, "\mu(CX)"] \arrow[d, "C\mu(X)"] & C^2X \arrow[d, "\mu(X)"] \\ C^2X \arrow[r, "\mu(X)"] & CX. \end{tikzcd}$$

Morfizam *monada* $\psi : (C, \mu, \eta) \longrightarrow (C', \mu', \eta')$ *je prirodna transformacija funktora* $\psi : C \longrightarrow C'$ *takva da su sljedeći dijagrami komutativni za sve* $X \in \mathbf{Top}_*$*:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ CX \arrow[rr, "\psi"] & & C'X \end{tikzcd} \qquad i \qquad \begin{tikzcd} CCX \arrow[r, "\psi^2"] \arrow[d, "\mu"] & C'C'X \arrow[d, "\mu'"] \\ CX \arrow[r, "\psi"] & C'X. \end{tikzcd}$$

Napomena 1.3.2. *Kvadrati i više potencije transformacije* ψ *definirani su sljedećim komutativnim dijagramom:*

$$\begin{tikzcd} C^{n+1}X \arrow[r, "C\psi^n"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\psi^{n+1}"] & C(C')^nX \arrow[d, "\psi"] \\ C'C^nX \arrow[r, "C'\psi^n"] & (C')^{n+1}X. \end{tikzcd}$$

Propozicija 1.3.3. *Neka je* $F \dashv G$ *adjunkcija funktora te* μ *i* η *pripadna jedinica i kojedinica adjunkcije. Tada je* $(GF, G\eta F, \mu)$ *monada.*

Dokaz. Promatramo adjunkciju $F \dashv G$. Znamo da su jedinica i kojedinica ove adjunkcije prirodne transformacije $\mu : 1 \rightarrow GF$ i $\eta : FG \rightarrow 1$ takve da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{tikzcd} & FGF \arrow[dr, "\eta F"] & \\ F \arrow[ur, "F\mu"] \arrow[rr, "1"] & & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\mu G"'] & & G \\ & GFG \arrow[ur, "G\eta"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

Djelovanjem na prvi dijagram s G slijeva, i drugi s F zdesna dobivamo komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd} GF \arrow[r, "GF\mu"] \arrow[dr, "1"'] & (GF)^2 \arrow[d, "G\eta F"] & GF \arrow[l, "\mu GF"'] \arrow[dl, "1"] \\ & GF & \end{tikzcd} .$$

Budući da je $\eta : FG \to 1$ prirodna transformacija te $\eta(X) : FGX \to X$ morfizam, dobivamo sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd} FGFGX \arrow[r, "\eta(FGX)"] \arrow[d, "FG\eta(X)"] & FGX \arrow[d, "\eta(X)"] \\ FGX \arrow[r, "\eta(X)"] & X. \end{tikzcd}$$

Izostavljajući X iz prethodnog dijagrama i množeći ga s G slijeva i F zdesna dobivamo:

$$\begin{tikzcd} (GF)^3 \arrow[r, "(G\eta F)GF"] \arrow[d, "GF(G\eta F)"] & (GF)^2 \arrow[d, "G\eta F"] \\ (GF)^2 \arrow[r, "G\eta F"] & GF. \end{tikzcd}$$

Ovime dobivamo da je $(GF, G\eta F, \mu)$ monada. □

U poglavlju 2 će nam od interesa biti monada $\Omega\Sigma$ dobivena iz adjunkcije $\Sigma \dashv \Omega$.

Definicija 1.3.4. Algebra (X, ξ) *nad monadom* (C, μ, η) *je objekt* $X \in \mathbf{Top}_*$ *zajedno sa* strukturnim morfizmom $\xi : CX \longrightarrow X$ *takvim da su sljedeći dijagrami komutativni:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, equal] & CX \arrow[d, "\xi"] \\ & X \end{tikzcd} \quad i \quad \begin{tikzcd} CCX \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "C\xi"] & CX \arrow[d, "\xi"] \\ CX \arrow[r, "\xi"] & X. \end{tikzcd}$$

Morfizam C-*algebri* $f : (X,\xi) \longrightarrow (X',\xi')$ *je morfizam* $f : X \longrightarrow X'$ *takav da je sljedeći dijagram komutativan:*

$$\begin{tikzcd} CX \arrow[r, "Cf"] \arrow[d, "\xi"] & CX' \arrow[d, "\xi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & X'. \end{tikzcd}$$

Konstrukcija monade pridružene operadi

Za operadu C definiramo preslikavanja $\sigma_n : C(m) \longrightarrow C(m-1), 0 \leq n < m$ formulom $\sigma_n c = \gamma(c; s_n)$, za $c \in C(m)$, gdje je

$$s_n = 1^n \times * \times 1^{m-n-1} \in C(1)^n \times C(0) \times C(1)^{m-n-1}$$

Primjer 1.3.5. *Neka je* $\mathcal{E}_X$ *operada endomofizama od* $X \in \mathbf{Top}_*$. *Tada je* $(\sigma_n f)(y) = f(s_n y)$ *za* $f : X^m \longrightarrow X$ *i* $y \in X^{m-1}$, *gdje je* $s_n : X^{m-1} \longrightarrow X^m$ *definiran s* $s_n(x_1, ..., x_{m-1}) = (x_1, ..., x_n, *, x_{n+1}, ..., x_{m-1})$.

Konstrukcija 1.3.6. *Neka je* C *operada. Na sljedeći način konstruiramo monadu* (C, μ, η) *asociranu s* C. *Za* $X \in \mathbf{Top}_*$, *neka* $\approx$ *označava relaciju ekvivalencije na disjunktnoj uniji* $\coprod_{n\geq 0} C(n) \times X^n$ *generiranu s:*

1. $(\sigma_n c, y) \approx (c, s_n y)$
2. $(c\sigma, y) \approx (c, \sigma y)$

Definiramo CX *kao skup* $\coprod_{n\geq 0} C(n) \times X^n / \approx$. *Neka je* $F_k CX$ *slika od* $\coprod_{n\geq 0}^{k} C(n) \times X^n$ *s pripadnom kvocijentnom topologijom.* $F_{k-1}CX$ *je zatvoreni potprostor od* $F_k CX$ *i na* CX *definiramo topologiju unije od* $F_k CX$. $F_0 CX$ *se uzima za istaknutu točku u* CX. *Ako je* $c \in C(n)$ *i* $y \in X^m$, *s* $[c, y]$ *označimo sliku od* (c, y) *u* CX. *Za morfizam* $f : X \longrightarrow X'$ *u* $\mathcal{T}$, *definiramo* $Cf : CX \longrightarrow CX'$ *formulom* $(Cf)[c, y] = [c, f^m y]$. *Prirodne transformacije* $\mu : C^2 X \longrightarrow CX$ *i* $\eta : X \longrightarrow CX$ *definiramo formulama:*

1. $\mu[c, [d_1, y_1], ..., [d_n, y_n]] = [\gamma(c; d_1, ..., d_n), y_1, ..., y_n]$
2. $\eta(x) = [1, x]$

Propozicija 1.3.7 ([7]). *Neka je* C *operada i* C *njoj pridružena monada. Tada postoji 1-1 korespondencija između* C-*djelovanja* $\theta : C \longrightarrow \mathcal{E}_X$ *i strukturnih morfizama* C-*algebri* $\xi : CX \longrightarrow X$. θ *i* ξ *korespondiraju ako i samo ako sljedeći dijagram komutira za sve* n:

$$\begin{tikzcd} C(n) \times X^n \arrow[rr, "\pi_n"] \arrow[dr, "\theta_n"'] & & CX \arrow[dl, "\xi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

(π_n je očita kompozicija $C(n) \times X^n \to F_nCX \to CX$). Štoviše, ova korespondencija definira izomorfizam kategorija C-prostora i C-algebri.

1.4 Boardman-Vogtova rezolventa

U ovom odjeljku opisujemo Boardman-Vogtovu rezolventu operade koja je dana W konstrukcijom. Njen originalni oblik uveden u radu Boardmana i Vogta, [**?**]. Spomenuta rezolventa operadi $\mathcal{P}$ funktorijalno pridružuje operadu $W(\mathcal{P})$, koja je homotopski ekvivalentna operadi $\mathcal{P}$. Temelj W konstrukcije su stabla pa opišimo tu strukturu.

Stabla

Graf G je četvorka $(V, I, E, \sim)$, gdje je V skup *vrhova*, I skup *unutarnjih bridova*, E skup *vanjskih bridova* te $\sim$ relacija incidencije na $V \times (I \cup E)$ takva da je svaki unutarnji brid incidentan s točno 2 vrha, a svaki vanjski s točno jednim. *Put* između vrhova x i y grafa G je kolekcija unutarnjih bridova $b_1, ..., b_n$ takva da postoje vrhovi $x_1, ..., x_{n-1}$ za koje vrijedi $x \sim b_1 \sim x_1 \sim ... \sim x_{n-1} \sim b_n \sim y$. Za put kažemo da je *minimalan* ako za pripadnu kolekciju vrhova vrijedi $\{x_1, ..., x_{n-1}\} \cap \{x, y\} = \emptyset$. Kažemo da je graf *povezan* ako postoji put između svaka dva različita vrha tog grafa. *Stablo* je povezan graf čija svaka dva različita vrha povezuje točno jedan minimalan put. *Ukorijenjeno stablo* je stablo s istaknutim vanjskim vrhom R koji zovemo *korijen* stabla te pripadnom bijekcijom $\{1, ..., n\} \cong E \setminus \{R\}$. ($n$ je broj preostalih vanjskih bridova danog stabla koje zovemo *listovi*). Usmjerimo li bridove stabla od listova prema korijenu, svakom vrhu v možemo dodijeliti broj $|v|$ bridova koji ulaze u njega. Također za svaki vrh v definiramo bijekciju $\{1, ..., |v|\} \cong \{\text{bridovi koji ulaze u vrh } v\}$. S $\mathbb{T}(n)$ označimo skup ukorijenjenih stabala s n listova te ga obogatimo desnim djelovanjem grupe S_n koje u stvari djeluje na pripadnu bijekciju $\{1, ..., n\} \to \{listovi\}$. Odsad ćemo pod stablo uvijek podrazumijevati ukorijenjeno stablo. *Mofrizam* stabala je $f : S \to T$ je trojka funkcija (f_V, f_I, f_E) na pripadnim skupovima vrhova, unutarnjih i vanjskih bridova koja čuva incidencijsku strukturu, korijen te je f_E $\Sigma-$invarijantna. Morfizam stabala f je *izomorfizam* ako su pripadne funkcije f_V, f_I i f_E bijekcije, a za stabla kažemo da su izomorfna ako postoji izomofizam među njima. Ovo definira relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupovima $\mathbb{T}(n)$. S $1 \in \mathbb{T}(1)$ označimo stablo s jednim vrhom, nula unutarnjih i dva vanjska brida.

W konstrukcija

Sada opisujemo rezolventu $W(\mathcal{P})$ operade $\mathcal{P}$.

Za stablo $T \in \mathbb{T}(n)$ gledamo prostor

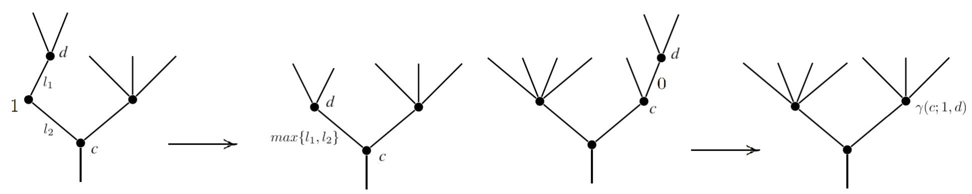
$$\mathcal{P}(T) = \prod_{v \in V_T} P(|v|) \times [0,1]^{I_T}.$$

Elemente od $\mathcal{P}(T)$ zamišljamo kao stablo T čiji je svaki vrh v označen elementom iz $\mathcal{P}(|v|)$ te je svakom unutarnjem bridu b dana duljina $l(b) \in [0,1]$. Vanjske bridove shvaćamo kao da im je pridružena duljina 1. Na $\bigsqcup_{T \text{ stablo}} \mathcal{P}(T)$ gledamo relaciju ekvivalencije $\sim$ generiranu na sljedeći način.

• Ako je vrh v stabla T označen s 1, i nije incidentan s dva vanjska brida, onda definiramo stablo $T/_v$ kao stablo kojem smo izbacili vrh v te poistovijetili njemu incidentne bridove b_1 i b_2 te novom bridu dodijelili duljinu $max\{l(b_1), l(b_2)\}$. Neka je $T \sim T/_v$.

• Ako je duljina $l(b)$ unutarnjeg brida b jednaka nuli, definiramo $T/_b$ kao stablo kojem smo izbacili brid b te poistovijetili njemu incidentne vrhove. Oznaka novog vrha je $\gamma(c; 1, ..., d, ..., 1)$, gdje je c bila oznaka vrha bližeg korijenu, a d oznaka drugog vrha. Neka je $T \sim T/_b$

• Ako je vrh v označen s $* \in \mathcal{P}(0)$ nastupaju dva moguća slučaja:
1) T se sastoji od samo jednog vrha i korijena. U ovom slučaju ne definiramo generator za $\sim$.
2) v je incidentan samo s jednim bridom b i taj brid je unutarnji. Tada definiramo stablo $T_{red\ b}$ koje je dobiveno tako da duljinu $l(b)$ redefiniramo kao 0. Neka je $T \sim T_{red\ b}$.

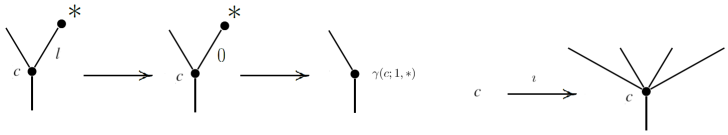


Slika 1.1: Generatori relacije $\sim$

Definiramo

$$W(\mathcal{P}) = \bigsqcup_{T \text{ stablo}} \mathcal{P}(T)/\sim.$$

Nadalje, $1 \in W(\mathcal{P})(1)$ za reprezentanta ima stablo $1 \in \mathbb{T}(1)$ s $1 \in \mathcal{P}(1)$ kao oznakom jedinog vrha. Desno djelovanje grupe S_n definiramo je desnim djelovanjem na pripadno stablo, a kompozicijski produkt definiran je poistovjećivanjem odgovarajućih korijena i listova stabala.



Slika 1.2: Generatori relacije $\sim$ i inkluzija $c \mapsto t_n(c)$

Za svaki $n \geq 0$ fiksirajmo jedno stablo t_n s jedim vrhom i n listova. Definiramo inkluziju $\iota : \mathcal{P} \hookrightarrow W(\mathcal{P})$ danu s $c \mapsto t_n(c)$, gdje je $t_n(c)$ stablo t_n kojem je jedini vrh označen s c (pogledati gornju sliku).

