

# Turing--izračunljivost na prirodnim brojevima

---

Đerić, Bojana

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:515568>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-21**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Bojana Đerić

**TURING-IZRAČUNLJIVOST NA**  
**PRIRODNIM BROJEVIMA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Vedran Čačić

Zagreb, 4. studenoga 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Osnovne definicije</b>	<b>2</b>
1.1 Turingov stroj . . . . .	3
1.2 Brojevni model . . . . .	4
1.3 Parcijalno rekurzivne funkcije . . . . .	5
<b>2 Turing-računanje brojevni funkcija</b>	<b>7</b>
2.1 Inicijalne funkcije . . . . .	11
2.2 Kompozicija . . . . .	16
2.3 Primitivna rekurzija . . . . .	22
2.4 Minimizacija . . . . .	40
<b>Bibliografija</b>	<b>46</b>
<b>Sažetak</b>	<b>47</b>
<b>Summary</b>	<b>48</b>
<b>Životopis</b>	<b>49</b>

# Uvod

Turingov stroj, osmišljen 1936. godine, jedan je od prvih modela opće izračunljivosti, realizirane kroz izračunljivost funkcija na riječima nad nekom abecedom. U modernoj teoriji izračunljivosti, obično se radi s funkcijama na prirodnim brojevima, koje čine model (parcijalno) rekurzivnih funkcija koji je osmislio S.Kleene.

Opišimo kako zamišljamo Turingov stroj; iako je njegova karakterizacija čisto matematička, lakše ju je opisati u fizičkom smislu [2]. Zamislimo mehanički uređaj koji ima neograničenu memoriju u obliku beskonačne, jednostrano neograničene trake, te glavu koja omogućuje čitanje i pisanje. Traka je podijeljena na ćelije jednakih dimenzija. U svakom trenutku u svakoj ćeliji zapisan je točno jedan simbol. Glava se u svakom trenutku nalazi iznad točno jedne ćelije trake, te može u nju zapisati točno jedan simbol, brišući postojeći. Također, glava se u svakom koraku pomiče ulijevo ili udesno za jednu ćeliju. Na početku rada stroja traka sadrži samo ulazne podatke, a druge ćelije su prazne i glava stroja se nalazi nad prvom ćelijom slijeva.

Stroj računa s ulaznim podacima na temelju algoritma zadanog funkcijom prijelaza. Fiksiramo broj izlaznih podataka na 1. To smijemo napraviti jer algoritam s  $k$  ulaznih i  $l$  izlaznih podataka možemo promatrati kao  $l$  algoritama koji svi koriste istih  $k$  ulaznih podataka, a imaju po jedan izlazni podatak. Moguće je da stroj nikada ne stane s radom, ali o tome preciznije nešto kasnije.

# Poglavlje 1

## Osnovne definicije

Intuitivno, izračunljivost je matematička obrada pojma algoritma. Teorijski model na kojem bismo mogli promatrati proizvoljni algoritam je nužan kako bi postojala neka vrsta „standarda”, neovisnog o programskom jeziku, u kojem se taj algoritam može implementirati. Kako bismo uopće razumjeli pojam algoritma, potrebno je uvesti neke pojmove. Grubo govoreći, algoritam je deterministična *procedura* koju možemo *pokrenuti* na simboličkim *ulaznim podacima*, izvršavati njene korake zadanim redoslijedom, te kada ona to zahtijeva, zaustaviti postupak i dobiti pripadajuće *izlazne podatke* [2].

Definicije vezane uz Turingov model, kao i definicije iz teorije parcijalno rekurzivnih funkcija, uglavnom su preuzete iz [1].

**Definicija 1.** *Abeceda* je fiksni konačan neprazan skup  $\Sigma$ . Elemente abecede nazivamo *znakovi* ili *simboli*, i obično ih označavamo malim grčkim slovima.

