

# Jednostavan model sinkrotronskog zračenja iz maglice pulsarovog vjetra

---

**Kroflin, Andrea**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:870246>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-09**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

**Andrea Kroflin**

**Jednostavan model sinkrotronskog zračenja  
iz maglice pulsarovog vjetra**

Diplomski rad

Voditelj diplomskog rada: **Dr. sc. Tihomir Surić**

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: DIPLOMIRANI INŽENJER FIZIKE

**Andrea Kroflin**

Diplomski rad

**Jednostavan model sinkrotronskog zračenja  
iz maglice pulsarovog vjetra**

Voditelj diplomskog rada: Dr. sc. Tihomir Surić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2020.

## Zahvala

Najveće hvala mom mentoru i učitelju Dr. sc. Tihomiru Suriću na velikoj pomoći u stvaranju ovog diplomskog rada. Hvala mu na neizmjereno puno truda, volje i vremena koje je posvetio u radu sa mnom, na brojnim savjetima i podršci te na osmišljavanju teme diplomskog rada, koji sam pisala s velikim zanimanjem.

Neizmjereno hvala i mom velikom prijatelju Berislavu Jandriću na puno pomoći i vremena koje mi je uvijek bio spreman pružiti, kao i na velikoj podršci tijekom pisanja ovog rada.

Veliko hvala mojoj prijateljici Ivani Torbašinović što je, unatoč velikoj prekoceanskoj i prekokontinentalnoj udaljenosti, uvijek bila uz mene.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji, kao i prijateljicama i prijateljima Zorici Mataga-Jurić, Ivani Vuković i Ivici, Martini Mesarić i svim ostalim kolegama s kojima sam provela studentske dane učeći.

## Sažetak

Na kraju svog razvoja, kad potroši sva raspoloživa sredstva za odvijanje nuklearnih reakcija, zvijezda velike mase i golemih dimenzija eksplodira. Njeno središte, u kojem se nuklearnim reakcijama bilo stvorilo željezo, postalo je sve nestabilnije jer tlak degeneriranog elektronskog plina više nije mogao održavati ravnotežu s gravitacijom i urušio se u objekt puno manje mase i manjih dimenzija, nego što je imala zvijezda od koje je nastao. Taj dobiveni ostatak supernove gusto je građen od nuklearne materije kojom prevladavaju neutroni i zove se neutronska zvijezda.

Neutronske zvijezde vrlo jakog magnetskog polja i izrazito brze rotacije oko vlastite osi nazivaju se pulsari. Jako magnetsko polje rotira zajedno s pulsarom zbog čega pulsar gubi kinetičku energiju rotacije i usporava, a spomenuta energija pretvara se u kinetičku energiju potrebnu za ubrzavanje relativističkih i ultrarelativističkih elektrona i pozitrona stvorenih u blizini pulsara čineći zajedno s magnetskim poljem pulsarov vjetar. U magnetskom polju elektroni i pozitroni vrte se oko silnica magnetskog polja gibajući se po spiralnoj putanji zbog čega emitiraju sinkrotronsko zračenje na frekvencijama od radiovalova do X-zraka i niskoenergijskih  $\gamma$ -zraka. Pulsarov vjetar zajedno sa zračenjem kojeg stvara čini maglicu pulsarovog vjetra koja se prostire na nekoliko svjetlosnih godina i koja sadrži relativno slabo magnetsko polje.

U ovom radu bavit ću se jednostavnim modelom sinkrotronskog zračenja, kao glavnim mehanizmom nastanka elektromagnetskog zračenja iz maglice pulsarovog vjetra, koji uključuje netermalne raspodjele energija elektrona i pozitrona kao i uniformna magnetska polja reda veličine od miligaussa do mikrogaussa. Najprije ću izvesti snagu i spektar sinkrotronskog zračenja jednog elektrona, odnosno, pozitrona te, pomoću dobivenog rezultata i pretpostavljenih raspodjela energija elektrona i pozitrona i pretpostavljene jakosti magnetskog polja, ću opisati spektar sinkrotronskog zračenja svih elektrona, odnosno, pozitrona iz maglice pulsarovog vjetra.

**Ključne riječi:** neutronska zvijezda, pulsar, pulsarov vjetar, sinkrotronsko zračenje, maglica pulsarovog vjetra

# **“A simple model of synchrotron radiation from pulsar wind nebula”**

## **Abstract**

Once all the available resources for nuclear reactions have been exhausted, a giant star explodes as a supernova. Its iron core, which has become unstable because its electron degeneracy pressure can no longer maintain equilibrium with gravity, undergoes core collapse producing a much lighter and smaller object than progenitor star had been. It consists of high density nuclear matter, mostly neutrons and therefore it is called a neutron star.

Highly magnetized neutron stars spinning with an extremely short period are called pulsars. Strong magnetic field rotates along with the pulsar, causing the pulsar's rotation energy loss as well as its spin down. During this process its rotation energy loss is converted into kinetic energy as acceleration of relativistic and ultra-relativistic electrons and positrons created in the vicinity of the pulsar, which along with a magnetic field comprise the pulsar wind. Electrons and positrons are spinning around the magnetic field lines with the spiral trajectories causing synchrotron continuum radiation with wavelengths from radio to X-rays and low energy  $\gamma$ -rays. The pulsar wind and its radiation form the pulsar wind nebula stretching a distance of several light years and containing rather weak magnetic field.

In this thesis I shall study a simple model of synchrotron radiation as the main origin of electromagnetic radiation from pulsar wind nebula including non-thermal electron and positron power-law energy distributions as well as uniform magnetic fields ranging from milligauss up to microgauss scale. First, I shall derive luminosity and a single electron and positron synchrotron radiation spectrum. Using the acquired results and assumed electron and positron energy distributions and magnetic field strength, I shall give a description of the synchrotron radiation coming from the entire number of electrons and positrons in the pulsar wind nebula.

**Key words and phrases:** neutron star, pulsar, pulsar wind, synchrotron radiation, pulsar wind nebula

# Sadržaj

1 Uvod.....	1
2 Supernove.....	2
3 Neutronske zvijezde i pulsari.....	5
3.1 Model magnetskog dipola pulsara.....	10
3.2 Luminoznost kao posljedica usporavanja vrtnje pulsara.....	12
3.3 Karakteristična dob.....	15
4 Maglica pulsarovog vjetra.....	17
5 Jednostavan model sinkrotronskog zračenja.....	19
5.1 Uniformno, vremenski nepromijenjivo magnetsko polje.....	19
5.2 Osnove sinkrotronskog zračenja.....	21
5.3 Snaga sinkrotronskog zračenja jednog elektrona.....	24
5.4 Spektar sinkrotronskog zračenja jednog elektrona.....	26
5.4.1 Spektar zračenja elektrona koji se giba proizvoljno.....	26
5.4.2 Koordinatni sustav.....	28
5.4.3 Algebra.....	29
5.4.4 Rezultati.....	33
5.5 Model sinkrotronskog zračenja maglice pulsarovog vjetra.....	35
6 Zaključak.....	40
Literatura.....	41

## 1 Uvod

Maglica pulsarovog vjetra (Pulsar wind nebula) je objekt kojeg čine elektroni i pozitroni, koji se gibaju ultrarelativističkim brzinama, i magnetsko polje. Maglicu pulsarovog vjetra, koja može imati dimenzije nekoliko svjetlosnih godina, stvara pulsar, svemirsko tijelo polumjera 10 – 12 km, mase reda veličine mase Sunca ( $M_{\odot}$ ) i vrlo velike gustoće, veće od gustoće atomske jezgre, građeno od nuklearne materije i vrlo jakog magnetskog polja. Pulsar je jedan od ostataka supernove, eksplozije zvijezda koje nastaju kao posljedica gravitacijskog urušavanja zvijezda mase 8 – 25  $M_{\odot}$  [1]. Ako zvijezda prije nastupanja eksplozije ima masu 8 – 25  $M_{\odot}$ , nakon urušavanja središta ostat će neutronska zvijezda, pulsar, koji ima jako magnetsko polje i vrlo brzo rotira te stvara maglicu. Vanjski omotač zvijezde eksplozijom će biti izbačen u međuzvijezdani prostor i nastavit će se širiti svemirom. Ostaci supernove tako će biti: pulsar, maglica pulsarovog vjetra i materijal iz vanjskog omotača zvijezde koji se širi svemirom.

U ovom radu ograničavamo se na razmatranje rotacijom pogonjenih pulsara i njihovih maglica. Postoje još i akrecijom pogonjeni pulsari i maglice, ali oni su dio složenog dvojnog sustava pa ih ovdje ne razmatramo. Pulsar opskrbljuje maglicu energijom. Naime, jedina energija koju pulsar posjeduje je njegova kinetička energija rotacije. Rotacijom vrlo jakog magnetskog polja, za koje se najčešće pretpostavlja da je dipolnog karaktera i čija je jakost u blizini površine pulsara reda veličine  $10^8 T$ , pulsar gubi energiju i usporava, a energiju predaje maglici u obliku vjetra ultrarelativističkih čestica, koje izlaze iz njegove blizine i zajedno s relativno slabim magnetskim poljem jakosti 1 – 100  $\mu G$  tvore maglicu pulsarovog vjetra koja se prostire na prostoru od nekoliko svjetlosnih godina i koja se zove *maglica pulsarovog vjetra*. U magnetskom polju ultrarelativističke čestice se zakreću i gibaju se spiralno duž silnica magnetskog polja. Elektroni i pozitroni, zbog otklona u magnetskom polju, emitiraju zračenje koje nazivamo *sinkrotronsko zračenje*, koje mi na Zemlji opažamo kao zračenje iz maglice pulsarovog vjetra.

Cilj ovog rada je prikazati jednostavan model spektra sinkrotronskog zračenja relativističkih i ultrarelativističkih elektrona i pozitrona u magnetskom polju maglice pulsarovog vjetra i to kroz primjer maglice Rakovice (Crab Nebula).

U drugom poglavlju objasnit ću procese koji dovode do supernove koja završava nastankom neutronske zvijezde.



U trećem poglavlju opisat ću osnovne karakteristike i građu neutronske zvijezde i baviti ću se modelom pulsara koji energijom napaja maglicu pulsarovog vjetra.

U četvrtom poglavlju opisat ću glavna obilježja maglice pulsarovog vjetra, a u petom poglavlju sinkrotronsko zračenje koje dolazi iz maglice na način da ću najprije izvesti snagu i spektar sinkrotronskog zračenja jednog elektrona kako bih opisala spektar sinkrotronskog zračenja svih elektrona i pozitrona koji čine maglicu pulsarovog vjetra.

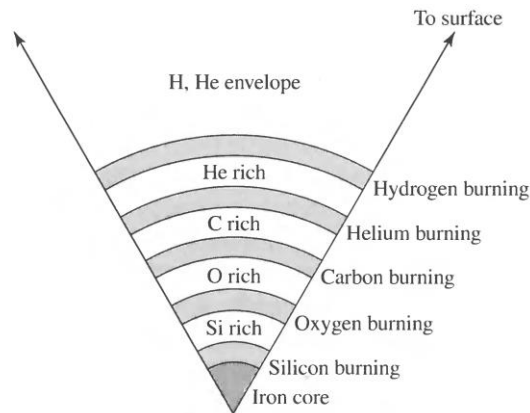
## 2 Supernove

*Supernove* su eksplozije zvijezda koje se javljaju kao posljedica razvoja zvijezda velikih masa. Tijekom eksplozije onih zvijezda čije mase su veće od  $8 M_{\odot}$  doći će do urušavanja središta i izbacivanja vanjskog omotača zvijezde. Do urušavanja središta zvijezde dolazi nakon što su potrošeni svi raspoloživi resursi potrebni za odvijanje nuklearnih reakcija u zvijezdi. Nuklearne reakcije fuzije ili gorenja su one pri kojima se dvije jezgre spajaju i tvore treću, težu jezgru, koja ima veći broj nukleona, uz oslobađanje velikih količina energije [2]. Nuklearne reakcije započinju gorenjem vodika na temperaturi  $3.5 \cdot 10^7$  K pri čemu nastaje helij. Zatim slijedi gorenje helija na temperaturi od  $1.8 \cdot 10^8$  K i stvaranje ugljika. Gorenjem ugljika na temperaturi od  $8.1 \cdot 10^8$  K stvaraju se produkti: kisik, neon, natrij i izotopi magnezija. Gorenjem kisika na temperaturi  $1.9 \cdot 10^9$  K, u središtu zvijezde počinju dominirati jezgre silicija, koje se zapaljuju na temperaturi od  $3 \cdot 10^9$  K i stvaraju jezgre nikla i željeza. Vrijeme gorenja pojedinih jezgara ovisi o masi zvijezde pa će se nuklearne reakcije puno brže odvijati u zvijezdama veće mase. Na primjer, za zvijezdu mase  $15 M_{\odot}$  gorenje vodika traje 11 milijuna godina, helija 2 milijuna godina, ugljik gori 2000 godina, kisik 2.6 godina, gorenje silicija je dovršeno nakon 18 dana, a proces urušavanja jezgre traje jednu sekundu [3].

Nuklearne reakcije završavaju stvaranjem željeza, kemijskog elementa koji ima najveću energiju vezanja, tj. najstabilniji je od svih drugih elemenata. Energija vezanja je energija koja se oslobodi pri spajanju protona i neutrona u jezgru ili energija koju je potrebno utrošiti pri rastavljanju jezgre na sastavne dijelove, protone i neutrone. Fuzijom jezgara lakših od željeza energija se oslobađa, a onih težih od željeza apsorbira, pa je za stvaranje jezgara težih od željeza potrebno utrošiti energiju, to jest takve reakcije su endotermne pa se ne odvijaju u središtu zvijezde. Takve bi jezgre oslobađale energiju u reakcijama nuklearne fisije. Kako se nuklearnim reakcijama nakon helija stvaraju sve teži i teži elementi, oslobođena energija sve je manja, jer

energiju, ujedno, treba utrošiti za spajanje sve većeg broja protona u jezgru, budući da se oni odbijaju zbog djelovanja elektrostatske sile pa se i vrijeme gorenja smanjuje.

Svaka od navedenih nuklearnih reakcija odvija se u zasebnom sloju u središtu zvijezde pa ta struktura podsjeća na građu luka (onion skin), što je prikazano na slici 1.