Neprekidno stezanje duljina svih unutarnjih vrhova elemenata u $W(\mathcal{P})$ opisuje retrakciju na $\iota(\mathcal{P})$. Ovime dobivamo homotopsku ekvivalenciju $\mathcal{P}(n) \simeq W(\mathcal{P})(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Poglavlje 2

Operade malih kocaka

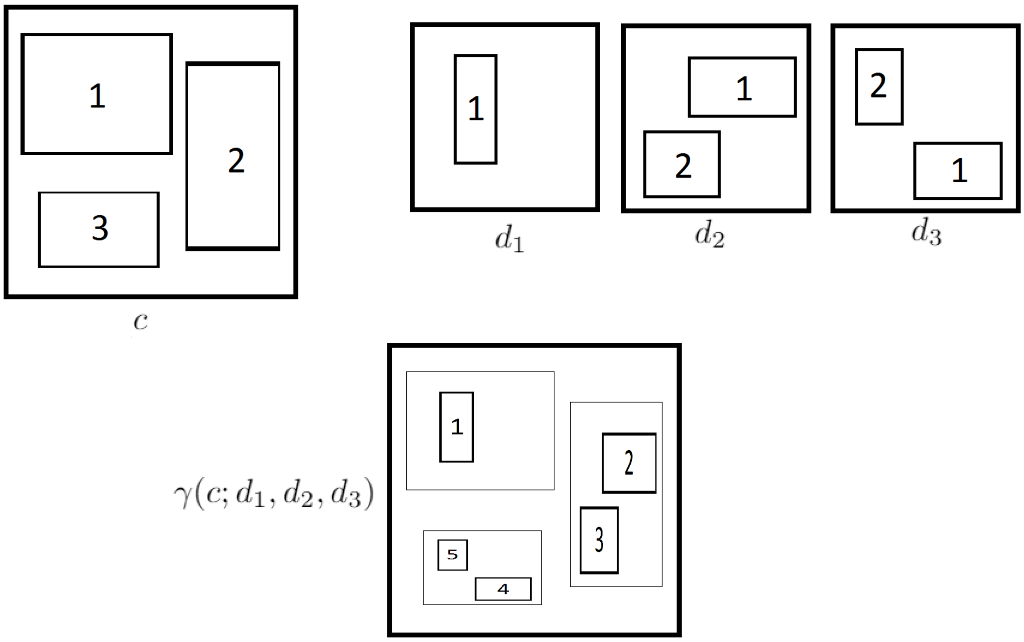
U ovom poglavlju detaljnije proučavamo takozvanu operadu malih kocaka C_n. Navodimo Mayev teorem o karakterizaciji višestrukih prostora petlji te zalazimo u dokaz aproksimacijskog teorema. Na kraju poglavlja dokazujemo da su prostori $C_n(k)$ homotopski ekvivalentni prostorima konfiguracija $F(R^n, k)$. Promatramo i određenu kompatkifikaciju prostora konfiguracija na kojoj postoji prirodna struktura operade, Kontsevicheva operada.

2.1 Operade malih kocaka

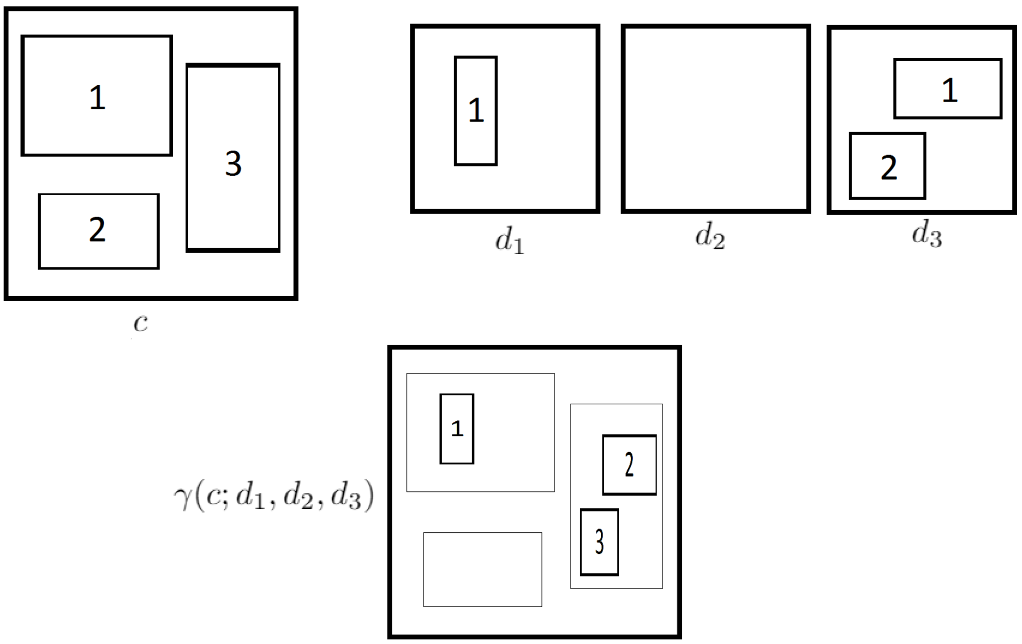
Neka je I^n jedinična $n-$kocka te J^n njen interior. S G označimo grupu automorfizama na $\mathbb{R}^n$ generiranu translacijama i pozitivnim homotetijama. Primijetimo da je svaki $g \in G$ prikaziv kao $g = g_1 \times ... \times g_n$, gdje su $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuće afine funkcije. Automorfizam $g \in G$ zovemo *mala n-kocka* ako je $g(J^n) \subseteq J^n$ i u tom slučaju kažemo da je $g(J^n)$ *slika* male kocke g.

Definicija 2.1.1. *Definiramo $C_n(k)$ kao skup uređenih k-torki malih n-kocaka $\langle c_1, ..., c_k\rangle$ takvih da su slike malih n-kocaka c_i u parovima disjunktne. $C_n(k)$ shvatimo kao potprostor prostora $(J^n)^{\bigsqcup_{i=1}^k J^n}$ te mu pridružimo odgovarajuću topologiju potprostora. Definirajmo skup $C_n(0) = \{\langle\rangle\}$ čiji element shvaćamo kao jedinstveno ulaganje praznog skupa u J^n. Dodatnu strukturu definiramo s:*
- *Kompozicijski produkt γ zadan sa: $\gamma(c; d_1, ..., d_k) = c \circ (d_1 + ... + d_k)$*
- *Jedinica $id_{J^n} = 1 \in C_n(1)$*
- *Djelovanje simetrične grupe: $\langle c_1, ..., c_k\rangle\sigma = \langle c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(k)}\rangle$*

Ovako definiran C_n ima strukturu Σ-slobodne operade, [7]. Potpuno analogno možemo definirati *male n-kugle* i operadu malih $n-$kugala B_n. Na kraju poglavlja ćemo pokazati da su operade C_n i B_n homotopski ekvivalentne u smislu da je $C_n(k) \simeq B_n(k), \forall k \in \mathbb{N}_0$.



Slika 2.1: $c \in C_2(3), d_1 \in C_2(1), d_2 \in C_2(2), d_3 \in C_2(2), \gamma(c; d_1, d_2, d_3) \in C_2(5)$



Slika 2.2: $c \in C_2(3), d_1 \in C_2(1), d_2 \in C_2(0), d_3 \in C_2(2), \gamma(c; d_1, d_2, d_3) \in C_2(3)$

Primijetimo da je slika male $n-$kocke, pa time i mala $n-$kocka, jedinstveno određena sa svoja dva nasuprotna vrha. Štoviše, mala $n-$kocka je određena slikom bilo koje dvije točke $\alpha, \beta \in J^n$ takve da za njihove projekcije na koordinate vrijedi: $p_i(\alpha) \neq p_i(\beta), \forall i$. Ovo nam omogućuje da male $n-$kocke gledamo kao elemente prostora J^{2n}, odnosno da $C_n(k)$ shvatimo kao potprostor $C_n(k) \subset J^{2nk}$. Sljedeća lema govori da je topologija na $C_n(k)$ jednaka topologiji potprostora $C_n(k) \subset J^{2nk}$.

Lema 2.1.2 (J. P. May, [7]). *Neka je $c = \langle c_1, ..., c_n \rangle \in C_n(k)$. Tada je c jedinstveno određen točkom $(c_1(\alpha), c_1(\beta), ..., c_k(\alpha), c_k(\beta)) \in J^{2nk}$, gdje su $\alpha = (\frac{1}{4}, ..., \frac{1}{4}), \beta = (\frac{3}{4}, ..., \frac{3}{4}) \in J^n$. Topologija na $C_n(k)$ shvaćenom kao potprostor od J^{2nk} jednaka topologiji na $C_n(k)$ shvaćenom kao potprostor neprekidnih preslikavanja $\bigsqcup_{i=1}^k J^n \longrightarrow J^n$.*

2.2 Višestruki prostori petlji

Budući da je D^n homeomorfan I^n, $S^n = D^n/\partial D^n$ možemo poistovjetiti s $I^n/\partial I^n$. Sada vidimo da operada malih kocaka C_n prirodno djeluje na višestruke prostore petlji $\Omega^n X$. U ovom odjeljku navodimo rezultate 2.2.4 i 2.2.6 koji djelomično karakteriziraju C_n prostore.

Definicija 2.2.1. *Neka je $\Omega^n X$ višestruki prostor petlji.*
Definiramo funkcije $\theta_{n,k} : C_n \times (\Omega X)^n \to \Omega X$ formulom:

$$\theta_{n,k}(c; p_1, ..., p_k)(t) = \begin{cases} p_i(c_i^{-1}(t)), & t \in Im\ c_i \\ *, & inače \end{cases} .$$

Propozicija 2.2.2 ([7]). *$\theta_n = (\theta_{n,k})_{k\geq 0}$ definira djelovanje operade C_n na $\Omega^n X$.*

Primjer 2.2.3. *Neka je (X, x_0) objekt u* **Top**$_*$. *Djelovanje C_1 na ΩX je do na homotopiju jednako množenju petlji u ΩX, tj. inducira operaciju množenja u $\pi_1(X, x_0)$.*

Sada je prirodno pitati se vrijedi li obrat, odnosno postoji li za svaki C_n-prostor Y prostor X takav da je Y homeomorfan, ili barem homotopski ekvivalentan, prostoru $\Omega^n X$. Sljedeći teorem daje nam nužan i dovoljan uvjet za postojanje takvog X.

Teorem 2.2.4 (J.P. May, [7]). *Neka je Y objekt u* **Top**$_*$. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
1) *Postoji X takav da je $Y \simeq \Omega^n X$*
2) *Y je C_n-prostor i $\pi_0(Y)$ je grupa*

U nastavku navodimo ključan korak u dokazu teorema 2.2.4, teorem aproksimacije 2.2.6 te skiciramo dokaz tog teorema.

Primijetimo da iteriranje adjunkcije $\Sigma \dashv \Omega$ daje adjunkciju $\Sigma^n \dashv \Omega^n$ pa $\Omega^n\Sigma^n$ ima strukturu operade. Cilj nam je pokazati postojanje morfizma monada $\alpha_n : C_n \to \Omega^n\Sigma^n$. Taj morfizam će nam biti ključan u aproksimacijskom teoremu i kasnije karakterizaciji višestrukih prostora petlji.

Definirajmo $\alpha_n(X) : C_nX \to \Omega^n\Sigma^nX$ kao kompoziciju morfizama

$$C_nX \xrightarrow{C_n\mu_n(X)} C_n\Omega^n\Sigma^nX \xrightarrow{\theta_n} \Omega^n\Sigma^nX,$$

gdje je μ_n jedinica adjunkcije $\Sigma^n \dashv \Omega^n$.

Teorem 2.2.5 (J. P. May[7]). *Ovime je definiran morfizam monada $\alpha_n : C_n \to \Omega^n\Sigma^n$.*

Teorem 2.2.6 (Aproksimacijski teorem, J.P.May, [7]). *Morfizam α_nX je slaba homotopska ekvivalencija ako je X povezan.*

U nastavku navodimo detaljniju formulaciju ovog teorema (teorem 2.2.8), no prvo navodimo jednu lemu.

Lema 2.2.7 ([7]). *Neka je (X, θ) $\mathcal{P}-$ prostor. Promatrajmo prostore $\Omega X = X^{(I,\partial I)} = X^{(S^1,*)}$ i $PX = X^{(I,0)}$. Tada su $(\Omega X, \Omega\theta)$ i $(PX, P\theta)$ $\mathcal{P}-$prostori, gdje je $\Omega\theta(c; l_1, ..., l_n)(s) = \theta(c; l_1(s), ..., l_n(s))$ i $P\theta(c; p_1, ..., p_n)(s) = \theta(c; p_1(s), ..., p_n(s))$. Inkluzija $\iota : \Omega X \to PX$ i projekcija na krajnju točku $p : PX \to X$ su morfizmi $\mathcal{P}-$prostora.*

Teorem 2.2.8 ([7]). *Za objekt X u $\mathbf{Top}_*$ i $n \geq 1$ postoji prostor E_nX koji sadrži C_nX te postoje preslikavanja $\pi_n : E_nX \to C_{n-1}\Sigma X$ i $\tilde{\alpha}_n : E_nX \to P\Omega^{n-1}\Sigma^{n-1}X$ takva da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd}
C_nX \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha_n"] & E_nX \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}_n"] & C_{n-1}\Sigma X \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] \\
\Omega^n\Sigma^nX \arrow[r, hook] & P\Omega^{n-1}\Sigma^nX \arrow[r, "p"] & \Omega^{n-1}\Sigma^{n-1}X.
\end{tikzcd}$$

E_nX je kontraktibilan za sve X i π_n je kvazi-fibracija, s vlaknom C_nX, za sve povezane X.

Dokaz provodimo u kratkim crtama, a počinjemo konstrukcijom prostora E_nX.

Konstrukcija 2.2.9. *Neka je $X = (X, x_0)$ objekt u $\mathbf{Top}_*$ te A zatvoren potprostor od X takav da je $x_0 \in A$. Tada (X, A) zovemo par u $\mathbf{Top}_*$. Konstruiramo prostor $E_n(X, A)$ na sljedeći način:*
Za malu $n-$kocku c, pišemo $c = c' \times c''$ gdje je $c' : J \to J$. Definiramo prostor $\mathcal{E}_n(k; X, A)$ kao potprostor od $C_n(k) \times X^k$ koji se sastoji od točaka $((c_1, ..., c_k), x_1, ..., x_k)$ takvih da

$$x_r \notin A \implies \langle c_r(0), 1\rangle \times c''_r(J^{n-1}) \cap c_s(J^n) = \emptyset, \forall s \neq .$$

Relacija ekvivalencije $\approx$ *definirana u konstrukciji* 1.3.6 *restringira se na relaciju ekvivalencije na* $\bigsqcup_{k\geq 0}\mathcal{E}_n(k;X,A)$. *Neka je*

$$E_n(X,A) = \bigsqcup_{k\geq 0}\mathcal{E}_n(k;X,A)/\approx$$

s topologijom potprostora od C_nX. *Prostor* $E_n(X,A)$ *je zatvoren u* C_nX. *Također, prostor* $E_n(X,A)$ *je filtrirani prostor s filtracijom definiranom s* $F_kE_n(X,A) = E_n(X,A)\cap F_kC_n(X)$ *i* $F_0E_n(X,A) = *$. *Inkluzija* $C_n(k)\times A^k \subset \mathcal{E}_n(k;X,A)$ *implicira da je* $C_nA \subset E_n(X,A)$. *Ako je* $f : (X,A) \to (X',A')$ *morfizam ovakvih parova (*$f(A)\subseteq A'$*),* $E_nf : E_n(X,A) \to E_n(X',A')$ *definira se kao restrikcija morfizma* C_nf *na* $E_n(X,A)$.

