Jednadžbe i funkcije s realnim parametrom

Lukić, Eva

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Eva Lukić

JEDNADŽBE I FUNKCIJE S REALNIM PARAMETROM

Diplomski rad

Voditeljica rada:
doc.dr.sc. Maja Starčević

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Prema Nacionalnom kurikulumu [1], Algebra i funkcije matematički su sadržaj koji se pojavljuje već u 2. obrazovnom ciklusu, točnije u 6. razredu osnovne škole i dio je matematičkog obrazovanja sve do kraja srednje škole. Na kraju srednjoškolskog obrazovanja, vezano uz ovaj matematički sadržaj, očekujemo da će učenici moći:

- prepoznati i razumjeti zakonitosti, odnose, ovisnosti, veze i funkcije u matematici i realnom svijetu, te generalizirati na temelju njih;
- prikazati i analizirati matematičke situacije i strukture upotrebom algebarskih simbola i notacije te grafova i dijagrama;
- spretno rabiti algebarske izraze pri rješavanju praktičnih problema;
- rabiti matematičke modele za prikazivanje i razumijevanje kvantitativnih odnosa;
- analizirati promjene u različitim kontekstima.

U ostvarivanju navedenih učeničkih postignuća veliku ulogu ima razumijevanje koeficijenata i parametara jednadžbi i funkcija. U nastavnom planu i programu predloženo je da se na kraju svake cjeline vezane uz jednadžbe i nejednadžbe rješavaju i jednadžbe, odnosno nejednadžbe s parametrom. Međutim, nastavnici matematike često izbjegavaju to gradivo, što zbog nedostatka vremena, što zbog toga što smatraju da je njihovim učenicima taj dio gradiva preapstraktan.

Tema ovog diplomskog rada je kako primjena računala u nastavi matematike može pomoći u lakšem razumijevanju rješenja jednadžbi i sustava jednadžbi te ponašanja funkcija, odnosno grafova funkcija u ovisnosti o realnim parametrima. Konkretno, različiti matematički zadaci s jednadžbama i funkcijama s realnim parametrom riješit će se u programu GeoGebra, poneki i na algebarski način kako bismo usporedili te dvije metode rješavanja te sama rješenja, te će se osmisliti odgovarajući pristup poučavanju kako bi učenici što lakše sami uočili i razumjeli važnost i ulogu parametara u jednadžbama i funkcijama.

Poglavlje 1

Jednadžbe s realnim parametrom

Jednadžbe se protežu kroz čitavo osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje, stoga možemo reći da su vrlo važan dio matematičkog obrazovanja učenika. Iako se službeno uvode tek u 6. razredu osnovne škole, učenici se, bez da su toga svjesni, s jednadžbama upoznaju već u 1. razredu osnovne škole i to u zadacima u kojima se na mjestu nepoznanice nalazi prazan kvadratić u koji učenici trebaju upisati odgovarajući prirodni broj kako bi zadana jednakost vrijedila. Pogledajmo primjer takvog zadatka.

Primjer 1.1. *U kvadratić upiši odgovarajući broj kako bi vrijedila jednakost*

$$\square + 8 = 12. \tag{1.1}$$

U 6. razredu osnovne škole učenici se prvi put upoznaju s pojmom jednadžbe, točnije s linearnom jednadžbom s jednom nepoznanicom i tada jednakost (1.1) znaju zapisati u obliku

$$x + 8 = 12. \tag{1.2}$$

Zapis jednadžbe (1.2) je vrlo jednostavan i učenici s lakoćom dolaze do rješenja jednadžbe $x = 4$. No, jednadžba može biti zapisana i u složenijem obliku:

$$3x - 2(x - 4) = 12. \tag{1.3}$$

Rješavanjem jednadžbe (1.3), primjenom svojstava racionalnih brojeva, ponovno dobivamo rješenje $x = 4$. Dakle, iako su jednadžbe (1.2) i (1.3) različitog oblika, imaju isto rješenje, $x = 4$, a broj 4 je i broj koji se traži u zadatku.

Jednadžba je matematički zapis povezanosti dviju ili više veličina, odnosno jednadžbom povezujemo nepoznate veličine s preostalim, poznatim veličinama. Želimo li odrediti vrijednosti nepoznatih veličina u jednadžbi, sve ostale veličine moraju nam biti poznate. No, ponekad te veličine nisu poznate u samom trenutku rješavanja jednadžbi, već njihovu vrijednost doznajemo nakon rješavanja te ih na kraju samo uvrstimo u dobivena rješenja jednadžbi.

Nepoznate veličine jednadžbi čije vrijednosti treba odrediti kako bismo dobili rješenje jednadžbe nazivamo *nepoznanicama*. Uobičajeno je nepoznanice u jednadžbama zapisivati simbolima $x, y, z, \dots$, tj. određenim malim tiskanim slovima. Poznate vrijednosti u jednadžbama nazivamo *koeficijentima*. Koeficijenti su realni brojevi koji u jednadžbi mogu biti samostalni, ali i navedeni uz samu nepoznanicu. Tako je u jednadžbi (1.2) uz nepoznanicu x koeficijent jednak 1, dok se u jednadžbi (1.3), nakon rješavanja izraza u zagradi, uz nepoznanicu x pojavljuju koeficijenti 3 i -2. Kao što je prethodno spomenuto, vrijednosti poznatih veličina u jednadžbama ponekad nisu poznate na samom početku, te ih tada uobičajeno zapisujemo simbolima $k, l, m, n, a, b, c, \dots$ i nazivamo ih *parametrima*. Parametrom označavamo da vrijednost koeficijenta u jednadžbi može biti bilo koji broj iz skupa brojeva preciziranog u pojedinom zadatku. Najčešće se radi o skupu realnih brojeva pa tada za parametar kažemo da je realan.

Primjer 1.2. *Riješi jednadžbu*

$$kx + 2x = k - 3 \tag{1.4}$$

u ovisnosti o parametru k.

Jednadžba (1.4) je linearna jednadžba s jednom nepoznanicom, koja je standardno označena s x, a s obzirom da je i vrijednost koeficijenta k trenutno nepoznata, k je parametar. Pretpostavimo da k može biti bilo koji realan broj. Primijetimo kako se parametar k u ovom slučaju nalazi i uz nepoznanicu x i samostalno, s desne strane znaka jednakosti. Sređivanjem jednadžbe (1.4) dolazimo do jednadžbe oblika

$$(k + 2)x = k - 3. \tag{1.5}$$

Kao i kod jednadžbi bez parametra, i ovdje nam je prva ideja dijeljenje jednadžbe izrazom uz nepoznanicu, odnosno s $k+2$, no ovaj izraz može biti jednak nuli, a znamo da s nulom ne smijemo dijeliti. Stoga je nužno promatrati dva zasebna slučaja, kada je izraz $k + 2$ različit od nule i kada je jednak nuli.

Pretpostavimo da je $k + 2 \neq 0$, tj. $k \neq -2$. Tada jednadžbu (1.5) možemo podijeliti s $k + 2$ i dolazimo do rješenja jednadžbe, odnosno vrijednost nepoznanice x jednaka je

$$x = \frac{k - 3}{k + 2}. \tag{1.6}$$

No, oblik rješenja (1.6) nije definiran za $k = -2$, pa provjerimo ima li jednadžba rješenja i kakva za vrijednost -2 parametra k. Uvrstimo $k = -2$ u jednadžbu (1.5). Tada jednadžbu (1.5) svodimo na oblik $0 \cdot x = -5$, a znamo da ne postoji broj x za koji je ova jednakost zadovoljena pa zaključujemo da za $k = -2$ početna jednadžba nema rješenja.

Učenici srednje škole, po gimnazijskom programu, imaju znanje potrebno da argumentiraju rješenje jednadžbe (1.4) u ovisnosti o realnom parametru k, no i njima ponekad rješavanje ovakvih jednadžbi stvara problem. Jedan od ciljeva ovog diplomskog rada je pokazati kako pomoću GeoGebre, programa dinamične geometrije, jednostavno i jasno riješiti jednadžbe s realnim parametrom. Stoga vizualizirajmo početnu jednadžbu (1.4) u GeoGebri. Zapišimo ju u obliku sustava dviju jednadžbi tako da obje strane početne jednadžbe (1.4) izjednačimo s y, odnosno zapišimo sustav

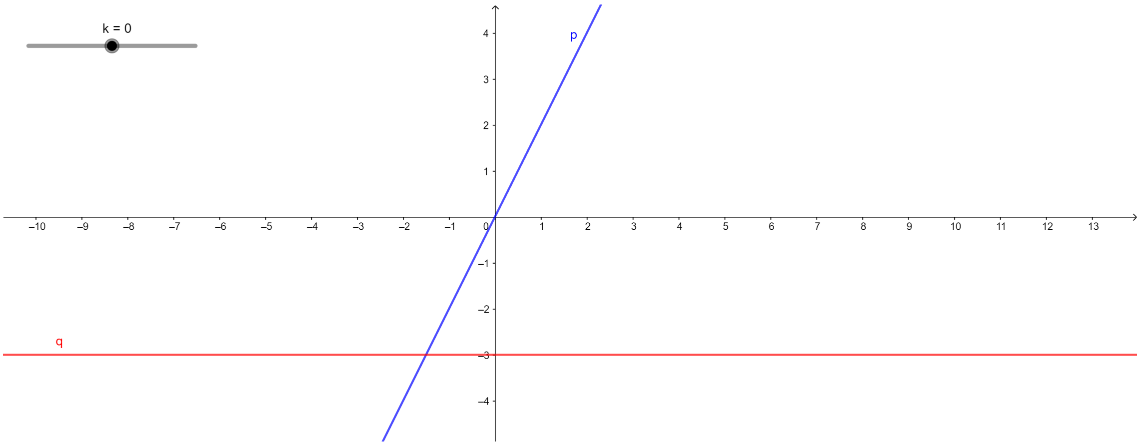
$$\begin{cases} y = kx + 2x \\ y = k - 3 \end{cases} . \tag{1.7}$$

Primjećujemo da sustav jednadžbi (1.7) opisuje dva pravca u ravnini, stoga možemo komentirati da će početna jednadžba (1.4) imati rješenje ako i samo ako se pravci $p \ldots\ y = kx + 2x$ i $q \ldots\ y = k - 3$ sijeku (pri čemu se mogu sjeći u jednoj točki ili se mogu podudarati). U GeoGebru upišimo jednadžbe pravaca p i q te uvedimo klizač za parametar k. Direktnim unosom jednadžbi pravaca u GeoGebru, odnosno upisivanjem jednadžbi pravaca u traku za unos, a s obzirom da se u jednadžbama pojavljuje parametar k, GeoGebra automatski nudi mogućnost aktivacije klizača, s rasponom vrijednosti od -5 do 5 i pomakom 0.1, no ako želimo, možemo promijeniti pomak ili raspon vrijednosti (Slika 1.1).

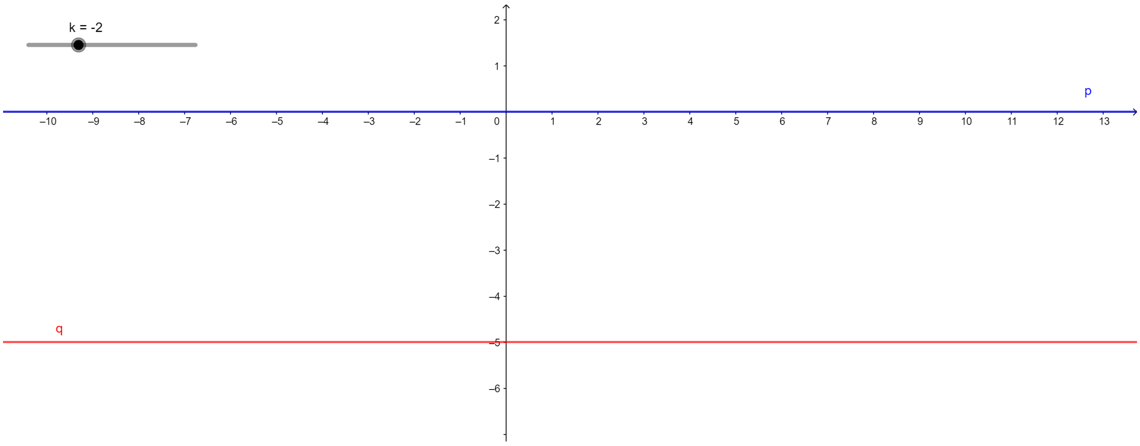
Pomicanjem klizača uočit ćemo kako se mijenjaju položaji pravaca p i q, a samim time i njihovo sjecište. Odnosno, pomicanje klizača predstavlja promjenu parametra k početne jednadžbe (1.4) i tako uočavamo promjenu rješenja jednadžbe u ovisnosti o promjeni parametra k.

Pomicanjem klizača primjećujemo da se pravci p i q sijeku u jednoj točki kad je $k \neq -2$ (Slika 1.1), što znači da jednadžba (1.4) ima točno jedno rješenje. No, za parametar $k = -2$, pravci p i q su paralelni (Slika 1.2), dakle nemaju zajedničkih točaka, pa jednadžba (1.4) u tom slučaju nema rješenja.

Rješavanjem što više primjera jednadžbi s realnim parametrom u GeoGebri učenici će lakše razumjeti da se u ovisnosti o parametru zaista mijenja grafički prikaz jednadžbi, a time i rješenje jednadžbe.



Slika 1.1: *Grafički prikaz sustava jednadžbi (1.7), klizač parametra k*



Slika 1.2: *Grafički prikaz sustava jednadžbi (1.7),* $k = -2$

1.1 Sustav jednadžbi

Nastavni plan i program matematike za osnovne škole određuje da se sustavi linearnih jednadžbi obrađuju u drugom polugodištu 7. razreda, te se također obrađuje i pojam uređenog para, pojam nužan za razumijevanje rješenja sustava jednadžbi.