*Riječ* nad  $\Sigma$  je bilo koji niz konačno mnogo znakova abecede, najčešće označen slovima  $u, v, w, z$ . Duljinu riječi  $w$  označavamo s  $|w|$ . Riječi pišemo konkatencijom znakova: recimo, riječ  $(0, 1, 1)$  pišemo 011. Dakle, skup svih riječi je skup  $\Sigma^*$  svih konačnih nizova znakova. *Praznu riječ*, odnosno riječ duljine nula, označavamo znakom  $\varepsilon$ .

*Jezik* (nad  $\Sigma$ ) je bilo koji podskup od  $\Sigma^*$ . *Jezična funkcija* (nad  $\Sigma$ ) je bilo koja parcijalna funkcija  $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ . ◁

*Napomena 2.* *Parcijalna funkcija* ne mora biti definirana u svim riječima iz  $\Sigma^*$ , odnosno, jezična funkcija  $\varphi$  je parcijalna ako je  $\varphi : S \rightarrow \Sigma^*$ , gdje je  $S \subseteq \Sigma^*$ . Ako vrijedi  $S = \Sigma^*$ , tada kažemo da je funkcija  $\varphi$  *totalna*.

## 1.1 Turingov stroj

**Definicija 3.** Neka je  $\Sigma$  abeceda. *Turingov stroj* nad  $\Sigma$  je matematički (idealizirani) stroj, obično zapisan kao uređena sedmorka  $(Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta, q_0, q_z)$ , pri čemu je:

- $Q$  konačan skup *stanja*, s istaknutim elementima  $q_0 \in Q$  (*početno stanje*) i  $q_z \in Q$  (*završno stanje*);
- $\Gamma \supset \Sigma$  konačna *radna abeceda* s istaknutim elementom  $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$  (*praznina*);
- $\delta : (Q \setminus \{q_z\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{-1, 1\}$  *funkcija prijelaza*. ◁

Turingov stroj ima *ćelije* adresirane prirodnim brojevima, svaka od kojih u svakom trenutku izračunavanja sadrži proizvoljni element od  $\Gamma$ . Na početku izračunavanja sve ćelije osim ulaznih inicijalizirane su na  $\sqcup$ . Označavamo  $\Gamma_+ := \Gamma \setminus \{\sqcup\}$ .

*Napomena 4.* Važno pitanje na koje se treba osvrnuti jest: smatramo li nulu prirodnim brojem? U ovom radu koristit ćemo obje varijante skupa  $\mathbb{N}$ , onu koja uključuje nulu, i onu koja je ne uključuje, i zapisivat ćemo ih oznakama:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &:= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{N}_+ &:= \{1, 2, 3, 4, \dots\}.\end{aligned}$$

**Definicija 5.** Neka je  $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta, q_0, q_z)$  Turingov stroj. *Konfiguracija* od  $\mathcal{T}$  je bilo koja uređena trojka  $(q, n, t) \in Q \times \mathbb{N} \times \Gamma^{\mathbb{N}}$ , takva da je niz  $t$  skoro svuda  $\sqcup$  (odnosno,  $t^{-1}[\Gamma_+]$  je konačan skup). Komponente konfiguracije zovu se redom *stanje*, *pozicija* i *traka*. Kada želimo reći da je pozicija konfiguracije stroja neka ćelija, često kažemo da se *glava* stroja nalazi nad tom ćelijom. Konfiguracija je *završna* ako joj je stanje završno ( $q_z$ ). *Početna konfiguracija* stroja  $\mathcal{T}$  s ulazom  $w = \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_{|w|-1} \in \Sigma^*$  je trojka  $(q_0, 0, w \sqcup \dots)$  gdje je traka definirana sa

$$(w \sqcup \dots)_i := \begin{cases} \alpha_i & i < |w|, \\ \sqcup, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za konfiguracije  $c = (q, n, t)$  i  $d = (q', n', t')$  istog Turingovog stroja  $\mathcal{T}$  kažemo da  $c$  *prelazi u*  $d$  ako je  $c$  završna i  $c = d$ , ili uz oznake  $\delta(q, t_n) =: (p, \beta, d)$  vrijedi  $q' = p$ ,  $n' = \max\{n + d, 0\}$ ,  $t'_n = \beta$ , te  $t'_i = t_i$  za sve  $i \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ . ◁

Svaka konfiguracija od  $\mathcal{T}$  prelazi u jedinstvenu konfiguraciju od  $\mathcal{T}$ . Skup svih konfiguracija jednog fiksnog Turingovog stroja  $\mathcal{T}$  je prebrojiv.