Definicija 2.2.10. *Definiramo* $E_nX = E_n(TX,X)$*, gdje je* $TX = (I,0)\wedge X$ *konus na* X *te* X *smješten u* TX *s* $x \mapsto [1,x]$.

Sada navodimo nekoliko lema potrebnih za dokaz teorema aproksimacije. Te leme nam opisuju kako dobivamo morfizme u iskazu teorema 2.2.8.

Lema 2.2.11 ([7])**.** *Neka je* X *objekt u* $\mathbf{Top}_*$. *Tada postoji prirodno surjektivno preslikavanje* $v_n : E_n(X,x_0) \to C_{n-1}X$ *definiramo sljedećim formulama na točkama različitim od* $*$*:*

$$v_1[c,x] = x \in X = C_0X$$

$$v_n[c,x] = [c'',x] \in C_{n-1}X,\ \text{za } n > 1.$$

Napomena 2.2.12. *Neka je* $\pi : (X,A) \to (Y,y_0)$ *morfizam parova u* $\mathbf{Top}_*$. *S* π_n *označimo kompoziciju* $E_n(X,A) \xrightarrow{E_n\pi} E_n(Y,*) \xrightarrow{v_n(Y)} C_{n-1}Y$. *Budući da je* E_n *funktor i* v_n *prirodna transformacija,* π_n *je prirodan na komutativnim dijagramima*

$$\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & (Y,*) \arrow[d, "g"] \\
(X',A') \arrow[r, "\pi"] & (Y',*)
\end{tikzcd}$$

u smislu da je $C_{n-1}g\circ\pi_n = \pi'_n\circ E_nf$ *za svaki takav dijagram, tj. sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd}
E_n(X,A) \arrow[r, "E_n\pi"] \arrow[d, "E_nf"] & E_n(Y,*) \arrow[r, "v_n(Y)"] \arrow[d, "E_ng"] & C_{n-1}Y \arrow[d, "C_{n-1}g"] \\
E_n(X',A') \arrow[r, "E_n\pi'"] & E_n(Y',*) \arrow[r, "v'_n(Y')"] & C_{n-1}Y'.
\end{tikzcd}$$

Lema 2.2.13 ([7])**.** *Za $X \in \mathbf{Top}_*$ i $n \geq 1$ postoji sljedeći komutativni dijagram:*

$$\begin{tikzcd}
C_n X \arrow[r, hook] \arrow[d, "C_n\eta_n"] & E_n(TX, X) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "E_n\tilde{\eta}_n"] & C_{n-1}\Sigma X \arrow[d, "C_{n-1}\eta_{n-1}"] \\
C_n\Omega^n\Sigma^n X \arrow[r, hook] & E_n(P\Omega^{n-1}\Sigma^n X, \Omega^n\Sigma^n X) \arrow[r, "p_n"] & C_{n-1}\Omega^{n-1}\Sigma^n X.
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Zbog identifikacije $\Sigma X = TX/X$ imamo pripadno kvocijentno preslikavanje π koje je prirodno. Definiramo $\tilde{\eta} : TX \to P\Omega^{n-1}\Sigma^n X$ formulom:

$$\tilde{\eta}_n[s, x](t)(v) = [v, st, x] \in S^{n-1} \wedge S^1 \wedge X = S^n X, [s, x] \in TX, t \in I, v \in S^{n-1}.$$

Sada sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\eta_n"] & TX \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{\eta}_n"] & \Sigma X \arrow[d, "\eta_{n-1}"] \\
\Omega^n\Sigma^n X \arrow[r, hook] & P\Omega^{n-1}\Sigma^n X \arrow[r, "p"] & \Omega^{n-1}\Sigma^n X.
\end{tikzcd}$$

Primjenom funktora E_n na lijevu polovicu ovog dijagrama i definicije preslikavanja π_n iz prethodne napomene dobivamo željeni dijagram. □

Lema 2.2.14 ([7])**.** *Za $X \in \mathbf{Top}_*$ definiramo $\tilde{\theta}_{n,k} : \mathcal{E}_n(k; P\Omega^{n-1}X, \Omega^n X) \to P\Omega^{n-1}X$ na sljedeći način:*
Neka je za $(c, y) \in \mathcal{E}_n(k; P\Omega^{n-1}X, \Omega^n X)$

$$\tilde{\theta}_{n,k}(c, y)(t)(v) = \begin{cases} y_r(s)(u), & \text{ako } c_r(s, u) = (t, v) \\ y_r(1)(u), & \text{ako } t \geq c_r'(1), c_r''(u) = v, y_r \notin \Omega^n X \\ *, & \text{inače} \end{cases}.$$

Tada sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
C_n(k) \times (\Omega^n X)^k \arrow[r, "\theta_{n,k}"] \arrow[d, hook] & \Omega^n X \arrow[d, hook] \\
\mathcal{E}_n(k; P\Omega^{n-1}X, \Omega^n X) \arrow[r, "\tilde{\theta}_{n,k}"] & P\Omega^{n-1}X \arrow[dd, "p"] \\
C_{n-1}(k) \times (P\Omega^{n-1}X)^k \arrow[u, "\sigma'_{n-1,k}\times 1^k"] \arrow[ur, "P\theta_{n-1,k}"] \arrow[d, "1\times p^k"] & \\
C_{n-1}(k) \times (\Omega^{n-1}X)^k \arrow[r, "\theta_{n-1,k}"] & \Omega^{n-1}X.
\end{tikzcd}$$

Lema 2.2.15 ([7]). *Za $X \in \mathbf{Top}_*$ morfizmi $\tilde{\theta}_{n,k}$ induciraju morfizam*

$$\tilde{\theta}_n : E_n(P\Omega^{n-1}X, \Omega^n X) \to P\Omega^{n-1}X$$

takve da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
C_n\Omega^n X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\theta_n"] & E_n(P\Omega^{n-1}X, \Omega^n X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\tilde{\theta}_n"] & C_{n-1}\Omega^{n-1}X \arrow[d, "\theta_{n-1}"] \\
\Omega^n X \arrow[r, hook] & P\Omega^{n-1}X \arrow[r, "p"] & \Omega^{n-1}X.
\end{tikzcd}$$

Definiramo $\tilde{\alpha}_n = \tilde{\theta}_n \circ E_n\tilde{\eta}_n : E_n(TX, X) \to P\Omega^{n-1}\Sigma^n X$. Sada komutativnost dijagrama iz teorema 2.2.8 slijedi kombiniranjem lema 2.2.13 i 2.2.15. Ostatak dokaza preskačemo, no on se može naći u [7], poglavlje 7.

2.3 Prostori konfiguracija i operade

Definicija 2.3.1. *Neka je M n-dimenzionalna mnogostrukost. Definiramo k-ti prostor konfiguracija $F(M;k)$ od M kao skup*

$$F(M;k) = \{\langle x_1, ..., x_k\rangle \mid i \neq j \implies x_i \neq x_j\} \subseteq M^k$$

i topologijom podprostora.

Teorem 2.3.2. *Za $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ $C_n(k)$ je Σ_k−invarijanto homotopski ekvivalentan prostoru kofigracija $F(\mathbb{R}^n, k)$.*

Dokaz. Dokaz provodimo u slučaju $n = 2$, ostali slučajevi konačnog n su analogni.

Budući da je J homotopski ekvivalentan $\mathbb{R}$ posljedično je i $F(J^n, k)$ Σ_k−invarijanto homotopski ekvivalentan $F(\mathbb{R}^n, k)$ pa je dovoljno dokazati da je $F(J^2, k) \simeq C_2(k)$. Ideja je uložiti $F(J^2, k)$ u $C_2(k)$ i pokazati da je slika ulaganja deformacijski retrakt od $C_2(k)$, što povlači traženu homotopsku ekvivalenciju.

Za $c = \langle c_1, ..., c_k\rangle \in C_2(k)$ neka je $c_j = c_{j,1} \times c_{j,2}$, gdje su $c_{j,i} : J \to J$ dani s $c_{j,i}(t) = (y_{j,i} - x_{j,i})t + x_{j,i}$. Koordinate $x_{j,i}$ i $y_{j,i}$ odgovaraju koordinatama lijevih i desnih rubova j−te kocke u i−toj dimenziji. Ako vrijedi da je $y_{j,i} - x_{j,i} = d, \forall i, j$ kažemo da je c promjera $d = d(c)$. Primijetimo također da za svaki $b \in F(J^2, k)$ postoji konfiguracija malih n−kocaka $c \in C_2(k)$, promjera d_c, takva da b_i odgovaraju centrima malih kocaka c_i. S d_b označimo maksimalan takav d, a s c_b pripadnu konfiguraciju. Definirajmo ulaganje $\iota : F(J^2, k) \longrightarrow C_2(k)$ s $\iota(b) = c_b$. $\iota(b)$ je konfiguracija malih kocaka maksimalnog promjera takva da koordinate od b odgovaraju središtima kocaka u $\iota(b)$, a ι shvaćamo kao inkluziju $F(J^2,k)$ u $C_2(k)$. S druge strane želimo definirati i projekciju $p : C_2(k) \longrightarrow F(J^2,k)$ takvu da je $p \circ \iota = id$ pa je najjednostavnije uzeti $p(c) = c(\frac{1}{2},...,\frac{1}{2})$. Neprekidnost od ι i p dobivamo kao posljedicu leme 2.1.2. Sada definiramo $h : I \times C_2(k) \longrightarrow C_2(k)$ s

$$h(s,c) = \Big\langle c_{1,1}(s) \times c_{1,2}(s), ..., c_{k,1}(s) \times c_{k,2}(s) \Big\rangle,$$

$$c_{j,i}(s)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{j,i} + y_{j,i}) + [(1-2s)(y_{j,i} - x_{j,i}) + 2sm](t - \frac{1}{2}), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}(x_{j,i} + y_{j,i}) + [(2-2s)m + (2s-1)d_{p(c)}](t - \frac{1}{2}), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

gdje je $m = \min(\{d\} \cup \{y_{j,i} - x_{j,i} : j, i\})$.

Preslikavanje h je homotopija koja daje deformacijsku retrakciju od $C_2(k)$ na $\iota(F(J^2,k))$. Ta homotopija na prvoj polovici intervala I smanjuje sve male kocke u c tako da se na drugoj polovici mogu nesmetano širiti do kocaka dijametra $d_{p(c)}$. □

Primjer 2.3.3 (Ulaganje $F(int\ D^2, n)$ u B_2)**.** *Slično kao u dokazu prethodnog teorema, za svaki $b \in F(int\ D^2, n)$ postoji jedinstvena konfiguracija malih 2−diskova $\tilde{b} \in B_2(n)$ takva je $\tilde{b}_i(0) = b_i$ te da su $\tilde{b}_i$ jednakog radijusa d_b, koji je maksimalan mogući takav radijus. Analogno prethodnom dokazu dobivamo homotopsku ekvivalenciju prostora $F(int\ D^2, n)$ i $B_2(n)$.*

Propozicija 2.3.4. *Operada malih kocaka C_m homotopski je ekvivalentna operadi malih diskova B_m.*

Dokaz. Dokaz provodimo slično kao dokaz prethodnog teorema i samo u slučaju $m = 2$. Uložit ćemo prostore $B_2(n)$ u $C_2(n)$ te pokazati da su slike tih ulaganja deformacijski retrakti kodomena. Ulaganje $\iota : B_2(n) \hookrightarrow C_2(n)$ definiramo na sljedeći način: Neka je $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ ishodište ravnine. Svaka točka $x \in D^2$ jedinstveno je definirana kutem koji $\overrightarrow{Ox}$ zatvara s pozitivnim dijelom x−osi i udaljenosti $d(O,x)$ u danoj 2−normi. Označimo li s $D^2_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\} = [-1,1] \times [-1,1]$, ova karakterizacija nam daje homeomorfizam $D^2 \simeq [-1,1] \times [-1,1] \simeq [0,1] \times [0,1]$ koji krugove pretvara u kvadrate. ι je prirodno induciran spomenutim homeomorfizmom. Retrakcija na sliku od ι dana je neprekidnim skraćivanjem dulje strane malih kocaka u konfiguraciji $c \in C_2(n)$ do duljine kraće strane. □

Kompaktifikacija prostora konfiguracija $F(\mathbb{R}^n, k)$

Neka je $k \in \mathbb{N}_0$ i s $[k]$ označimo skup $\{1,...,k\}$, $[0] = \emptyset$. Promatramo prostor injekcija $Inj([k], \mathbb{R}^n) = \{f : [k] \hookrightarrow \mathbb{R}^n\}$ koji shvaćamo kao prostor k−konfiguracija u $\mathbb{R}^n$ te na njemu promatramo topologiju potprostora od $(\mathbb{R}^n)^k$. S G označimo grupu generiranu translacijama i pozitivnim homotetijama na $\mathbb{R}^n$ koja posljedično djeluje i na $Inj([k], \mathbb{R}^n)$ te neka je $C(k) = Inj([k], \mathbb{R}^n)/G$.

Promatrajmo funkcije $\theta_{a,b} : C(k) \longrightarrow S^{n-1}$ i $\delta_{a,b,c} : C(k) \longrightarrow [0, +\infty]$, gdje su $a, b, c \in [k]$ različiti, dane s

$$\theta_{a,b}(f) = \frac{f(a) - f(b)}{\|f(a) - f(b)\|}$$

$$\delta_{a,b,c}(f) = \frac{\|f(a) - f(b)\|}{\|f(a) - f(c)\|}.$$

Ove funkcije nam kodiraju informacije o elementima u $C(k)$, također svaki $f \in C(k)$ jednoznačno je određen s $\theta_{a,b}(f)$ i $\delta_{a,b,c}(f)$.
Definiramo ulaganje

$$\iota : C(k) \hookrightarrow (S^{n-1})^{F([k],2)} \times [0, +\infty]^{F([k],3)}$$

$$\iota(f) = ((\theta_{a,b}(f))_{(a,b)\in F([k],2)}, (\delta_{a,b,c}(f))_{(a,b,c)\in F([k],3)}).$$

Primijetimo da je ι homeomorfizam na svoju sliku.