U osnovnoj školi ne pojavljuju se zadaci s realnim parametrima u sustavima jednadžbi, no to ne znači da ih profesori ne mogu uvrstiti u svoj nastavni plan. Rješavaju se isključivo sustavi linearnih jednadžbi. Ako je zadan sustav od dvije ili više linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice, sve točke koje zadovoljavaju neku od tih jednadžbi u dvodimenzionalnom koordinatnom sustavu čine pravac. Prema tome, sustav linearnih jednadžbi može se riješiti crtanjem svih pripadnih pravaca tog sustava u koordinatnom sustavu programa GeoGebra, a rješenje sustava je (svaka) točka u kojoj se sijeku svi ti pravci. Bilo bi dobro na primjeru barem jednog zadatka u GeoGebri učenicima pokazati kako promjena koeficijenta, odnosno vrijednosti realnog parametra, utječe na to hoće li se pravci sjeći u jednoj točki i u kojoj točki će se to dogoditi, odnosno kako se u ovisnosti o parametru mijenja rješenje sustava jednadžbi. S obzirom na to da je planom i programom predviđeno učenike upoznati i s nemogućim i neodređenim sustavima jednadžbi, na istom primjeru bi trebalo doći do zaključka kada je sustav nemoguć i kada je neodređen, a nakon toga se isto pokaže i pisanim rješavanjem zadatka. Ako se svi pravci podudaraju, tada je sustav neodređen, odnosno postoji beskonačno mnogo rješenja, a ako se pravci ne podudaraju niti se svi sijeku u jednoj točki, tada je sustav jednadžbi nemoguć, tj. nema rješenja. U stvarnom životu možemo naći velik broj problema koji se mogu riješiti sustavom dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice, ali sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice možemo primijeniti i u zadacima ostalih područja matematike, poput geometrije.

Prema gimnazijskom nastavnom planu i programu matematike predviđeno je rješavanje sustava jednadžbi u ovisnosti o realnom parametru, no kao što je već spomenuto, rješavanje takvih zadataka se u pravilu preskače. Rješavanjem sljedećeg primjera u GeoGebri učenicima se omogućuje lakše razumijevanje kako vrijednost realnog parametra utječe na rješenje sustava jednadžbi. Nakon toga dobro je zadatak riješiti i pisanim postupkom kako bi učenici usporedili ta dva načina rješavanja i otkrili njihove prednosti i nedostatke.

Primjer 1.3. *Odredite realne brojeve m takve da rješenje sustava jednadžbi*

$$\begin{cases} mx + (m+2)\,y = 1 \\ x + my = m \end{cases} \tag{1.8}$$

zadovoljava uvjet $x \geq y$ *.*

Postoje različite metode za algebarsko rješavanje ovog zadatka, a jedna od najčešćih je metoda determinanti. D je determinanta matrice reda dva koja se sastoji od koeficijenata s lijeve strane sustava (u prvom stupcu su koeficijenti uz x, a u drugom uz y). Determinante D_x i D_y dobivaju se zamjenom prvog, odnosno drugog stupca determinante D sa stupcem slobodnih koeficijenata. Izračunajmo determinante D, D_x i D_y:

$$D = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m \cdot m - (m+2) = m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1),$$
$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & m+2 \\ m & m \end{vmatrix} = 1 \cdot m - m(m+2) = m - m^2 - 2m = -m(m+1),$$
$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m \cdot m - 1 \cdot 1 = m^2 - 1 = (m-1)(m+1).$$

Razlikujemo dva slučaja u ovisnosti o determinanti D, odnosno kada je ona jednaka nuli te kada je različita od nule. Za $D \neq 0$ vrijedi $m \neq 2$ i $m \neq -1$ i tada sustav (1.8) ima jedinstveno rješenje i ono je oblika

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-m(m+1)}{(m-2)(m+1)} = \frac{-m}{m-2},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{(m-1)(m+1)}{(m-2)(m+1)} = \frac{m-1}{m-2}.$$

Dakle, za $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ rješenje sustava (1.8) je uređeni par $\left(\frac{-m}{m-2}, \frac{m-1}{m-2}\right)$.

Za $D = 0$ vrijedi $m = 2$ ili $m = -1$. Uvrštavanjem ovih vrijednosti u početni sustav (1.8) razlikujemo dva slučaja. Za $m = 2$ dobivamo $\begin{cases} 2x + (2+2)\,y = 1 \\ x \;+\; 2y \;=\; 2 \end{cases}$. Množenjem druge jednadžbe s -2 i dodavanjem prvoj dobivamo $0 = -3$, što je nemoguće, odnosno sustav za $m = 2$ nema rješenja.

Za $m = -1$ dobivamo $\begin{cases} -1 \cdot x + (-1+2)\,y = 1 \\ x \;+ (-1)y \;=\; -1 \end{cases}$, a zbrajanjem jednadžbi dobivamo $0 = 0$. Dakle, radi se o ekvivalentnim jednadžbama pa postoji beskonačno mnogo rješenja sustava i ona su oblika $\begin{cases} \text{x=t} \\ \text{y=t+1} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. No, za sva rješenja očito vrijedi $y > x$, pa niti jedno rješenje ne zadovoljava početni uvjet zadatka $x \geq y$. Dakle, ni za $m = -1$ sustav (1.8) nema rješenje koje zadovoljava početni uvjet.

Zaključujemo, za $D = 0$ sustav (1.8) nema rješenja koja zadovoljavaju početni uvjet $x \geq y$.

Sada znamo za koje vrijednosti parametra m postoji rješenje sustava (1.8), te kakvog je ono oblika, a preostalo je još provjeriti za koje parametre m rješenje zadovoljava uvjet $x \geq y$. Zanima nas dakle za koje vrijednosti parametra $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ vrijedi

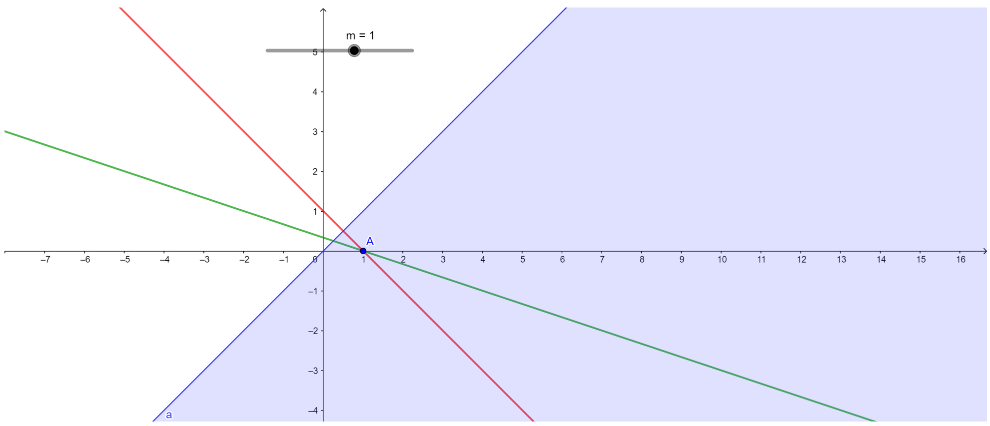
$$\frac{-m}{m-2} \geq \frac{m-1}{m-2}.$$

Pomnožimo nejednadžbu s $(m-2)^2$ kako bismo bili sigurni da ne trebamo mijenjati znak nejednakosti. Sređivanjem dobivamo kvadratnu nejednadžbu $-2m^2+5m-2 \geq 0$. Sređivanjem i faktorizacijom dobivamo $(-2m+1)(m-2) \geq 0$. Nejednakost je zadovoljena u dva različita slučaja:

1. $-2m + 1 \geq 0$ i $m - 2 \geq 0$;
2. $-2m + 1 \leq 0$ i $m - 2 \leq 0$.

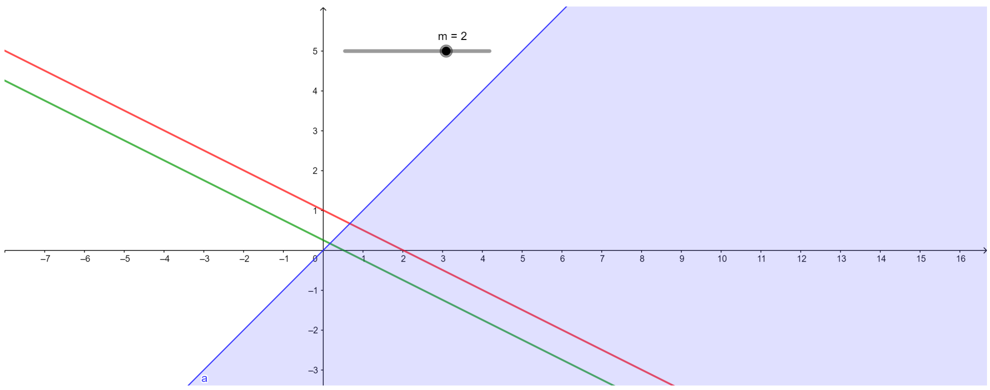
U 1. slučaju dobivamo da je $m \geq 2$ i $m \leq \frac{1}{2}$ pa je rješenje u ovom slučaju prazan skup.
U 2. slučaju dobivamo da je $m \leq 2$ i $m \geq \frac{1}{2}$ pa je rješenje u ovom slučaju $m \in [\frac{1}{2}, 2]$.
Za konačno rješenje zadatka moramo uzeti u obzir i početne uvjete, $m \neq 2$ i $m \neq -1$.
Dolazimo do konačnog rješenja zadatka, $m \in \left[\frac{1}{2}, 2\right\rangle$.

Rješavanje ovog zadatka vizualizacijom u GeoGebri svodi se na diskusiju za koje se vrijednosti realnog parametra m pravci dani jednadžbama (1.8) sijeku u točki (ili točkama) za čiju vrijednost koordinate x vrijedi da je veća ili jednaka vrijednosti koordinate y te točke. U traku za unos upišimo jednadžbe pravaca u zadanom implicitnom obliku, uključimo klizač za parametar m te ga postavimo na raspon od -5 do 5 uz pomak 0.1. Također, upisom $x \geq y$ označit će se željena poluravnina te je lakše pratiti zadovoljava li točka presjeka pravaca zadani uvjet. Uključimo odmah i tu točku i označimo ju s A (Slika 1.3).

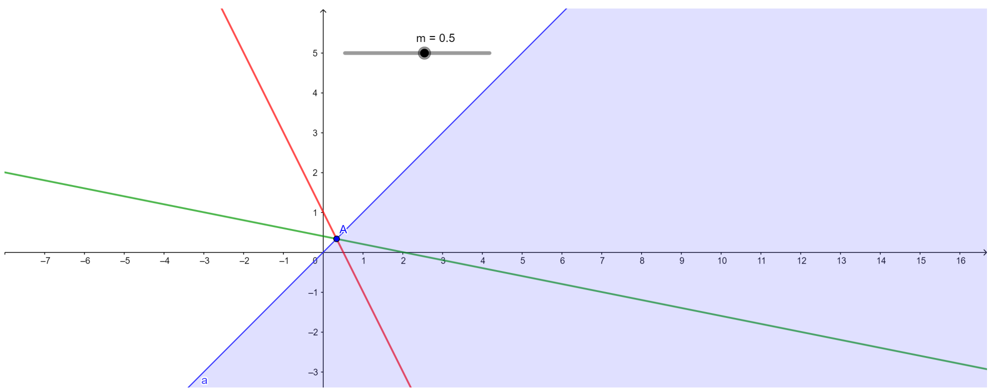


Slika 1.3: *Grafički prikaz sustava jednadžbi (1.8), klizač za parametar m*

Vrijednost klizača je automatski postavljena na 1, pa odmah uočavamo da se za vrijednost parametra $m = 1$ pravci sijeku u točki s koordinatama $(1, 0)$, a zadovoljen je i uvjet $x \geq y$ za vrijednosti koordinata točke presjeka. Mijenjamo vrijednost klizača od 1 do 5 te promatramo promjene položaja pravaca. Za parametar $m = 1.5$ pravci se ponovno sijeku, ovaj put u točki $A(3, -1)$ čije vrijednosti koordinata zadovoljavaju postavljeni uvjet $x \geq y$. Uočavamo da za $m = 2$ nema točke presjeka, odnosno pravci su paralelni (Slika 1.4).



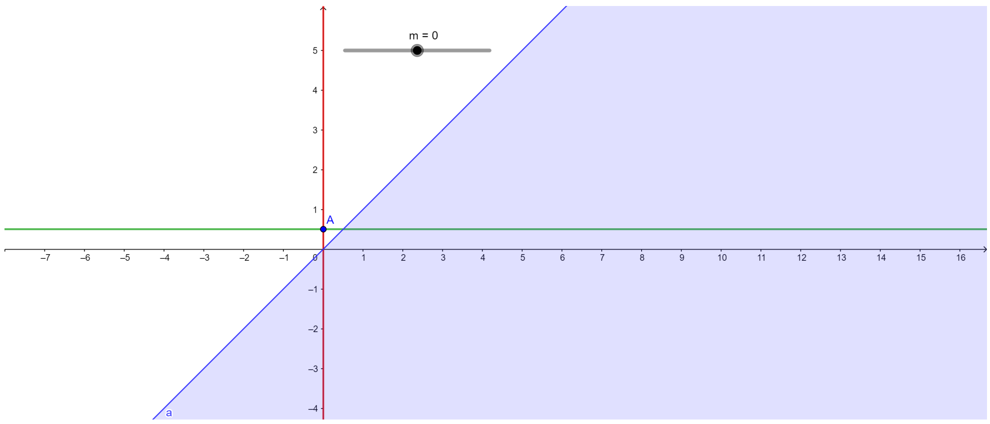
Slika 1.4: *Grafički prikaz sustava jednadžbi (1.8),* $m = 2$



Slika 1.5: *Grafički prikaz sustava jednadžbi (1.8),* $m = 0.5$

Za sve vrijednosti parametra m veće od 2 vrijednosti koordinata točke presjeka ne zadovoljavaju uvjet $x \geq y$. Promotrimo položaj pravaca za $m < 1$. Uočavamo da su za $m = 0.5$ vrijednosti koordinata točke presjeka jednake, pa je i za ovu vrijednost realnog parametra m uvjet iz zadatka zadovoljen (Slika 1.5).

Za $m = 0$ pravci su okomiti i sijeku se u točki $(0, \frac{1}{2})$, pa uvjet $x \geq y$ nije zadovoljen, kao niti za bilo koju vrijednost parametra m manju od 0 (Slika 1.6). Konačno, zaključujemo da za $m \in \left[\frac{1}{2}, 2\right\rangle$ rješenje sustava (1.8) zadovoljava uvjet $x \geq y$.