**Definicija 6.** Neka je  $\Sigma$  abeceda, neka je  $w \in \Sigma^*$  riječ, te neka je  $\mathcal{T}$  Turingov stroj nad  $\Sigma$ .  *$\mathcal{T}$ -izračunavanje* s  $w$  je niz  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konfiguracija od  $\mathcal{T}$ , takav da je  $c_0$  početna konfiguracija s ulazom  $w$ , te za svaki  $i \in \mathbb{N}$ ,  $c_i$  prelazi u  $c_{i+1}$ . Kažemo da to izračunavanje *stane* ako postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da je  $c_{n_0}$  završna konfiguracija. ◁

## 1.2 Brojevni model

**Definicija 7.** *Unarna abeceda* je abeceda  $\Sigma_{\bullet} := \{\bullet\}$ . ◁

**Definicija 8.** *Brojevena funkcija* je svaka funkcija  $f$  oblika  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ , za neki  $k \in \mathbb{N}_+$ . Skraćeno pišemo  $f^k$  i broj  $k$  zovemo *mjesnost* funkcije  $f$ . Podrazumijevamo da svaka brojevena funkcija ima jedinstvenu mjesnost. ◁

**Definicija 9.** *Brojevena relacija*  $R$  je svaki podskup od  $\mathbb{N}^k$  za neki  $k \in \mathbb{N}_+$ . Kako i kod funkcija, skraćeno pišemo  $R^k$  i broj  $k$  zovemo *mjesnost* relacije  $R$ . ◁

*Napomena 10.* Domenu funkcije  $f$  označavamo s  $\mathcal{D}_f$ . Za funkciju mjesnosti  $k$ , domena je relacija mjesnosti  $k$ . Restrikciju funkcije  $f$  na relaciju  $S$  (zapravo na  $S \cap \mathcal{D}_f$ ) označavamo s  $f|_S$ .

Svaka riječ  $w$  nad unarnom abecedom je oblika  $w = \bullet^n$ . Takav nam oblik odgovara za ulaz jednomjesnih funkcija, međutim, kako ćemo u ovom radu koristiti i višemjesne funkcije, dodat ćemo još jedan element  $/$  koji će nam služiti kao separator ulaznih podataka.

**Definicija 11.** *Binarna abeceda* je abeceda  $\Sigma_{\beta} := \{\bullet, /\}$ . Za svaki neprazni konačni niz prirodnih brojeva  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ , definiramo *binarnu reprezentaciju* kao

$$\beta(\vec{x}) := \bullet^{x_1} / \bullet^{x_2} / \dots / \bullet^{x_k} \in \Sigma_{\beta}^*. \quad (1.1)$$

Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$ , označavamo  $\beta^k := \beta|_{\mathbb{N}^k}$ . ◁

**Primjer 12.** Neka je  $\vec{x} = (5, 0, 3)$ . Njegova binarna reprezentacija je

$$\beta(\vec{x}) = \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet // \bullet \bullet \bullet .$$

*Napomena 13.* Često se vrijednosti funkcije specificiraju samo izrazom, uz pretpostavku „prirodne domene“ (domenu čine svi ulazni podaci za koje izraz ima smisla). Tada pišemo  $f(\vec{x}) \simeq \text{izraz}$ . Ako se znak  $\simeq$  koristi između dva izraza, to znači da su ta dva izraza jednaka za one vrijednosti varijabli za koje oba izraza imaju smisla, te da oba imaju smisla za iste vrijednosti varijabli.