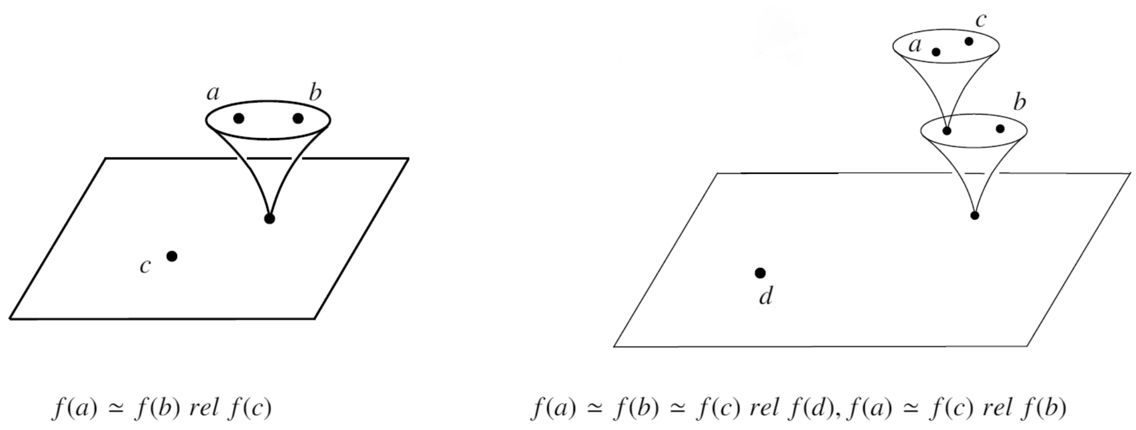
Definicija 2.3.5. *Definiramo* $C[k] = \overline{\iota(C(k))}$. $C[k]$ *zovemo Fulton-MacPhersonova kompaktifikacija od* $C(k)$.

Napomena 2.3.6. *Jasno je* $C[k]$ *kompaktan prostor jer je zatvoren potprostor kompaktnog prostora* $(S^{n-1})^{F([k],2)} \times [0, +\infty]^{F([k],3)}$. *Također, za* $f \in C[k]$, *s* $\theta_{a,b}(f)$ *i* $\delta_{a,b,c}(f)$ *označavat ćemo projekcije na odgovarajuće koordinate iz definicije funkcije* ι.

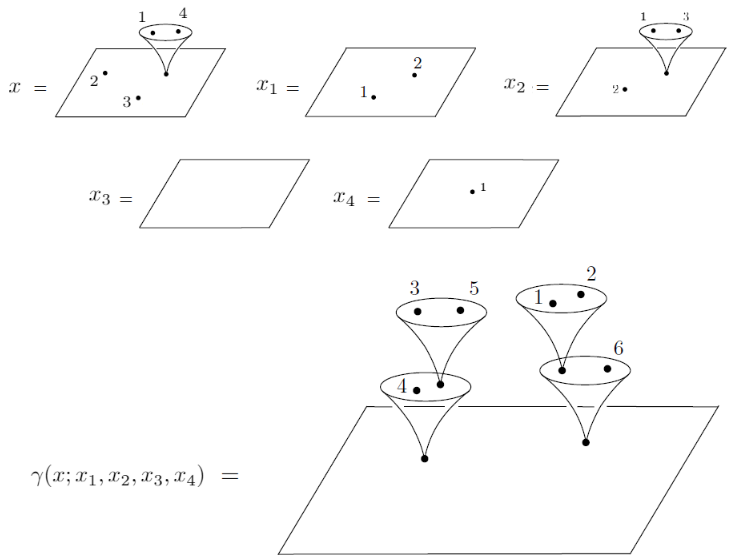
Najveća razlika između $C[k]$ i $\iota(C(k))$ je što dio informacija koje smo dobili od funkcija δ, koji je označavao omjer udaljenosti neke točke od neke druge dvije, sada poprima i vrijednosti 0 i $+\infty$. Vrijednost 0 shvaćamo kao da su dvije točke, a i b, zanemarivo blizu u odnosu na njihovu udaljenost prema trećoj točki c, u tom slučaju pišemo $f(a) \simeq f(b)$ $(rel\ f(c))$. Slučaj $\delta_{a,b,c} = +\infty$ shvaćamo, s druge strane, shvaćamo kao da su a i c zanemarivo blizu u odnosu na b. $C[1]$ shvaćamo kao objekt s jednim elementom, inkluzijom $* \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ koja je jedinstvena do na djelovanje grupe G.

Struktura operade na C

Na slici 2.3 vidimo kako možemo zamišljati elemente u $C[k]$. To nam daje ideju kako bismo mogli definirati operaciju kompozicije potrebnu u strukturi operade: smještanjem cijele u konfiguracije u jednu točku druge konfiguracije (slika 2.3).



Slika 2.3: Primjeri konfiguracija u $C[A]$, [6]



Slika 2.4: Kompozicijski produkt u $C[A]$, [6]

Formalizirajmo to sljedećom definicijom.

Definicija 2.3.7. *Neka je $m \in \mathbb{N}_0$ te $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}_0$ i $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$. Definiramo funkciju*

$\varphi : [k] \to [m]$ *takvu da je*

$$\varphi(\{1, ..., k_1\}) = \{1\}, \varphi(\{k_1 + 1, ..., k_1 + k_2\}) = \{2\}, ..., \varphi(\{k_1 + ... + k_{m-1} + 1, ..., k\}) = \{m\}.$$

Funkcija φ *na* $[k]$ *inducira istu particiju kao* $k_1, ..., k_n$. *Sada kompozicijski produkt* $\gamma : C[m] \times C[k_1] \times ... \times C[k_m] \to C[k]$ *definiramo s:*

$$(\theta_{a,b} \circ \gamma)(c; d_1, ..., d_m) = \begin{cases} \theta_{a,b}(d_p), & \varphi(a) = \varphi(b) = p \\ \theta_{\varphi(a),\varphi(b)}(c), & \varphi(a) \neq \varphi(b) \end{cases}$$

$$(\delta_{a,b,c} \circ \gamma)(c; d_1, ..., d_m) = \begin{cases} \delta_{a,b,c}(d_p), & \varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = p \\ 0, & \varphi(a) = \varphi(b) \neq \varphi(c) \\ 1, & \varphi(a) \neq \varphi(b) = \varphi(c) \\ +\infty, & \varphi(a) = \varphi(c) \neq \varphi(b) \\ \delta_{\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)}(c), & \textit{inače} \end{cases}$$

Propozicija 2.3.8 (P. Lambrechts, I. Volić, [6])**.** $C[\cdot]$ *s* γ *kao operacijom kompozicijskog produkta ima strukturu operade.*

Ova oprada naziva se Kontsevicheva operada. Za kraj ovog odjeljka navodimo sljedeću propoziciju u čijem dokazu se vidi jedna od primjena Boardman-Vogtove rezolvente.

Propozicija 2.3.9. *Operada* $C[\cdot]$, *na* $\mathbb{R}^m$, *homotopski je ekvivalentna operadi malih kugala* B_m.

Dokaz. (P. Salvatore, [*10*]*; Lambrechts, Volić,* [*6*]*).* Ideja dokaza je konstruirati homotopsku ekvivalenciju $R : W(B_m) \to C[\cdot]$. Elemente $b \in B_m(n)$ shvaćamo kao elemente u $C[n]$ tako da promatramo konfiguracije centara $(b_1(0), ..., b_n(0)) \in C[n]$. Ovo ulaganje nam za rezultat uvijek daje konfiguraciju u $C[n]$ čije su sve točke na istoj razini. Za $r \in \langle 0, 1]$ s δ_r definiramo pozitivnu homotetiju s centrom u ishodištu i koeficijentom homotetije r. Sada za $c \in B_m(n)$, s $\tilde{c}_i : \langle 0, 1] \to B_m(n)$ definirajmo $[\tilde{c}_i(t)]_i = c_i \circ \delta_t; [\tilde{c}_i(t)]_j = c_j, \forall j \neq i$. Promotrimo kako se $\gamma([\tilde{c}_i(t)]_i; b_1, ..., b_n) \in C[k]$ ponaša na limesu $t \to 0$. Odgovarajući limes će biti konfiguracija u $C[k]$ u kojoj je $b_i \in C[k_i]$ smješten u točku c_i konfiguracije $c \in C[n]$. Opišimo sada $R : W(B_m) \to C[\cdot]$ koje će opisivati i ovakve rubne slučaje. Stablu $\tau \in WB_m$, kojem su pripadne duljine svih unutarnjih bridova < 1, pridružimo stablo τ' koje je dobiveno zamjenom konfiguracija malih $m-$diskova $b = (b_1, ..., b_k)$, u oznaci vrha v, konfiguracijom $(b_1 \circ \delta_{1-l(e_1^v)}, ..., b_k \circ \delta_{1-l(e_k^v)})$, gdje su e_i^v pripadni ulazni bridovi od v te $l(e_i^v)$ njihove duljine. Budući da je τ u stvari određena klasa ekvivalencije, za reprezentanta te klase uzimamo bilo koje stablo kojemu su sve duljine unutarnjih bridova pozitivne. Sada s $c = (c_1, ..., c_n)$ označimo $n-$konfiguraciju malih $m-$diskova takvu da je c_i dobiven komponiranjem odgovarajućih malih diskova u oznakama vrhova na putu od $i-$tog lista u do korijena u τ'. Definiramo $R(\tau) := c$, u smislu konfiguracije centara diskova $c_1, ..., c_n$ te proširimo R po neprekidnosti do $R : WB_m \to C[m]$. Neprekidno produljivanje duljina svih unutarnjih bridova stabla $\tau \in WB_m(n)$ do 1 opisuje retrakciju $WB_m(n) \to C[n]$. $\square$

Poglavlje 3

Ulaganja i dugi uzlovi

U ovom poglavlju promatramo jednu od primjena teorije operada u drugim granama matematike, točnije, u teoriji dugih uzlova.

3.1 Dugi uzlovi

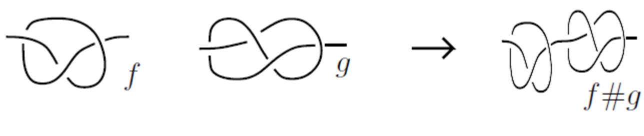
Prostor *dugih uzlova* je prostor glatkih ulaganja

$$\mathcal{K} = Emb(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 | f \in C^\infty; f(t) = (t, 0, 0) \text{ } ako \text{ } |t| > 1\}$$

koji shvaćamo kao objekt u $\mathbf{Top}_*$ s trivijalnim ulaganjem $1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(1(t) = (t, 0, 0), \forall t)$ kao istaknutom točkom. Na tom prostoru definirana je i operacija sume uzlova
$\# : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$

$$(f\#g)(t) = \begin{cases} l \times id_{\mathbb{R}^2} \circ f \circ l^{-1}(t), & t \leq 0 \\ d \times id_{\mathbb{R}^2} \circ f \circ d^{-1}(t), & t \geq 0 \end{cases}, l(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, d(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

koja je asocijativna do na izotopiju. Uzao 1 je do na izotopiju neutralan element za operaciju sume uzlova.



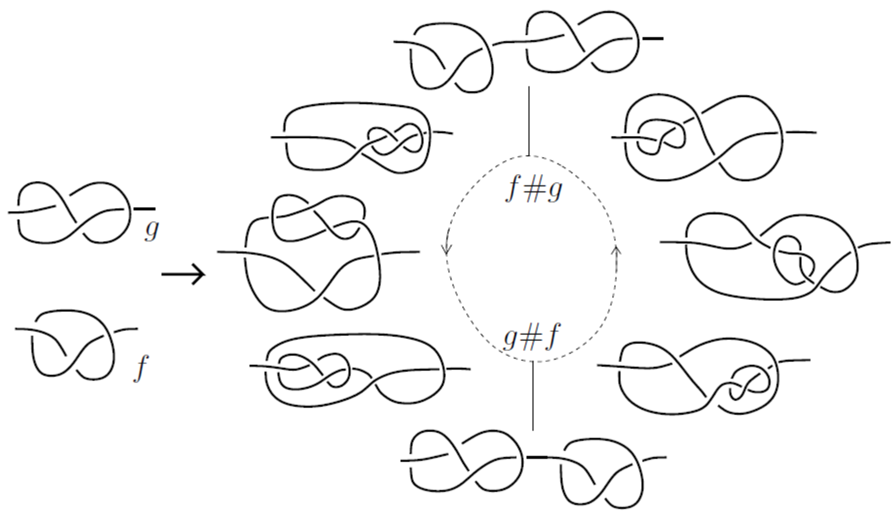
Slika 3.1: Suma uzlova, [3]

Definicija 3.1.1. *Svaki uzao g koji je izotopan uzlu* 1 *zovemo* trivijalnim. *Uzao koji nije trivijalan zovemo* pravi.
Za uzao f kažemo da je suma uzlova f_1 *i* f_2 *ako je izotopan uzlu* $f_1\#f_2$ *te pišemo* $f \simeq f_1\#f_2$. *Analogno definiramo sumu više uzlova* $f_1, ..., f_n$ *te pišemo* $f_1\#...\#f_n$. *Primijetimo da je suma više uzlova dobro definirana jer je operacija # asocijativna do na izotopiju.*

Definicija 3.1.2. *Za pravi uzao p kažemo da je* prost *ako svaki prikaz* $p \simeq f_1\#...\#f_n$ *ima samo jedan pravi pribrojnik.*

Teorem 3.1.3 (Schubert, [11]). *Operacija sume # na* $\pi_0\mathcal{K}$ *definira strukturu komutativnog monoida. Također, svaki pravi uzao f prikaziv je kao suma prostih uzlova, te je taj prikaz jedinstven do na izotopiju i poredak pribrojnika.*

Glavni rezultat ovog poglavlja, teorem 3.2.2, djelomično opisuje homotopski tip od $\mathcal{K}$, preciznije, govori da je $\mathcal{K} \simeq C_2(\mathcal{P}\sqcup\{*\}) \simeq \sqcup_{n=0}^{\infty}(C_2(n)\times\mathcal{P}^n)/S_n$, što shvaćamo kao profinjenje Schubertovog rezultata. Schubertov argument svodi se na provlačenje jednog uzla kroz drugi (slika 3.2), što ćemo formalizirati gledajući strukturu C_2-prostora na određenom modelu za $\mathcal{K}$.