Slika 1.6: *Grafički prikaz sustava jednadžbi (1.8), $m = 0$*

1.2 Racionalne jednadžbe

Rješavanje racionalnih jednadžbi ne razlikuje se puno od rješavanja linearnih ili kvadratnih jednadžbi, osim što je potrebno dodatno paziti na uvjete koje moraju zadovoljavati realni parametri i nepoznanice, ako se nalaze u nazivniku. Kako nepoznanice i parametri mogu biti i u nazivniku racionalne jednadžbe, pojednostavljivanjem jednadžbe potrebno je biti oprezan s rješenjima, s obzirom da dobivena jednadžba može imati skup rješenja širi od početne. I upravo je to ono što učenicima stvara problem prilikom rješavanja i komentiranja rješenja racionalne jednadžbe. Riješimo jedan takav tipičan zadatak.

Primjer 1.4. *Uz raspravu o realnom parametru a, u skupu realnih brojeva riješite jednadžbu*

$$\frac{ax-1}{ax-a^2} - \frac{ax+1}{ax+a^2} = \frac{a-1}{x^2-a^2}. \tag{1.9}$$

Odmah na početku potrebno je diskutirati nazivnike u jednadžbi, odnosno odrediti za koje realne parametre a jednadžba nije definirana. Kako bismo olakšali postupak, prethodno je potrebno rastaviti nazivnike na faktore:

$$\frac{ax-1}{a(x-a)} - \frac{ax+1}{a(x+a)} = \frac{a-1}{(x-a)(x+a)}. \tag{1.10}$$

Zaključujemo da jednadžba (1.10) nije definirana za realan parametar $a = 0$, te da $x = a$ i $x = -a$ ne mogu biti njezina rješenja. Uz te pretpostavke pomnožimo jednadžbu (1.10) s $a(x-a)(x+a)$ te nakon sređivanja dobivamo

$$2(a-1)(a+1)x = a(a-1). \tag{1.11}$$

Rješavanjem jednadžbe (1.11) dobivamo rješenja koja su kandidati za rješenja jednadžbi (1.9) i (1.10), ali će to uistinu biti samo ako zadovoljavaju uvjete $x \neq a$ i $x \neq -a$.

Sljedeći korak bio bi dijeljenje jednadžbe (1.11) izrazom koji stoji uz x, tj. izrazom $2(a-1)(a+1)$, ako je taj izraz različit od nule. No, potrebno je zasebno razmotriti i slučajeve u kojima je izraz $2(a-1)(a+1)$ jednak nuli. Stoga je za daljnje rješavanje jednadžbe potrebno razlikovati slučajeve:

1. $a - 1 = 0$;
2. $a + 1 = 0$;
3. $2(a-1)(a+1) \neq 0$.

Za 1. slučaj vrijedi da je $a = 1$. Uvrštavanjem $a = 1$ u jednadžbu (1.11) dobivamo $0 \cdot x = 0$ što vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa zaključujemo da je za realan parametar $a = 1$ rješenje jednadžbe (1.11) $x \in \mathbb{R}$. No, ne smijemo zaboraviti osvrnuti se na početne uvjete jednadžbe, tj. da $x = a$ i $x = -a$ ne mogu biti rješenja jednadžbe (1.9). Konačno rješenje jednadžbe (1.9) za realan parametar $a = 1$ je stoga $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

U 2. slučaju je $a = -1$. Uvrštavanjem $a = -1$ u jednadžbu (1.11) dobivamo $0 \cdot x = 2$, a to ne vrijedi niti za jedan $x \in \mathbb{R}$, pa zaključujemo da za realan parametar $a = -1$ jednadžba (1.11) nema rješenja. Dakle, ni jednadžba (1.9) nema rješenje.

Konačno, u 3. slučaju vrijedi $a \neq 1$ i $a \neq -1$ te uz ove uvjete možemo jednadžbu (1.11) podijeliti izrazom $2(a-1)(a+1)$. Sređivanjem dobivamo njezino rješenje

$$x = \frac{a}{2(a+1)}.$$

No, to ipak nije rješenje jednadžbe (1.9) za sve navedene parametre a u ovom slučaju. Jednadžba (1.9) ne može imati rješenja $x = a$ i $x = -a$ pa je potrebno provjeriti za koje realne parametre a rješenje $x = \dfrac{a}{2(a+1)}$ ne zadovoljava postavljene uvjete. Sređivanjem dobivamo da za $a = -\dfrac{1}{2}$ i $a = -\dfrac{3}{2}$, $x = \dfrac{a}{2(a+1)}$ nije rješenje jednadžbe (1.9).

Zapišimo konačno rješenje početne jednadžbe kao

$$x \in \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, & a = 1 \\ \emptyset, & a \in \left\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right\} \\ \left\{\dfrac{a}{2(a+1)}\right\}, & a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1\right\} \end{cases}.$$

Kako bi učenicima vizualizirali ovaj zadatak i konačno rješenje, u traku za unos u GeoGebri upišimo jednadžbu (1.11), ali na način da izraz s lijeve strane znaka jednakosti zapišemo u obliku jednadžbe pravca

$$p \ldots\ y = 2\,(a-1)\,(a+1)\,x, \tag{1.12}$$

a izraz s desne strane znaka jednakosti zapišemo u obliku jednadžbe pravca

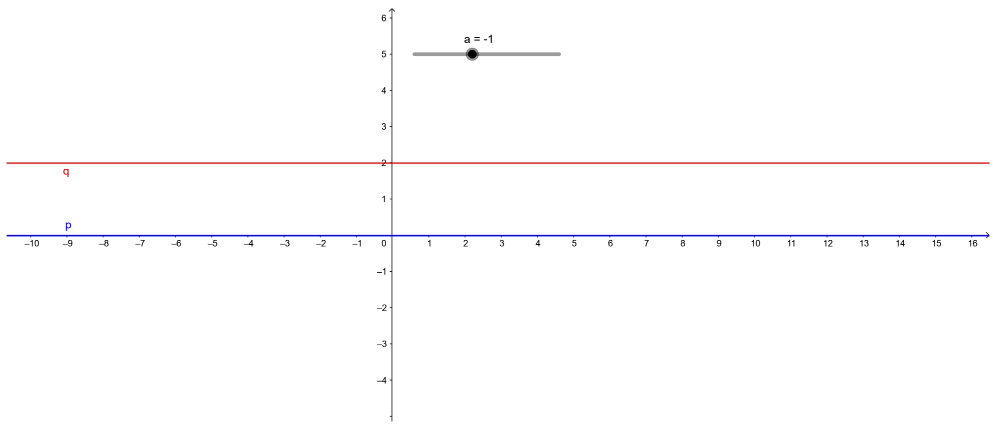
$$q \ldots\ y = a\,(a-1)\,. \tag{1.13}$$

Znamo da jednadžba (1.11) ima rješenje za one parametre a za koje se pravci (1.12) i (1.13) sijeku, a rješenje jednadžbe je koordinata x točke sjecišta pravaca. Uključimo klizač za parametar a s rasponom od -5 do 5 s pomakom 0.5, te uključimo odmah i opciju prikaza točke presjeka A. Pomicanjem klizača uočavamo kako se pravci sijeku u jednoj točki za svaku vrijednost parametra a osim za $a = -1$ i $a = 1$ (Slike 1.7 i 1.8). Za $a = -1$ pravci su paralelni, dakle nemaju zajedničkih točaka, pa zaključujemo da jednadžba (1.11) nema rješenja, pa ni jednadžba (1.9) nema rješenja. Za $a = 1$ pravci se podudaraju, odnosno rješenje jednadžbe (1.11) je svaki $x \in \mathbb{R}$. Možemo li sada zaključiti da je za realan parametar $a = 1$ rješenje jednadžbe (1.9) svaki $x \in \mathbb{R}$? Ne možemo, jer nismo uzeli u obzir da $x = a$ i $x = -a$ ne mogu biti rješenja početne jednadžbe (1.9). Dakle, bez obzira što se pravci sijeku i u točkama $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, apscise tih točaka nisu rješenja početne jednadžbe (1.9). Drugim riječima, isključujemo $x = 1$ i $x = -1$ iz skupa rješenja jednadžbe (1.9).

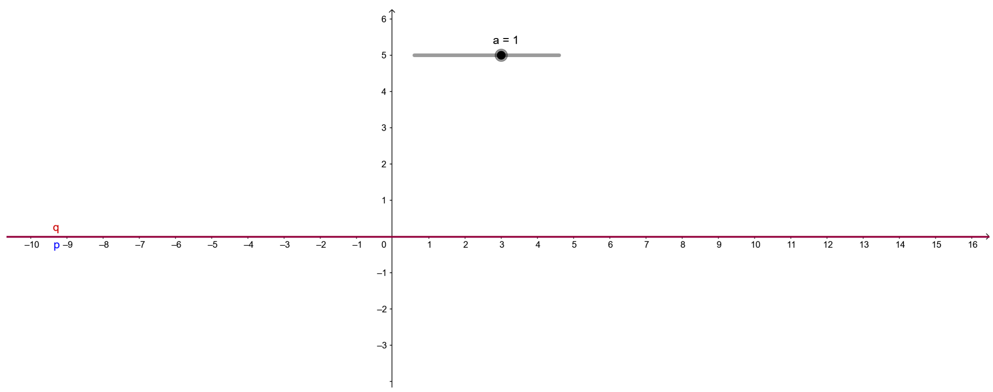
Polako pomičemo klizač i promatramo što se događa za ostale vrijednosti parametra a, odnosno uočimo za koje vrijednosti parametra a za x koordinatu točke A vrijedi $x = a$ ili $x = -a$. Kako bismo lakše uočili tu situaciju, u traku za unos upišimo i pravce $x = a$ i $x = -a$, pa kada točka A padne na jedan od tih pravaca, imamo tu situaciju. Uočavamo da je za $a = -1.5$ (Slika 1.10) apscisa točke A jednaka 1.5, te da je za $a = -0.5$ (Slika 1.9) apscisa točke A jednaka -0.5. Dakle, u ova dva slučaja vrijednost rješenja jednadžbe (1.11) je a ili $-a$, a znamo da to ne može biti rješenje jednadžbe (1.9). Prema tome, za ove vrijednosti parametra a jednadžba (1.9) nema rješenja.

Također uočavamo da se pravci p i q sijeku i za $a = 0$ (Slika 1.11), pa jednadžba (1.11) ponovno ima rješenje, no za $a = 0$ jednadžba (1.9) nije uopće dobro postavljena, pa nema smisla ni komentirati rješenja te jednadžbe za takav a.

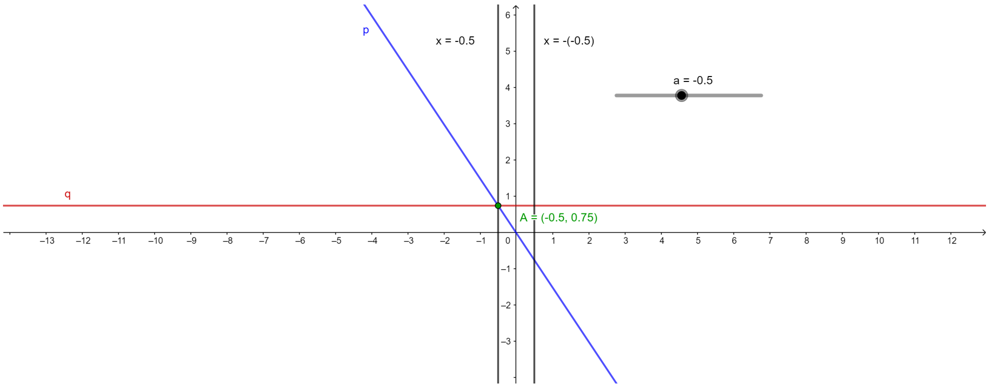
Ovime smo diskutirali rješenja početne jednadžbe (1.9) za sve parametre a i ona se podudaraju s rješenjima koja smo dobili rješavanjem zadatka algebarski.



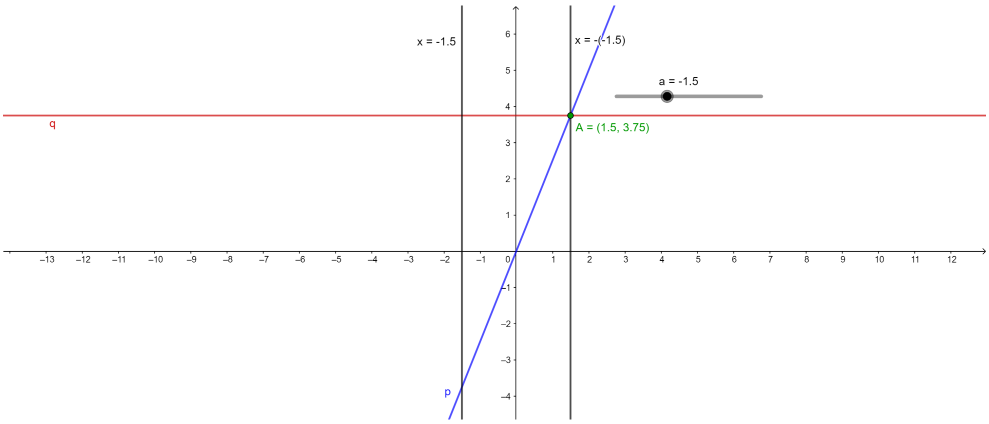
Slika 1.7: *Grafički prikaz pravaca p i q,* $a = -1$



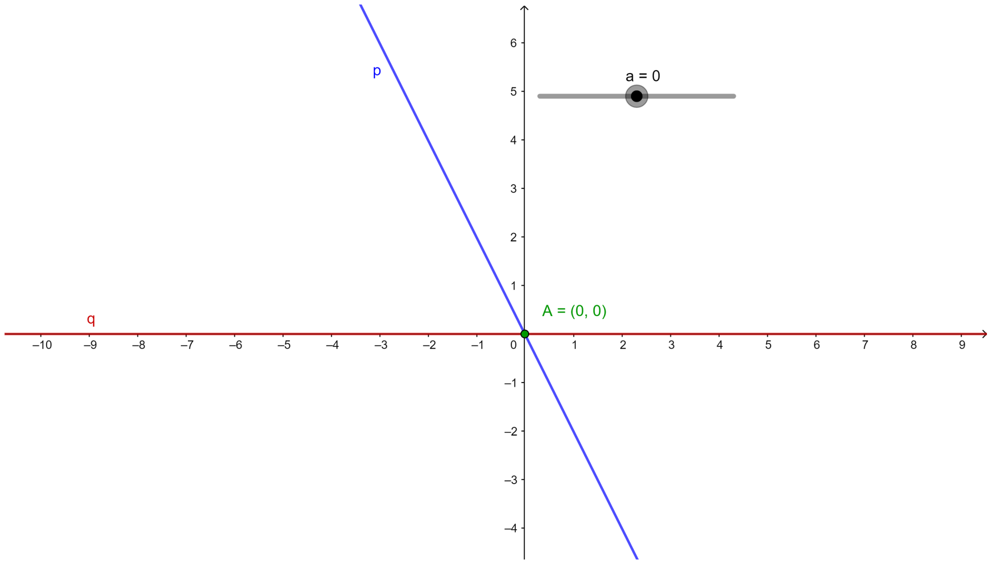
Slika 1.8: *Grafički prikaz pravaca p i q,* $a = 1$



Slika 1.9: *Grafički prikaz pravaca p i q*, $a = -0.5$



Slika 1.10: *Grafički prikaz pravaca p i q*, $a = -1.5$



Slika 1.11: *Grafički prikaz pravaca p i q, $a = 0$*

1.3 Jednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Jednadžbe s apsolutnim vrijednostima prema planu i programu obrađuju se u 1. razredu srednje škole, a za obradu istog predviđeno je tek nekoliko školskih sati (tri do četiri sata), stoga je vrlo važno da učenici dobro savladaju prethodno gradivo, a to su linearne jednadžbe te apsolutna vrijednost realnog broja. S obzirom na vrlo mali broj predviđenih sati za ovu temu, rješavanje jednadžbi s apsolutnim vrijednostima u ovisnosti o realnom parametru se najčešće ne obrađuje. U nastavku je riješen upravo primjer jednog takvog zadatka na temelju kojeg učenici lako mogu razumjeti koji su ključni koraci u rješavanju te kako vrijednost realnog parametra utječe na rješenje jednadžbe.