**Definicija 14.** Neka je  $k \in \mathbb{N}_+$ , i  $f^k$  brojevena funkcija. Za jezičnu funkciju  $\beta f$  zadanu s

$$\beta f(u) \simeq \beta(f(\vec{x})), \text{ ako je } u = \beta^k(\vec{x}), \quad (1.2)$$

nad binarnom abecedom  $\Sigma_{\beta}$ , kažemo da je *binarna reprezentacija* funkcije  $f$ . ◁



### 1.3 Parcijalno rekurzivne funkcije

**Definicija 15.** Neka je  $S^k$  brojevena relacija. Tada funkciju  $\chi_S : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\}$ , definiranu sa

$$\chi_S(x) := \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \in \mathbb{N}^k \setminus S \end{cases}$$

zovemo *karakteristična funkcija* relacije  $S$ .  $\triangleleft$

**Definicija 16.** Funkciju  $Z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiranu sa  $Z(x) = 0$  nazivamo *nul-funkcija*.

Funkciju  $Sc : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiranu sa  $Sc(x) = x + 1$  nazivamo *funkcija sljedbenika*.

Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$ , za svaki  $n \in \{1, 2, \dots, k\}$ , funkciju  $I_n^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  definiranu sa  $I_n^k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_n$  nazivamo *n-ta k-mjesna koordinatna projekcija*.

Funkcije  $Z$ ,  $Sc$  i  $I_k^n$  (za  $k \in \mathbb{N}_+$  i  $n \in \{1, 2, \dots, k\}$ ) nazivamo *inicijalne funkcije*.  $\triangleleft$

Primijetimo da su inicijalne funkcije totalne:  $\mathcal{D}_Z = \mathcal{D}_{Sc} = \mathbb{N}$ , te  $\mathcal{D}_{I_k^n} = \mathbb{N}^k$ .

**Definicija 17.** Neka su  $k, l \in \mathbb{N}_+$ , te neka su  $G_1^k, G_2^k, \dots, G_l^k$  i  $H^l$  funkcije. Za funkciju  $F^k$  definiranu s

$$\mathcal{D}_F := \left\{ \vec{x} \in \bigcap_{i=1}^l \mathcal{D}_{G_i} \mid (G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x})) \in \mathcal{D}_H \right\},$$

$$F(\vec{x}) := H(G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x})), \text{ za sve } \vec{x} \in \mathcal{D}_F,$$

kažemo da je dobivena *kompozicijom* iz funkcija  $G_1, G_2, \dots, G_l$  i  $H$ .

Pišemo  $F := H \circ (G_1, G_2, \dots, G_l)$ .  $\triangleleft$

**Definicija 18.** Za skup funkcija  $\mathcal{F}$  kažemo da je *zatvoren na kompoziciju* ako za sve mjesnosti  $k, l \in \mathbb{N}_+$ , za sve  $k$ -mjesne funkcije  $G_1, G_2, \dots, G_l \in \mathcal{F}$ , te za sve  $l$ -mjesne funkcije  $H \in \mathcal{F}$ , vrijedi  $H \circ (G_1, G_2, \dots, G_l) \in \mathcal{F}$ .  $\triangleleft$

**Propozicija 19.** *Svaka kompozicija totalnih funkcija je totalna.*

*Dokaz.* Neka su  $k, l \in \mathbb{N}_+$ , te neka su  $G_1^k, G_2^k, \dots, G_l^k$  i  $H^l$  totalne funkcije. To znači da je  $\mathcal{D}_{G_i} = \mathbb{N}^k$  za sve  $i \in \{1, \dots, l\}$ , te  $\mathcal{D}_H = \mathbb{N}^l$ . Uvrštavajući u definiciju 17, dobijemo

$$\mathcal{D}_{H \circ (G_1, G_2, \dots, G_l)} = \{ \vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid (G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x})) \in \mathbb{N}^l \} = \mathbb{N}^k, \quad (1.3)$$

pa je  $H \circ (G_1, G_2, \dots, G_l)$  totalna.  $\square$

**Definicija 20.** Neka je  $k \in \mathbb{N}_+$ , te neka su  $G^k$  i  $H^{k+2}$  totalne funkcije. Za funkciju  $F^{k+1}$  definiranu s

$$F(\vec{x}, 0) := G(\vec{x}),$$

$$F(\vec{x}, y + 1) := H(\vec{x}, y, F(\vec{x}, y)), \text{ za sve } y \in \mathbb{N},$$

kažemo da je dobivena *primitivnom rekurzijom* iz funkcija  $G$  i  $H$ .  
Skraćemo pišemo  $F := G \text{ } \mathbb{R} \text{ } H$ . ◁