Slika 3.2: Vizualizacija Schubertovog argumenta, [3]

Djelovanje operade malih kocaka na duge (debele) uzlove

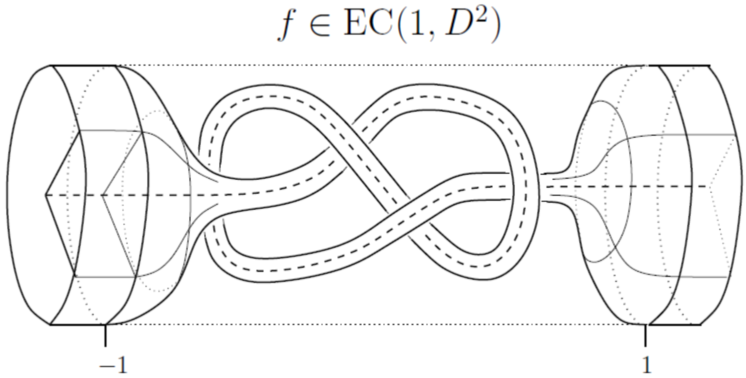
Radi jednostavnosti pretpostavimo da je ”zapetljani dio” elemenata u $\mathcal{K}$ sadržan u $[-1,1]\times$ $int\ D^2$. Najočitije djelovanje operada malih kocaka koje pada na pamet je djelovanje operade C_1 takvo da $\gamma(c; f_1, ..., f_n)$ petlja samo slike malih $1-$kocaka c_i i to pripadnim uzlom f_i, odnosno:

$$\theta(c; f_1, ..., f_k)(t) = \begin{cases} (c_i \times id_{\mathbb{R}^2})(f_i(c_i^{-1}(t))), & t \in Im\ c_i \\ (t, 0, 0), & inače \end{cases}.$$

Vidimo da je $\theta(d; f, g) = f\#g$, gdje je $d_1(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, d_2(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$. Štoviše, $\theta(c; f_1, ..., f_k) \simeq f_1\#...\#f_k$. Premda je ovako opisano djelovanje operade C_1 na $\mathcal{K}$, za naše potrebe to djelovanje nije dovoljno dobro. Problem je u tome što od našeg djelovanja želimo neka jača svojstva koja ovim konkretnim djelovanjem ne možemo dobiti. Naprimjer, Schubertov argument za komutativnost # na $\pi_0\mathcal{K}$ svodi se na neprekidno provlačenje jednog uzla kroz drugi (slika 3.2) te ako bismo tako nešto htjeli opisati djelovanjem operade C_1 trebali bismo imati i neprekidan prijelaz $(d_1, d_2) \to (d_2, d_1)$ u $C_1(2)$, što znamo da nemamo. Ovdje već vidimo da nam je potrebno da je $C_n(2)$ povezan putevima. Srećom, to vrijedi već za $n = 2$. S druge strane, teško je zamisliti kako bi se opisali ”međustadiji” prelaska $f\#g \to g\#f$ pomoću djelovanja operade. Kasnije ćemo vidjeti da naći dobrog kandidata za ovakvo djelovanje nije jednostavno (lema 3.1.9. Taj problem rješavamo tako da promatramo malo bogatiji prostor takozvanih ”debelih” uzlova koji je definiran kao

$$EC(1, D^2) = \{f \in Emb(\mathbb{R} \times D^2, \mathbb{R} \times D^2); supp\ f \subseteq [-1, 1] \times D^2\}$$

sa slabom C^∞ topologijom i $id_{\mathbb{R}\times D^2}$ kao istaknutom točkom.



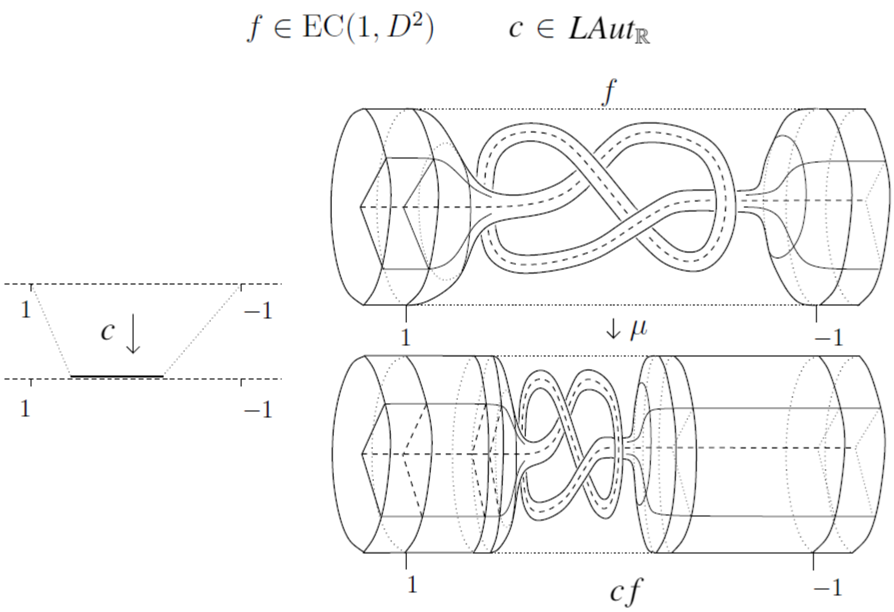
Slika 3.3: Debeli dugi uzao, [3]

U ovom poglavlju nam je $I = [-1, 1]$ te je definicija operade malih kocaka prilagođena tome. Promatrajući djelovanje C_2 na $EC(2, D^2)$ nam olakšava stvari zato što $\theta(c; f_1, ..., f_k)$ možemo, na prigodan način, zapisati kao kompoziciju ulaganja $f_1, ..., f_k$, do na male preinake.

Definicija 3.1.4. *Neka je $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ rastuća afina funkcija takva da je $c(I) \subseteq I$. Definiramo djelovanje $c : EC(1, D^2) \longrightarrow EC(1, D^2)$ s*

$$cf = (c \times id_{D^2}) \circ f \circ (c^{-1} \times id_{D^2})$$

S μ označimo funkciju $(c, f) \mapsto cf$.



Slika 3.4: Djelovanje iz definicije 3.1.4, [3]

Napomena 3.1.5. *S $LAut_{\mathbb{R}}$ označimo prostor rastućih afinih funkcija $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takvih da je $c(I) \subseteq I$. Primijetimo da za $c_1, c_2 \in LAut_{\mathbb{R}}$ te $f, g \in EC(1, D^2)$ takve da je $c_1(Int\ I) \cap c_2(Int\ I) = \emptyset$ vrijedi $c_1 f \circ c_2 g = c_2 g \circ c_1 f$.*

Propozicija 3.1.6 (R. Budney, [3])**.** *Fukcije $\mu : LAut_{\mathbb{R}} \times EC(1, D^2) \longrightarrow EC(1, D^2)$ i $\circ : EC(1, D^2) \times EC(1, D^2) \longrightarrow EC(1, D^2)$ su neprekidne.*

Definicija 3.1.7. *Definiramo operaciju sume na prostoru debelih uzlova s* $f\#g = c_1 f \circ c_2 g$ *gdje su* $c_1, c_2 \in LAut_{\mathbb{R}}, c_1(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, c_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

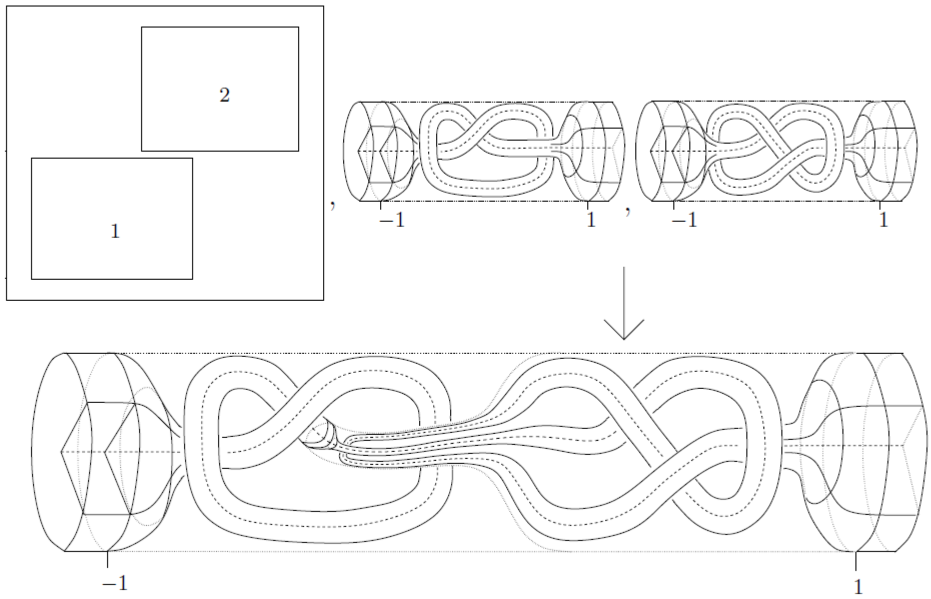
Nije teško vidjeti da je ovako definirana operacija sume debelih uzlova asocijativna do na izotopiju te da je $id_{\mathbb{R}\times D^2}$ do na izotopiju neutralan element za #.

Definicija 3.1.8. *Neka je* $c \in C_2(k)$. *Na* $\{c_1, ..., c_k\}$ *definirajmo uređaj induciran leksikografskim uređajem na* $\{(c_{i,2}(-1), c_{i,2}(1), c_{i,1}(-1), c_{i,1}(1))| i \in \{1, ..., k\}\}$. *Definiramo* $\theta_k : C_2(k) \times EC(1, D^2)^k \longrightarrow EC(1, D^2)$ *s*

$$\theta_k(c; f_1, ..., f_k) = c_{\sigma(1)} f_{\sigma_1} \circ ... \circ c_{\sigma(k)} f_{\sigma(k)}$$

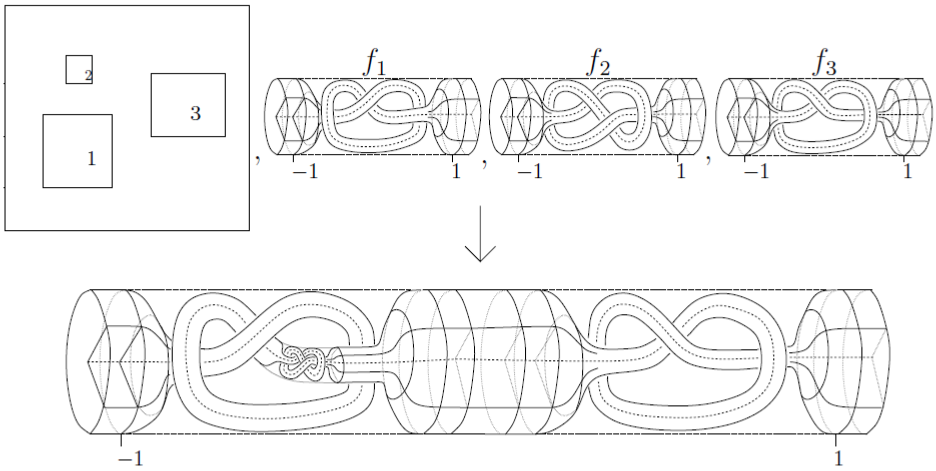
gdje je $\sigma = \sigma_c \in S_k$ *jedinstvena permutacija takva da je* $\sigma(1) \leq \sigma(2) \leq ... \leq \sigma(k)$. θ_0 *se definira trivijalno.*

Nekad će se, u smislu prethodne definicije, domene uzlova $c_i f_i$ i $c_j f_j$ djelomično ili potpuno preklapati. Slike 3.5 i 3.6 nam ilustriraju kako ti slučajevi izgledaju.



Slika 3.5: Primjer djelomičnog preklapanja domena u definiciji 3.1.8, [3]

Napomena 3.1.9. *Malo kasnije ćemo dokazati da* θ *u definiciji* 3.1.8 *definira djelovanje operade* C_2 *na* $EC(1, D^2)$, 3.1.10. *Čini nam se da pomoću tog djelovanja možemo definirati djelovanje* C_2 *na* $\mathcal{K}$ *na način da svakom uzlu* $f \in \mathcal{K}$ *pridružimo* $\tilde{f} \in EC(1, D^2)$ *takav* *da je* $f(t) = \tilde{f}(t,0,0)$ *te definiramo* $\theta_k(c; f_1, ..., f_n)(t) = \theta_k(c; \tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_n)(t,0,0)$. *No za takvo djelovanje se može pokazati samo da je dobro do na homotpiju, u smislu komutativnih dijagrama u definiciji djelovanja operade na prostor. Razlog tome je što ne možemo defninirati preslikavanje* $f \mapsto \tilde{f}$ *takvo da je* $\widetilde{f\#g} = \tilde{f}\#\tilde{g}$, *odnosno da je* $\theta(c; \widetilde{f_1, ..., f_n}) = \theta(c; \tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_n)$.



Slika 3.6: Primjer potpunog preklapanja domena u definiciji 3.1.8, [3]

Propozicija 3.1.10 ([3])**.** *Fukcije* $\theta_k, k \in \mathbb{N}_0$ *definiraju djelovanje operade* C_2 *na prostor* $EC(1, D^2)$.

Skica dokaza. Trebamo provjeriti da djelovanje θ zadovoljava svojstva iz leme 1.1.7. Kompatibilnost jedinice i djelovanja simetrične grupe slijedi trivijalno te ostaje provjeriti da sljedeći dijagram komutira.

$$\begin{tikzcd}
C_2(n) \times C_2(k_1) \times EC(1,D^2)^{k_1} \times ... \times C_2(k_n) \times EC(1,D^2)^{k_n} \arrow[r] \arrow[d] & C_2(n) \times EC(1,D^2)^n \arrow[d] \\
C_2(k) \times EC(1,D^2)^k \arrow[r] & EC(1,D^2).
\end{tikzcd}$$

Preciznije želimo provjeriti da je

$$\theta(c;\theta(d_1;f_1^1,...,f_{k_1}^1),...,\theta(d_n;f_1^n,...,f_{k_n}^n)) = \theta(\gamma(c;d_1,...,d_n);f_1^1,...,f_{k_1}^1,f_1^2,...,f_{k_{n-1}}^{n-1},f_1^n,...,f_{k_n}^n).$$

Obje strane su kompozicije ulaganja oblika $l_j^i f_j^i$ do na poredak određen permutacijom iz definicije 3.1.8 (l_j^i je mala kocka koja odgovara "kompoziciji" c i $d_{i,j}$). Ključno je primijetiti da je relativan odnos faktora $l_{j_1}^{i_1} f_{j_1}^{i_1}$ i $l_{j_2}^{i_2} f_{j_2}^{i_2}$ različit na lijevoj i desnoj strani samo ako su im nosači disjunktni, a u tom slučaju poredak komponiranja nije bitan zbog napomene 3.1.5 □

Teorem 3.1.11. *Operacija sume, odnosno dovezivanja, debelih uzlova je komutativna do na homotopiju.*

Dokaz. Uzmimo male 2−kocke l i d takve da je $l(x,y) = (-\frac{1}{2},0)+\frac{1}{4}(x,y)$ te $d(x,y) = (\frac{1}{2},0)+\frac{1}{4}(x,y)$ te neka je $c = (l,d) \in C_2(2)$. Primijetimo da je $\theta_2(c;f,g) \simeq f\#g, \forall f,g \in EC(1,D^2)$. Također primijetimo da je $c\sigma = (d,l), \sigma = (2,1) \in S_2$ te da je

$$\theta_2(c\sigma;f,g) = \theta_2(c;g,f) \simeq g\#f, \forall f,g \in EC(1,D^2).$$

Sada tražimo put između c i $c\sigma$ u $C_2(2)$. Štoviše, slika 3.2 nam sugerira da postoji funkcija $p : S^1 \longrightarrow C_2(2)$ takva da je $p(1,0) = c$ i $p(-1,0) = c\sigma$. Izrazimo eksplicitno takvu funkciju.
Definiramo preslikavanja $p_l, p_d : S^1 \longrightarrow C_2(1)$ takva da je $p_l(s)(x,y) = -\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}(x,y)$, $p_d(s)(x,y) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}(x,y)$ te $p : S^1 \longrightarrow C_2(2), p(s) = (p_l(s), p_d(s))$. p_l i p_d, pa posljedično i p, su neprekidne funkcije te vrijedi $p(1,0) = c$ i $p(-1,0) = c\sigma$. p nam sada daje put/homotopiju između $\theta_2(c;f,g)$ i $\theta_2(c\sigma;f,g)$ pa zbog prethodno navedenih svojstava imamo: $f\#g \simeq \theta_2(c;f,g) \simeq \theta_2(c\sigma;f,g) = \theta_2(c;g,f) \simeq g\#f$. □

Rezultati koje do sada imamo još uvijek nam ne govore o samom prostoru $\mathcal{K}$. Sjetimo se, glavni rezultat ovog poglavlja opisuje (slabi) homotopski tip prostora $\mathcal{K}$, no $\mathcal{K}$ i $EC(1,D^2)$ nisu homotopski ekvivalentni. U nastavku kao model za $\mathcal{K}$ biramo prikladan potprostor od $EC(1,D^2)$.