Primjer 1.5. *Za koji realan parametar a jednadžba*

$$| x - 1 | + | 1 + x |= a^2 + 1 \tag{1.14}$$

ima točno 2 *rješenja?*

Riješimo zadatak algebarski. Odredimo za koje vrijednosti x će vrijediti $x - 1 = 0$ i $1 + x = 0$. Dobivamo $x = 1$ te $x = -1$.

Dalje jednadžbu rješavamo razlikujući tri slučaja:

1. $x \in < -\infty, -1 >$;

2. $x \in [-1, 1]$;

3. $x \in < 1, +\infty >$.

U 1. slučaju jednadžba (1.14) je ekvivalentna jednadžbi $-(x-1)-(1+x) = a^2+1$. Sređivanjem dobivamo $-2x = a^2+1$. Kako je $x < -1$, lijeva strana je veća od 2, pa dobivamo rješenje $x = -\frac{a^2+1}{2}$, ali samo za $a^2+1 > 2$, odnosno $a^2 > 1$, odnosno za $a \in < -\infty, -1 > \cup < 1, +\infty >$.

U 2. slučaju jednadžba (1.14) je ekvivalentna jednadžbi $-(x-1)+(1+x) = a^2+1$ te se sređivanjem svodi na $2 = a^2+1$. Ta jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = \pm 1$ i tada je rješenje svaki $x \in [-1, 1]$. No, ovaj slučaj odbacujemo, jer dobivamo beskonačno mnogo rješenja, dok se u zadatku traži parametar a za koji jednadžba (1.14) ima točno 2 rješenja.

U 3. slučaju jednadžba (1.14) je ekvivalentna jednadžbi $(x-1)+(1+x) = a^2+1$ te se sređivanjem svodi na $2x = a^2+1$. Kako je u ovom slučaju $x > 1$, lijeva strana je veća od 2 pa dobivamo rješenje $x = \frac{a^2+1}{2}$, ali samo za $a^2+1 > 2$, tj. $a^2 > 1$. Dobivamo da rješenje ovog slučaja vrijedi za iste parametre a kao i u 1. slučaju.

Zaključujemo, jednadžba (1.14) ima 2 rješenja oblika $x = \pm\frac{a^2+1}{2}$ za parametar $a \in < -\infty, -1 > \cup < 1, +\infty >$.

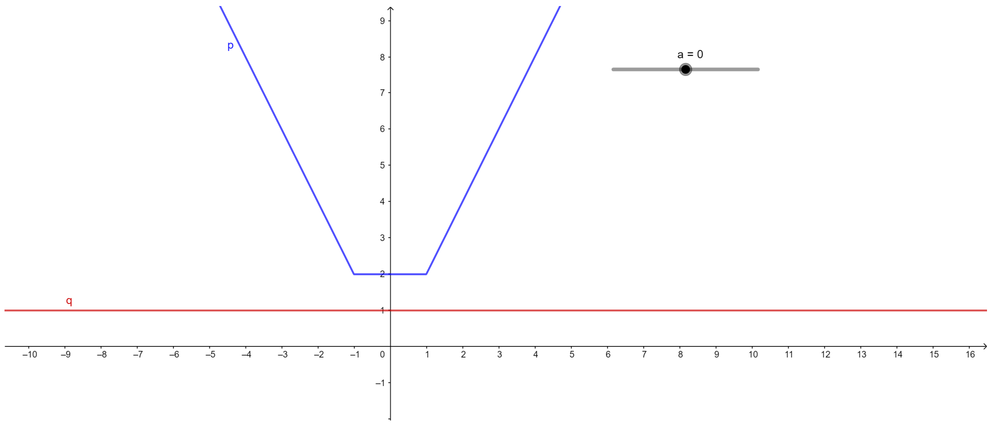
Rješavanje jednadžbi s apsolutnim vrijednostima algebarskim putem učenicima nije jednostavno, s obzirom da moraju razlikovati slučajeve za svaku apsolutnu vrijednost u jednadžbi, a zatim povezati dobivena rješenja u jedno. Dodatnu težinu zadacima s apsolutnim vrijednostima daje pojavljivanje realnog parametra. Iz tog razloga vizualizacija jednadžbe u GeoGebri je dobar način kako učenicima približiti što točno u zadatku rješavamo i što ćemo dobiti kao rješenje jednadžbe.

Jednadžbu (1.14) vizualizirajmo pomoću krivulja

$$p \ldots y = |x-1| + |1+x|, \tag{1.15}$$

$$q \ldots y = a^2+1. \tag{1.16}$$

U traku za unos upišimo jednadžbe (1.15) i (1.16), te uključimo klizač za parametar a za koji možemo ostaviti automatske postavke, odnosno raspon od -5 do 5 uz pomak 0.1 (Slika 1.12).



Slika 1.12: *Grafički prikaz jednadžbe (1.14),* $a = 0$

Primijetimo da je (1.15) jednadžba krivulje p koja na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$ strogo pada, na intervalu $[-1,\ 1]$ je konstantna i pripada pravcu $y = 2$ te na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$ strogo raste. Također, (1.16) je jednadžba pravca q koji je paralelan s x-osi. Promjenom vrijednosti parametra a, pomicanjem klizača, uočavamo da pravac q ponekad siječe krivulju p u dvije točke, ponekad se pravac q i krivulja p mimoilaze, a za određene vrijednosti parametra a krivulja p i pravac q sijeku se u dužini.

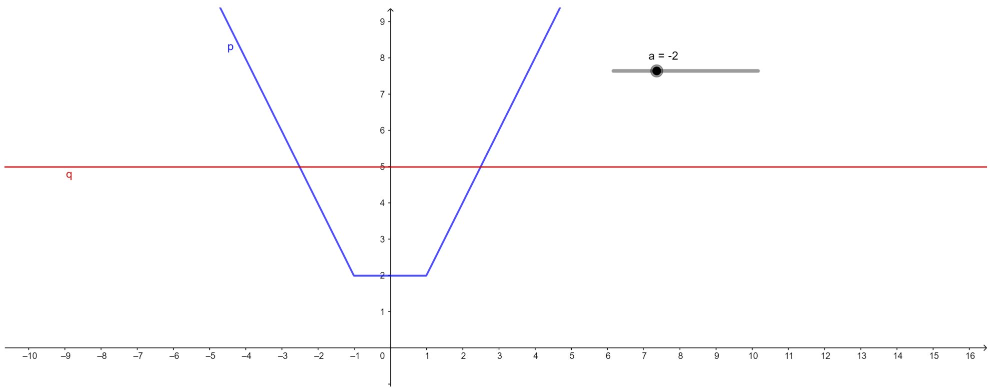
Preciznije, zaključujemo da na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$ pravac q može sijeći krivulju p u jednoj točki, a mogu biti i mimoilazni. Stoga ako postoji, rješenje jednadžbe (1.14) na tom intervalu bit će vrijednost koordinate x točke presjeka pravca q i krivulje p. Na intervalu $[-1,\ 1]$ pravac q se može podudarati s krivuljom p, a također mogu biti i mimoilazni. Stoga ako postoji, rješenje jednadžbe (1.14) na ovom intervalu bit će svaki x iz tog intervala. S obzirom da je krivulja p simetrična s obzirom na y-os, a pravac q paralelan s x-osi, možemo zaključiti da ako pravac q siječe krivulju p na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$, siječe ju u točki kojoj je vrijednost koordinate x suprotna vrijednosti koordinate x točke presjeka na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$, odnosno rješenje jednadžbe (1.14) koje pripada intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$ je suprotno njenom rješenju na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$. Dakle, dovoljno je promatrati samo rješenja na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$.

Provjerimo prvo za koje vrijednosti parametra a će rješenje biti $x \in [-1,\ 1]$. Promjenom vrijednosti parametra a na klizaču uočavamo da se pravac q podudara s krivuljom p na tom intervalu za vrijednosti $a = -1$ te $a = 1$. Zaključujemo dakle da je za $a = -1$ i $a = 1$ rješenje početne jednadžbe $x \in [-1,\ 1]$.

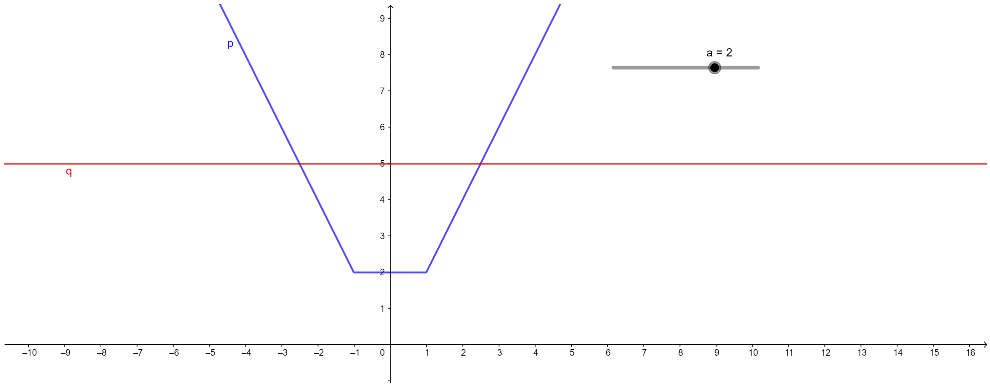
Kakvo je rješenje jednadžbe za vrijednost parametra a između -1 i 1? Pomakom klizača, odnosno promjenom vrijednosti parametra a od -1 do 1 uočavamo kako se tada pravac q nalazi ispod krivulje p, dakle pravac i krivulja se ne sijeku niti u jednoj točki. Zaključujemo da za vrijednost parametra $a \in < -1,\ 1 >$ jednadžba nema rješenja.

Promotrimo sada za koje vrijednosti parametra a će pravac q sjeći krivulju p u dvije točke simetrične s obzirom na y-os. Učenici bi trebali, nastavno na diskusiju prethodnih slučajeva, zaključiti da jednadžba ima 2 rješenja za vrijednost parametra a manju od -1 i veću od 1, no neki učenici to možda neće moći samostalno zaključiti. Iz tog razloga vizualizacija jednadžbe u GeoGebri i diskusija o promjeni položaja pravca q u ovisnosti o promjeni vrijednosti parametra a učenicima će omogućiti lakše razumijevanje zadatka.

Pomakom klizača ne samo da će učenici uočiti da jednadžba ima 2 suprotna rješenja za sve vrijednosti parametra a manje od -1 i veće od 1, nego će uočiti da će za suprotne vrijednosti parametra a rješenja biti identična, npr. za $a = -2$ rješenja su $x = -2.5$ i $x = 2.5$, a ista rješenja dobivaju se i za $a = 2$ (Slike 1.13 i 1.14).



Slika 1.13: *Grafički prikaz jednadžbe (1.14), a = −2*



Slika 1.14: *Grafički prikaz jednadžbe (1.14),* $a = 2$

Poglavlje 2

Funkcije s realnim parametrom

Pojam funkcije jedan je od temeljnih matematičkih pojmova, a prema nastavnom planu i programu pojam funkcije uvodi se u 7. razredu osnovne škole. Učenici se u osnovnoj školi upoznaju s linearnom funkcijom, a zatim i kvadratnom funkcijom te funkcijom drugog korijena. Sam pojam funkcije uvodi se kao odnos dviju veličina. Učenici viših razreda osnovne škole razumiju odnos između dviju veličina, od kojih je jedna zavisna o drugoj, te samostalno mogu navesti nekolicinu primjera iz stvarnog života u kojima jedna veličina zavisi o drugoj, kao na primjer kako iznos računa za jednu vožnju taksijem ovisi o prijeđenim kilometrima i slično. Učenici se tek u srednjoj školi upoznaju s formalnom definicijom funkcije.

Zadaci s određivanjem vrijednosti funkcije, u kojima je poznat argument i pravilo pridruživanja, učenicima uglavnom nisu teški, s obzirom da samo uvrštavaju vrijednost argumenta u pravilo pridruživanja kojim je funkcija zadana. No, kada ih se pita da riječima opišu vrijednosti funkcije, odnosno interpretiraju kako vrijednost funkcije ovisi o promjeni argumenta, tu se javlja problem. Stoga im vizualizacija funkcije u koordinatnom sustavu u GeoGebri, odnosno crtanje grafa funkcije, može znatno olakšati razumijevanje pojma funkcije i njezine slike.