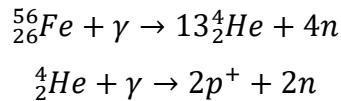


**Slika 1** Unutrašnjost masivne zvijezde nalikuje građi luka. Inertna područja stvorenih jezgara nalaze se između ljusaka u kojima se odvijaju nuklearne reakcije. Inertna područja postoje jer temperature i gustoće nemaju vrijednost potrebnu za odvijanje nuklearnih reakcija. Vanjski omotač zvijezde sastoji se od vodika i helija. Uglavnom ne dolazi do miješanja materije između vanjskog omotača i središta zvijezde.

Gorenjem silicija u središtu zvijezde stvarat će se sve veće količine željeza te će se tako masa središta povećavati, a time će se povećavati i gravitacija. Osim jezgara, u središtu zvijezde nalaze se i elektroni. Stanja elektrona degeneriranog kvantnog plina popunjena su do Fermijeve energije i elektroni imaju maksimalni mogući impuls. Kako gravitacija sve više raste i sažima materiju, javlja se sve veći broj elektrona te zbog Paulijeve principa isključenja raste i njihova Fermijeva energija i maksimalni impuls, pa će porasti i njihov tlak koji djeluje prema van i koji ne dozvoljava da se materija sažme. Kad središte zvijezde postigne masu od oko  $1.4 M_{\odot}$ , odnosno, Chandrasekharovu granicu mase, kritičnu masu iznad koje je središte gravitacijski nestabilno, gravitacija će postati toliko jaka da tlak degeneriranog elektronskog plina više neće moći držati ravnotežu s gravitacijom i doći će do kolapsa. U takvim uvjetima središte će se početi urušavati velikom brzinom i doći će do naglog zagrijavanja, pri čemu će temperatura narasti na  $\sim 8 \cdot 10^9$  K i gustoća na  $\sim 10^{13}$  kg/m<sup>3</sup> [4]. Unatoč velikoj gustoći središte se nalazi u plinovitom stanju, jer je zagrijano na vrlo visoku temperaturu.

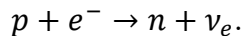
Tijekom urušavanja pojavljuju se dva važna procesa koji troše energiju središta zvijezde i time pospješuju njeno urušavanje: foto-dezintegracija i stvaranje neutrona.

U procesima nuklearnog gorenja dobiva se dovoljna količina energije u obliku fotona pa  $\gamma$ -zrake, energije oko 9 MeV, mogu rascijepati teške jezgre željeza. Dakle, jezgre željeza apsorbiraju energiju fotona, koja odgovara energiji vezanja željeza, i raspadaju se na jezgre helija, protone i neutrone:



Taj proces naziva se foto-dezintegracija. Na taj način jezgre željeza crpe energiju iz središta zvijezde i time smanjuju tlak koji drži jezgru zvijezde u ravnoteži s gravitacijom, što pospješuje urušavanje.

Sažimanjem središta zvijezde povećava se vjerojatnost za proces stvaranja neutrona, jer se protoni i elektroni nalaze na sve manjoj udaljenosti te mogu međudjelovati, pri čemu se stvaraju neutroni i neutrimi u procesu inverznog  $\beta$ -raspada:



Neutroni imaju veću masu od protona i elektrona zajedno pa njihovo stvaranje troši energiju zvijezde. Neutrino posjeduje malu količinu energije i napušta središte zvijezde vrlo lako jer slabo interagira s materijom. Broj neutrina vrlo je velik i njihova luminoznost za zvijezdu mase  $20 M_{\odot}$  je procijenjen na  $3.1 \cdot 10^{38}$  W te svojim bijegom odnose veliku količinu energije iz središta pa ono ne posjeduje dovoljan tlak koji bi držao ravnotežu s gravitacijskom silom i počinje se naglo urušavati [4]. Središte se urušava brzinom od  $\frac{1}{4}$  brzine svjetlosti. Tijekom urušavanja polumjer središta zvijezde se, u vremenu od jedne sekunde, smanji s nekoliko tisuća kilometara na oko 10 km.

Kad gustoća u središtu zvijezde dosegne vrijednost od oko  $8 \cdot 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>, otprilike tri puta veću od gustoće atomske jezgre, urušavanje se zaustavlja. Neutroni stvoreni inverznim  $\beta$ -raspadom dominiraju urušenim objektom, gusto su zapakirani, nalaze se na najmanjoj mogućoj udaljenosti i zbog toga se gustoća u središtu prestaje povećavati. Neutroni čine degenerirani plin za koji vrijedi Paulijev princip isključenja i čiji tlak drži nuklearnu materiju na okupu. Objekt dobiven urušavanjem središta zvijezde i ispunjen plinom neutrona naziva se *neutronska zvijezda*.

Svojstva nuklearne materije u središtu početne zvijezde uvelike određuju ishod urušavanja – masu novonastale neutronske zvijezde.

Materijal iz vanjskih slojeva središta i vanjskog omotača zvijezde, tijekom urušavanja, pada prema središtu zvijezde, zgušnjava se i zapaljuje. Kako se objekt ispunjen gusto zapakiranim neutronima više ne može sažeti, prilikom pada nagomilane materije na njega, dolazi do odbijanja i stvara se udarni val. Udarni val izbacuje materiju prema van kinetičkom energijom od  $10^{44}$  J [4]. Sada dolazi do ponovnog nagomilavanja materije, jer s jedne strane materija pada prema središtu, dok s druge strane udarni val izbacuje materiju prema van. Nagomilana materija sada je dovoljno gusta te može zarobiti neutrine koji nose  $3 \cdot 10^{46}$  J energije [4]. Neutrini naglo zagriju materiju i ulažu dio svoje energije u njeno izbacivanje, što dovodi do stvaranja novog udarnog vala koji se probija prema vanjskom dijelu zvijezde i gura pred sobom materiju koja je padala prema središtu. U tom procesu, zbog velike gustoće materije i visoke temperature, dolazi do nove nuklearne fuzije i stvaranja još više lakih elemenata do nikla i željeza, ali i teških elemenata, sve do  $^{254}\text{Cf}$ . Eksplozivni val zagrijava i ubrzava vanjski omotač te za nekoliko sati izbija na površinu gibajući se brzinom od oko 10 % brzine svjetlosti. Opisani proces nazivamo supernovom, pri čemu luminoznost supernove može narasti na vrijednost 10 milijardi  $L_{\odot}$  te može premašiti luminoznost cijele galaksije.  $L_{\odot}$  je luminozitet ili snaga zračenja Sunca i ona iznosi  $3.85 \cdot 10^{26}$  W. Ako je do eksplozije i izbacivanja materijala došlo u fazi kada je u unutrašnjosti bio formiran objekt ispunjen neutronske degeneriranim plinom i ako je masa zvijezde prije eksplozije iznosila  $8 - 25 M_{\odot}$ , onda će ostatak supernove biti neutronska zvijezda. Izbačeni materijal koji se širi svemirom i ima veliku kinetičku energiju također je jedan od ostataka supernove.

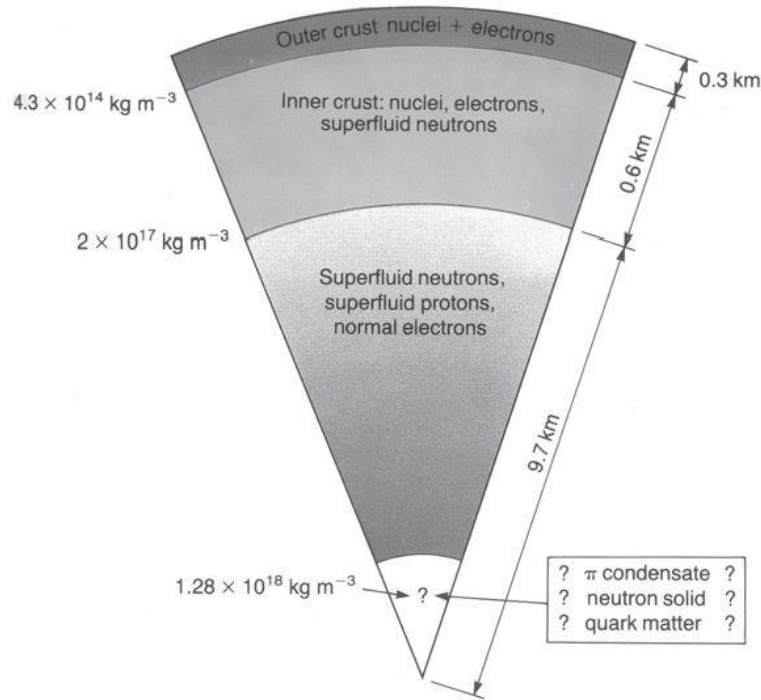
### 3 Neutronske zvijezde i pulsari

*Neutronske zvijezde* su ostaci supernove i u svemiru ih pronalazimo ili kao izolirane objekte ili u dvojnog sustavu. Neutronske zvijezde koje se nalaze u dvojnog sustavu moguće je mjeriti masu. Pomoću radio-teleskopa i teleskopa za detekciju X-zraka opaženi su mnogi dvojni sustavi i ustanovljeno je da neutronska zvijezda ima masu približno  $1.4 M_{\odot}$ .

Neutronske zvijezde su vrlo kompaktni objekti gustoće reda veličine  $\sim 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup> [1]. Budući da im je gustoća usporediva s gustoćom atomske jezgre, mogli bismo reći da su to neutronima bogate najveće jezgre u svemiru s masenim brojem  $A \sim 10^{56} - 10^{57}$  [1]. Neutronske

zvijezde imaju polumjer  $10 - 12$  km i masu  $M \sim 1 - 2 M_{\odot}$  [1]. Najveća masa neutronske zvijezde dobivena preciznim mjerenjima iznosi  $2.01 M_{\odot}$ . Prema dogovoru, u izračunima raznih fizikalnih veličina vezanih za neutronske zvijezde, ukoliko joj je masa nepoznata, uobičajeno je koristiti vrijednost mase  $1.4 M_{\odot}$ , jer je neutronska zvijezda stvorena nakon što je dosegnuta Chandrasekharova granica mase. Zbog malog polumjera i velike gustoće, gravitacijsko polje na površini neutronske zvijezde je oko  $2 \cdot 10^{11}$  puta veće nego ono na Zemlji [5].

Unutrašnju građu neutronske zvijezde objašnjava teorija o fizičkom stanju guste tvari. Tijelo ima oblik kugle i sastavljeno je od nekoliko područja u kojima se gustoća povećava od površine neutronske zvijezde prema središtu, gdje materija poprima gustoću čak veću od nuklearne. Atmosfera se sastoji od ioniziranog plina, vjerojatno željeza. Atmosferski sloj koji priliježe uz površinu kugle tanak je oko centimetra, što je posljedica jakog gravitacijskog polja na površini neutronske zvijezde. Gustoća atmosfere se brzo povećava od vrha prema dnu i doseže vrijednost kod koje prelazi u čvrsto stanje. Ispod atmosfere nalazi se kora gdje su atomske jezgre poredane u kristalnu rešetku. Uz jezgre težih elemenata, kao što su nikel  $^{62}\text{Ni}$ , cink  $^{80}\text{Zn}$  i kripton  $^{118}\text{Kr}$ , u njoj su izmiješani elektroni i neutroni. Gustoća materije u ovom području poprima vrijednost od  $\sim 10^9$  kg/m<sup>3</sup> na površini, do  $\sim 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup> prema unutrašnjosti. Najveći dio unutrašnjosti zauzima tekuća materija neutrona, uz primjese protona i elektrona, gustoće oko  $2 \cdot 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>. Tekućina ima svojstva superfluida te u njoj ne postoji trenje, to jest, nema otpora protjecanju. Središte neutronske zvijezde je degenerirano i nalazi se na temperaturi  $10^8$  K. Zbog odlične toplinske vodljivosti koju ima tvar u degeneriranom stanju, čitavo središte je na jednakoj temperaturi, a atmosfera ne dopušta da se zvijezda brzo ohladi. Pod neutronskim slojem, čiji bi donji dio mogao biti u stanju kristalne rešetke, nalazi se jezgra gustoće  $\rho \geq 3 \cdot 10^{18}$  kg/m<sup>3</sup> koja se sastoji od hiperona i mezona, to jest čestica hadrona, koje nastaju od neutrona pri jakom stiskanju materije [6], [3]. Postoji mogućnost da se u tom području javlja prijelaz faze u kvarkovsku ili neki drugi oblik egzotične materije. Unutrašnja građa neutronske zvijezde prikazana je na slici 2.



Slika 2 Model unutrašnje strukture neutronske zvijezde mase  $1.4 M_{\odot}$

U prethodnom poglavlju objašnjen je nastanak neutronske zvijezde zbog gravitacijskog urušavanja središta početne zvijezde. Sažimanjem se vrtnja novonastale neutronske zvijezde ubrzava, jer je kutna količina gibanja očuvana:  $I\omega = konst.$

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$\frac{2}{5} M_i R_i^2 \omega_i = \frac{2}{5} M_f R_f^2 \omega_f$$

Pretpostavit ćemo da se masa središta zvijezde ne mijenja kad sažimanje započne pa je  $M_i = M_f$  te dobivamo:

$$R_i^2 \omega_i = R_f^2 \omega_f$$

$$R_i^2 \frac{2\pi}{P_i} = R_f^2 \frac{2\pi}{P_f}$$

$$P_f = P_i \left( \frac{R_f}{R_i} \right)^2$$

Urušavanjem se polumjer središta zvijezde smanjuje pa će se početni polumjer  $R_i \sim 10^6$  km smanjiti na konačnu vrijednost  $R_f \sim 10$  km. To znači da će se polumjer smanjiti  $10^5$  puta, a period vrtnje smanjit će se  $10^{10}$  puta i neutronska zvijezda počet će vrlo brzo rotirati, pri čemu je moguće da u jednoj sekundi učini i nekoliko stotina okreta.

Prilikom sažimanja magnetski tok mora biti očuvan. Smanjivanjem površine zvijezde broj silnica po jediničnoj površini, odnosno magnetska indukcija, će rasti i magnetsko polje će se zgušnjavati. Magnetski tok računa se prema formuli:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \hat{n} da$$

gdje je  $\vec{B}$  magnetska indukcija, a  $\hat{n}$  je vektor normale infinezimalne površine  $da$ .