Za dani uzao $f \in EC(1,D^2)$ definiramo $\omega(f) \in \mathbb{Z}$ kao spletni broj krivulja $f|_{\mathbb{R}\times\{(0,0)\}}$ i $f|_{\mathbb{R}\times\{(0,1)\}}$. Intuitivno $\omega(f)$ zamišljamo kao broj puta koliko se jedna krivulja omotala oko druge te nam je smjer namotavanja bitan tako da $\omega(f)$ može poprimati i negativne vrijednosti te se "pozitivna" i "negativna" namotavanja "poništavaju". Pripadna funkcija $\omega : EC(1,D^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$ je invarijantna na izotopiju te je homomorfizam monoida $\pi_0\mathcal{K}$ i $\mathbb{Z}$, preciznije $f \simeq g \implies \omega(f) = \omega(g)$ i $\omega(f \circ g) = \omega(f) + \omega(g)$. Detaljniji opis funkcije ω može se naći u [3].

Definicija 3.1.12. *Prostor $\hat{\mathcal{K}}$ definira se kao $\hat{\mathcal{K}} = \omega^{-1}(\{0\}) \subset EC(1,D^2)$.*

Elemente prostora $\hat{\mathcal{K}}$ zamišljamo kao debele uzlove čija je ukupna "torzija" 0. Potreba za promatranjem baš ovog prostora je tehničke prirode, no jedan način da gledamo na nju je da želimo da prirodna projekcija $p : EC(1, D^2) \longrightarrow \mathcal{K}, p(f) = f|_{\mathbb{R}\times\{(0,0)\}}$ restringirana na $\hat{\mathcal{K}}$ inducira izomorfizam monoida $\pi_0\hat{\mathcal{K}}$ i $\pi_0\mathcal{K}$. Primijetmo da propozicije 3.1.10 i 3.1.6 vrijede i za prostor $\hat{\mathcal{K}}$. Sljedeća propozicija daje nam opravdanje za promatranje prostora $\hat{\mathcal{K}}$ jer jer omogućuje potpun prijelaz na promatranje C_2-prostora za dokazivanje željenog rezultata 3.2.2.

Propozicija 3.1.13 (R. Budney, [3])**.** *Prostori $\hat{\mathcal{K}}$ i $\mathcal{K}$ su homotopski ekvivalentni.*

3.2 Homotopski tip prostora $\hat{\mathcal{K}}$

U ovom odjeljku u kratkim crtama provodimo dokaz teorema 3.2.2 koji govori o (slabom) homotopskom tipu prostora $\hat{\mathcal{K}}$. Fokusirat ćemo se na dijelove dokaza za koje je potrebno djelovanje operade C_2, a ostale veće korake samo navodimo.

Od sada ćemo pod *uzao* podrazumijevati samo elemente u $\hat{\mathcal{K}}$. Za početak sljedećom definicijom proširujemo pojam sume debelih uzlova i definiramo proste debele uzlove.

Definicija 3.2.1. *Za $f \in \hat{\mathcal{K}}$ s $\hat{\mathcal{K}}_f$ označimo komponentu povezanosti od f u $\hat{\mathcal{K}}$. Kažemo da je debeli uzao f* suma uzlova *$f_1, ..., f_n$, i pišemo $f \sim f_1\#...\#f_n$, ako postoji $c \in C_2(n)$ takva da je $\theta_n(c; f_1, ..., f_n) \in \hat{\mathcal{K}}_f$. Za sumu $f_1\#...\#f_n$ kažemo da je* trivijalna *ako je $n-1$ pribrojnika u $\hat{\mathcal{K}}_{id_{\mathbb{R}\times D^2}}$. Debeli uzao p zovemo* prost *ako $p \notin \hat{\mathcal{K}}_{id_{\mathbb{R}\times D^2}}$ te ako je svaki prikaz p kao sume trivijalan. S $\mathcal{P}$ označimo prostor prostih debelih uzlova.*

Primijetimo da se gornja definicija do na izotopiju slaže s prijašnjom definicijom sume debelih uzlova. Ovo se može pokazati metodom sličnom kao u dokazu teorema 3.1.11. Također se slično može pokazati da poredak pribrojnika nije bitan. Na prostoru $\hat{\mathcal{K}}$ imamo analogon Schubertovog teorema koji govori da je svaki uzao, koji nije izotopan trivijalnom, prikaziv kao suma prostih uzlova te da je taj prikaz jedinstven do na poredak pribrojnika i izotopiju.

Teorem 3.2.2 (R. Budney, [3])**.** *$\hat{\mathcal{K}} \simeq C_2(\mathcal{P} \sqcup \{*\})$, štoviše, preslikavanje*

$$\sqcup_{n=0}^{\infty}\theta_n : \sqcup_{n=0}^{\infty}C_(n) \times \hat{\mathcal{K}}^n \longrightarrow \hat{\mathcal{K}}$$

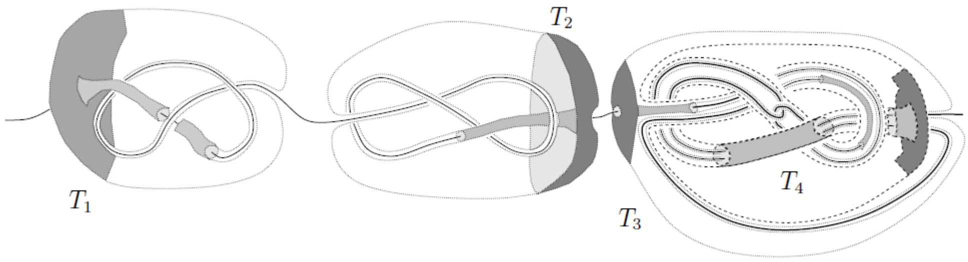
restringira se do homotopske ekvivalencije $\sqcup_{n=0}^{\infty}C_(n) \times \mathcal{P}^n \longrightarrow \hat{\mathcal{K}}$.

Prije dokaza teorema 3.2.2 navodimo nekoliko rezultata koji nam omogućuju pojednostavljenje dokaza, a čije dokaze izostavljamo.

Torusna dekompozicija komplemenata uzlova

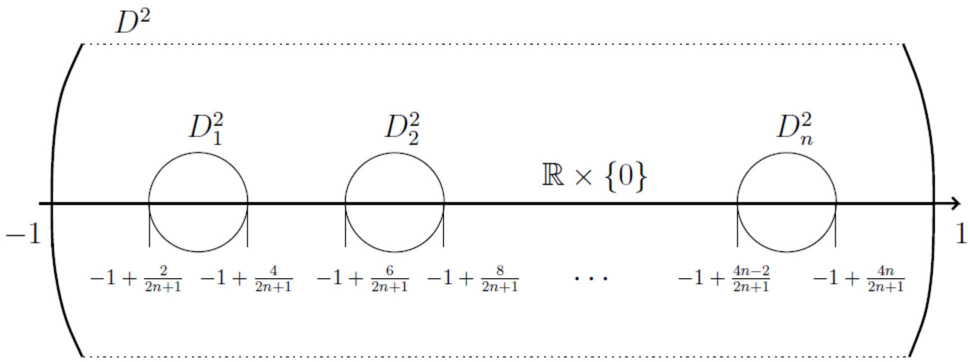
Torusna dekompozicija komplementa uzla f usko je povezana uz rastav na proste pribrojnike. Spomenuta dekompozicija uzlu f pridružuje određenu 3−mnogostukost koja, do na homeomorfizam, ovisi samo o broju prostih pribrojnika uzla f. Ukratko opisujemo takvu dekompoziciju:

Neka je B zatvorena kugla u čijem se interioru nalazi $I \times D^2$. Za debeli uzao $f \in \hat{\mathcal{K}}$ možemo definirati pripadnu 3−mnogostrukost $C = B \setminus f(\mathbb{R} \times int\ D^2)$, s rubom ∂C, koju zovemo *komplement uzla f*. Mnogostrukosti C pridružujemo takozvanu torusnu dekompoziciju koja je definirana kao minimalna kolekcija uloženih torusa $\sqcup T_i$ takva da vrijede neka posebna svojstva, [3]. Nama je bitno da je ta kolekcija jedinstvena do na izotopiju te da $C \setminus \bigsqcup \nu T_i$, νT_i je tubasta okolina od T_i, ima jedinstvenu komponentu V koja sadrži T koju nazivamo *temeljna mnogostrukost* od C.



Slika 3.7: Torusna dekompozicija komplementa uzla, [3]

Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo kolekciju $(D_i^2)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ takvu da je (D_i^2) dvodimenzionalni krug radijusa $\frac{1}{2n+1}$ sa središtem $(\frac{4i-2n-2}{2n+1}, 0)$. Definiramo $P_n = D^2 \setminus \bigsqcup intD_i^2$. P_n zovemo $n-$punktirani krug.



Slika 3.8: $n-$punktirani krug P_n, [3]

U dokazu je bitan slučaj $f = \theta(c; f_1, ..., f_n)$, gdje su f_i prosti te su $\mathrm{Im}\, c_i \subset D_i^2$. Tada s $B_i \subset B$ označimo kugle radijusa $\frac{i}{2n+1}$ centrirane u $(\frac{4i-2n-2}{2n+1}, 0, 0)$. Uzmemo li

$$C = B \setminus f(\mathbb{R} \times int\ \frac{1}{2}D^2)$$

te

$$C_i = B_i \setminus f(\mathbb{R} \times int\ D^2),$$

pripadna temeljna mnogostukost V, za C je $C \setminus \bigsqcup int\ C_i$. (Za objekte C i C_i u stvari promatramo njihove glatke aproksimacije, no budući da strogi diferencijalni računi nisu ključni u ovom radu, formalan prijelaz na takve objekte izostavljamo.)

Lema 3.2.3 (R. Budney, [3])**.** *Debeli uzao je ne-trivijalna suma ako i samo ako je temeljna mnogostrukost pripadnog komplementa difeomorfna s* $S^1 \times P_n$ *za neki* $n \geq 2$*. U tom slučaju je* n *broj prostih pribrojnika od* f*.*

Lema 3.2.4 (R. Budney, [3])**.** *Neka je* $f \in \hat{\mathcal{K}}$ *debeli uzao te* C *pripadni komplement. S* $\mathbf{Diff}(C, \partial C)$ *označimo grupu difeomorfizama od* C *koji se restringiraju na* $id_{\partial C}$*. Tada je* $\hat{\mathcal{K}}_f$ *klasifikacijski prostor za* $\mathbf{Diff}(C, C)$*. Štoviše,* $\hat{\mathcal{K}}_f$ *je* $K(\pi, 1)$ *prostor, odnosno ima netrivijalnu samo prvu grupu homotopije.*

Skica dokaza. Za kuglu B iz definicije torusne dekompozicije s $\mathbf{Diff}(B)$ označimo grupu difeomorfizama $\mathbb{R}^3$ koji su identiteta na komplementu od $I \times D^2$. Preslikavanje $\mathbf{Diff}(B) \to \hat{\mathcal{K}}_f$ definirano s $g \mapsto g \circ f$ daje fibraciju

$$\mathbf{Diff}(C, \partial C) \to \mathbf{Diff}(B) \to \hat{\mathcal{K}}_f$$

Rezultat dalje slijedi zbog činjenice da je $\mathbf{Diff}(B)$ kontraktibilan, [12]. □

Prethodne dvije leme nam omogućuju da dokaz nastavimo promatrajući određene grupe difeomorfizama.

$C_2(n)$ i grupa $\mathbf{Diff}(P_n)$

Slično dokazu leme 3.2.4 dokazujemo sljedeću propoziciju:

Propozicija 3.2.5. *$C_2(n)/S_n \simeq \mathbf{BDiff}(P_n)$ i $C_2(n) \simeq \mathbf{BPDiff}(P_n)$, gdje je $\mathbf{Diff}(P_n)$ grupa difeomorfizama na P_n koji, po točkama, fiksiraju vanjski rub od P_n, a $\mathbf{PDiff}(P_n)$ grupa elemenata u $\mathbf{Diff}(P_n)$ čije su restrikcije na ∂P_n izotopne $id_{\partial P_n}$.*

Dokaz. Definiramo projekciju $p : \mathbf{Diff}(D^2) \to C_2(n)$ s $g \mapsto (g(c_1), ..., g(c_n)) \hookrightarrow B_2(n) \hookrightarrow C_2(n)$, gdje su inkluzije definirane u zadnjem odjeljku poglavlja 2, te su $c_i = (\frac{4i-2n-2}{2n+1}, 0)$ centri krugova D_i^2. S $\mathbf{Diff}(D^2, \{c_i : i \in \{1, ..., n\}\})$ označimo grupu elemenata u $\mathbf{Diff}(D^2)$ koji permutiraju $\{c_i : i \in \{1, ..., n\}\}$ te s $\mathbf{PDiff}(D^2, \{c_i : i \in \{1, ..., n\}\})$ grupu elemenata u $\mathbf{Diff}(D^2)$ koji na $\{c_i : i \in \{1, ..., n\}\}$ djeluju kao identiteta. Imamo homotopske ekvivalencije: $\mathbf{Diff}(D^2, \{c_i : i \in \{1, ..., n\}\} \simeq \mathbf{Diff}(P_n)$ i $\mathbf{PDiff}(D^2, \{c_i : i \in \{1, ..., n\}\}) = \mathbf{PDiff}(P_n)$. Sa $*$ označimo $p(id_{D^2})$. Za $(C_2(n)/S_n, *)$ i $(C_2(n), *)$ imamo sljedeće fibracije:

$$\mathbf{Diff}(D^2, \{c_i : i \in \{1, ..., n\}\}) \xrightarrow{\hookrightarrow} \mathbf{Diff}(D^2) \xrightarrow{p} (\operatorname{Im} p)/S_n$$

$$\mathbf{PDiff}(D^2, \{c_i : i \in \{1, ..., n\}\}) \xrightarrow{\hookrightarrow} \mathbf{Diff}(D^2) \xrightarrow{p} \operatorname{Im} p$$

Budući da je $\operatorname{Im} p$ deformacijski retrakt od $C_2(n)$ i činjenice da je $\mathbf{Diff}(D^2)$ kontraktibilna (Smale, [12]), slijedi tvrdnja propozicije. □

Dokaz glavnog rezultata

Prethodne leme omogućuju da se dokaz teorema 3.2.2 svede na promatranje određenih grupa difeomorfizama. Konačni dokaz provodi se s puno eksplicitnog računa, a djelovanje θ se koristi trivijalno, pa stoga dokaz opisujemo u kratkim crtama.