U osnovnoj školi ne pojavljuju se funkcije s realnim parametrima, dovoljno je da učenici dobro savladaju interpretiranje promjene vrijednosti funkcije u ovisnosti o promjeni vrijednosti argumenta, kako bi u srednjoj školi, nadogradnjom znanja, mogli interpretirati i kako uz argument, tj. poznatu veličinu, realan parametar može utjecati na promjenu vrijednosti funkcije. U srednjoj školi ponovno se obrađuju linearne i kvadratne funkcije, kratko se ponavlja naučeno u osnovnoj školi te se ti pojmovi proširuju, a velik dio 2. i 3. razreda srednje škole obrađuju se eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te njihova primjena. Upravo je primjena navedenih funkcija na primjerima iz svakodnevnog života odlična prilika za rješavanje zadataka u ovisnosti o realnom parametru. U nastavku rada detaljno je opisano rješavanje nekoliko takvih primjera.

2.1 Linearna funkcija

Linearna funkcija f zadana je s

$$f(x) = ax + b, \tag{2.1}$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$. Domena linearne funkcije je $D(f) = \mathbb{R}$, a kodomena funkcije je $R(f) = \mathbb{R}$. Graf linearne funkcije je pravac zadan jednadžbom $p \dots\ y = ax + b$. Realni parametar a naziva se koeficijent smjera pravca p, odnosno parametar a određuje nagib pravca. Realni parametar b određuje odsječak pravca na y-osi, odnosno određuje točku presjeka pravca i y-osi čije su koordinate $(0, b)$. Položaj pravca p u koordinatnom sustavu ovisi dakle o realnim parametrima a i b. Dok nam parametar b daje informaciju u kojoj točki pravac p siječe y-os, odnosno kolika je vrijednost funkcije za $x = 0$, vrijednost parametra a govori nam o nagibu grafa funkcije, odnosno o rastu i padu funkcije. Za $a > 0$ funkcija f je strogo rastuća, a graf funkcije s pozitivnim dijelom x-osi zatvara šiljasti kut, odnosno nagib pravca p je manji od $90°$. Za $a < 0$ funkcija je strogo padajuća, a graf funkcije s pozitivnim dijelom x-osi zatvara tupi kut, odnosno nagib pravca je veći od $90°$ i manji od $180°$. Za $a = 0$ funkcija f je konstanta, a njen graf je pravac $y = b$, paralelan s x-osi. Posebno, pravac okomit na x-os nije graf linearne funkcije, niti ijedne druge funkcije. Nultočka linearne funkcije f je vrijednost varijable x za koju je vrijednost funkcije jednaka 0, odnosno za koju vrijedi $f(x) = 0$, i jednaka je $-\frac{b}{a}$, za linearne funkcije za koje je $a \neq 0$.

Primjer 2.1. *Jedna taksi služba, nazovimo ju A, naplaćuje start vožnje 5kn te svaki sljedeći kilometar 3kn. Druga taksi služba, nazovimo ju B, start naplaćuje po cijeni 10kn te svaki sljedeći kilometar 2kn.*

a) Koja je taksi služba povoljnija ako trebamo prijevoz do lokacije udaljene 3km?

b) Je li ta taksi služba povoljnija i za prijevoz do mjesta udaljenog 5km?

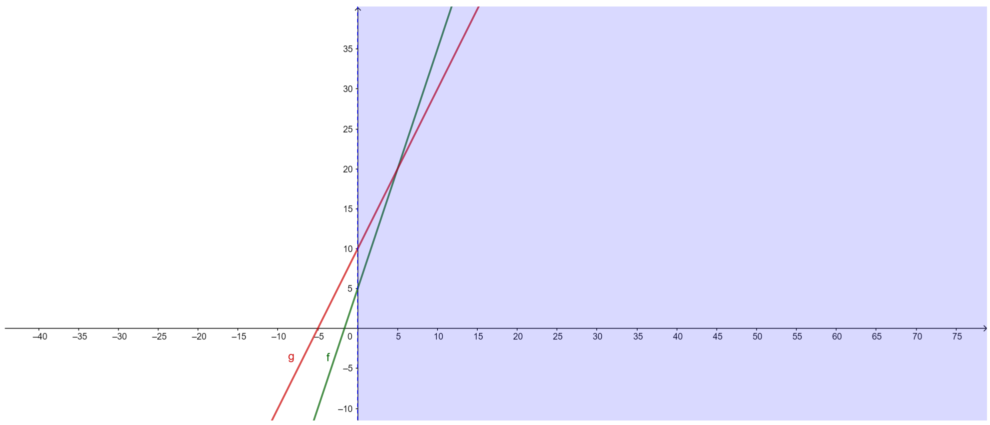
c) Koju odluku o promjeni cijene može donijeti, i koja taksi služba, kako bi bila povoljnija od druge za vožnje kraće od 10km udaljenosti?

Prvo što bi učenici trebali napraviti jest definirati troškove puta svake taksi službe kao funkcije u ovisnosti o broju prijeđenih kilometara. Također je potrebno odrediti domenu i kodomenu funkcija. Ovdje je važno da učenici prvo zaključe da je domena $\mathbb{R}^+$, s obzirom da broj prijeđenih kilometara ne može biti negativan. Kodomena obje funkcije je također sigurno $\mathbb{R}^+$ s obzirom da ni troškovi prijevoza ne mogu biti negativni, tj. primjećujemo da se troškovi puta povećavaju s povećanjem prijeđenih kilometara. No, većina učenika neće odmah zaključiti da su slike funkcija zapravo $< 5, +\infty >$, odnosno $< 10, +\infty >$, pa je za početak dovoljno donijeti prvi zaključak o kodomenama funkcija, a zatim nakon vizualizacije funkcija u GeoGebri diskutirati o slikama funkcija. Prikažimo vožnje taksi prijevoznicima A i B kao funkcije:

$$A \ldots \; f(x) = 3x + 5, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.2}$$

$$B \ldots \; g(x) = 2x + 10, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.3}$$

U traku za unos programa GeoGebra upišemo obje funkcije (2.2) i (2.3) zasebno (Slika 2.1).

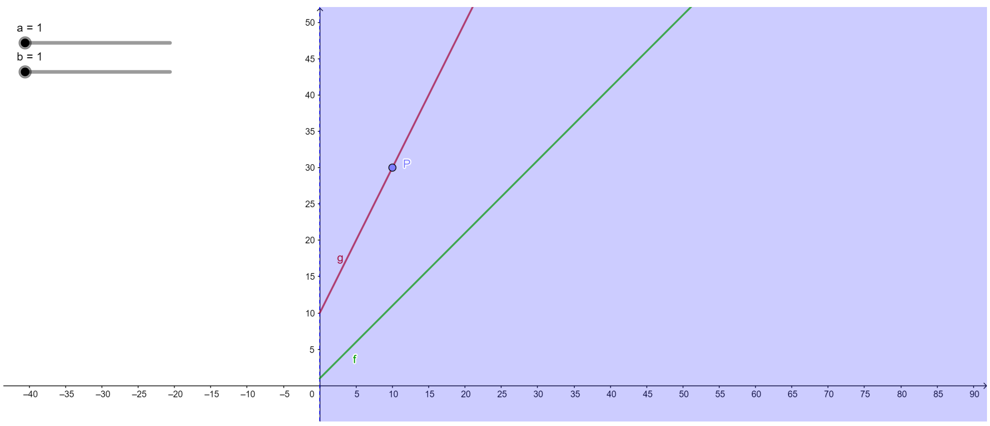


Slika 2.1: *Grafički prikaz funkcija f i g*

Odgovore na zadatke a) i b) učenici bi trebali moći dati samostalno, promatrajući grafove funkcija f i g. Zaključak koji trebaju donijeti je taj da je u samom startu vožnja taksi službom B skuplja za 5kn. Uočavamo da se pravci sijeku u točki $(5, 20)$, što znači da cijena za vožnju dugu 5km u obje taksi službe iznosi 20kn. Dakle, do udaljenosti 5km taksi služba A je povoljnija. Uočavamo da nakon 5km taksi služba B pruža jeftinije usluge prijevoza. Do rješenja zadatka c) učenici teže dolaze prvenstveno zbog toga što ne znaju kako započeti s rješavanjem ovog zadatka; koje parametre treba promijeniti u nekoj od početnih funkcija kako bi postigli da vrijednost te funkcije za $x < 10$ bude manja od vrijednosti druge funkcije.

Za početak, potrebno je zaključiti kojoj funkciji želimo promijeniti parametre. S obzirom da je taksi služba A već sada povoljnija do 5km udaljenosti, logično bi bilo promijeniti parametre funkcije f tako da upravo taksi služba A bude povoljnija i nakon 5km, odnosno sve do 10km udaljenosti. Prije no što krenemo komentirati parametre funkcije, odredimo koju maksimalnu vrijednost želimo da postiže funkcija za argument $x = 10$. To ćemo odrediti tako da izračunamo kolika je vrijednost funkcije g za $x = 10$. Isto možemo izračunati uvrštavanjem vrijednosti $x = 10$ u formulu funkcije g ili jednostavno očitamo s grafa funkcije. Zaključujemo kako je $g(10) = 30$. Dakle, želimo namjestiti parametre funkcije f tako da je $f(10) \leq 30$.

Označimo na grafu funkcije g točku $P(10, 30)$. Uključimo dva klizača, a i b, s rasponom od 1 do 10 i pomakom 0.5. Zapišimo funkciju f u obliku $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}^+$, u traci za unos u GeoGebri (Slika 2.2).

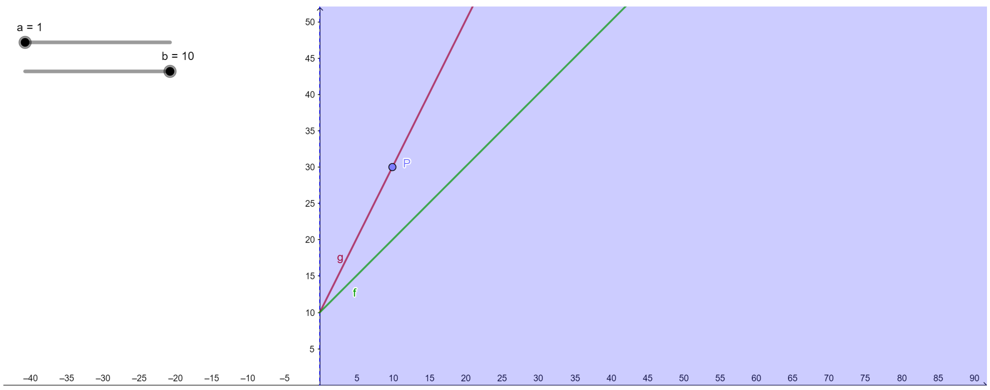


Slika 2.2: *Grafički prikaz funkcija f i g, $a = 1$, $b = 1$*

Prije pomicanja klizača potrebno je s učenicima diskutirati što predstavljaju parametri a i b koje trebamo namjestiti. Zaključujemo da parametar a predstavlja cijenu vožnje po prijeđenom kilometru, dok parametar b predstavlja početni iznos koji se plaća za sami start vožnje. Očito je zašto smo za parametar b odabrali maksimalnu vrijednost 10, jer u slučaju da je ta vrijednost veća, cijena vožnje taksi službom A bila bi u samom startu veća od cijene vožnje taksi službom B, a mi želimo da nam je vožnja taksi službom A povoljnija za sve vožnje do 10km udaljenosti.

Za početak, ostavimo parametar a na početnoj vrijednosti 1, dok za parametar b uključujemo animaciju pomaka. Učenike je zatim potrebno pitati što zaključuju, odnosno kako bi riječima opisali promjenu cijene vožnje u ovisnosti o promjeni parametra b. Zaključujemo da za vrijednost parametra $a = 1$, vrijednost funkcije f je uvijek manja od vrijednosti funkcije g, za sve parametre $b \in [1, 10]$ i $x > 0$ (Slika 2.3). Drugim riječima, ako je cijena vožnje po kilometru jednaka 1kn, bez obzira na to kolika je cijena starta, koja može biti između 1kn i 10kn, vožnja taksi službom A je povoljnija od vožnje taksi službom B za sve udaljenosti. Isti zaključak donosimo i za vrijednost parametra $a = 1.5$ te za vrijednost parametra $a = 2$ kad je $b < 10$. No, za $a = 2$ uočavamo (Slika 2.4) da su pravci, tj. grafovi funkcija f i g paralelni. Paralelnost pravaca govori nam da, osim što je taksi služba A uvijek jeftinija, za bilo koji broj kilometara imamo istu uštedu u odnosu na taksi službu B, dok inače ušteda ovisi o broju kilometara. Također, za $b = 10$ pravci se podudaraju (Slika 2.5), što znači da su za $a = 2$ i $b = 10$ cijene taksi službi jednake za sve udaljenosti. U tom slučaju funkcije f i g su jednako definirane, tj.

$$f(x) = g(x) = 2x + 10, x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.4}$$