**Definicija 21.** Za skup funkcija  $\mathcal{F}$  kažemo da je *zatvoren na primitivnu rekurziju* ako za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$ , za svaku totalnu  $k$ -mjesnu funkciju  $G \in \mathcal{F}$ , te za svaku totalnu  $(k + 2)$ -mjesnu funkciju  $H \in \mathcal{F}$ , vrijedi  $G \text{ } \mathbb{R} \text{ } H \in \mathcal{F}$ . ◁

**Definicija 22.** Neka je  $k \in \mathbb{N}_+$  i  $R^{k+1}$  relacija. Za funkciju  $F^k$  definiranu s

$$\mathcal{D}_F := \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid \exists y R(\vec{x}, y)\} \tag{1.4}$$

$$F(\vec{x}) := \min \{y \in \mathbb{N} \mid R(\vec{x}, y)\}, \text{ za sve } \vec{x} \in \mathcal{D}_F, \tag{1.5}$$

kažemo da je dobivena *minimizacijom* relacije  $R$ .

Pišemo  $F^k := \mu R^{k+1}$ , ili  $F(\vec{x}) := \mu y R(\vec{x}, y)$ . ◁

**Definicija 23.** Za skup funkcija  $\mathcal{F}$  kažemo da je *zatvoren na minimizaciju* ako za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$ , za svaku  $(k + 1)$ -mjesnu relaciju  $R$ ,  $\chi_R \in \mathcal{F}$  povlači  $\mu R \in \mathcal{F}$ . ◁

**Definicija 24.** Skup *parcijalno rekurzivnih* funkcija je najmanji skup brojevni funkcija koji sadrži sve inicijalne funkcije, te je zatvoren na kompoziciju, na primitivnu rekurziju, i na minimizaciju. ◁

**Definicija 25.** Za brojevu funkciju  $f^k$  kažemo da je *Turing-izračunljiva* ako postoji Turingov stroj  $\mathcal{T}$  nad  $\Sigma_\beta$  takav da za sve  $w \in \Sigma_\beta^*$  vrijedi:

- ako je  $w = \beta^k(\vec{x})$  za neki  $\vec{x} \in \mathcal{D}_f$ , tada  $\mathcal{T}$ -izračunavanje s  $w$  stane i traka završne konfiguracije je  $\bullet^{f(\vec{x})} \sqcup \dots$ ;
- inače,  $\mathcal{T}$ -izračunavanje s  $w$  nikad ne stane.

◁

## Poglavlje 2

# Računanje parcijalno rekurzivnih funkcija na Turingovim strojevima

Cilj ovog poglavlja je pokazati da su sve parcijalno rekurzivne funkcije Turing-izračunljive. Dovoljno je pokazati da su inicijalne funkcije izračunljive, te da se kompozicija, parcijalna rekurzija i minimizacija mogu računati na Turingovom stroju. Pokazat ćemo jače svojstvo: da inicijalne funkcije, kompozicija, parcijalna rekurzija i minimizacija mogu biti *uredno* izračunate. Prednost urednog izračunavanja je u tome što čuva ulazne podatke i ostavlja stroj na poziciji prikladnoj za dalje računanje.

**Definicija 26.** Neka je  $k \in \mathbb{N}_+$ . Za  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  i  $y \in \mathbb{N}$  definiramo konfiguraciju tipa  $(\vec{x}, y)$  kao bilo koju konfiguraciju oblika  $u[\beta(\vec{x})]v \triangleright \bullet^y \sqcup \dots$ , gdje  $u \in \Gamma_+^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , a glava stroja je na znaku  $\triangleright$ . ◁

*Napomena 27.* Cilj ovog rada je opisati, za proizvoljnu parcijalno rekurzivnu funkciju, konstrukciju Turingovog stroja koji je izračunava. Kako će takvi strojevi često biti kompleksni, konstruiramo ih u fragmentima koji se „nastavljaju” jedan na drugi redosljedom koji odgovara definiciji dane funkcije.