Skica dokaza teorema 3.2.2*, R. Budney* [*3*]. Dokaz se sastoji od dva temeljna dijela, dokazivanje homotopske ekvivalencije i pokazivanje da je θ inducira izomorfizam grupa homotopije. Schubertov teorem kaže da je svaki debeli uzao f prikaziv kao suma prostih uzlova $f_1\#...\#f_n$ i da je taj prikaz jedinstven do na poredak članova (i izotopiju). Promatramo li, uz prethodnu činjenicu, djelovanje S_n na $C_2(n) \times \mathcal{P}^n$ dano sa $\sigma(c; f_1, ..., f_n) = (c\sigma; f_{\sigma(1)}, ..., f_{\sigma(n)})$ dobivamo da morfizam $\sqcup_{n=0}^{\infty}\theta_n$ inducira bijekciju $\sqcup_{n=0}^{\infty}\pi_0((C_2(n)\times\mathcal{P}^n)/S_n) \to$

$\pi_0\hat{\mathcal{K}}$. Sada vidimo da je dovoljno provjeriti da spomenuti morfizam inducira slabu homotopsku ekvivalenciju na komponentama povezanosti.
Budneyeva motivacija za dokaz je, takozvana, fibracija malih kocaka

$$S_n \to C_2(n) \times \mathcal{P}^n \to (C_2(n) \times \mathcal{P}^n)/S_n.$$

Ova fibracija dobivena je iz prethodno spomenutog djelovanja grupe S_n, a restrikcija ovog djelovanja na komponente povezanosti $C_2(n) \times \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{K}}_{f_i}$ daje fibraciju

$$\Sigma_f \to C_2(n) \times \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{K}}_{f_i} \to (C_2(n) \times \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{K}}_{f_i})/\Sigma_f$$

gdje je $f = f_1\#...\#f_n$ i $\Sigma_f \subset S_n$ je grupa permutacija g za koje vrijedi $g(i) = j \Rightarrow \hat{\mathcal{K}}_{f_i} = \hat{\mathcal{K}}_{f_j}$. Budući da je samo prva grupa homotopije prostora $\hat{\mathcal{K}}_f$ netrivijalna (lema 3.2.4), jednom kada se pokaže slaba ekvivalentnost, dovoljno je provjeriti samo da θ inducira izomorfizam prvih grupa homotopije. Gornja fibracija nam daje sljedeći egzaktan niz

$$0 \to \pi_1 C_2(n) \times \prod_{i=1}^n \pi_1\hat{\mathcal{K}}_{f_i} \to \pi_1((C_2(n) \times \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{K}}_{f_i})/\Sigma_f) \to \Sigma_f \to 0$$

Budući da želimo pokazati da $\sqcup_{k=0}^{\infty}\theta_k$ inducira izomorfizam grupa $\pi_1((C_2(n)\times\prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{K}}_{f_i})/S_n)$ i $\pi_1\hat{\mathcal{K}}_f$, motivirani lemom 3.2.4 i propozicijom 3.2.5, tražimo analogone gornje fibracije u određenim grupama difeomorfizama na prostorima vezanim za torusnu dekompoziciju komplementa uzla f. Ovaj postupak ne provodimo, a može se naći u [3].
Za $f = id_{I\times D^2}$ imamo da je $\hat{\mathcal{K}}_f$ kontraktibilan pa θ_0 trivijalno daje homotopsku ekvivalenciju $C_2(0) \times \mathcal{P}^0 \to \hat{\mathcal{K}}_f$.
Za $f \in \mathcal{P}$ imamo da je $\hat{\mathcal{K}}_f$ komponenta od $\mathcal{P}$. Zbog kontraktibilnosti $C_2(1)$ slijedi da je θ_1, shvaćen kao $C_2(1) \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, homotopan projekciji $C_2(1) \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, pa je homotopska ekvivalencija. Posljedično je θ_1 homotopska ekvivalencija i na komponentama od $C_2(1) \times \mathcal{P}$ pa slijedi željena tvrdnja.
Neka je $f = f_1\#...\#f_n$ dekompozicija od f na proste pribrojnike za $n \geq 2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $f = \theta_n(c; f_1, ..., f_n)$ za c takav da su nosači od $c_i f_i$ disjunktni, odnosno da imaju disjunktne okoline. S B, B_i, C i C_i označimo pripadne pripadne kugle/komplemente uzlova te s V temeljnu mnogostrukost, pridruženu uzlu f. Budney u [3], motiviran prijašnjom diskusijom, dokaz dovodi do:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_f \arrow[r] & \mathbf{BKDiff}(S^1 \times P_n) \times \prod_{i=1}^n \mathbf{BDiff}(C_i, T_i) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \widetilde{\mathbf{BKDiff}}^V(C, T) \arrow[d, "\simeq"] \\
& C_2(n) \times \prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{K}}_{f_i} & \hat{\mathcal{K}}_f
\end{tikzcd}$$

pri čemu je gornji red fibracija, a **KDiff** su određene grupe difeomorfizama koje fiksiraju rubove. Detaljniji opis ovih grupa nalazi se u [3], a mi ga izostavljamo. Budući da je $\hat{\mathcal{K}}_f$ zapravo $K(\pi, 1)$ prostor, dovoljno provjeriti da θ_n inducira izomorfizme prvih grupa homotopije, tj. da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\mathbf{BKDiff}(S^1 \times P_n) \times \prod_{i=1}^n \pi_1\mathbf{BDiff}(C_i, T_i) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_1\mathbf{B}\widetilde{\mathbf{KDiff}}^V(C, T) \arrow[d, "\simeq"] \\
\pi_1 C_2(n) \times \prod_{i=1}^n \pi_1\hat{\mathcal{K}}_{f_i} \arrow[r, "\pi_1\theta_n"] & \hat{\mathcal{K}}_f
\end{tikzcd}$$

Kraj dokaza provodi se eksplicitnim računom na petlje u navedenim grupama difeomorfizama, [3], a mi ga izostavljamo. □

Teorem 3.2.2 i propozicija 3.1.13, pokazuju da je $\mathcal{K}$ slabog homotopskog tipa objekta malih $2-$kocaka nad prostorom prostih uzlova. Ovo nam govori da je operada malih $2-$kocaka prirodan dio geometrije prostora $\mathcal{K}$.

Dodatak

U ovom dodatku uvodimo neke osnovne pojmove teorije kategorije i topologije te navodimo glavne rezultate koji se tiču našeg rada. Radi preglednosti dokaze izostavljamo.

A Teorija kategorija

Definicija A.1. Kategorija *$\mathcal{C}$ sastoji se od kolekcije objekata* $\mathbf{Ob}\,\mathcal{C}$ *sa sljedećom struktrom:*
• *Za svaka dva objekta $X, Y \in \mathbf{Ob}\,\mathcal{C}$ postoji jedinstven skup $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ čiji se elementi nazivaju* morfizmi.
• *Za svaka tri objekta $X, Y, Z \in \mathbf{Ob}\,\mathcal{C}$ definirana je kompozicija kao funkcija*

$$\circ : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

uz oznaku $f \circ g = \circ(f, g)$ koja je asocijativna u smislu da je $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ kada su sve operacije $\circ$ definirane.
• *Za svaki objekt $X \in \mathbf{Ob}\,\mathcal{C}$ postoji jedinstven morfizam $1_X \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X)$ takav da za svaki $Y \in \mathbf{Ob}\,\mathcal{C}$ i svaka dva morfizma $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ i $g \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ vrijedi da je $f \circ 1_X = f$ i $1_X \circ g = g$.*
Za morfizam $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ kažemo da je izomorfizam *ako postoji $g \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ takav da je $f \circ g = 1_Y$ i $g \circ f = 1_X$. Ako postoji izomorfizam $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ kažemo da su X i Y* izomorfni.

Definicija A.2. *(Kovarijantni)* funktor *$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sastoji se od "preslikavanja"*
$F : \mathbf{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ob}\,\mathcal{D}$ te kolekcije preslikavanja oblika $F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ takvih da je $F(1_X) = 1_{FX}$ i $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$.
Prirodna transformacija *η funktora F i $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, svakom objektu $X \in \mathbf{Ob}\,\mathcal{C}$ pridružuje morfizam $\eta_X : FX \to GX$ te vrijedi da za svaki morfizam $f : X \to Y$ (u $\mathcal{C}$) sljedeći dijagram komutira.*

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Ff"] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "\eta_Y"] & GY. \end{tikzcd}$$

U tom slučaju pišemo $\eta : F \to G$. Za prirodnu transformaciju η kažemo da je prirodni izomorfizam ako je svaki η_X izomorfizam.

Definicija A.3. *Za funktore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ kažemo da su adjungirani za sve $X \in \mathbf{Ob}\,\mathcal{C}$ i $Y \in \mathbf{Ob}\,\mathcal{D}$ postoji bijekcija $\alpha = \alpha_{X,Y} : \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \to \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$ za koju sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g_*"] & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y') \arrow[r, "\alpha"] & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \arrow[r, "\alpha"] & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, "(Ff)^*"] & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GY) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

pri čemu su, općenito, za $f : A \to B$, f_* i f^* definirani s $f_*(g) = f \circ g$ i $f^*(g) = g \circ f$. U ovom slučaju kažemo da je F lijevo adjungiran funktoru G, odnosno G desno adjungiran funktoru F i pišemo $F \dashv G$. U posebnom slučaju $Y = FX$ definiramo $\mu_X = \alpha(1_{FX})$ te u slučaju $X = GY$ definiramo $\eta_Y = \alpha^{-1}(1_{GY})$. μ i η redom zovemo jedinica *i* kojedinica *adjunkcije.*

Propozicija A.4. *$\mu : 1 \to GF$ i $\eta : FG \to 1$ su prirodne transformacije funktora takve da sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} & FGF \arrow[dr, "\eta F"] & \\ F \arrow[ur, "F\mu"] \arrow[rr, "1"] & & F \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\mu G"'] & & G \\ & GFG \arrow[ur, "G\eta"'] & \end{tikzcd}$$

Vrijedi i obrat prethodne propozicije

Propozicija A.5. *Neka su $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktori takvi da postoje prirodne transformacije $\mu : 1 \to GF$ i $\eta : FG \to 1$ za koje vrijede svojstva iz propozicije A.4. Tada su funktori F i G adjungirani te su μ i η jedinica i kojedinica te adjunkcije.*

B Topologija

Kompaktno otvorena topologija

Definicija B.1. *Neka su X i Y topološki prostori. Za $K \subseteq X$ kompaktan i $V \subseteq Y$ otvoren definiramo skup $B(K, V) = \{f \in Y^X : f(K) \subseteq V\}$. Familija $\{B(K, V) : K \subseteq X$ kompaktan, $V \subseteq Y$ otvoren$\}$ čini predbazu topologije na Y^X koju zovemo* kompaktno otvorena topologija*.*

Propozicija B.2. *Neka su X, Y i Z topološki prostori. Kompozicija funkcija*

$$\circ : Z^Y \times Y^X \to Z^X$$

je neprekidna funkcija.

Propozicija B.3. *Neka su X i Y topološki prostori i K kompaktan Hausdorffov prostor. Tada postoji bijekcija $Y^{X\times K} \to (Y^K)^X$ dana s: $f \mapsto g \iff f(x, k) = g(x)(k), \forall x, k$.*

Prostori petlji

Definicija B.4. *Neka je $X = (X, x_0)$ objekt u* **Top**$_*$*. Definiramo* prostor petlji

$$\Omega X = (\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(S^1, *), \kappa_{x_0})$$

kao objekt u **Top**$_*$*, gdje je κ_{x_0} konstantna petlja. Također definiramo* suspenziju

$$\Sigma X = S^1 \times X/(\{*\} \times X \cup S^1 \times \{x_0\})$$

također kao objekt u **Top**$_*$*.*

Koristimo notaciju $[t, x]$ za element u ΣX koji je slika od (t, x) po kvocijentnom preslikavanju. Primijetimo da je $[t, x_0] = * = [*, x], \forall t, x$.

Propozicija B.5. *Neka su X i Y objekti u* **Top**$_*$*. Postoji bijekcija*

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(\Sigma X, Y) \to \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X, \Omega Y)$$

dana s: $g \mapsto f \iff g([t, x]) = f(x)(t)$.

Prethodna propozicija daje naslutiti adjunkciju "funktora" Ω i Σ. Definirajmo prvo kako Ω i Σ djeluju na morfizme u $\mathbf{Top}_*$.

Definicija B.6. *Neka je* $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X, Y)$.
Definiramo $\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$ *i* $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$*:*

$$\Omega f(p)(t) = f(p(t)), \Sigma f([t, x]) = [t, f(x)].$$

Propozicija B.7. Ω *i* Σ *sa ovako definiranim djelovanjima na objekte i morfizme u* $\mathbf{Top}_*$ *su kovarijantni funktori* $\Omega, \Sigma : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$.

Kao posljedicu korespondencije iz propozicije $B.5$ imamo sljedeći teorem.

Teorem B.8 (Adjunkcija Σ i Ω)**.** *Bijekcija is propozicije* $B.5$ *daje adjunkciju* $\Sigma \dashv \Omega$.

Zanimljive su nam i iteracije funktora Σ i Ω pa navodimo jedan rezultat vezan za njih (teorem $B.10$).