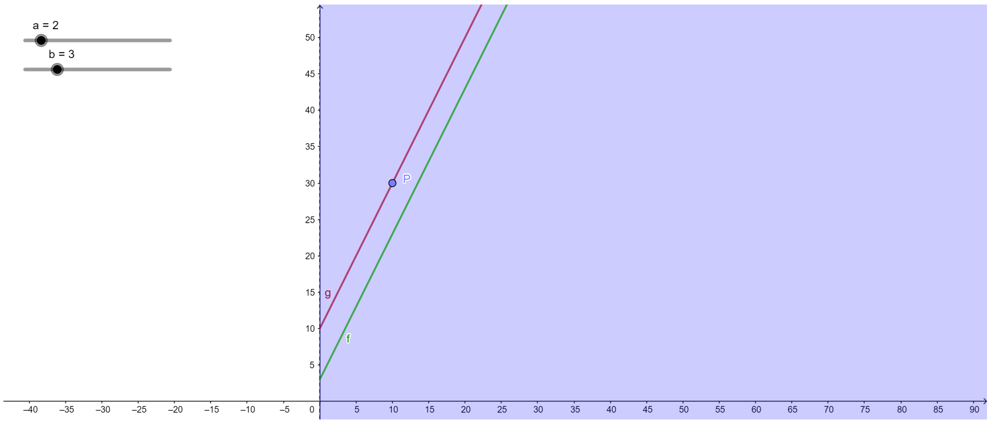


Slika 2.3: *Grafički prikaz funkcija f i g, $a = 1$, $b = 10$*

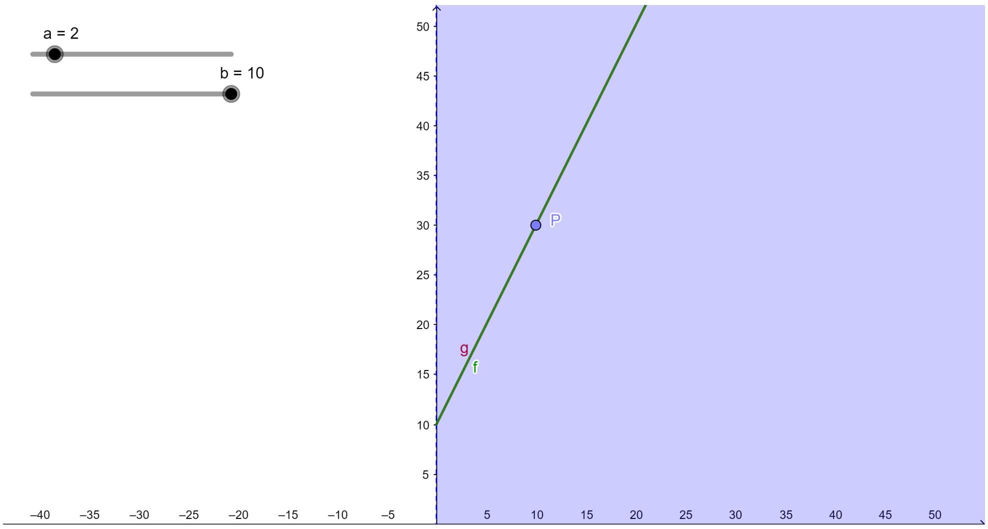
Postavimo vrijednost klizača, odnosno vrijednost parametra a na 2.5. Pomicanjem klizača b uočavamo da graf funkcije f siječe graf funkcije g na intervalu $[0, 10]$ u nekoliko slučajeva, preciznije za $b \geq 5$, no jedino u slučaju kada je $b = 5$ presjek je u točki $P(10, 30)$ (Slika 2.6). Zaključujemo da je tada funkcija f definirana kao

$$f(x) = 2.5x + 5, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.5}$$

odnosno da je vožnja taksi službom A povoljnija za vožnje do udaljenosti 10km ako taksi služba A start vožnje naplati 5kn, te za svaki prijeđeni kilometar 2.5kn.

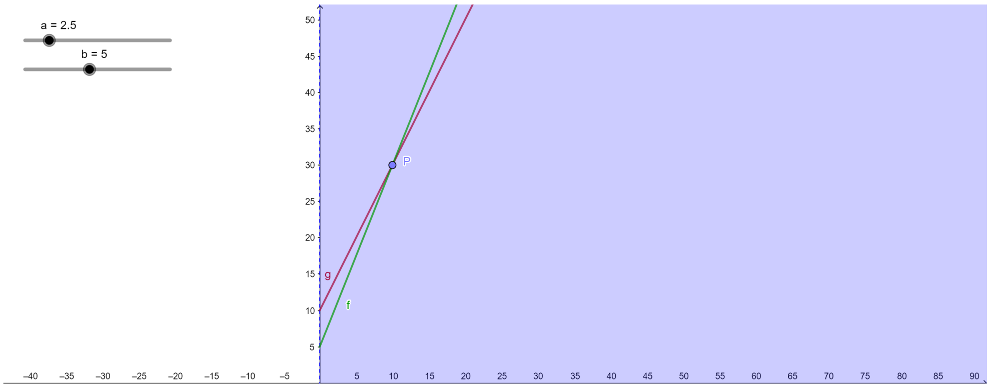


Slika 2.4: *Grafički prikaz funkcija f i g, $a = 2$, $b < 10$*



Slika 2.5: *Grafički prikaz funkcija f i g, $a = 2$, $b = 10$*

Dakle, odgovor na zadatak c) može biti da taksi služba A mora smanjiti cijenu za prijeđeni kilometar na 2.5kn, a ostaviti istu cijenu za start vožnje, ako želi biti konkurentna za vožnje udaljenosti kraće od 10km. No, s učenicima je potrebno diskutirati je li ovo jedino rješenje. Postavljanjem parametra a na vrijednosti između 2 i 3 te promjenom vrijednosti parametra b uočavamo još nekoliko slučajeva za koje je vrijednost funkcije f manja od vrijednosti funkcije g za sve $x \in [0, 10 >$, pa je dakle moguće taksi službi A predložiti nekoliko različitih izmjena cjenika kako bi postigla željenu konkurentnost.



Slika 2.6: *Grafički prikaz funkcija f i g, $a = 2.5$, $b = 5$*

Zaključujemo da parametar b svakako mora biti manji od 10, te da za odabrani parametar b trebamo paziti da parametar a namjestimo tako da se graf funkcije f za $x < 10$ uvijek nalazi ispod grafa funkcije g. Konkretno, za $a < 2$ odgovaraju nam svi parametri $b \in [0, 10]$, za $a = 2$ odgovaraju nam svi parametri $b \in [0, 10 >$, za $a \in < 2, 3 >$ imamo nekoliko parametara b koji nam odgovaraju. Za $a = 3$ odgovara nam samo $b = 0$, a za $a > 3$ nema rješenja.

2.2 Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija ili *polinom drugog stupnja* je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom pridruživanja

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{2.6}$$

gdje su koeficijenti a, b, c realni brojevi te je $a \neq 0$. Također, koeficijente kvadratne funkcije nazivamo još i *vodećim* (koeficijent a), *linearnim* (koeficijent b) te *slobodnim* (koeficijent c). Graf kvadratne funkcije je parabola zadana jednadžbom $y = ax^2 + bx + c$.

Prije samog rješavanja zadataka, vizualizacija grafa kvadratne funkcije u GeoGebri pomoći će učenicima da lakše razumiju kako oblik, položaj i orijentacija grafa kvadratne funkcije ovise o vrijednostima realnih parametara a, b i c. Parametar a određuje oblik parabole, tj. koje će širine biti te kako će biti okrenuta (prema gore ili prema dolje). O pomaku grafa funkcije po y-osi govori nam parametar c, dok na tjeme i sjecišta parabole s x-osi utječu sva tri parametra a, b i c.

U gimnazijskim udžbenicima i zbirkama zadataka najčešći oblik zadataka vezan uz kvadratnu funkciju s parametrom je onaj u kojem treba odrediti broj realnih nultočaka funkcije ili ispitati postojanje takvih nultočaka, u ovisnosti o realnom parametru. Algebarsko rješavanje zadatka svodi se na komentiranje diskriminante pripadne kvadratne jednadžbe. Učenicima se ovakav tip zadataka čini vrlo složen za rješavanje pa vrlo često odustaju od rješavanja, ako se takav tip zadataka pojavi u ispitu znanja ili na državnoj maturi.

U nastavku jedan takav primjer rješavamo grafički, odnosno vizualizacijom u GeoGebri kako bismo pokazali da je rješavanje ovakvog tipa zadatka zapravo vrlo jednostavno.

Primjer 2.2. *Za koji realni broj m funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s*

$$f(x) = (m–1)x^2–3mx + 2m + 5 \tag{2.7}$$

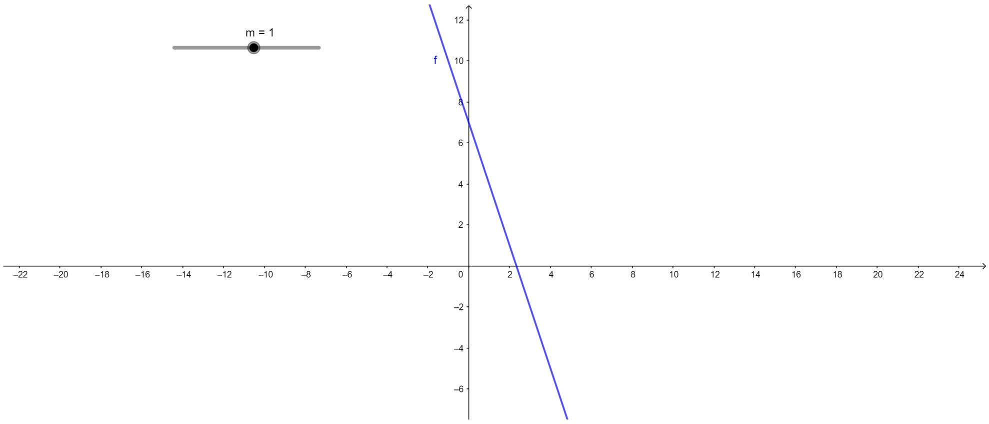
nema realnih nultočki?

Algebarski, znamo da kvadratna funkcija nema realnih nultočki ako je diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe manja od 0. Tražimo li od učenika da argumentiraju što to znači grafički, čest odgovor je da gledamo sve argumente funkcije f zadane pravilom pridruživanja (2.7) za koje funkcija poprima negativne vrijednosti, odnosno funkcija f nema realnih nultočki na intervalu na kojem se graf funkcije nalazi ispod x-osi. Ovaj odgovor naravno nije točan. Zapravo, gledamo sve navedeno, no ne za funkciju f nego za funkciju koja opisuje diskriminantu pripadne kvadratne jednadžbe, a kojoj je varijabla jednaka parametru iz zadatka.

No, prije diskusije o diskriminanti, provjerimo je li za sve vrijednosti parametra m funkcija f zaista kvadratna funkcija za koju možemo odrediti pripadnu kvadratnu jednadžbu i diskriminantu. U GeoGebri postavimo klizač za parametar m s rasponom od -10 do 10 uz pomak 0.1. Zatim u traku za unos upišemo zadanu funkciju (2.7). Pomičemo klizač i diskutiramo izgled grafa funkcije f. Promjenom vrijednosti parametra m od -10 do 10 uočavamo da za sve vrijednosti parametra m graf je parabola, odnosno je graf kvadratne funkcije, osim za $m = 1$. Za $m = 1$ graf funkcije je pravac (Slika 2.7) koji siječe x-os, što znači da je za vrijednost 1 realnog parametra m funkcija f linearna i sigurno ima realnu nultočku. Zaključujemo dakle da za $m = 1$ funkcija f ima realnu nultočku.

Odredimo sada diskriminantu pripadne kvadratne jednadžbe funkcije f. Za funkciju f diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe je oblika

$$D = (–3m)^2–4(m–1)(2m + 5). \tag{2.8}$$



Slika 2.7: *Grafički prikaz funkcije f, klizač realnog parametra m*

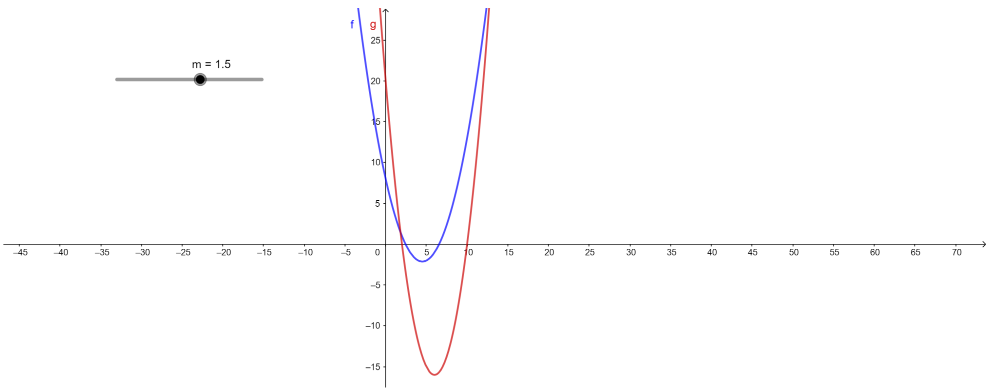
Sređivanjem dobivamo

$$D = m^2 - 12m + 20. \tag{2.9}$$

S obzirom na to da nas zanima za koje je vrijednosti diskriminanta manja od 0, definirajmo funkciju

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(m) = m^2 - 12m + 20. \tag{2.10}$$

Uočimo da je parametar m funkcije f postao varijabla funkcije g zadane pravilom pridruživanja (2.10). U traku za unos upisujemo funkciju g (Slika 2.8).



Slika 2.8: *Grafički prikaz funkcija f i g, $m = 1.5$*

Pomakom klizača, odnosno promjenom vrijednosti parametra m uočavamo da se mijenjaju samo oblik, položaj i orijentacija parabole f, dok parabola g ostaje ista, s obzirom da parametar m u funkciji g nije parametar nego varijabla.

Funkcija g predstavlja diskriminantu pripadne kvadratne jednadžbe funkcije f, a iz grafičkog prikaza zaključujemo da je diskriminanta D jednaka 0 za vrijednosti $m = 2$ i $m = 10$, veća od 0 za $m \in < -\infty, 2 > \cup < 10, \ +\infty >$, a manja od 0 za $m \in < 2, \ 10 >$.

Dakle, početna funkcija (2.7) nema realnih nultočaka za $m \in < 2, 10 >$. Na početku smo zaključili da funkcija f za $m = 1$ ima realnu nultočku, ali kako $m = 1$ ne pripada intervalu $< 2, 10 >$, ne moramo isključiti tu točku iz dobivenog intervala. Naglasimo da je važno u svakom zadatku na početku provesti diskusiju o svim mogućim slučajevima, jer tako možemo biti sigurni da smo obuhvatili sve moguće situacije.

2.3 Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Gradivo 2. razreda strukovnih škola i gimnazija obuhvaća eksponencijalnu funkciju i njoj inverznu, logaritamsku funkciju, a iste su učenicima ”najomraženije” od svih funkcija, pa čak i od čitavog školskog gradiva. Za dobro razumijevanje eksponencijalne funkcije potrebno je i dobro poznavanje potencija te samog računa s potencijama.