**Definicija 28.** [3] Brojevena funkcija  $f^k$  je *uredno izračunljiva* ako postoji fragment  $\mathcal{T}'$  Turingovog stroja s istaknutim stanjima  $q_0$  i  $q_z$ , koji ima sljedeća svojstva:

- Za svaki  $\vec{x} \in \mathcal{D}_f$ ,  $\mathcal{T}'$  prevodi svaku konfiguraciju tipa  $(\vec{x}, 0)$  u stanju  $q_0$ , u neku konfiguraciju tipa  $(\vec{x}, f(\vec{x}))$  u stanju  $q_z$ , s nepromijenjenim  $u$  i  $v$ .
- Za svaki  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k \setminus \mathcal{D}_f$ , polazeći od bilo koje konfiguracije tipa  $(\vec{x}, 0)$  u stanju  $q_0$ ,  $\mathcal{T}'$  nikad ne stigne u stanje  $q_z$ .
- Za svaku konfiguraciju koja nije tipa  $(\vec{x}, 0)$  ni za koji  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ , fragment  $\mathcal{T}'$  nema specificirano ponašanje.

Još kažemo da  $\mathcal{T}'$  uredno računa funkciju  $f$ . ◁

U nastavku pretpostavljamo, kada kažemo da je neki konačan niz prirodnih brojeva  $\vec{x}$  na traci, da to znači da je njegova binarna reprezentacija  $\beta(\vec{x})$  na traci; a kada je neki prirodni broj  $y$  na traci, to znači da je njegova unarna reprezentacija  $\bullet^y$  na traci. Često podrazumijevamo  $\_ \dots$  na kraju trake.

Recimo nešto o konvencijama pri crtanju dijagrama koji reprezentiraju fragmente Turingovog stroja, preuzetima iz [1]. Crtamo konačni usmjereni graf, čiji su vrhovi stanja, a bridovi su prijelazi. Opće pravilo je da se prijelaz  $\delta(p, \alpha) = (q, \beta, d)$  prikazuje kao strelica od vrha  $p$  prema vrhu  $q$ , na kojoj piše  $\alpha:\beta$ . Strelicu crtamo kao punu ako je  $d = 1$  (pomak udesno), a kao iscrtkanu ako je  $d = -1$  (pomak ulijevo). Ako se znak ne mijenja ( $\alpha = \beta$ ), umjesto  $\alpha:\alpha$  pišemo samo  $\alpha$ . Više prijelaza s istim  $p$ ,  $q$  i  $d$  možemo prikazati strelicom s više oznaka  $\alpha_1:\beta_1, \dots, \alpha_k:\beta_k$  — najčešće ćemo to koristiti kada nabrajamo više prijelaza pri kojima se znak ne mijenja. Početno stanje Turingovog stroja obično označavamo „strelicom niotkud”, a završno stanje dvostrukim krugom. U ovom radu će to pravilo vrijediti i za fragmente. Svakom fragmentu će početno i završno stanje biti označeno na takav način, iako to nisu nužno početno, odnosno završno stanje Turingovog stroja čiji je to fragment.

Također, ne pišemo niti crtamo stanja ni prijelaze koji više ne mogu voditi do završnog stanja. Formalno, podrazumijevamo da postoji stanje  $q_x$  takvo da  $\delta$  svaku nedozvoljenu situaciju  $(q, \alpha)$ , koja ne odgovara niti jednom nacrtanom bridu, preslika u  $(q_x, \alpha, -1)$ . Kako to vrijedi i za  $q = q_x$ , za svaki  $\alpha \in \Gamma$ , Turingov stroj, ako se ikad nađe u nekoj od takvih nedozvoljenih konfiguracija, nikada neće stati s radom.