Magnetski tok zvijezde prije urušavanja mora biti jednak magnetskom toku nastale neutronske zvijezde:

$$\Phi_i = \Phi_f$$

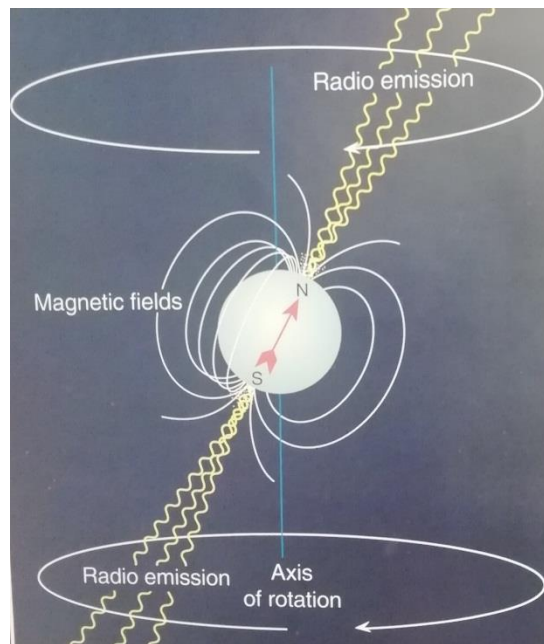
$$B_i 4\pi R_i^2 = B_f 4\pi R_f^2$$

$$B_f = B_i \left( \frac{R_i}{R_f} \right)^2$$

Kad se zvijezda početnog polumjera  $R_i \sim 10^6$  km uruši na polumjer  $R_f \sim 10$  km, magnetska indukcija će se povećati  $10^{10}$  puta, što znači da će se početna magnetska indukcija sa vrijednosti otprilike 10 – 100 G povećati na oko  $10^{12}$  G. Unatoč velikim naporima znanstvenika, još uvijek ne postoji objašnjenje u pogledu mehanizma stvaranja tako jakog magnetskog polja neutronske zvijezde. Pretpostavlja se da bi polje mogle stvoriti električne struje u materijalu odlične vodljivosti u unutrašnjosti neutronske zvijezde nakon što je ona formirana ili da bi ono jednostavno moglo biti ostatak magnetskog polja zvijezde od koje je neutronska zvijezda nastala. Iz pogleda nuklearne fizike postoji zanimljiva pretpostavka da bi magnetsko polje moglo biti posljedica faznog prijelaza u feromagnetsko stanje u tekućem dijelu unutrašnjosti neutronske zvijezde, ali se vezano za tu pretpostavku javljaju brojni problemi u računima [1].

Neutronska zvijezda jakog magnetskog polja koja vrlo brzo rotira naziva se *pulsar*. Naziv pulsar zapravo je skraćenica od „*pulsating source of radio emission*“. Pulsare su 1967. godine otkrili Jocelyn Bell Burnett i Anthony Hewish kao izvore koji periodično emitiraju kratke impulse zračenja u području radio valova. Kratak impuls zračenja zapravo je mlaz čestica koje se gibaju brzinom približnom brzini svjetlosti iznad magnetskih polova tako da struje prema van. Slično kao što se na Zemlji magnetski i geografski pol ne nalaze u istoj točki, tako je i kod pulsara os koja bi spajala sjeverni magnetski i južni magnetski pol pomaknuta u odnosu na os rotacije.

Zbog toga se mlaz snopova zraka, poput svjetionika, vrti uokolo zbog same rotacije pulsara i može se detektirati u trenutku kada je snop usmjeren prema promatraču [5]. Pulsevi zračenja imaju period između 1.4 ms i 8.5 s i prilično su stabilni jer odgovaraju periodu rotacije neutronske zvijezde [7]. Na slici 3 nalazi se shematski prikaz modela pulsara.



**Slika 3** Prikaz modela pulsara

Period pulsara može se mjeriti vrlo precizno, isto tako vrlo precizno se može mjeriti još jedna veličina karakteristična za pulsar, a to je promjena perioda u jedinici vremena  $\dot{P}$ . Naime, tijekom vrtnje oko vlastite osi pulsar gubi kinetičku energiju rotacije, zbog čega usporava i period mu se povećava. Promjena kinetičke energije rotacije u jedinici vremena koju pulsar gubi prilikom usporavanja naziva se *luminoznost koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara* i ona se može izračunati pomoću spomenutih veličina, perioda  $P$  i promjene perioda u jedinici vremena  $\dot{P}$ . Mora se napomenuti da luminoznost koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara nije luminoznost pulsara, njegova snaga zračenja u obliku elektromagnetskih valova, nego energija koju pulsar gubi u jedinici vremena i kojom se napaja maglica pulsarovog vjetrova.



Samo  $\sim 1\%$  ukupne luminoznosti koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara emitira se u obliku elektromagnetskih valova, a ostatak se pretvara u kinetičku energiju i ubrzavanje relativističkih i ultrarelativističkih elektrona i pozitrona koji će, gibajući se u magnetskom polju po spiralnoj putanji, tu energiju emitirati putem sinkrotronskog zračenja koje detektiramo kao zračenje maglice pulsarovog vjetra na valnim duljinama od radio valova do  $\gamma$ -zraka niskih energija. Mjerenjem luminoznosti maglice pulsarovog vjetra dobiva se slaganje s izračunatom luminoznosti koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara do u red veličine, iz čega možemo zaključiti da pulsar doista opskrbljuje maglicu energijom koju usporavanjem gubi.

Nije poznato kako se energija, koja dolazi od usporavanja vrtnje pulsara, pretvara u kinetičku energiju elektrona i pozitrona, jer je taj mehanizam vrlo složen.

Pulsar možemo zamisliti kao magnetski dipol, a energija zračenja magnetskog dipola u jedinici vremena odgovara energiji zračenja maglice pulsarovog vjetra u jedinici vremena. Budući da maglicu pulsarovog vjetra energijom opskrbljuje pulsar, onda energija zračenja magnetskog dipola odgovara kinetičkoj energiji rotacije koju pulsar gubi. Pulsar, zapravo, ne zrači kao magnetski dipol jer se energija magnetskog dipola ne manifestira kao zračenje, već se na kinetičku energiju elektrona i pozitrona, to jest na pulsarov vjetar, troši onoliko energije koliko bi pulsar trošio kad bi bio magnetski dipol.

Zbog sveg navedenog, u sljedećim podpoglavljima objašnjen je model magnetskog dipola pulsara, luminoznost koja potječe od vrtnje pulsara, karakteristična dob pulsara, koja je odličan pokazatelj funkcioniranja pretpostavljenog modela pulsara.

### ***3.1 Model magnetskog dipola pulsara***

Neutronska zvijezdu možemo zamisliti kao magnetski dipol pa pulsar, neutronska zvijezdu koja rotira, možemo zamisliti kao magnetski dipol koji rotira oko osi rotacije pulsara. Magnetski dipolni moment je vektorska veličina pa silnice magnetskog dipola određuju gdje se nalaze sjeverni i južni pol magnetskog polja. Silnice magnetskog dipola rotiraju, jer magnetski dipol rotira. Ako je vektor magnetskog dipolnog momenta nagnut prema osi rotacije pulsara pod kutem  $\alpha > 0$ , emitirat će elektromagnetsko zračenje na frekvenciji rotacije pa pulsar možemo zamisliti kao magnetski dipol koji zrači.

Izvod je djelomično preuzet iz [7].

Napisat ćemo formulu za snagu zračenja magnetskog dipola:

$$P_{\text{zračenja}} = \frac{\mu_0 (\ddot{m}_\perp)^2}{6\pi c^3},$$

gdje je  $m_\perp = m \sin \alpha$ .  $m$  je magnetski dipolni moment pulsara, a  $m_\perp$  je komponenta magnetskog dipolnog momenta okomita na os rotacije pulsara. Zračenje magnetskog dipola javlja se zbog oscilacija magnetskog dipolnog momenta. U slučaju kad magnetski dipol, koji je za kut  $\alpha$  otklonjen od osi rotacije pulsara, rotira, zračenju doprinosi samo komponenta magnetskog dipolnog momenta okomita na os rotacije  $m_\perp$ , jer ona oscilira, dok komponenta magnetskog dipolnog momenta paralelna s osi rotacije pulsara  $m_\parallel$  ne oscilira pa, stoga, ne doprinosi zračenju.  $m_\perp$  rotira kružnom brzinom  $\omega$ , koja odgovara kružnoj brzini pulsara pa je snaga zračenja magnetskog dipola:

$$P_{\text{zračenja}} = \frac{\mu_0 m_\perp^2 \omega^4}{6\pi c^3} = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4 \sin^2 \alpha}{6\pi c^3}. \quad (3.1)$$

Magnetsku indukciju na površini pulsara izračunat ćemo pomoću izraza za dipolno magnetsko polje koji glasi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\hat{r}(\vec{m} \cdot \hat{r}) - \vec{m}}{r^3} \right), \quad (3.2)$$

gdje je  $\vec{m}$  magnetski dipolni moment koji glasi:

$$\vec{m} = m(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}). \quad (3.3)$$

Uvrštavanjem izraza (3.3) u izraz (3.2) dobiva se:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (3.4)$$

Magnetska indukcija na ekvatoru pulsara, gdje je  $\theta = 90^\circ$ , iznosi:

$$B = \frac{\mu_0 m}{4R^3 \pi}. \quad (3.5)$$

Jakost magnetskog dipolnog momenta točno određuje kolika će biti jakost magnetskog polja u nekoj točki na površini pulsara i ona opada s  $R^3$ .

Iz jednadžbe (3.5) možemo izraziti jakost magnetskog dipolnog momenta:

$$m = \frac{4\pi R^3 B}{\mu_0} \quad (3.6)$$

pa umjesto jakosti magnetskog dipolnog momenta možemo koristiti jakost magnetskog polja na površini kugle.

Ako se izraz (3.6) uvrsti u izraz za snagu zračenja magnetskog dipola dobiva se:

$$P_{zračenja} = \frac{8}{3} \frac{\pi \omega^4}{\mu_0 c^3} (BR^3 \sin \alpha)^2.$$

Snagu zračenja magnetskog dipola možemo izraziti preko perioda vrtnje pulsara:  $\omega = \frac{2\pi}{P}$

$$P_{zračenja} = \frac{8}{3} \frac{\pi}{\mu_0 c^3} (BR^3 \sin \alpha)^2 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^4$$

te smo tako dobili izraz za snagu zračenja magnetskog dipola koja je određena poznatim veličinama karakterističnima za pulsar, polumjerom pulsara, periodom vrtnje, magnetskom indukcijom na površini pulsara.

Snaga zračenja magnetskog dipola odgovara luminoznosti koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara, to jest, kinetičkoj energiji rotacije koju pulsar gubi u jedinici vremena zbog čega mu se vrtnja usporava.

### **3.2 Luminoznost kao posljedica usporavanja vrtnje pulsara**

Izvod je preuzet iz [7].

Kinetička energija rotacije tijela dana je izrazom:

$$E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Ako u jednadžbu uvrstimo izraz za kružnu frekvenciju:

$$\omega = \frac{2\pi}{P},$$

dobit ćemo vezu između kinetičke energije rotacije i perioda pulsara:

$$E_{rot} = \frac{2\pi^2 I}{P^2}.$$

Izračunat ćemo kinetičku energiju rotacije pulsara maglice Rakovice. U računu ćemo za moment inercije pulsara uzeti dogovorenu vrijednost  $I = \frac{2}{5}MR^2 = 1.12 \cdot 10^{38} \text{ kgm}^2$ , a za period pulsara izmjerenu vrijednost  $P = 33 \text{ ms} = 0,033 \text{ s}$ .

$$E_{\text{rot}}(\text{maglica Rakovica}) = \frac{2\pi^2 \cdot 1.12 \cdot 10^{38} \text{ kgm}^2}{(0,033\text{s})^2} \approx 2 \cdot 10^{42} \text{ J.}$$

Pulsar gubi kinetičku energiju rotacije, dolazi do usporavanja i povećanja perioda rotacije. Promjenu perioda označit ćemo sa  $\dot{P}$ :

$$\dot{P} \equiv \frac{dP}{dt} > 0.$$

Derivacija perioda po vremenu  $\dot{P}$  je fizikalna veličina bez mjerne jedinice. Pomoću izmjerene vrijednosti perioda  $P$  i derivacije perioda po vremenu  $\dot{P}$  možemo izračunati promjenu energije rotacije u jednoj sekundi.

Promjenu kinetičke energije rotacije pulsara u jedinici vremena izrazit ćemo kao derivaciju energije rotacije po vremenu:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{rot}} &\equiv \frac{dE_{\text{rot}}}{dt} \\ \dot{E}_{\text{rot}} &= \frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2\pi^2 I}{P^2} \right) \\ \dot{E}_{\text{rot}} &= \frac{-4\pi^2 I \dot{P}}{P^3} \end{aligned}$$

Veličina  $\dot{E}_{\text{rot}}$  naziva se *luminoznost koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara* i ona ne odgovara izmjerenoj luminoznosti pulsara, već luminoznosti maglice pulsarovog vjetra. Luminoznost koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara je energija koju pulsar gubi u jedinici vremena i koja odlazi na napajanje maglice pulsarovog vjetra. Točnije, ta energija pretvara se u kinetičku energiju elektrona i pozitrona koja se u slabom magnetskom polju emitira na različitim valnim duljinama, od radio valova do  $\gamma$ -zraka visokih energija, pretežito kao sinkrotronsko zračenje, što će više biti objašnjeno u sljedećim poglavljima. Izračunat ćemo promjenu kinetičke energije rotacije u jedinici vremena za pulsar maglice Rakovice. Period i derivacija perioda po vremenu su izmjereni i iznose:  $P = 0.033 \text{ s}$ ,  $\dot{P} = 4.21 \cdot 10^{-13}$ .

$$\dot{E}_{\text{rot}} = \frac{-4\pi^2 \cdot 1.12 \cdot 10^{38} \text{ kgm}^2 \cdot 4.21 \cdot 10^{-13}}{(0.033 \text{ s})^3} = -5.18 \cdot 10^{31} \text{ W} = -1.35 \cdot 10^5 L_{\odot}$$

$$\dot{E}_{rot} \approx -10^5 L_{\odot},$$

gdje je  $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26}$  W luminoznost ili snaga zračenja Sunca.

Zaista, opažena luminoznost maglice Rakovice odgovara redu veličine luminoznosti koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara, to jest, kinetičkoj energiji rotacije koju pulsar gubi u jedinici vremena, zbog čega dolazi do usporavanja vrtnje pulsara.