Funkciju
$$f(x) = a^x, \tag{2.11}$$
gdje je $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $a \neq 1$, nazivamo *eksponencijalna funkcija* s bazom a. Upravo bazu eksponencijalne funkcije uzimamo kao parametar, te promatramo kako njegova promjena utječe na graf funkcije (2.11). Domena eksponencijalne funkcije zadane pravilom pridruživanja (2.11) je skup $\mathbb{R}$, dok je kodomena funkcije $\mathbb{R}^+$, prema tome graf funkcije nalazi se iznad x-osi. Upisivanjem (2.11) u traku za unos u GeoGebru automatski se aktivira i klizač za parametar a, a pomakom klizača uočavamo da je za $0 < a < 1$ funkcija f padajuća, te da je graf funkcije ”strmiji” što je vrijednost parametra manja. Drugim riječima, što je vrijednost parametra manja, padajuća eksponencijalna funkcija brže pada. Za $a > 1$ funkcija f je rastuća, te je graf funkcije ”strmiji” što je vrijednost parametra a veća. Odnosno za rastuću eksponencijalnu funkciju kažemo da raste brže za veću vrijednost parametra a. Također, graf eksponencijalne funkcije ima horizontalnu asimptotu, pravac zadan jednadžbom $y = 0$.

Dodatno možemo promatrati transformacije grafa osnovne eksponencijalne funkcije zadane pravilom pridruživanja (2.11). Neka je eksponencijalna funkcija g zadana pravilom pridruživanja $g(x) = a^{x+b} + c$, gdje su b i c realni parametri. Promjena parametra b utječe na horizontalni pomak grafa funkcije g , dok promjena parametra c utječe na vertikalni pomak grafa.

Logaritamska funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ inverzna je funkcija eksponencijalne funkcije (2.11). Također, možemo komentirati i kako realni parametri a, b i c utječu na graf funkcije definirane pravilom pridruživanja $g(x) = \log_a(x + b) + c$.

Učenicima često nije jasna svrha uvođenja ovih funkcija i primjenjivost istih na probleme iz realnog života. Dodatni problem nastaje kada se u takvim zadacima pojavi još i realni parametar ili više njih. Tu pomaže vizualizacija zadataka, odnosno rješavanje zadataka grafički u GeoGebri.

Primjer 2.3. *Dok Ana novac štedi u banci B u kojoj je oročila 250kn na period od* 10 *godina, uz kamatnu stopu* 4.5%*, Marko se odlučio na štednju u banci A u kojoj nude veću kamatnu stopu. Odlučio je oročiti 200kn. I Marku i Ani obračun kamata računa se prema složenom kamatnom računu. Koliku najmanju kamatnu stopu na oročeni iznos Marko treba dogovoriti ako želi nakon* 10 *godina podići iznos veći nego Ana u istom periodu? Ako ipak dobije manju kamatnu stopu od željene, točnije* 5.5%*, koliko bi trebao povećati početni iznos za oročenje ako želi uštedjeti barem kao Ana u istom periodu od* 10 *godina?*

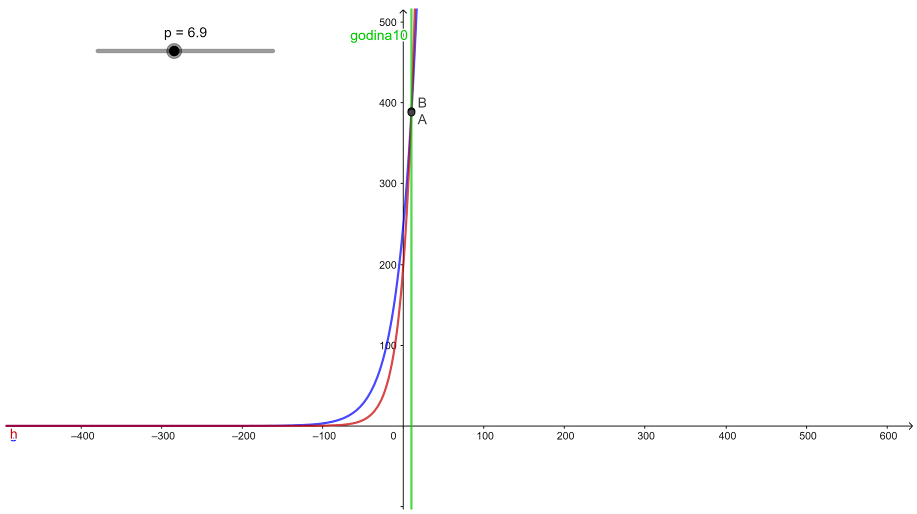
Iznos na računu nakon x godina štednje opisujemo funkcijom

$$f(x) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x, \tag{2.12}$$

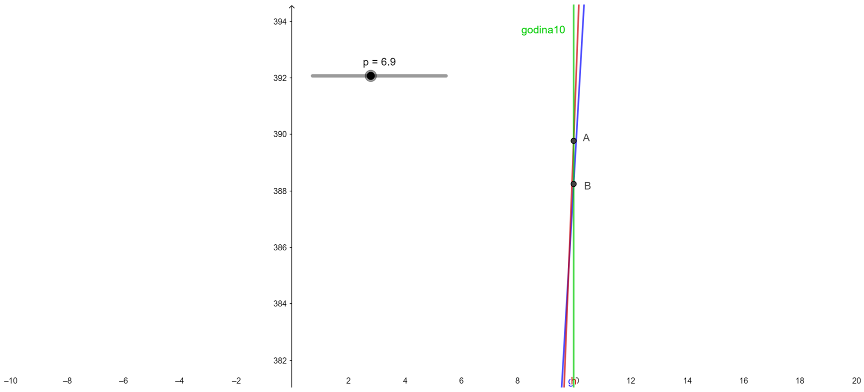
gdje realan parametar a predstavlja iznos oročenog novca, odnosno glavnicu, a realan parametar p predstavlja kamatnu stopu.
Aninu štednju opisujemo funkcijom $g(x) = 250\left(1 + \dfrac{4.5}{100}\right)^x$, a Markovu štednju funkcijom $h(x) = 200\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^x$ te ove funkcije upisujemo u traku za unos u GeoGebri. Automatski se aktivira klizač za parametar p u drugoj funkciji, no potrebno je postaviti novi raspon, s obzirom da automatski postavljen raspon od -5 do 5 ne odgovara. Naime, kamatna stopa p je uvijek pozitivna, a želimo da uz to bude i veća od Anine, pa ćemo postaviti klizač s rasponom od 4.6 do 10. S obzirom da nas zanimaju iznosi nakon 10 godina štednje, konstruiramo pravac $x = 10$ te pomoću naredbe za sjecište krivulja označimo s točkom A sjecište grafa funkcije h i pravca $x = 10$, a točkom B sjecište grafa funkcije g i pravca $x = 10$. Pomičemo klizač za parametar p te promatramo za koju će vrijednost parametra p vrijednost y koordinate točke A biti veća od vrijednosti y koordinate točke B. Zaključujemo (Slika 2.9) da Marko treba dobiti kamatnu stopu u iznosu 6.9% ili veću, ako želi nakon 10

godina štednje podići iznos veći nego Ana. Prikazujemo uvećane dijelove grafova oko točaka A i B kako bismo bolje uočili da je točka A zaista iznad točke B (Slika 2.10). Isto smo mogli provjeriti i promatrajući vrijednosti y koordinata u algebarskom prozoru GeoGebre.

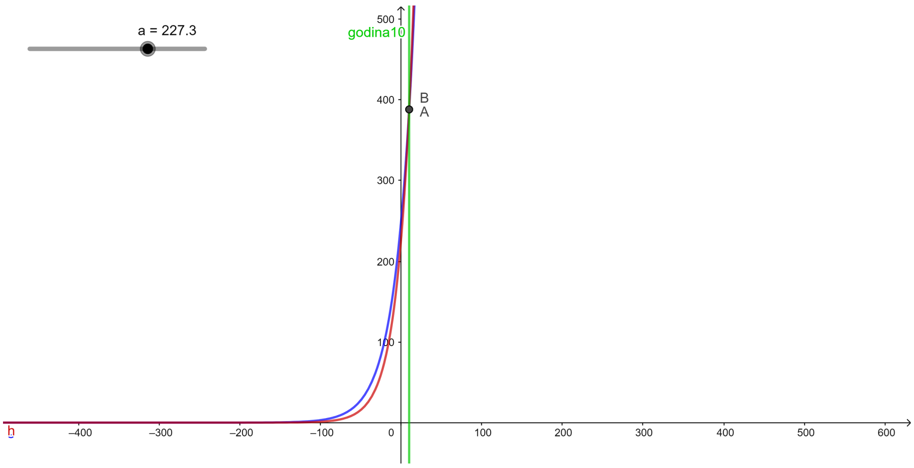
No, Marko je u svojoj banci ipak dobio manju kamatnu stopu u iznosu 5.5%, pa ako želi nakon 10 godina uštedjeti barem isto kao Ana, morat će oročiti veći iznos novca. Sada znamo koliki je iznos kamatne stope na Markovu štednju, pa u funkciju h umjesto parametra p upisujemo 5.5, no umjesto iznosa od 200 upisujemo parametar a i aktiviramo klizač s rasponom od 201 do npr. 240. Točke presjeka A i B ostavljamo uključene. Pomakom klizača za parametar a zaključujemo (Slika 2.11) da će Marko morati uložiti najmanje 227,30kn kako bi nakon 10 godina štednje podigao barem isti iznos kao Ana.



Slika 2.9: *Grafički prikaz funkcija g i* $h(x) = 200\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^x$, *parametar* $p = 6.9$



Slika 2.10: *Uvećani grafički prikaz funkcija g i* $h(x) = 200\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$, *parametar* $p = 6.9$



Slika 2.11: *Grafički prikaz funkcija g i* $h(x) = a(1 + \frac{5.5}{100})^x$, *parametar* $a = 227.3$

2.4 Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije po gimnazijskom nastavnom planu i programu obrađuju se u 3. razredu. Nakon definiranja i obrade osnovnih trigonometrijskih funkcija (sinus, kosinus, tangens i kotangens) na red dolazi harmonijska funkcija koja ima važnu ulogu u primjeni i razumijevanju trigonometrijske funkcije sinus. Harmonijska funkcija je oblika

$$f(x) = A\sin(Bx + C) + D, \tag{2.13}$$

gdje je $A \neq 0$ i $B > 0$ i tu se posebna pažnja pridaje upravo realnim parametrima A, B, C i D koje definiramo na sljedeći način:

- $|A|$ je amplituda;
- B je kružna frekvencija;
- D je pomak po y osi;
- $-\frac{C}{B}$ je fazni pomak;
- $\frac{2\pi}{B}$ je temeljni period.

Upisivanjem funkcije (2.13) u traku za unos u GeoGebri automatski se pojave i klizači za navedene parametre, a pomakom klizača uočavamo da promjena parametra A utječe na "visinu brijegova" sinusoide, odnosno promjenom parametra A mijenja se amplituda, tj. udaljenosti točaka maksimuma i minimuma funkcije do središnje linije grafa funkcije. Središnja linija je pravac paralelan s x-osi dan jednadžbom $y = D$. Promjena parametra B utječe na "širinu brijegova" sinusoide, odnosno na temeljni period funkcije. Promjena parametra C utječe na pomak sinusoide po x-osi, dok promjena parametra D utječe na pomak sinusoide po y-osi.

Učenici uglavnom nauče napamet značenja parametara funkcije i lako primjenjuju isto u zadacima u kojima je zadana funkcija pa se traže parametri, ili obratno. No, primjena i modeliranje ove funkcije u primjerima iz stvarnog života stvara teškoće jer je učenicima teško shvatiti što parametri A, B, C i D predstavljaju u takvim primjerima, u kojima nisu definirani doslovno.

Primjer 2.4. *London Eye, jedan od najvećih kotača promatračnica na svijetu, izgrađen je 1999. Promjer kotača je 120m, ukupna visina 135m, ima ukupno* 32 *kabine od kojih svaka može primiti* 25 *osoba. Kotaču je potrebno 30 minuta za puni okret. Definirajte funkciju f koja opisuje promjenu visine jedne kabine na kotaču te odredite koliko minuta će se kabina K_1, koja se u početnom trenutku nalazi na najnižoj točki kotača, nalaziti iznad 100m visine. Za koliko bi trebalo povećati/smanjiti promjer kotača ako želimo da je njegov promjer maksimalan, ali da kabina provede manje od 10min iznad 100m?*

S učenicima prvo diskutiramo što nam predstavljaju pojedini podaci o kotaču. Jasno je da ćemo kotač opisati kao kružnicu, a gibanje kabine je periodična funkcija, odnosno harmonijska funkcija (2.13) kojoj trebamo odrediti vrijednosti realnih parametara A, B, C i

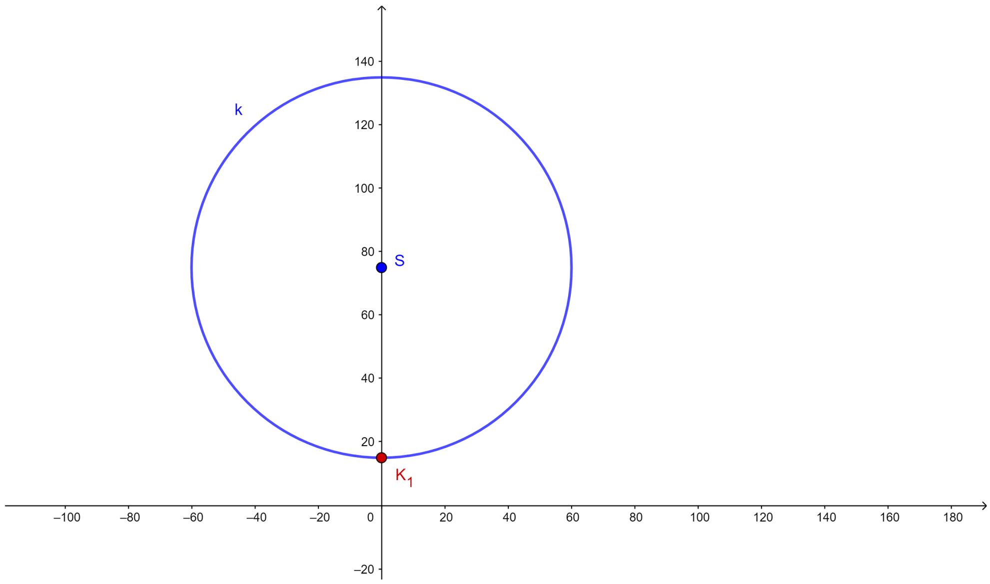
D. Naime, visina točaka na kružnici povezana je s funkcijom sinus jer se ona upravo definira preko ordinata točaka jedinične kružnice, pa iz toga zaključujemo da ćemo pomoću funkcije sinus moći prikazati ordinate točaka i na nekoj pomaknutoj i skaliranoj kružnici, poput ove kojom je opisan kotač. Smjestimo kotač London Eye kao kružnicu k u koordinatni sustav u kojemu x-os predstavlja tlo, te prokomentirajmo veličinu i položaj kotača u koordinatnom sustavu. Promjer kotača je 120m, što znači da je polumjer kružnice k jednak 60m, dok je najviša točka kotača na 135m iznad tla, što znači da je razmak između tla i najniže točke samog kotača, ne njegovog postolja, jednak 15m. Drugim riječima, ako se središte kotača nalazi na y osi, središte kružnice kojom opisujemo kotač nalazi se u točki $S(0, 75)$, odnosno kružnicu u koordinatni sustav smještamo s pomakom po y-osi za 75 (*Slika 2.12*). Za parametar D tada vrijedi $D = 75$. Početni položaj kabine K_1 označimo kao točku $K_1(0, 15)$. Radi jednostavnosti zanemarujemo veličinu kabine K_1 pa ju možemo promatrati kao točku. Polumjer kružnice k, tj. polumjer kotača, predstavlja amplitudu harmonijske funkcije (2.13) pa za vrijednost parametra A vrijedi $A = 60$, a pravac $y = 75$ predstavlja središnju liniju grafa funkcije.