### 2.0.1 Početni i završni fragment

Fragment iz sljedeće leme prevodi početnu konfiguraciju u konfiguraciju prikladnog oblika za uredno računanje. Također, provjerava je li mjesnost ulaza ispravna. Taj fragment je potrebno primijeniti na početku računanja.

**Lema 29.** *Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  prevodi konfiguraciju*

$$(q_0, 0, \beta(\vec{x}) \_ \dots)$$

*u konfiguraciju*

$$(q_{z0}, |\beta(\vec{x})| + 2, [\beta(\vec{x})] > \_ \dots).$$

*Dokaz.* Na početku rada fragmenta, glava stroja je nad prvim simbolom na traci. Taj simbol može biti  $\bullet$  ili  $/$ .

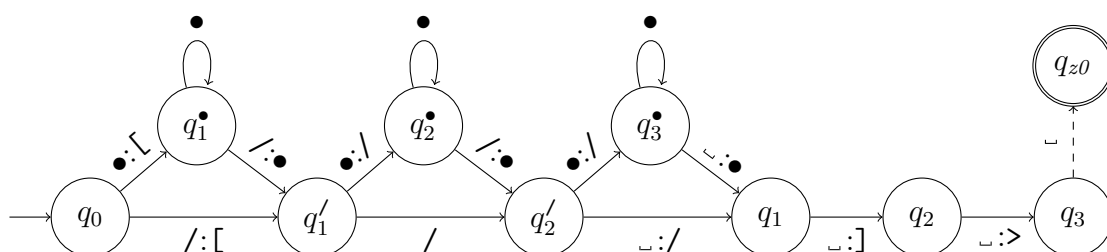
$$\delta(q_0, \bullet) := (q_1^\bullet, \lceil, 1)$$

$$\delta(q_0, /) := (q_1', \lceil, 1)$$

Kreiramo familiju prijelaza sljedećim jednadžbama, za sve  $i \in \{1, \dots, k-2\}$ .

$$\begin{aligned}
 \delta(q_i^\bullet, \bullet) &:= (q_i^\bullet, \bullet, 1) & \delta(q_i^\bullet, /) &:= (q_i', \bullet, 1) \\
 \delta(q_i', /) &:= (q_{i+1}', /, 1) & \delta(q_i', \bullet) &:= (q_{i+1}^\bullet, /, 1) \\
 \delta(q_{k-1}', \bullet) &:= (q_k^\bullet, /, 1) & \delta(q_{k-1}', \_ ) &:= (q_1, /, 1) \\
 \delta(q_{k-1}^\bullet, \bullet) &:= (q_{k-1}^\bullet, \bullet, 1) & \delta(q_{k-1}^\bullet, /) &:= (q_{k-1}', \bullet, 1) \\
 \delta(q_k, \bullet) &:= (q_k^\bullet, \bullet, 1) & \delta(q_k, \_ ) &:= (q_1, \bullet, 1) \\
 \delta(q_1, \_ ) &:= (q_2, ], 1) & \delta(q_2, \_ ) &:= (q_3, >, 1) \\
 \delta(q_3, \_ ) &:= (q_{z0}, \_ , -1)
 \end{aligned}$$

□



Slika 2.1: Grafički prikaz fragmenta iz leme 29 za  $k = 3$ .

S obzirom na to da ćemo koristiti uredno izračunavanje, bit će nam potreban fragment koji će završni izlaz urednog izračunavanja postaviti u standardni oblik.

**Lema 30.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $v \in \Gamma^*$  prevodi konfiguraciju

$$(q_z, |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, [\beta(\vec{x})]v > \bullet^y \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{zf}, 0, \bullet^y \_ \dots).$$

*Dokaz.* Prvo provjerimo je li  $y = 0$  i ulazimo u stanje  $q_1$  ako nije, a u stanje  $q_5$  ako jest.

$$\begin{aligned}
 \delta(q_z, >) &:= (q_z, >, 1) & \delta(q_z, \bullet) &:= (q_1, \circ, -1) \\
 \delta(q_z, \_ ) &:= (q_5, \_ , -1)
 \end{aligned}$$

Simbol  $\circ$  služi označavanju simbola koje smo već prepisali, a simbol  $\times$  zapisu već označenih simbola  $\bullet$  na početak trake.