Radimo model u kojem luminoznost koja dolazi od usporavanja vrtnje pulsara odgovara snazi zračenja magnetskog dipola, to jest onoj energiji koju bi pulsar trošio u jedinici vremena kad bi bio magnetski dipol.

$$P_{zračenja} = -\dot{E}_{rot}$$

$$\frac{8}{3} \frac{\pi}{\mu_0 c^3} (BR^3 \sin \alpha)^2 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^4 = \frac{4\pi^2 I \dot{P}}{P^3},$$

iz čega se dobije izraz za magnetsku indukciju na površini pulsara:

$$B = \frac{c}{4\pi R^3 \sin \alpha} \sqrt{\frac{3\mu_0 c I}{2\pi}} \cdot \sqrt{P \cdot \dot{P}}$$

U dobivenom izrazu član  $\frac{c}{4\pi R^3 \sin \alpha} \sqrt{\frac{3\mu_0 c I}{2\pi}}$  je konstanta, jer je za pulsar tipična vrijednost polumjera  $R$  jednaka 10 km, moment inercije  $I = 1.12 \cdot 10^{38}$  kgm<sup>2</sup> i uzet ćemo da je  $\sin \alpha = 1$ , jer nas zanima slučaj kad snaga zračenja ima najveću vrijednost, odnosno, kad je  $\alpha = 90^\circ$ . Nakon uvrštavanja spomenutih vrijednosti dobiva se izraz za karakterističnu magnetsku indukciju na površini pulsara:

$$B = 3.39 \cdot 10^{15} \frac{T}{s^{1/2}} \cdot \sqrt{P \cdot \dot{P}}. \quad (3.7)$$

Izračunat ćemo magnetsku indukciju na površini pulsara maglice Rakovice:

$$B = 3.39 \cdot 10^{15} \frac{T}{s^{1/2}} \cdot \sqrt{0.033 s \cdot 4.21 \cdot 10^{-13}}.$$

$$B = 4 \cdot 10^8 T.$$

### 3.3 Karakteristična dob

Izvod je preuzet iz [7].

Sada možemo procijeniti *karakterističnu dob* pulsara pomoću  $P$  i  $\dot{P}$  čiji izraz ćemo dobiti iz jednadžbe (3.7) koju smo izveli pretpostavljajući da energija zračenja magnetskog dipola odgovara luminoznosti koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara:

$$P\dot{P} = 8.7 \cdot 10^{-32} \frac{S}{T^2} B^2.$$

U ovom modelu  $P \cdot \dot{P}$  ima stalnu vrijednost za neki pulsar magnetske indukcije  $\vec{B}$  tijekom cijelog njegovog životnog vijeka:

$$\begin{aligned} P \cdot \dot{P} &= \text{konst}(B) \\ \int_0^{\tau} P\dot{P} dt &= \int_{P_0}^P P dP \\ P\dot{P} \int_0^{\tau} dt &= \int_{P_0}^P P dP \\ P\dot{P} \cdot \tau &= \frac{P^2 - P_0^2}{2} \end{aligned}$$

Pretpostavit ćemo da je početni period pulsara  $P_0$  puno manji od trenutnog perioda  $P$  pa je  $P_0^2 \ll P^2$  i dobiva se karakteristična dob pulsara:

$$\begin{aligned} P\dot{P} \cdot \tau &= \frac{P^2}{2} \\ \tau &= \frac{1}{2} \frac{P}{\dot{P}} \end{aligned}$$

Karakteristična dob ovisi samo o opservablama  $P$  i  $\dot{P}$ , što znači da mjerenjem  $P$  i  $\dot{P}$  za neki pulsar možemo reći koliko je star. Novonastala neutronska zvijezda male vrijednosti početnog perioda rotacije  $P_0$  može biti spljoštena na polovima i na početku će usporavati zbog emitiranja kvadrupolnog gravitacijskog zračenja. Posljedica toga može biti da karakterična dob za mlade pulsare bude malo veća od stvarne dobi.

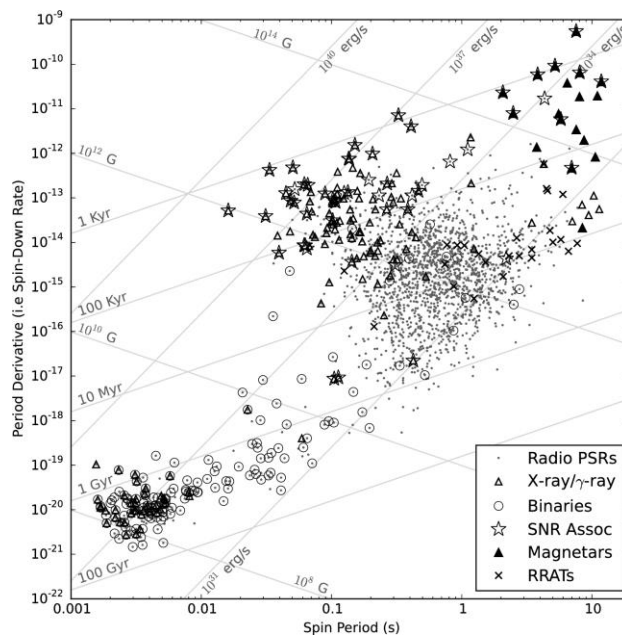
Izračunat ćemo karakterističnu dob za pulsar maglice Rakovice čiji smo period i promjenu perioda već naveli.

$$\tau = \frac{P}{2\dot{P}} = \frac{0.033 \text{ s}}{2 \cdot 4.21 \cdot 10^{-13}} \approx 3.9 \cdot 10^{10} \text{ s} \approx 1243 \text{ godine}.$$

Dobivena vrijednost karakteristične dobi veća je od stvarne, koja iznosi malo manje od 1000 godina, točnije 965 godina, jer je poznato da je pulsar maglice Rakovice stvoren u supernovoj opaženoj 1054. godine. S obzirom na životni vijek svemirskih objekata ova pogreška nije velika i možemo zaključiti da pomoću ovog modela možemo ocijeniti karakteristike pulsara.

Opaženi periodi pulsara  $P$  i njihove prve derivacije po vremenu  $\dot{P}$  mogu se mjeriti vrlo točno i nanose se u  $P\dot{P}$  dijagram, koji je prikazan na slici 4. Dijagram omogućava praćenje života pulsara, daje nam informacije o populaciji pulsara i omogućava proračun njihovih karakterističnih veličina preko  $P$  i  $\dot{P}$ . Za svaki pulsar karakteristična dob, magnetska indukcija i luminoznost koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara određeni su položajem pulsara u  $P\dot{P}$  dijagramu, što je prikazano pravicima unutar dijagrama.

Dijagram također pokazuje dvije različite vrste pulsara: normalne pulsare, prikazane od sredine pa prema gornjem desnom dijelu dijagrama i koji imaju period vrtnje reda veličine  $\sim 1$  s, i milisekundne pulsare, prikazane u donjem lijevom dijelu dijagrama, koji imaju tri reda veličine manji period vrtnje u odnosu na normalne pulsare i koji se većinom nalaze u dvojnim sustavima. U gornjem desnom uglu dijagrama prikazani su magnetari, pulsari koji imaju vrlo jako magnetsko polje reda veličine  $\sim 10^{10} - 10^{11}$  T.



Slika 4  $P\dot{P}$  dijagram

Samo  $\sim 1\%$  ukupne luminoznosti koja potječe od usporavanja vrtnje pulsara emitira se u obliku elektromagnetskih valova, a ostatak odnose ultrarelativistički elektroni i pozitroni u maglicu pulsarovog vjetra, što se detektira kao zračenje maglice pulsarovog vjetra [8].

#### 4 Maglica pulsarovog vjetra

Objekt kojeg čini vjetar elektrona i pozitrona, stvorenih u blizini pulsara, te magnetskog polja zajedno sa elektromagnetskim zračenjem koje se u njemu stvara naziva se *maglica pulsarovog vjetra*. Maglicu pulsarovog vjetra energijom napaja pulsar na način da relativistički i ultrarelativistički elektroni i pozitroni nose sa sobom energiju dobivenu od pulsara te se u slabom magnetskom polju maglice pulsarovog vjetra vrte oko silnica magnetskog polja, pri čemu emitiraju sinkrotronsko zračenje u obliku elektromagnetskih valova, koje sa Zemlje detektiramo kao zračenje maglice pulsarovog vjetra. Na opisani način maglica pulsarovog vjetra emitira energiju dobivenu od pulsara.

Sinkrotronsko zračenje je glavni mehanizam nastanka elektromagnetskog zračenja iz maglice pulsarovog vjetra u rasponu od radiovalova do X-zraka i niskoenergijskih  $\gamma$ -zraka. U slučaju maglice Rakovice, koju ovdje uzimamo kao primjer, sinkrotronsko zračenje ide do energije  $\sim 1$  GeV. Iz maglice pulsarovog vjetra možemo detektirati i zračenje energija većih od 1 GeV koje odgovara visokoenergijskim  $\gamma$ -zrakama  $\sim 1$  TeV, ali one nisu izravno emitirane sinkrotronskim zračenjem, već su to fotoni prethodno stvoreni sinkrotronskim zračenjem, a potom raspršeni i dodatno ubrzani na elektronima i pozitronima koji su ih sinkrotronskim zračenjem stvorili. Takav proces raspršenja naziva se inverzno Comptonovo raspršenje. Iako inverznim Comptonovim raspršenjem fotoni postižu vrlo visoke energije, veće od 1 GeV, najveća snaga njihova zračenja dva je reda veličine manja od najveće snage zračenja dobivene sinkrotronskim zračenjem. Dakle, spektar zračenja maglice pulsarovog vjetra obuhvaća kontinuum frekvencija od radiovalova do  $\gamma$ -zraka visokih energija.

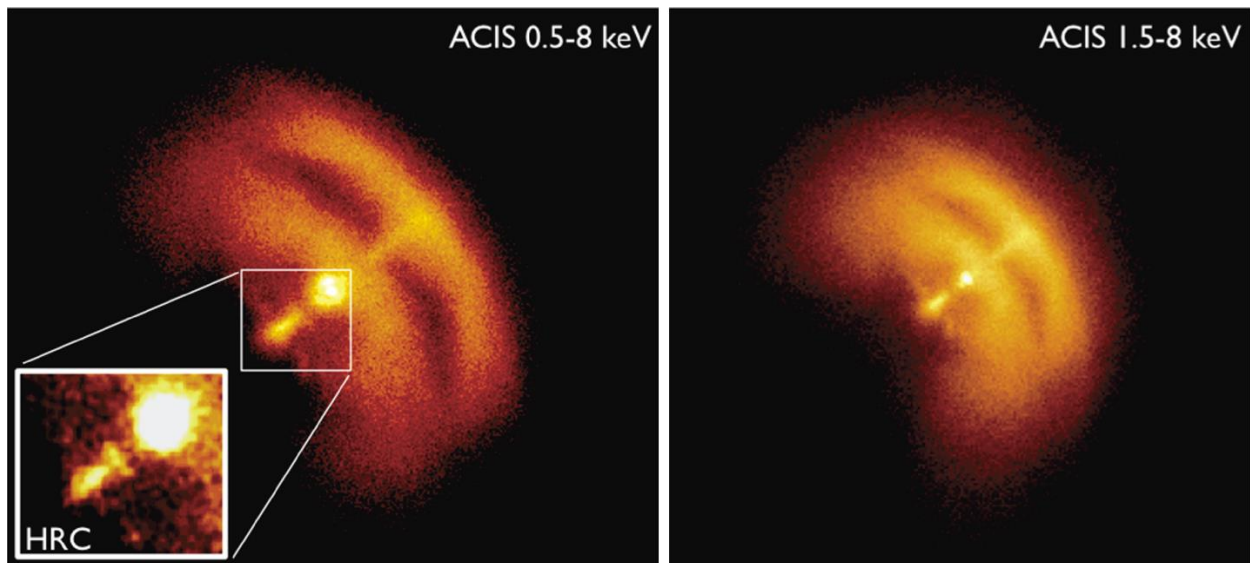
Maglica nastaje na udaljenosti od oko 0.5 svjetlosnih godina od pulsara, u području gdje vladaju uvjeti zbog kojih se elektroni i pozitroni dodatno ubrzavaju, i obuhvaća prostor od nekoliko svjetlosnih godina unutar kojeg se nalazi relativno slabo magnetsko polje reda veličine  $\sim 1 - 100 \mu G$ .



Maglica Rakovica, koja je snimana brojnim teleskopima, je najistraživanija maglica pulsarovog vjetra u modernoj astrofizici. Ona se nalazi na udaljenosti od oko 6500 svjetlosnih godina od Zemlje, ugrubo je oblika elipsoida i obuhvaća prostor veličine oko 10 svjetlosnih godina. Jakost njenog magnetskog polja je  $300 \mu\text{G}$ , a luminoznost reda veličine  $10^{31} \text{ W}$  (slika 5).



**Slika 5** Snimka maglice Rakovice nastala slaganjem snimki iz različitih frekventnih područja, optičko područje (ljubičasto) i područje X-zraka (plavo)



Slika 6 Vela maglica snimljena Chandra teleskopom

## 5 Jednostavan model sinkrotronskog zračenja

*Sinkrotronsko zračenje* je energija koju u obliku elektromagnetskog zračenja, zbog vrtnje u magnetskom polju, emitiraju elektroni i pozitroni gibajući se ubrzano ultrarelativističkim brzinama.

Jednostavan model uključuje netermalne raspodjele energija elektrona i pozitrona te magnetska polja jakosti reda veličine od mikrogauza do miligauza, odnosno, od  $\sim 10^{-10}$  T do  $\sim 10^{-7}$  T.

Iz poznavanja spektra sinkrotronskog zračenja jednog elektrona u stalnom magnetskom polju i pretpostavljenih raspodjela energija elektrona, odnosno, pozitrona opisat će se spektar sinkrotronskog zračenja svih elektrona.

Netermalna emisija predstavlja kontinuum zračenja elektrona čija raspodjela energija nije Maxwelllova.

### 5.1 Uniformno, vremenski nepromjenjivo magnetsko polje

Izvod je preuzet iz [3].