Pomak kabine K_1 promatramo kao pomak točke K_1 po kružnici k, a s obzirom da je kotaču za puni okret potrebno 30min, kabina K_1 će nakon 30min doći u početni položaj. Dakle, 30min nam ovdje predstavlja temeljni period harmonijske funkcije. Dakle, $\dfrac{2\pi}{B} = 30$ što znači da za parametar B vrijedi $B = \dfrac{\pi}{15}$. Harmonijska funkcija koja predstavlja visinu kabine K_1 u ovisnosti o vremenu sada ima oblik $f(x) = 60 \cdot \sin(\frac{\pi}{15}x + C) + 75$, a argument x predstavlja vrijeme u minutama.

Preostaje još odrediti vrijednost parametra C. Parametar C odredimo tako da uvrstimo poznatu vrijednost funkcije u određenom trenutku. Znamo da je u početnom trenutku, $x = 0$, vrijednost funkcije jednaka 15, pa slijedi da je $15 = 60 \cdot \sin(0 + C) + 75$, odnosno $\sin C = -1$. Dobivamo da je $C = -\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi$, gdje je $\ell \in \mathbb{Z}$. No, za svaki ℓ, s obzirom da je period funkcije sinus jednak 2π, dobivamo jednaku vrijednost za $f(x)$ pa odabiremo jednostavno $C = -\frac{\pi}{2}$.

Konačno, funkcija kojom opisujemo kretanje kotača, odnosno položaj kabine K_1 u ovisnosti o vremenu, je funkcija $f(x) = 60 \cdot \sin(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{2}) + 75$.

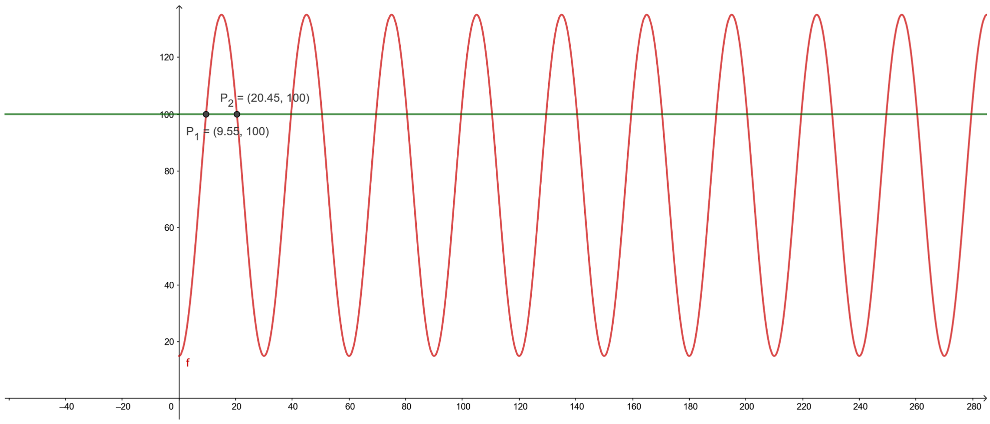
Također, u zadatku se traži da odredimo ukupno vrijeme koje kabina K_1 provede iznad 100m visine, a to možemo riješiti i algebarski i grafičkim prikazom funkcije u GeoGebri. Algebarski, trebamo odrediti za koje sve vrijednosti argumenta x je $f(x) > 100$. No, to nam je lakše odrediti grafički.



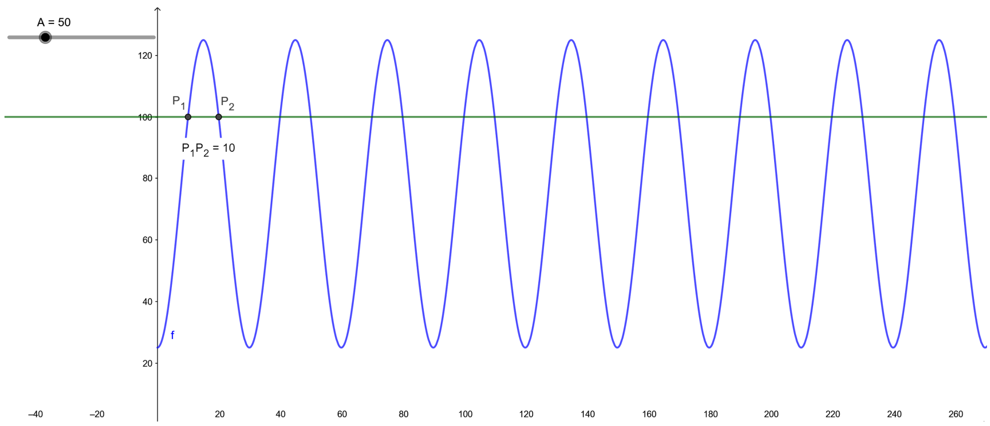
Slika 2.12: *Grafički prikaz kotača kao kružnice k*

U traku za unos u GeoGebri upišimo funkciju $f(x) = 60 \cdot \sin(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{2}) + 75$ te pravac $y = 100$. S obzirom da je vrijeme okretanja kotača uvijek pozitivno, odnosno zanima nas graf funkcije samo za pozitivne vrijednosti x, postavimo i uvjet $x > 0$. Pomoću naredbe u alatnoj traci odredimo sjecišta sinusoide i pravca za prvi "brijeg" sinusoide (točke P_1 i P_2), odnosno na prvom periodu funkcije, te očitamo vrijednosti x koordinata dobivenih točaka (Slika 2.13).

Točke presjeka pravca i sinusoide u prvom periodu predstavljaju nakon koliko vremena je kabina K_1 prvi put prešla visinu od 100m te vrijeme kada se ponovno spustila ispod visine 100m. Uočavamo da je nakon 9.55min prijeđena tražena visina te da se 20.45min nakon početka vožnje kabina K_1 spustila ispod tražene visine. Drugim riječima, kabina K_1 je iznad visine 100m provela ukupno $20.45 - 9.55 = 10.9$ minuta. Isto smo mogli dobiti i tako da smo izmjerili udaljenost točaka P_1 i P_2.



Slika 2.13: *Grafički prikaz funkcije* $f(x) = 60 \cdot \sin(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{2}) + 75$ *i pravca* $y = 100$



Slika 2.14: *Grafički prikaz funkcije* $f(x) = A \cdot \sin(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{2}) + 75$ *i pravca* $y = 100$, *parametar* $A = 50$

Preostalo je još odrediti koliko bi trebalo smanjiti/povećati promjer kotača ako želimo da se kabina K_1 iznad 100m visine nalazi manje od 10min. Znamo da parametar A predstavlja amplitudu harmonijske funkcije, ali i polumjer kružnice k, tj. kotača, pa je za rješenje ovog dijela zadatka potrebno promatrati promjenu vrijednosti parametra A. U GeoGebri u funkciju f umjesto trenutne vrijednosti 60 upišimo realni parametar A i za isti uključimo klizač raspona npr. od 40 do 80, s korakom povećanja 1 (Slika 2.14), te izmjerimo udaljenost točaka P_1 i P_2.

Pomicanjem klizača zaključujemo da će za vrijednost realnog parametra $A < 50$ kabina K_1 iznad visine 100m provesti manje od 10min. Odnosno, promjer kotača treba smanjiti za više od 20m jer treba biti manji od 100m ako želimo da kabine iznad visine 100m provedu manje od 10min. Može li neka kabina biti iznad 100m ako je promjer kotača također 100m? Može, jer znamo da je kotač podignut od tla 15m, pa je maksimalna visina kabine 115m.

U ovom primjeru učenicima je moguće postaviti i mnoga druga pitanja o položaju i vremenu okretaja kotača i kabine, te tako promatrati funkciju i njen graf u ovisnosti o svim realnim parametrima A, B, C i D.

Bibliografija

[1] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, dostupno na http://bit.ly/2Zsrd6f, Narodne Novine (kolovoz 2019.)

[2] Dorić J., GeoGebra u nastavi matematike, dostupno na http://bit.ly/2PzRj2E (kolovoz 2019.)

[3] Čulina B., Vitaljić S., Pojam funkcije u nastavi matematike, dostupno na http://bit.ly/2LyIVv5 (kolovoz 2019.)

[4] CARnet, Edutorij e-skole, Primjena linearne funkcije u svakodnevnom životu, dostupno na http://bit.ly/2zMg2pn (kolovoz 2019.)

[5] CARnet, Edutorij e-skole, Primjena kvadratne funkcije, dostupno na http://bit.ly/2Zst0bt (kolovoz 2019.)

[6] XV. gimnazija, 3. vježbenica, dostupno na http://bit.ly/34gBqRT (kolovoz 2019.)

[7] Paić G., Bošnjak Ž., Čulina B., Matematički izazovi 6, udžbenik iz matematike za šesti razred, II. dio, Alfa, Zagreb, 2017.

[8] Paić G., Bošnjak Ž., Čulina B., Matematički izazovi 7, udžbenik iz matematike za sedmi razred, II. dio, Alfa, Zagreb, 2014.

[9] Kurnik M., Pavković B., Zorić Z., Matematika 1 - udžbenik sa zbirkom zadataka za prirodoslovno matematičku gimnaziju, I. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[10] Kurnik M., Pavković B., Zorić Z., Matematika 1 - udžbenik sa zbirkom zadataka za prirodoslovno matematičku gimnaziju, II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[11] Gusić J., Mladinić P., Pavković B., Matematika 2 - udžbenik sa zbirkom zadataka za prirodoslovno matematičku gimnaziju, I. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[12] Gusić J., Mladinić P., Pavković B., Matematika 2 - udžbenik sa zbirkom zadataka za prirodoslovno matematičku gimnaziju, II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

Sažetak

U ovom diplomskom radu opisano je kako primjena računala, točnije programa dinamične geometrije GeoGebra, može pomoći učenicima u lakšem razumijevanju rješenja jednadžbi i sustava jednadžbi te ponašanja funkcija, tj. grafova funkcija, u ovisnosti o realnim parametrima.

Prvo poglavlje sadrži opis obrade jednadžbi s parametrom u osnovnoj i srednjoj školi. Riješeno je nekoliko primjera jednadžbi s parametrom, prvo algebarski, a zatim vizualizacijom u GeoGebri. Drugo poglavlje odnosi se na funkcije s realnim parametrom, a obuhvaćene su sve osnovne funkcije osnovnoškolskog i gimnazijskog plana i programa, točnije linearna, kvadratna, eksponencijalna, logaritamska te trigonometrijske funkcije.

Sadržaj ovog diplomskog rada koristan je učenicima, ali i nastavnicima u njihovom radu, kako bi rješavanje zadataka s jednadžbama i funkcijama s parametrom objasnili na zanimljiviji, jednostavniji i prije svega razumljiviji način.

Summary

In this thesis is described how the application of computers, precisely dynamic geometry program GeoGebra, can help students to more easily understand the solutions of equations, systems of equations and behavior of functions and graphs of functions, depending on real parameters.

The first chapter contains a description of the processing of equations with parameters in elementary and high school. Several examples of equations with parameters are solved, first algebraically and then by visualization in GeoGebra. The second chapter deals with functions with a real parameter, and covers all basic functions of the elementary and high school curriculum, namely linear, quadratic, exponential, logarithmic and trigonometric functions.

The content of this thesis is useful for students and teachers in their work, to explain solving equations and functions with a parameter in a more interesting, simple and, above all, more understandable way.

Životopis

Rođena sam 3.5.1988. godine u Slavonskom Brodu, a od rođenja pa do svoje treće godine živjela sam u Bosanskom Brodu u Bosni i Hercegovini. Od 1991. obitelj je preselila u Viroviticu, grad koji danas smatram svojim rodnim gradom, s obzirom da sam u njemu provela čitavo djetinjstvo te završila osnovnu i srednju školu. Osnovnu školu Ivane Brlić Mažuranić završila sam 2003. godine, a Prirodoslovno-matematičku gimnaziju Petra Preradovića 2007. godine. Nakon završetka srednje škole selim u Zagreb na studij, a Zagreb danas smatram svojim domom.

Još od prvog razreda osnovne škole pokazivala sam podjednak interes za kazalištem i matematikom, a interes je za oba područja i danas isti. Preddiplomski studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, nastavnički smjer na Matematičkom odsjeku, upisala sam 2007. te završila 2013. Nakon dvije godine pauze, 2015. upisujem diplomski studij istog smjera na istom odsjeku. Na Otvorenom učilištu Algebra sam 2017. godine završila četveromjesečni program obrazovanja te stekla zvanje specijalistica internet marketinga.

Tijekom dugogodišnjeg studija konstantno sam zaposlena preko Student servisa, i to na puno radno vrijeme. Samostalno sam vodila te još vodim marketing nekoliko firmi, a ponajviše bih istaknula dugogodišnju suradnju s profesorom Tonijem Milunom koja traje i danas. Što se matematike tiče, osim privatnih instrukcija, kao profesorica matematike radila sam u OŠ Silvija Strahimira Kranjčevića u Zagrebu, te sam trenutno zaposlena u Prvoj privatnoj gimnaziji u Zagrebu.

Moj detaljan životopis dostupan je na https://www.linkedin.com/in/eva-lukic-cv/.