Definicija B.9. *Za X i Y objekte u* $\mathbf{Top}_*$ *definiramo* smash produkt

$$X \wedge Y = X \times Y/(\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}).$$

Teorem B.10. $n-$*ta iteracija* Ω^n *funktora* Ω *prirodno je izomorfna funktoru* $X \mapsto X^{S^n}$. *Također je* $n-$*ta iteracija* Σ^n *funktora* Σ *prirodno izomorfna funktoru* $X \mapsto S^n \wedge X$.

Teorem $B.10$ dobivamo kao posljedicu činjenice da je $S^{n+1} = S^n \wedge S^1 = S^1 \wedge S^n$ i sljedeće propozicije.

Propozicija B.11. *Neka su X, Y i K objekti u* $\mathbf{Top}_*$ *te K kompaktan. Tada postoji bijekcija* $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X \wedge K, Y) \to \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X, Y^K)$ *dana s:* $g \leftrightarrow f \iff g([x, k]) = f(x)(k)$.

Primijetimo da je propozicija B.5 poseban slučaj prethodne propozicije.

Korolar B.12. *Postoji adjunkcija* $\Sigma^n \dashv \Omega^n$

Dokaz. Promatrajmo spomenutu adjunkciju i njoj pripadnu bijekciju $\alpha : \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(\Sigma X, Y) \to \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X, \Omega Y)$. Iteriranjem bijekcije α dobivamo bijekciju $\alpha^n : \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(\Sigma^n X, Y) \to \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(X, \Omega^n Y)$. Sada nije teško provjeriti da za α^n vrijede potrebne relacije prirodnosti. $\square$

Slaba C^∞ topologija

Definicija B.13. *Za C^r mnogostrukosti M i N s $C^r(M,N)$ označimo skup C^r funkcija iz M u N. Neka je $f \in C^r(M,N)$. Za (φ, U) i (ψ, V) redom karte na M i N te $K \subseteq U$ kompaktan takav da je $f(K) \subset V$ i $0 < \varepsilon \leq +\infty$ definiramo skup:*

$$\mathcal{N}^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon) =$$

$$= \{g \in C^r(M,N) : g(K) \subset V, \left\| D^k(\psi f \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi g \varphi^{-1}(x) \right\| < \varepsilon, \forall x \in \varphi(K), \forall k \leq r\}$$

Ovakvi skupovi čine predbazu topologije na $C^r(M,N)$ koju zovemo slaba C^r topologija te prostor snabdjeven tom topologijom označimo s $C^r_W(M,N)$. Sada slabu C^∞ topologiju na $C^\infty(M,N)$ definiramo kao uniju topologija induciranih inkluzijama $C^\infty(M,N) \hookrightarrow C^r_W(M,N)$, a sa $C^\infty_W(M,N)$ označimo prostor $C^\infty(M,N)$ snabdjeven tom topologijom.

Fibracije, transformacijske grupe i klasifikacijski prostori

Definicija B.14. Svežanj *je trojka (E, p, B), gdje su E i B prostori, a $p : E \to B$ preslikavanje. Prostore B i E zovemo* bazni*, odnosno* potpuni *prostor, a preslikavanje p zovemo* projekcija*. Za $b \in B$, prostor $p^{-1}(\{b\})$ zovemo* vlakno *svežnja nad b.*
Kažemo da je prostor F vlakno *svežnja (E, p, B) ako je F homeomorfan vlaknu nad b za sve $b \in B$.*

Definicija B.15. Morfizam *svežnjeva (E, p, B) i (E', p', B') je par preslikavanja $(u, f), u : E \to E', f : B \to B'$ takav da je $p' \circ u = f \circ p$. U tom slučaju pišemo $(u, f) : (E, p, B) \to (E', p', B')$. Za morfizam svežnjeva $(u, f) : (E, p, B) \to (E', p', B')$ kažemo da je* izomorfizam *ako su u i f homeomorfizmi s inverzima u' i f' redom takvi da je $(u', f') : (E', p', B') \to (E, p, B)$ morfizam svežnjeva. Za dva svežnja kažemo da su* izomorfni *ako postoji izomorfizam među njima.*

Definicija B.16. *Kažemo da preslikavanje $p : E \to B$ ima* svojstvo dizanja homotopija *s obzirom na prostor X ako za svaku homotopiju $H : X \times I \to B$ i preslikavanje $g : X \to E$ takvo da je $p \circ g = H(\cdot, 0)$ vrijedi da postoji homotopija $\tilde{H} : X \to E$ koja diže H, odnosno $p \circ \tilde{H} = H$, i $\tilde{H}(\cdot, 0) = g$.* Fibracija *je preslikavanje $p : E \to B$ koje ima svojstvo dizanja homotopija s obzirom na svaki prostor X.*

Teorem B.17 (A. Hatcher, [4])**.** *Pretpostavimo je B povezan putevima i da preslikavanje $p : E \to B$ ima svojstvo dizanja homotopija s obzirom na svaku kuglu $D^k, k \geq 0$. Za $b_0 \in B$ odaberemo $x_0 \in F = p^{-1}(\{b_0\})$ te s ι označimo indlkuziju $F \hookrightarrow E$. Tada postoje homomorfizmi grupa/skupova homotopije $\varphi_n : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0)$ takvi da je sljedeći dugi niz egzaktan:*

$$... \to \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\varphi_n} \pi_{n-1}(F, x_0) \to ... \to \pi_0(E, x_0) \to \pi_0(B, b_0) = 0$$

Definicija B.18. Topološka grupa *je prostor G sa strukturom grupe takav da je funkcija* $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ *neprekidno preslikavanje* $G \times G \to G$. *Za topološku grupu G,* desni $G-$prostor *je prostor X zajedno s preslikavanjem* $X \times G \to X, (x,g) \mapsto xg$ *za koje vrijedi:*
$\bullet x(gh) = (xg)h, \forall x \in X, \forall g,h \in G$
$\bullet xe = x, \forall x \in X$
gdje je $e \in G$ neutralan element. Analogno se definira lijevi $G-$prostor.

Za (desni) $G-$prostor X definiramo relaciju ekvivalencije: $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, xg = y$ te s X/G označimo pripadni kvocijentni prostor, a s π pripadno kvocijentno preslikavanje. Primijetimo da je $(X,\pi,X/G)$ svežanj.

Definicija B.19. *Svežanj (X,p,B) se zove* $G-$svežanj *ako je X $G-$prostor i postoji homeomorfrizam* $f : X/G \to B$ *takav da je* $(id_X, f) : (X,\pi,X/G) \to (X,p,B)$ *izomorfizam svežnjeva.*

Definicija B.20. *$G-$prostor X je* slobodan *ako* $xg = x, \exists x \in X$ *implicira da je* $g = e \in G$. *Za slobodan $G-$prostor X, definiramo* $X^* = \{(x,xg) \in X \times X : x \in X, g \in G\}$. *Postoji funkcija* $\tau : X^* \to G$ *takva da je* $x\tau(x,x') = x', \forall (x,x') \in X^*$ *koju nazivamo translacijska funkcija. Primijetimo da je* $\tau(x,xg) = g$. *$G-$prostor X zove se* glavni *ako je X slobodan $G-$prostor takav da je translacijska funkcija* $\tau : X^* \to G$ *neprekidno preslikavanje.*

Definicija B.21. *$G-$svežanj (X,p,B) zovemo* glavni *ako je X glavni $G-$prostor.*

Propozicija B.22 (D. Husemoller, [5])**.** *Ako je (X,p,B) glavni $G-$svežanj onda je G vlakno svežnja (X,p,B).*

Definicija B.23. *$G-$svežanj (E,p,B) se zove* univerzalni *ako je prostor E kontraktibilan. U tom slučaju E zovemo* potpun prostor *za G, a B zovemo* klasifikacijski prostor *za G. Klasifikacijski i potpun prostor za G označavamo s EG, odnosno BG.*

Nije teško odmah vidjeti da je slabi homotopski tip BG određen s G. Milnor u svom radu, [9, 8], konstruira univerzalni $G-$svežanj za svaku topološku grupu G.

Bibliografija

[1] J. M. Boardman i R. M. Vogt, *Homotopy-everything H-spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), br. 6, 1117–1122, https://projecteuclid.org:443/euclid.bams/1183530111.

[2] J.M. Boardman i R.M. Vogt, *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2006, ISBN 9783540377993, https://books.google.hr/books?id=QjB8CwAAQBAJ.

[3] R. Budney, *Little cubes and long knots*, arXiv Mathematics e-prints (2003), math/0309427.

[4] A. Hatcher, Cambridge University Press i Cornell University. Department of Mathematics, *Algebraic Topology*, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002, ISBN 9780521795401, https://books.google.hr/books?id=BjKs86kosqgC.

[5] D. Husemöller, *Fibre Bundles*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2013, ISBN 9781475740080, https://books.google.hr/books?id=-W0ECAAAQBAJ.

[6] P. Lambrechts i I. Volic, *Formality of the little N-disks operad*, arXiv e-prints (2008), arXiv:0808.0457.

[7] J.P. May, *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2006, ISBN 9783540376033, https://books.google.hr/books?id=iO56CwAAQBAJ.

[8] J. Milnor, *Construction of Universal Bundles, II*, Annals of Mathematics **63** (1956), br. 3, 430–436, ISSN 0003486X, http://www.jstor.org/stable/1970012.

[9] ______, *Construction of Universal Bundles, I*, Annals of Mathematics **63** (1956), br. 2, 272–284, ISSN 0003486X, http://www.jstor.org/stable/1969609.

[10] P. Salvatore, *Configuration spaces with summable labels*, arXiv Mathematics e-prints (1999), math/9907073.

[11] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN 9783642458132, `https://books.google.hr/books?id=DqukBgAAQBAJ`.

[12] S. Smale, *Diffeomorphisms of the 2-Sphere*, Proceedings of the American Mathematical Society **10** (1959), br. 4, 621–626, ISSN 00029939, 10886826, `http://www.jstor.org/stable/2033664`.

Sažetak

U ovom radu promatramo pojam operade, preciznije topološke operade, i neke njene primjene. Pojam je u današnjem obliku uveden u radu Petera Maya, [7], za potrebe karakterizacije višestrukih prostora petllji, no krajem dvadesetog stoljeća nalazi primjene i u drugim granama matematike. Rad je organiziran u tri poglavlja s dodatkom na kraju koji navodi osnovne rezultate teorije kategorija i topologije potrebne za praćenje sadržaja. U prvom poglavlju definiramo pojam operade i $\mathcal{P}-$prostora te pojam monade i algebre nad monadom. Navodimo neke osnovne primjere ovakvih objekata te opisujemo dvije temeljne konstrukcije, jednu koja operadi $\mathcal{P}$ pridružuje monadu čije algebre klasificiraju $\mathcal{P}-$prostore, te drugu koja operadi $\mathcal{P}$ pridružuje pripadnu rezolventu $W(\mathcal{P})$. Drugo poglavlje bavi se operadama malih kocaka, ključnim objektom u Mayevom radu karakterizacije višestrukih prostora petlji. Opisujemo kako operada malih kocaka prirodno djeluje na višestruke prostore petlji te navodimo dva ključna rezultata Mayevog rada. Na kraju poglavlja pokazujemo da je operada malih kocaka homotopski ekvivalentna prostorima konfiguracija $F(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Opisujemo kompaktifikaciju prostora konfiguracija te na njoj definiranu strukturu operade, takozvanu Kontsevichevu operadu. Treće poglavlje prati rad Ryana Budneya, [3], koji opisuje slabi homotopski tip prostora dugih uzlova $\mathcal{K}$. Budneyev rad se zasniva na Shubertovom radu, [11], koji pokazuje da operacije sume inducira strukturu komutativnog monoida na $\pi_0\mathcal{K}$ te daje do na poredak i izotopiju jedinstvenu dekompoziciju uzla na proste. Definiramo djelovanje operade malih 2−kocaka na određenom modelu za $\mathcal{K}$ te pratimo Budneyev dokaz fokusirajući se na spomenuto djelovanje.

Summary

In this paper we observe the notion of an operad, more precisely a topological operad, and some of its applications. The term operad, as it is known today, was first introduced in the work of Peter May, [7], for the purposes of characterizing iterated loop spaces, though, towards the end of the twentieth century, it finds its applications in other branches of mathematics. This paper is organized into three chapters, with an appendix that contains basic results of category theory and topology required for its understanding. In the first chapter we define operads and $\mathcal{P}-$spaces along with monads and algebras over a monad. We go over some basic examples of such objects and describe two basic constructions, one that associates to an operad $\mathcal{P}$ its corresponding monad P, such that algebras over the monad P characterize $\mathcal{P}-$spaces, and another that gives a certain resolution $W(\mathcal{P})$ of the monad $\mathcal{P}$. The second chapter deals with the little cube operad, the key object in May's work on the loopspace recognition principle. We describe the natural action of the little cube operad on iterated loop spaces and briefly go over May's two main resutls. In the last section of the chapter we show that the little cube operad is homotopy equivalent to configuration spaces $F(\mathbb{R}^n, \cdot)$. We also describe a compactification of those configuration spaces and its associated operad structure, the Kontsevich operad. The third chapter follows the work of Ryan Budney, [3], which describes the weak homotopy type of the spaces of long knots $\mathcal{K}$. Budney's work is loosely based on the work of Schubert, [11], in which it is shown that the connected sum operation induces a commutative monoid structure on $\pi_0\mathcal{K}$. We define the little 2−cube action on a certain model for $\mathcal{K}$ and follow Budeny's proof mainly focusing on the mentioned action.

Životopis

Rođen sam Zagrebu, 29. srpnja 1995. Prva četiri razreda osnovne škole završavam u OŠ Pavleka Miškine u Zagrebu, nakon čega s majkom i bratom selim u Veliku Goricu, gdje školovanje nastavljam u OŠ Eugena Kumičića. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja sudjelujem na brojnim natjecanjima znanja od kojih su najzapaženija Državno natjecanje iz matematike u 7. i 8. razredu te Državno natjecanje iz fizike u 8. razredu, na kojem osvajam 2. mjesto.

Završetkom osnovne škole upisujem *XV.* gimnaziju u Zagrebu. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja nastavljam se natjecati te se kao zapaženiji rezultati mogu istaknuti prvo mjesto na državnom natjecanju iz matematike u 2. razredu, A kategorija, sudjelovanje na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi te brončana medalja na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi.

Nakon završene srednje škole obrazovanje nastavlja na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Tijekom studija i dalje se natječem na studentskim natjecanjima te, kao izvrstan studentm, držim demonstrature iz kolegija Matematička analiza *I* i *II* te Diskretna matematika. Za vrijeme fakulteta sudjelujem i u pripremi učenika osnovnih i srednjih škola za matematička natjecanja, najviše u svojoj bivšoj školi te u sklopu udruge *Mladi nadareni matematičari - Marin Getaldić*. 2017. godine završavam preddiplomski studij te upisujem diplomski studij *Teorijska matematika* na istom fakultetu.