Na dinamiku nabijenih čestica, u našem slučaju elektrona i pozitrona, koje se gibaju u magnetskom polju djeluje Lorentzova sila  $\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B})$  koja nabijene čestice zakreće oko silnica magnetskog polja, zbog čega je njihova putanja spiralna.

Jednadžba gibanja glasi:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e \vec{v}) = e(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (5.1)$$

gdje je  $m_e$  masa mirovanja elektrona, odnosno pozitrona, a  $\gamma$  je Lorentzov faktor koji je jednak

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Derivirat ćemo izraz s lijeve strane jednakosti jednadžbe (5.1):

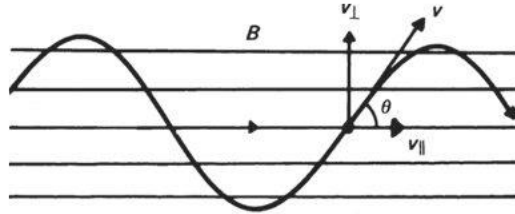
$$m_e \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) = m_e \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + m_e \gamma^3 \vec{v} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2}. \quad (5.2)$$

U magnetskom polju vektor akceleracije  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  uvijek je okomit na vektor brzine  $\vec{v}$  pa je zbog toga  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$  te drugi član s desne strane jednakosti u jednadžbi (5.2) iščezava.

Jednadžba gibanja sada glasi:

$$\gamma m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = e(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Sada ćemo brzinu  $\vec{v}$  rastaviti na komponente, paralelnu  $\vec{v}_{\parallel}$  i okomitu  $\vec{v}_{\perp}$  na uniformno magnetsko polje kao što je prikazano na slici 5.



**Slika 7** Prikaz dinamike nabijene čestice u uniformnom magnetskom polju

Kut upada  $\theta$  je kut između vektora brzine  $\vec{v}$  i vektora magnetske indukcije  $\vec{B}$  i određen je izrazom:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}.$$

Komponenta brzine  $\vec{v}_{\parallel}$  paralelna je s vektorom magnetske indukcije  $\vec{B}$  pa se ta komponenta u vremenu ne mijenja  $\vec{v}_{\parallel} = \text{konst.}$

Jednadžbu gibanja možemo napisati u obliku:

$$\gamma m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = e|\vec{v}||\vec{B}| \sin \theta (\vec{i}_v \times \vec{i}_B) = e v_{\perp} |\vec{B}| (\vec{i}_v \times \vec{i}_B),$$

gdje su  $\vec{l}_v$  i  $\vec{l}_B$  jedinični vektori u smjeru brzine  $\vec{v}$  odnosno magnetske indukcije  $\vec{B}$ .

Vektor akceleracije čestice okomit je na ravninu u kojoj leže vektor trenutne brzine  $\vec{v}$  i vektor magnetske indukcije  $\vec{B}$ . Zbog uniformnog magnetskog polja stalna akceleracija okomita na vektor trenutne brzine rezultira kružnim gibanjem čestice oko silnica magnetskog polja. Akceleracija je, zapravo, centripetalna akceleracija:

$$\frac{v_{\perp}^2}{r} = \frac{e|\vec{v}||\vec{B}|\sin\theta}{\gamma m_e} \text{ iz čega slijedi } r = \frac{\gamma m_e |\vec{v}| \sin\theta}{e|\vec{B}|}.$$

Gibanje čestice sastoji se od stalne brzine duž smjera magnetskog polja  $\vec{B}$  i kružnog gibanja radijusa  $r$  oko silnica magnetskog polja, to jest, radi se o spiralnoj putanji stalnog kuta  $\theta$  pod kojim je vektor trenutne brzine nagnut na smjer magnetskog polja.

Kružna frekvencija  $\omega_r$  oko smjera magnetskog polja je:

$$\omega_r = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{e|\vec{B}|}{\gamma m_e}.$$

Odgovarajuća frekvencija  $\nu_r$ , to jest broj okretaja koje čestica učini u jednoj sekundi oko silnica magnetskog polja je:

$$\nu_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{e|\vec{B}|}{2\pi\gamma m_e}.$$

Os putanje čestice paralelna je sa smjerom magnetskog polja i naziva se *vodeći centar gibanja* čestice, to jest, to je srednji smjer translacije čestice oko kojeg se, istovremeno, odvija vrtnja.

## 5.2 Osnove sinkrotronskog zračenja

Izvod je preuzet iz [3].

Jedno od osnovnih svojstava zračenja relativističkih elektrona je emisija zračenja u obliku vrlo uskog snopa u smjeru gibanja elektrona [3]. To je povezano s efektima relativističke aberacije između sustava mirovanja elektrona  $S'$  i sustava promatrača  $S$ . Promotrimo najprije gibanje relativističkog elektrona u magnetskom polju pri kutu upada od  $90^\circ$ . Elektron se ubrzava prema vodećem centru gibanja, to jest, radijalno prema središtu vrtnje. U sustavu mirovanja elektrona  $S'$  emitirano zračenje ima dipolni karakter, kao što je prikazano na slici 8a), a kutna raspodjela snage zračenja ugrubo ima ovisnost:

$$I_{\nu} \propto \sin^2\theta' = \cos^2\phi', \text{ gdje je } \phi' = 90^\circ - \theta'.$$

Kako bismo dobili oblik krivulje zračenja u laboratorijskom sustavu iskoristit ćemo aberacijsku formulu:

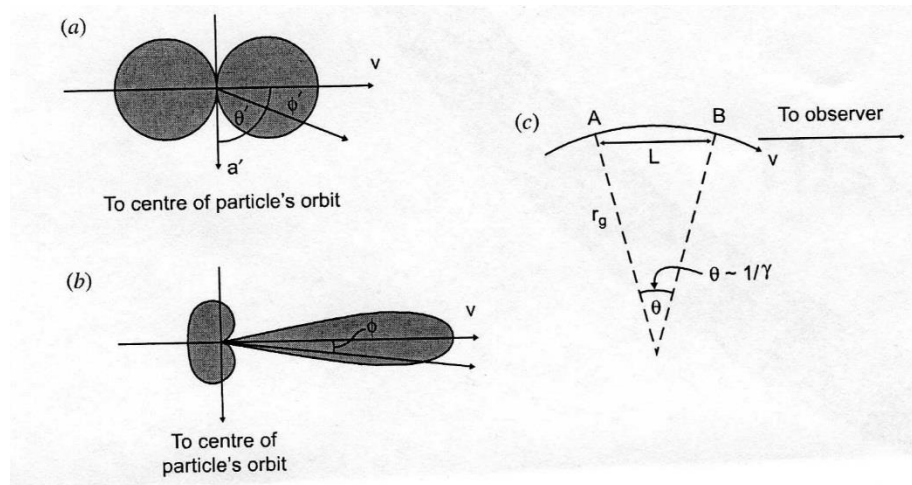
$$\sin \phi = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \phi'}{1 + \frac{v}{c} \cos \phi'} ;$$

$$\cos \phi = \frac{\cos \phi' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \phi'} .$$

Možemo pogledati kuteve  $\phi' = \frac{\pi}{2}$ , pri kojem snaga zračenja ima najveću vrijednost, i  $\phi' = \pm \frac{\pi}{4}$ , pri kojem snaga zračenja pada na polovicu maksimalne vrijednosti u sustavu mirovanja elektrona. Odgovarajući kutevi u laboratorijskom sustavu su:

$$\sin \phi \approx \phi \approx \pm \frac{1}{\gamma} , \text{ gdje je } \gamma \gg 1 .$$

Značajna količina zračenja dipolnog karaktera, emitiranog u sustavu mirovanja elektrona, u laboratorijskom sustavu bit će izdužena u vrlo uski snop u smjeru gibanja elektrona kao što je prikazano na slici 8b). Promatrač može detektirati uski snop zračenja samo kad je vektor brzine elektrona usmjeren prema promatraču unutar kuta veličine  $\pm \gamma$ , to jest, mirni promatrač može opaziti samo ono zračenje koje dolazi iz  $1/\gamma$  radijana kružne putanje elektrona.



**Slika 8** Prikaz relativističkih efekata sinkrotronskog zračenja  
a) Dipolno zračenje elektrona u njegovom sustavu mirovanja  
b) Zračenje koje se opaža u laboratorijskom sustavu  
c) Geometrija putanje elektrona u vremenu kad promatrač opaža snop

Sada nas zanima koliko dugo udaljeni promatrač može opažati puls zračenja. Element putanje elektrona s koje dolazi puls kojeg promatrač opaža prikazan je na slici 8c). Uzmimo da se promatrač nalazi na udaljenosti  $R$  od točke A. Zračenje elektrona iz točke A stiže do promatrača u trenutku  $\frac{R}{c}$ . Zračenje iz točke B do promatrača dolazi za vrijeme  $\frac{L}{v}$  kasnije nego iz točke A i ono je prešlo udaljenost  $(R - L)$  do promatrača gibajući se brzinom svjetlosti. Zadnji rub pulsa stiže do opažača u trenutku  $\frac{L}{v} + \frac{(R-L)}{c}$  pa je trajanje pulsa kojeg promatrač detektira:

$$\Delta t = \left[ \frac{L}{v} + \frac{(R-L)}{c} \right] - \frac{R}{c} = \frac{L}{v} \left[ 1 - \frac{v}{c} \right]. \quad (5.3)$$

U članu  $1 - \frac{v}{c}$  sadržana je činjenica da se izvor zračenja giba prema promatraču.

Budući da je  $v \approx c$  relativistički elektron skoro sustiže zračenje emitirano u točki A.

Možemo napisati:

$$\frac{L}{v} = \frac{r_g \theta}{v} \approx \frac{1}{\gamma \omega_r} = \frac{1}{\omega_g}, \quad (5.4)$$

gdje je  $\omega_g$  nerelativistička kružna frekvencija:

$$\omega_g = \frac{eB}{m_e}.$$

Član  $1 - \frac{v}{c}$  napisat ćemo drugačije pri čemu ćemo uzeti u obzir  $v \approx c$ :

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{\left[ 1 - \frac{v}{c} \right] \left[ 1 + \frac{v}{c} \right]}{\left[ 1 + \frac{v}{c} \right]} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v}{c}} \approx \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (5.5)$$

Izraze (5.4) i (5.5) uvrstit ćemo u (5.3) te dobivamo opaženo trajanje pulsa:

$$\Delta t \approx \frac{1}{2\gamma^2 \omega_g}.$$

To znači da je trajanje pulsa kojeg detektira promatrač u laboratorijskom sustavu ugrubo  $1/\gamma^2$  puta kraće od nerelativističkog perioda kruženja  $T_g = \frac{2\pi}{\omega_g}$ .

Frekvencija opaženog pulsa zračenja je:

$$\nu \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \gamma^2 \nu_g = \gamma^3 \nu_r = \frac{\gamma^3 v}{2\pi r_g}, \quad (5.6)$$

gdje su  $\nu_g$  nerelativistička frekvencija,  $\nu_r$  relativistička frekvencija te  $r_g$  polumjer zakrivljenosti putanje elektrona.

Ova razmatranja napravljena su za slučaj kada elektron upada u magnetsko polje okomito na magnetske silnice. U općenitom slučaju vrijedilo bi:

$$\nu \sim \gamma^2 \nu_g \sin \alpha = \gamma^3 \nu_r \sin \alpha = \frac{\gamma^3 v}{2\pi r_g} \sin \alpha,$$

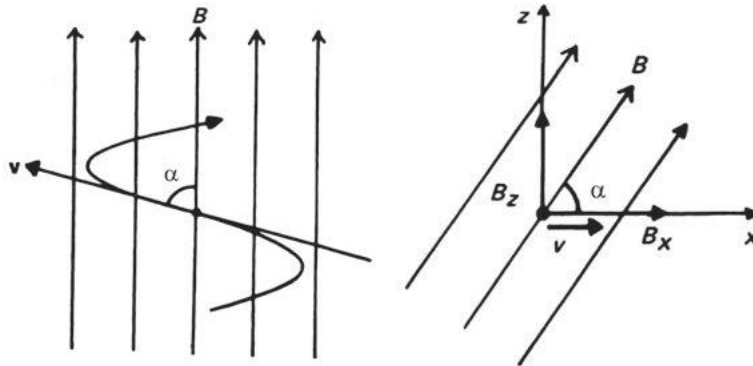
a  $r_g$  mogli bismo interpretirati kao trenutni polumjer zakrivljenosti putanje elektrona.

$\nu \sim \gamma^2 \nu_g$  također predstavlja frekvenciju do koje je emitirana većina zračenja.

### 5.3 Snaga sinkrotronskog zračenja jednog elektrona

Izvod je preuzet iz [3].

U sustavu mirovanja elektrona akceleracija čestice je vrlo mala pa u tom sustavu možemo koristiti nerelativistički izraz za količinu emitirane energije. Za laboratorijski sustav izabrat ćemo koordinatni sustav prikazan na slici 9. u kojem se elektron giba u pozitivnom smjeru osi x.



**Slika 9** Prikaz gibanja elektrona u laboratorijskom sustavu u kojem je smjer magnetskog polja fiksiran

Kako bismo izračunali silu koja djeluje na česticu u njenom sustavu mirovanja, transformirat ćemo komponente polja pomoću Lorentzovih transformacija i izrazit ćemo ih u sustavu mirovanja čestice.

U sustavu mirovanja elektrona  $S'$  sila na česticu je:

$$\vec{F}' = m_e \dot{\vec{v}}' = e(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'). \quad (5.7)$$

U sustavu mirovanja  $S'$  čestica miruje i  $\vec{v}' = 0$  pa jednačba gibanja (5.7) glasi:

$$m_e \dot{\vec{v}}' = e\vec{E}' \quad (5.8)$$

Lorenzove transformacije za komponente električnog polja su:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_x &= 0 \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & \text{slijedi} & E'_y = -\gamma v B_z \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & E'_z &= 0. \end{aligned}$$

Sada jednačba (5.8) glasi:

$$m_e \dot{\vec{v}}' = -e\gamma v B_z \hat{y} = -e\gamma v B \sin \alpha \hat{y},$$

iz čega slijedi

$$\dot{\vec{v}}' = -\frac{e\gamma v B \sin \alpha}{m_e} \hat{y}.$$

Energija koju elektron zračenjem gubi u jedinici vremena izražena u sustavu mirovanja elektrona dana je Larmorovom formulom:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt}\right)' &= -\frac{e^2 |\dot{\vec{v}}'|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \\ \left(\frac{dE}{dt}\right)' &= -\frac{e^4 \gamma^2 v^2 B^2 \sin^2 \alpha}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2}. \end{aligned}$$

Budući da je  $\left(\frac{dE}{dt}\right)$  Lorentz invarijantno, vrijedi:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)' = \left(\frac{dE}{dt}\right)$$

te dobivamo izraz za snagu zračenja jednog elektrona u sustavu promatrača:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = -\frac{e^4 \gamma^2 v^2 B^2 \sin^2 \alpha}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2}.$$

U ultrarelativističkoj granici  $v \rightarrow c$  pa ovaj izraz glasi:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = -\frac{e^4 \gamma^2 B^2 \sin^2 \alpha}{6\pi\epsilon_0 c m_e^2}. \quad (5.9)$$

Raspodjela kuta je izotropna i nasumična. Izračunat ćemo očekivanu vrijednost  $\sin^2 \alpha$ :

$$\begin{aligned} \langle \sin^2 \alpha \rangle &\equiv \frac{\int \sin^2 \alpha d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int \sin^2 \alpha d\Omega \\ \langle \sin^2 \alpha \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi} \sin^2 \alpha \sin \alpha d\alpha d\phi = \frac{1}{4\pi} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Srednja vrijednost snage sinkrotronskog zračenja jednog elektrona je:

$$\langle P_{\text{zračenja}} \rangle = \left\langle \left(\frac{dE}{dt}\right) \right\rangle = \frac{e^4 \gamma^2 B^2}{9\pi\epsilon_0 c m_e^2}. \quad (5.10)$$



Snaga zračenja je proporcionalna  $\propto (B\gamma)^2$ , što znači da ovisi o jakosti magnetskog polja u kojem se čestica giba i o energiji čestice. Energija čestice proporcionalna je Lorentzovom faktoru  $E = \gamma mc^2$  pa se u astrofizici visokih energija umjesto o energiji govori o Lorentzovom faktoru  $\gamma$ .

#### 5.4 Spektar sinkrotronskog zračenja jednog elektrona

Izvod je preuzet iz [3].

Izvod spektra sinkrotronskog zračenja jednog elektrona sastojat će se od nekoliko važnih koraka. Prvo će se napisati izraz za energiju emitiranu po jedinici frekvencije za elektron koji se proizvoljno giba te će se odabrati prikladan koordinatni sustav u kojem će se razviti komponente polja zračenja elektrona koji kruži oko silnica magnetskog polja, a zatim ćemo pomoću algebre dobiti spektralnu raspodjelu komponenata polja.

##### 5.4.1. Spektar zračenja elektrona koji se giba proizvoljno

Kako bismo dobili općenitu formula za zračenje elektrona koji se giba ubrzano relativističkom brzinom, krenut ćemo od vektorskog i skalarnog potencijala:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'/c|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' ,$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'/c|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' ,$$

gdje su  $\vec{J}$  i  $\rho_e$  struja i gustoća naboja dani s:

$$\vec{J}(\vec{r}, t_{ret}) = e\vec{v}\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'(t_{ret})) ,$$

$$\rho_e(\vec{r}, t_{ret}) = e\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'(t_{ret})) .$$

Kad se ovi potencijali razviju dobit će se Liénard-Weichert potencijali koji vrijede za sve brzine:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \frac{e\vec{v}}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}} \right]_{ret} \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \frac{e}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}} \right]_{ret}$$

Član u nazivniku  $\left[1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}\right]$  je faktor Dopplerovog pomaka i označit ćemo ga  $\kappa$ .

Iz navedenih potencijala mogu se dobiti izrazi za električno i magnetsko polje, iz kojih se dobiva izraz za jakost Poyntingovog vektora, odnosno tok energije po jedinici površine u jedinici

vremena,  $S = |\vec{E} \times \vec{H}|$ , te primjenom Fourierovih transformacija dobivamo izraz za intenzitet zračenja na frekvenciji  $\omega$ ,  $I(\omega)$ , odnosno raspodjelu energije po frekvencijama izraženu preko akceleracije proizvoljno gibajućeg elektrona:

$$I(\omega) = \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{v}}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (5.11)$$

Odgovarajući izraz za slučaj gibajućeg elektrona je:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \frac{\dot{\vec{v}}}{c} \right] \kappa^{-3} \right\}_{ret} e^{i\omega t} dt \right|^2, \quad (5.12)$$

gdje je  $\vec{n}$  jedinični vektor orijentiran od položaja elektrona prema položaju promatrača,  $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ .

Izraz u vitičastoj zagradi vrijedi za retardirano vrijeme  $t'$ ,  $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ .

Izraz (5.12) napisat ćemo jednostavnije. Kako bismo promijenili varijablu integracije sa  $dt$  na  $dt'$

derivirat ćemo izraz  $t' = t - \frac{R(t')}{c}$  s obje strane:

$$dt' = dt - \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} dt' ; \quad dt = dt' \left( 1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c} \right) = \kappa dt'. \quad (5.13)$$

Udaljenost od elektrona do promatrača napisat ćemo drukčije:

$$R(t') = |\vec{r}| - \vec{n} \cdot \vec{r}_0(t'),$$

gdje je  $\vec{r}_0(t')$  vektor položaja elektrona u odnosu na ishodište u  $\vec{r}$ . U našem slučaju vrijedi da je  $\vec{r}_0(t') \ll \vec{r}$  pa izraz (5.12) postaje:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}(t')}{c} \right) \times \frac{\dot{\vec{v}}(t')}{c} \right] \times \kappa^{-2} e^{i\omega \left( t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} \right)} dt' \right|^2. \quad (5.14)$$

Pojednostavit ćemo trostruki produkt vektora tako što ćemo derivirati izraz  $\kappa^{-1} \left[ \vec{n} \times \left( \vec{n} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) \right]$  po  $dt'$  i iskoristiti pravilo za vektorski umnožak  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ :

$$\vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \frac{\dot{\vec{v}}}{c} \right] \times \kappa^{-2} = \frac{d}{dt'} \left\{ \kappa^{-1} \left[ \vec{n} \times \left( \vec{n} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) \right] \right\} \quad (5.15)$$

Dobiveni izraz (5.15) uvrstit ćemo u izraz (5.14) i nakon parcijalne integracije dobiva se:

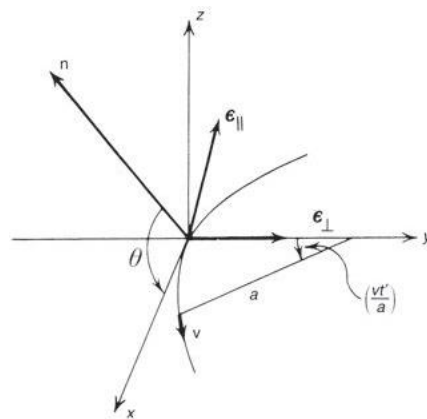
$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \vec{n} \times \left( \vec{n} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) e^{i\omega \left( t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} \right)} dt' \right|^2 \quad (5.16)$$

te smo tako eliminirali akceleraciju elektrona iz izraza u kojem je sada prisutna jedino dinamika elektrona.

#### 5.4.2. Koordinatni sustav

Moramo izabrati takav koordinatni sustav koji će nam omogućiti da izračunamo integral u izrazu (5.16). Koordinatni sustav prikazan je na slici 10. Putanja elektrona, koji se vrti oko silnica magnetskog polja, u bilo kojem trenutku ima polumjer zakrivljenosti  $\vec{a}$ . Uzet ćemo da je trenutna ravnina putanje elektrona x-y ravnina. Račun će se pojednostaviti ako uzmemo da x-os ima ishodište u točki u kojoj vektor brzine elektrona  $\vec{v}$  leži u x-z ravnini u kojoj se nalazi promatrač te da je y-os smjer radijus-vektora  $\vec{a}$  u tom trenutku. Prema tome, jedinični vektor  $\vec{n}$  usmjeren iz ishodišta koordinatnog sustava prema promatraču leži u x-z ravnini. Budući da je vektor  $\vec{v}$  tangencijalan na putanju elektrona u  $x = y = 0$ , udaljeni promatrač bi video da je vektor  $\vec{n}$  paralelan sa smjerom magnetskog polja.

To nam omogućava da definiramo sljedeći ortogonalni koordinatni sustav, kojem se ishodište podudara s ishodištem x,y,z-koordinatnog sustava. Novi koordinatni sustav sadrži jedinični vektor  $\vec{e}_{\parallel}$ , koji leži u ravnini koja sadrži  $\vec{n}$  i smjer magnetskog polja, i jedinični vektor  $\vec{e}_{\perp}$  koji leži duž y-osi tako da vrijedi  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{n} \times \vec{e}_{\perp}$ . Opisani koordinatni sustav služi za opisivanje polarizacije zračenja, a oznake  $\parallel$  i  $\perp$  odnose se na komponente paralelne i okomite na smjer magnetskog polja.



**Slika 10** Prikaz koordinatnog sustava prikladnog za računanje intenziteta i polarizacije sinkrotronskog zračenja. U trenutku  $t = 0$  brzina elektrona  $\vec{v}$  nalazi se duž x-osi i  $\vec{a}$  je polumjer zakrivljenosti putanje. Jedinični vektor  $\vec{n}$  ima orijentaciju od elektrona prema udaljenom promatraču i leži u x-z ravnini.

### 5.4.3. Algebra

Pod integralom u izrazu (5.16) nalaze se dva člana koja ćemo razdvojeno raspisivati, član s trostrukim produktom vektora i član u eksponentu.

Kako bismo riješili trostruki produkt vektora, napisat ćemo koordinate elektrona u  $(\vec{n}, \vec{\epsilon}_{\parallel}, \vec{\epsilon}_{\perp})$  koordinatnom sustavu i uzet ćemo da je u trenutku  $t' = 0$  elektron u položaju  $x = y = z = 0$ . Nakon vremena  $t'$  elektron je prevalio put  $vt'$  duž svoje putanje što odgovara kutu  $= \frac{vt'}{a}$ .

Pomoću koordinatnog sustava prikazanog na slici 8 rastavit ćemo brzinu na komponente:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \left[ \hat{i}_x \cos\left(\frac{vt'}{a}\right) + \vec{\epsilon}_{\perp} \sin\left(\frac{vt'}{a}\right) \right]. \quad (5.17)$$

Sada ćemo brzinu rastaviti na komponente u  $(\vec{n}, \vec{\epsilon}_{\parallel}, \vec{\epsilon}_{\perp})$  koordinatnom sustavu:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \left[ \vec{\epsilon}_{\perp} \sin\left(\frac{vt'}{a}\right) + \vec{n} \cos\theta \cos\left(\frac{vt'}{a}\right) - \vec{\epsilon}_{\parallel} \sin\theta \cos\left(\frac{vt'}{a}\right) \right], \quad (5.18)$$

gdje je  $\theta$  kut između vektora  $\vec{n}$  i x-y ravnine.

Trostruki produkt vektora  $\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{v})$  izračunat ćemo primjenom ovih izraza:

$$\vec{\epsilon}_{\parallel} = \vec{n} \times \vec{\epsilon}_{\perp} \quad \text{i} \quad \vec{\epsilon}_{\perp} = -\vec{n} \times \vec{\epsilon}_{\parallel}$$

te se dobije da je:

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{v}) = |\vec{v}| \left[ -\sin\left(\frac{vt'}{a}\right) \vec{\epsilon}_{\perp} + \sin\theta \cos\left(\frac{vt'}{a}\right) \vec{\epsilon}_{\parallel} \right]. \quad (5.19)$$

Tako smo trostruki produkt vektora napisali kao zbroj vektora, paralelnog i okomitog na smjer magnetskog polja.

Sada ćemo izračunati član u eksponentu  $t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c}$ . Vektor položaja elektrona na njegovoj putanji  $\vec{r}_0(t')$  napisat ćemo preko komponenta  $(\vec{n}, \vec{\epsilon}_{\parallel}, \vec{\epsilon}_{\perp})$  koordinatnog sustava:

$$\vec{r}_0(t') = 2a \sin\left(\frac{vt'}{2a}\right) \left[ \vec{\epsilon}_{\perp} \sin\left(\frac{vt'}{2a}\right) + \vec{n} \cos\theta \cos\left(\frac{vt'}{2a}\right) - \vec{\epsilon}_{\parallel} \sin\theta \cos\left(\frac{vt'}{2a}\right) \right].$$

Dobiveni izraz uvrstit ćemo u  $t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c}$ :

$$t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} = t' - \frac{a}{c} \cos\theta \sin\left(\frac{vt'}{a}\right). \quad (5.20)$$

Zanimaju nas glavni doprinosi integralu u izrazu (5.16). Najveći doprinosi javljaju se za malu vrijednost izraza  $t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c}$ , jer da je ta veličina velike vrijednosti došlo bi do oscilacija u

integralu i prosjek toga bila bi mala vrijednost. Budući da većina sinkrotronskog zračenja ima oblik vrlo uskog snopa čiji smjer se podudara sa smjerom gibanja elektrona, glavni doprinosi spektralnoj raspodjeli zračenja dolaze od male vrijednosti  $\theta$  i male vrijednosti  $\frac{vt'}{a}$  pa ćemo izraz (5.20) razviti do trećeg reda po  $\theta$  i po  $\frac{vt'}{a}$ :

$$t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} = t' \left(1 - \frac{v}{c}\right) + \frac{v\theta^2}{c} t' + \frac{v^3}{6ca^2} t'^3. \quad (5.21)$$

Budući da je  $v \approx c$  i  $\gamma \gg 1$  napisat ćemo da je  $1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2\gamma^2}$  te se dobije:

$$t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} = \frac{1}{2\gamma^2} \left[ t' \left(1 + \gamma^2 \frac{v}{c} \theta^2\right) + \frac{v^3 \gamma^2 t'^3}{3ca^2} \right]. \quad (5.22)$$

U ultrarelativističkom limesu  $v \rightarrow c$  pa taj izraz glasi:

$$t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')}{c} = \frac{1}{2\gamma^2} \left[ t' (1 + \gamma^2 \theta^2) + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3a^2} \right]. \quad (5.23)$$

Sada ćemo napraviti aproksimaciju malih kuteva u izrazu za trostruki produkt vektora:

$$\vec{n} \times \left( \vec{n} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) = \frac{|\vec{v}|}{c} \left[ -\sin\left(\frac{vt'}{a}\right) \vec{e}_\perp + \sin\theta \cos\left(\frac{vt'}{a}\right) \vec{e}_\parallel \right] \approx -\frac{vt'}{a} \vec{e}_\perp + \theta \vec{e}_\parallel. \quad (5.24)$$

Izraze (5.23) i (5.24) uvrstit ćemo pod integral u izrazu (5.16) te će se intenzitet rastaviti na komponente u  $\vec{e}_\perp$  i  $\vec{e}_\parallel$  smjeru:

$$\frac{dI_\perp(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{vt'}{a} \exp \left\{ \frac{i\omega}{2\gamma^2} \left[ t' (1 + \gamma^2 \theta^2) + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3a^2} \right] \right\} dt' \right|^2, \quad (5.25)$$

$$\frac{dI_\parallel(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 \theta^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i\omega}{2\gamma^2} \left[ t' (1 + \gamma^2 \theta^2) + \frac{c^2 \gamma^2 t'^3}{3a^2} \right] \right\} dt' \right|^2. \quad (5.26)$$

Većina snage zračenja elektrona sadržana je unutar male vrijednosti kuta  $\theta$ , što odgovara maloj vrijednosti  $t'$  pa su granice integracije pogrešno definirane od  $-\infty$  do  $+\infty$ . Napraviti ćemo zamjenu varijabli kako bismo integral sveli na pravilan oblik:

$$\theta_\gamma^2 = (1 + \gamma^2 \theta^2); \quad y = \frac{\gamma ct'}{a\theta_\gamma}; \quad \eta = \frac{\omega a \theta_\gamma^3}{3c\gamma^3}. \quad (5.27)$$

Sada se dobiva:

$$\frac{dI_{\perp}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c} \left( \frac{a\theta_{\gamma}^2}{c\gamma^2} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} y \exp \left[ i\eta \frac{3}{2} \left( y + \frac{y^3}{3} \right) \right] dy \right|^2 \quad (5.28)$$

$$\frac{dI_{\parallel}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 \theta^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c} \left( \frac{a\theta_{\gamma}}{c\gamma} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i\eta \frac{3}{2} \left( y + \frac{y^3}{3} \right) \right] dy \right|^2. \quad (5.29)$$

Ovi integrali mogu se izraziti preko modificirane Besselove funkcije:

$$\int_0^{\infty} \cos \left[ \frac{3\eta}{2} \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\eta),$$

$$\int_0^{\infty} x \sin \left[ \frac{3\eta}{2} \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\eta),$$

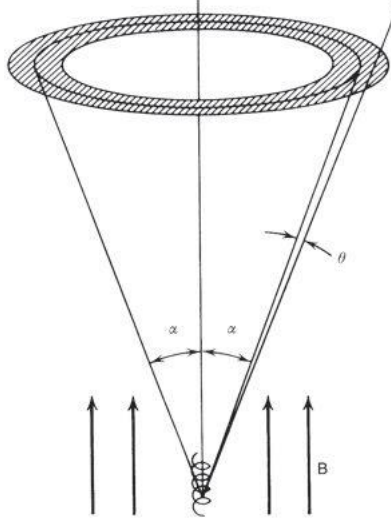
gdje su  $K_{1/3}$  i  $K_{2/3}$  modificirane Besselove funkcije reda 1/3 odnosno 2/3.

Sada se izrazi (5.28) i (5.29) svode na:

$$\frac{dI_{\perp}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{12\pi^3 \varepsilon_0 c} \left( \frac{a\theta_{\gamma}^2}{c\gamma^2} \right)^2 K_{2/3}^2(\eta), \quad (5.30)$$

$$\frac{dI_{\parallel}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 \theta^2}{12\pi^3 \varepsilon_0 c} \left( \frac{a\theta_{\gamma}}{c\gamma} \right)^2 K_{1/3}^2(\eta). \quad (5.31)$$

Kako bismo dobili energiju emitiranu na frekvenciji  $\omega$  moramo integrirati dobivene izraze po prostornom kutu. Budući da je većina zračenja emitirana unutar malog kuta  $\theta$ , može se pretpostaviti da tijekom jednog perioda vrtnje elektrona oko silnica magnetskog polja kut preko kojeg treba integrirati je  $2\pi \sin \theta d\theta$ , jer se prostorni kut malo mijenja po  $d\theta$  dok je intenzitet zračenja funkcija kuta  $\theta$  (slika 11).



**Slika 11** Prikaz sinkrotronskog zračenja jednog elektrona koji u magnetsko polje upada pod kutem  $\alpha$ .

Napravit ćemo malu pogrešku jer ćemo uzeti da granice integracije po  $\theta$  idu od  $-\infty$  do  $+\infty$ , a sva snaga zračenja sadržana je u kutu  $d\theta$ .

Izrazi (5.30) i (5.31) nakon integracije glase:

$$I_{\perp}(\omega) = \frac{e^2 \omega^2 a^2 \sin \alpha}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3 \gamma^4} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\gamma}^4 K_{2/3}^2(\eta) d\theta, \quad (5.32)$$

$$I_{\parallel}(\omega) = \frac{e^2 \omega^2 a^2 \sin \alpha}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3 \gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\gamma}^2 \theta^2 K_{1/3}^2(\eta) d\theta. \quad (5.33)$$

Ako napravimo zamjenu  $\theta_{\gamma}^2 = (1 + \gamma^2 \theta^2)$  i  $x = \frac{2\omega a}{3c\gamma^3}$  dobiva se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\gamma}^4 K_{2/3}^2 \left( \frac{x}{2} \theta_{\gamma}^3 \right) d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma x} \left[ \int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz + K_{2/3}(x) \right], \quad (5.34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 \theta^2 \theta_{\gamma}^2 K_{1/3}^2 \left( \frac{x}{2} \theta_{\gamma}^3 \right) d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma x} \left[ \int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz - K_{2/3}(x) \right]. \quad (5.35)$$

Možemo uvesti zamjenu:

$$F(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(z) dz,$$

$$G(x) = x K_{2/3}(x).$$

Pomoću izraza  $a = \frac{3c\gamma^3 x}{2\omega}$  eliminiirat ćemo  $a$  iz izraza (5.32) i (5.33) te ćemo dobiti energiju emitiranu u smjeru dvije ortogonalne polarizacije tijekom jednog perioda elektrona  $T_r = \frac{1}{\nu_r} = \frac{2\pi\gamma m_e}{eB}$ :

$$I_{\perp}(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^2\gamma \sin \alpha}{8\pi\epsilon_0 c} [F(x) + G(x)], \quad (5.34)$$

$$I_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^2\gamma \sin \alpha}{8\pi\epsilon_0 c} [F(x) - G(x)]. \quad (5.35)$$

#### 5.4.4. Rezultati

Uvest ćemo *kritičnu kružnu frekvenciju*  $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2a}$  pa je  $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{v}{v_c}$ .

Ravnina putanje elektrona je, u bilo kojem trenutku, nagnuta pod kutem  $\alpha$  na magnetsko polje. S obzirom na vodeći centar gibanja polumjer zakrivljenosti je  $a = \frac{v}{\omega_r \sin \alpha}$  pa se kritična kružna frekvencija može napisati:

$$\omega_c = \frac{3}{2} \left(\frac{c}{v}\right) \gamma^3 \omega_r \sin \alpha .$$

U ultrarelativističkom limesu  $v \rightarrow c$  i ako uzmemo u obzir izraz  $\omega_g = \frac{eB}{m_e} = \gamma \omega_r$ , možemo kritičnu kružnu frekvenciju izraziti preko kružne frekvencije u nerelativističkom slučaju  $\omega_g$ :

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^2 \omega_g \sin \alpha .$$

*Kritična frekvencija* glasi:

$$\nu_c = \frac{3}{2} \gamma^2 \nu_g \sin \alpha .$$

Dobiveni izraz za kritičnu frekvenciju sličan je izrazu (5.6) u poglavlju 5.2. za frekvenciju do koje je emitirana većina zračenja  $\nu \approx \gamma^2 \nu_g$ .

Emisivnost elektrona u dvije polarizacije je:

$$j_{\perp}(\omega) = \frac{I_{\perp}(\omega)}{T_r} = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0 c m_e} [F(x) + G(x)], \quad (5.36)$$

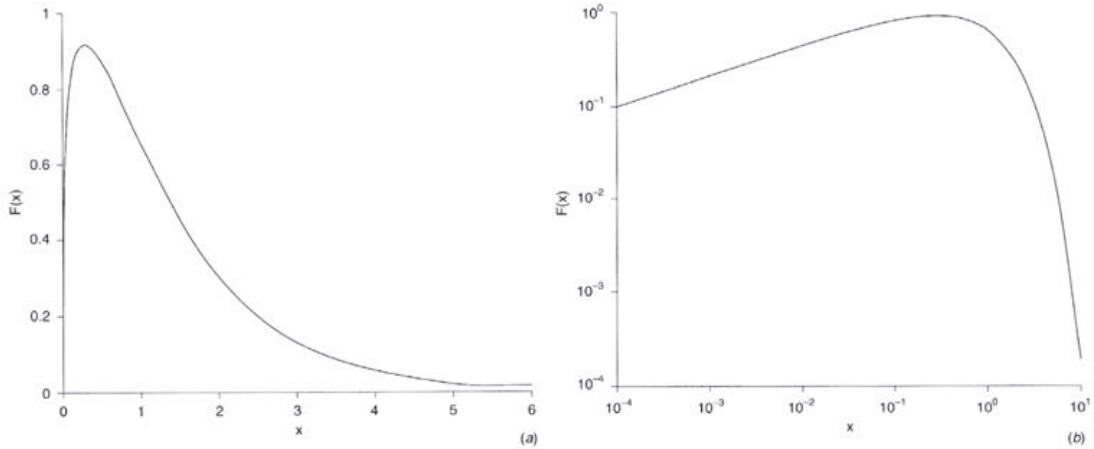
$$j_{\parallel}(\omega) = \frac{I_{\parallel}(\omega)}{T_r} = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0 c m_e} [F(x) - G(x)]. \quad (5.37)$$

Ukupna emisivnost jednog elektrona koji emitira sinkrotronsko zračenje je:

$$j(\omega) = j_{\perp}(\omega) + j_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{8\pi^2 \epsilon_0 c m_e} F(x). \quad (5.38)$$



Dobiveni izraz predstavlja spektralnu emisivnost jednog elektrona u ultrarelativističkoj granici i ona je prikazana na slici 12.



**Slika 12** Spektar sinkrotronskog zračenja jednog elektrona prikazan u linearnom obliku (a) i u logaritamskom obliku (b). Na osi apscisa nalaze se vrijednosti varijable  $x = \omega/\omega_c = v/v_c$ , gdje je  $\omega_c$  kritična kružna frekvencija, odnosno  $v_c$  je kritična frekvencija.

Krivulja spektra sinkrotronskog zračenja elektrona ima širok maksimum. Maksimum se, uglavnom, postiže na frekvenciji  $\nu_{maks} = 0.29 \nu_c$ . Krivulja spektra je glatka i kontinuirana, što znači da elektron sinkrotronskim zračenjem emitira kontinuirani spektar elektromagnetskih valova na frekvencijama infracrvenog zračenja, optičkog, ultraljubičastog i na frekvencijama x-zraka. Iz poznavanja spektra zračenja jednog elektrona  $j(\omega)$ , odnosno snage zračenja na frekvenciji  $\omega$ , točnije u intervalu  $\omega, \omega + d\omega$ , možemo izračunati snagu zračenja elektrona na svim frekvencijama integrirajući  $j(\omega)$  po svim frekvencijama:

$$\frac{dE}{dt} = - \int_0^{\infty} j(\omega) d\omega$$

i dobili bismo izraz (5.9) iz poglavlja 5.3:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = - \frac{e^4 \gamma^2 B^2 \sin^2 \alpha}{6\pi \epsilon_0 c m_e^2}$$

Možemo pogledati ponašanje spektra zračenja elektrona u granici niskih i visokih frekvencija. Na niskim frekvencijama,  $\nu \ll \nu_c$ , snaga sinkrotronskog zračenja elektrona ima oblik

$$j(\omega) \propto \omega^{1/3}.$$

Na visokim frekvencijama,  $\nu \gg \nu_c$ ,

$$j(\omega) \propto \omega^{1/2} e^{-\omega/\omega_c}.$$

Na visokim frekvencijama,  $\nu \gg \nu_c$ , javlja se nagli eksponencijalni pad snage zračenja.

Nakon analize spektra sinkrotronskog zračenja jednog elektrona ili pozitrona zanima nas spektar sinkrotronskog zračenja svih elektrona i pozitrona u maglici pulsarovog vjetra.

### 5.5 Model sinkrotronskog zračenja maglice pulsarovog vjetra

Maglicu pulsarovog vjetra zamislit ćemo kao prostor volumena  $V$  s homogenom raspodjelom čestica  $N(E, t)$  i homogenom raspodjelom magnetskog polja  $B$  u koje ulijeću čestice koje izvor, u ovom slučaju pulsar, ubacuje homogeno u prostor brzinom  $Q(E, t)$ . Ako se i prostor homogeno širi, onda niti jedna veličina u modelu ne ovisi o položaju. Krenut ćemo od početnog uvjeta u trenutku  $t = t_0$  i pratit ćemo razvoj raspodjele  $N(E, t)$  koja se mijenja iz dva razloga. Prvo, čestice emitiraju energiju u obliku sinkrotronskog zračenja, pri čemu postoje i drugi mehanizmi zbog kojih čestice gube energiju, kao što su inverzno Comptonovo raspršenje i adijabatsko širenje, i drugo, izvor ubacuje čestice u prostor zbog čega se njihova raspodjela mijenja.

Zanima nas kako izgleda spektar zračenja, to jest raspodjela snage zračenja tog objekta po frekvencijama. Na nižim frekvencijama snaga zračenja ovisi o raspodjeli čestica  $N(E, t)$  i magnetskom polju  $B$  pa u tom području važan doprinos dolazi od sinkrotronskog zračenja, dok na višim frekvencijama glavni doprinos snazi zračenja daje inverzno Comptonovo raspršenje fotona, dobivenih sinkrotronskim zračenjem elektrona i pozitrona čija je raspodjela  $N(E, t)$ , na elektronima.

Kako bismo dobili spektar zračenja opisanog sustava potrebno je poznavati raspodjelu čestica  $N(E, t)$  u trenutku  $t$  po jedinici energije koja je rješenje kinetičke jednadžbe za  $N(E, t)$ . Najprije ćemo izvesti spomenutu jednadžbu.

Pretpostavimo da je gubitak energije elektrona, odnosno pozitrona određen s:

$$\frac{dE}{dt} = -b(E, t),$$

gdje je  $b(E, t) > 0$ . Za početak promatramo promjenu raspodjele čestica po energiji  $N(E, t)dE$  zbog gubitka energije  $b(E, t)$  za slučaj kad ne uzimamo u obzir ubacivanje čestica u sustav.

U trenutku  $t$  ukupan broj elektrona s energijom između  $E$  i  $E + \Delta E$  u cijeloj maglici je  $N(E, t)\Delta E$ .

U kasnijem trenutku  $t + \Delta t$  te čestice su zamijenjene onima koje su u trenutku  $t$  imale energije između  $E'$  i  $E' + \Delta E'$ , gdje je:

$$E' = E + b(E, t)\Delta t$$

$$E' + \Delta E' = (E + \Delta E) + b(E + \Delta E, t + \Delta t)\Delta t. \quad (5.39)$$

Taylorov razvoj funkcije  $b(E + \Delta E, t + \Delta t)$  za male vrijednosti  $\Delta E$  daje:

$$b(E + \Delta E) = b(E) + \frac{\partial b(E, t)}{\partial E} \Delta E + \frac{\partial b(E, t)}{\partial t} \Delta t$$

pa je

$$E' + \Delta E' = E + \Delta E + \left[ b(E) + \frac{\partial b(E, t)}{\partial E} \Delta E + \frac{\partial b(E, t)}{\partial t} \Delta t \right] \Delta t.$$

Dobiveni izraz uvrstimo u izraz (5.39) iz čega slijedi:

$$\Delta E' = \Delta E + \frac{\partial b(E)}{\partial E} \Delta E \Delta t.$$

Promjena broja elektrona s energijom između  $E$  i  $E + \Delta E$  u vremenskom intervalu  $\Delta t$  je:

$$\Delta N(E)\Delta E = N(E', t + \Delta t)\Delta E' - N(E, t)\Delta E$$

iz čega slijedi:

$$\Delta N(E)\Delta E = -N(E, t)\Delta E + N(E + b(E)\Delta t, t)\Delta E'. \quad (5.40)$$

Taylorov razvoj funkcije  $N(E + b(E)\Delta t)$  za male vrijednosti  $b(E)\Delta t$  je:

$$N(E + b(E)\Delta t) = N(E) + \frac{\partial N(E, t)}{\partial E} b(E, t)\Delta t.$$

Članove sa  $(\Delta t)^2$  zanemarujemo jer imaju infinitezimalno malu vrijednost.

Dobiveni izraz uvrstimo u izraz (5.40) iz čega slijedi:

$$\Delta N(E)\Delta E = -N(E, t)\Delta E + \left[ N(E, t) + \frac{\partial N(E, t)}{\partial E} b(E, t)\Delta t \right] \left[ \Delta E + \frac{\partial b(E, t)}{\partial E} \Delta E \Delta t \right]. \quad (5.41)$$

Kad se izraz (5.41) sredi dobije se:

$$\frac{\partial N(E, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} [b(E, t)N(E, t)].$$

Dobivena jednačba opisuje vremensku promjenu raspodjele elektrona koji gube energiju.

Sada možemo u ovu jednačbu dodati član  $Q(E, t)$  koji označava brzinu ubacivanja elektrona s energijom između  $E$  i  $E + \Delta E$  u maglicu te ćemo dobiti:

$$\frac{\partial N(E)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} [b(E)N(E)] + Q(E, t). \quad (5.40)$$

Iz ove jednačbe možemo dobiti razvoj raspodjele  $N(E, t)$  po vremenu. Nadalje ćemo koristiti rezultate dobivene u članku Tanaka, S. J.; Takahara, F.; A model of the spectral evolution of

pulsar wind nebulae, The Astrophysical Journal (2010.), vol. 715, 1248-1257 za maglicu Rakovicu kao primjer jednostavnog modeliranja sinkrotronskog zračenja iz maglice pulsarovog vjetra.

Napisat ćemo izraz za gubitak energije u slučaju zračenja maglice pulsarovog vjetra:

$$b(E) = -\dot{\gamma}(\gamma, t)$$

Tada jednažba (5.40) glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\gamma, t) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\dot{\gamma}(\gamma, t) N(\gamma, t)) = Q_{inj}(\gamma, t), \quad (5.41)$$

gdje je:

$$\dot{\gamma}(\gamma, t) = \dot{\gamma}_{syn}(\gamma, t) + \dot{\gamma}_{IC}(\gamma) + \dot{\gamma}_{ad}(\gamma, t)$$

i predstavlja zbroj svih mehanizama nastanka elektromagnetskog zračenja koji doprinose spektru zračenja maglice pulsarovog vjetra, a to su: sinkrotronsko zračenje, inverzno Comptonovo raspršenje i adijabatsko širenje.

Energija koju, sinkrotronskim zračenjem, emitira jedan elektron energije  $\gamma$  po jedinici vremena je jednaka izrazu (5.10):

$$\dot{\gamma}_{syn}(\gamma, t) = -\frac{e^4 \gamma^2 B^2}{9\pi \epsilon_0 c m_e^2}.$$

Raspodjela ubačenih relativističkih čestica po energiji ovisi o energiji kao zakon potencija:

$$Q_{inj}(\gamma, t) = \begin{cases} Q_0(t) \left(\frac{\gamma}{\gamma_b}\right)^{-p_1} & \text{za } \gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_b \\ Q_0(t) \left(\frac{\gamma}{\gamma_b}\right)^{-p_2} & \text{za } \gamma_b \leq \gamma \leq \gamma_{maks} \end{cases}$$

Numeričkim rješavanjem jednažbe (5.41) dobiva se raspodjela elektrona  $N(\gamma, t)$  u trenutku  $t$  po jedinici energije pomoću koje ćemo dobiti snagu sinkrotronskog zračenja maglice pulsarovog vjetra. Zanima nas spektar sinkrotronskog zračenja jednog elektrona koji je dan izrazom:

$$P(\nu, \gamma, B(t)) = \frac{\sqrt{3} e^3 B(t)}{m_e c^2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c(t)}\right),$$

gdje je  $\nu_c(t)$  vremenski ovisna kritična frekvencija:

$$\nu_c(t) = \frac{3eB(t)\gamma^2}{4\pi m_e c},$$

a  $F\left(\frac{\nu}{\nu_c(t)}\right)$ , s pokratom  $x = \frac{\nu}{\nu_c}$ , je:

$$F(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(y) dy,$$

$K_{5/3}(y)$  je modificirana Besselova funkcija reda 5/3.

Ovisnost magnetskog polja  $B(t)$  o vremenu je zadana u članku .

Pomoću svega navedenoga, dobit ćemo snagu sinkrotronskog zračenja svih elektrona i pozitrona, to jest maglice pulsarovog vjetra, integriranjem umnoška spektra sinkrotronskog zračenja jednog elektrona i raspodjele elektrona po energiji između  $\gamma$  i  $\gamma + d\gamma$ :

$$L_{syn}(t) = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} N(\gamma, t) P(\nu, \gamma, B(t)) d\gamma \quad (5.42)$$

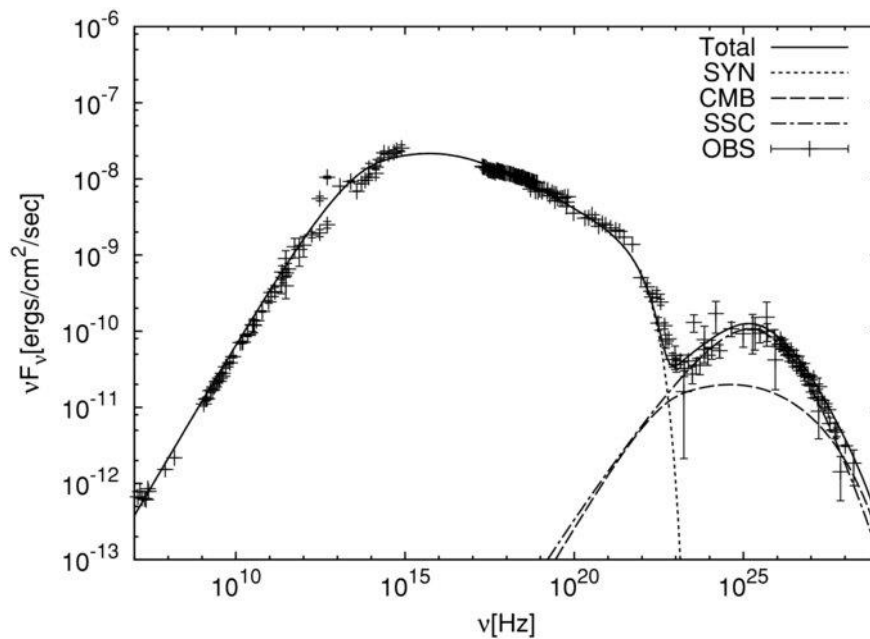
Prilikom numeričke integracije, za vrijednosti parametara su odabrani:  $\gamma_{max} = 7.0 \cdot 10^9$ ,

$\gamma_b = 6.0 \cdot 10^5$  (vrijednost kod koje raspodjela ubačenih elektrona i pozitrona mijenja režim),

$\gamma_{min} = 1.0 \cdot 10^2$  (gornja granica potrebna za stvaranje toka radiovalova na najmanjoj frekvenciji),

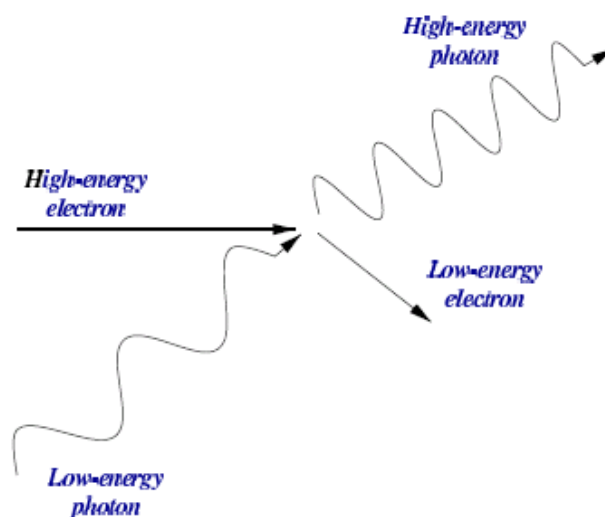
$p_1 = 1.5$  i  $p_2 = 2.5$  su eksponenti zakona potencije.

Numeričkom evaluacijom integrala (5.42) dobiva se ukupna snaga zračenja maglice pulsarovog vjetra, posebno izračunata za maglicu Rakovicu, koja je prikazana na slici 13.



Slika 13 Interpolirani spektar zračenja maglice Rakovice

Spektar zračenja maglice pulsarovog vjetra pokazuje doprinos sinkrotronskog zračenja na frekvencijama nižim od  $10^{23}$  Hz, koji odgovara dijelu spektra od radiovalova do niskoenergetskih  $\gamma$ -zraka. Doprinos na frekvencijama višim od  $10^{23}$  Hz dolazi od inverznog Comptonovog raspršenja fotona, stvorenih emisijom sinkrotronskog zračenja, na elektronima pri čemu se fotoni dodatno ubrzavaju i postižu visoke energije  $\sim 1$  TeV (slika 14).



Slika 14 Prikaz inverznog Comptonovog raspršenja

## 6 Zaključak

Model sinkrotronskog zračenja maglice pulsarovog vjetra efikasan je model kojim se objašnjava mehanizam nastanka zračenja u maglici pulsarovog vjetra. Glavne karakteristike tog modela su da polazi od jednostavnih pretpostavki da kinetička energija rotacije koju pulsar gubi prelazi u energiju zračenja maglice pulsarovog vjetra. Pri tome valja imati na umu da je režim elektrona i pozitrona u maglici relativistički.

Pri razmatranju modela pretpostavili smo konstantnost magnetskog polja i raspodjele čestica u prostoru, što nam je omogućilo da maglicu pulsarovog vjetra promatramo kao točku i dovelo do pojednostavljenja izračuna spektra zračenja maglice pulsarovog vjetra. Nadalje, pretpostavka modela je netermalna raspodjela koja zadovoljava zakon potencije. U radu je, pomoću svih navedenih pretpostavki, opisano kako se dobiva spektar sinkrotronskog zračenja jednog elektrona, odnosno, pozitrona odakle se numeričkom integracijom dobiva spektar zračenja cijelokupnog broja elektrona, to jest, maglice pulsarovog vjetra. Dobiveni spektar ima dva režima, onaj koji pripada sinkrotronskom zračenju i inverzni Comptonski. Iako su u Comptonskom dijelu prisutne znatno više frekvencije, statistički, većinu snage zračenja (luminoznost) nosi sinkrotronski dio spektra.

## Literatura

- [1] Vidana, I. A short walk through the physics of neutron stars, *Eur. Phys. J. Plus* (2018) 133: 445
- [2] Milin, M., Nuklearne reakcije u zvijezdama i ranom svemiru, (20.-26.06.2004.), <http://www.hfd.hr/ljskola/arhiva/2004/milin.pdf>, 03.11.2019.
- [3] Longair, M.S. High energy astrophysics, 3<sup>rd</sup> ed. Cambridge University Press, 2011.
- [4] Carroll, B.W.; Ostlie, D.A. An introduction to modern astrophysics, 2<sup>nd</sup> ed. Pearson education, 2007.
- [5] Camenzind, M. Compact Objects in Astrophysics, Springer, Berlin, 2007.
- [6] Vujnović, V. Astronomija 2, II. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1994.
- [7] Condon, J. J.; Ransom, S. M. Essential Radio Astronomy, <https://www.cv.nrao.edu/~sransom/web/xxx.html>, 22.10.2019.
- [8] Kargaltsev, O.; Cerutti, B.; Lyubarsky, Y.; Striani, E. Pulsar-Wind Nebulae, Recent Progress in Observations and Theory, *Space Science Reviews*, 191(1), (2015)
- [9] Tanaka, S. J.; Takahara, F.; A model of the spectral evolution of pulsar wind nebulae, *The Astrophysical Journal* (2010.), vol. 715, 1248-1257
- [10] Jackson, J.D. Classical Electrodynamics, 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley&Sons, Inc., 1975.