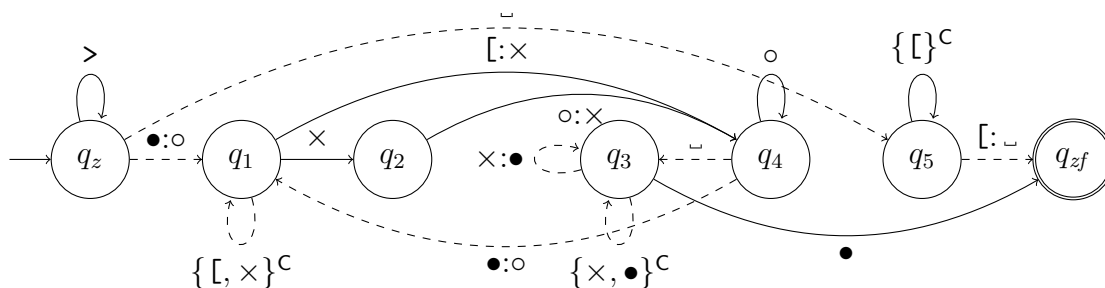
$$\begin{aligned} \delta(q_1, \alpha) &:= (q_1, \circ, -1), \alpha \notin \{\lceil, \times\} & \delta(q_1, \times) &:= (q_2, \times, 1) \\ \delta(q_1, \lceil) &:= (q_4, \times, 1) & \delta(q_2, \circ) &:= (q_4, \times, 1) \\ \delta(q_4, \circ) &:= (q_4, \circ, 1) & \delta(q_4, \bullet) &:= (q_1, \circ, -1) \\ \delta(q_4, \lrcorner) &:= (q_3, \lrcorner, -1) \end{aligned}$$

Stanje  $q_3$  služi kako bismo obrisali sve simbole s trake do prvog simbola  $\times$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_3, \alpha) &:= (q_3, \lrcorner, -1), \alpha \notin \{\times, \bullet\} & \delta(q_3, \times) &:= (q_3, \bullet, -1) \\ \delta(q_3, \bullet) &:= (q_{zf}, \bullet, -1) \end{aligned}$$

Stanje  $q_5$  služi brisanju svih simbola s trake ako je  $y = 0$ .

$$\delta(q_5, \alpha) := (q_5, \lrcorner, -1), \alpha \neq \lceil \qquad \delta(q_5, \lceil) := (q_{zf}, \lrcorner, -1) \quad \square$$



Slika 2.2: Grafički prikaz fragmenta iz leme 30.

**Teorem 31.** *Svaka uredno izračunljiva funkcija je Turing-izračunljiva.*

*Dokaz.* Neka je  $f$  uredno izračunljiva funkcija mjesnosti  $k$ . Za dani ulaz  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$  primijenimo fragment iz leme 29, potom fragment koji uredno računa  $f$ , pa fragment iz leme 30. Ako  $\vec{x}$  nije ispravne mjesnosti, prvi fragment će raditi beskonačno; a ako jest, ali nije iz  $\mathcal{D}_f$ , drugi će fragment raditi beskonačno. Za  $\vec{x} \in \mathcal{D}_f$ , nakon primjene drugog fragmenta na traci će ostati  $[\beta(\vec{x})] > \bullet^{f(\vec{x})} \lrcorner \dots$ , što će primjenom trećeg fragmenta postati  $\bullet^{f(\vec{x})} \lrcorner \dots$ . Po definiciji 25 funkcija  $f$  je Turing-izračunljiva.  $\square$

## 2.1 Inicijalne funkcije

### 2.1.1 Nulfunkcija

Ako se na početku urednog računanja nulfunkcije na traci nalazi  $u[\beta(x)]v>$ , rezultat je upravo  $u[\beta(x)]v>$ . Također, stroj se već nalazi na poziciji iznad simbola  $>$ , stoga poštujemo pravilo urednog izračunavanja ako ne promijenimo ništa na traci. Kreiramo trivijalni fragment koji neće promijeniti stanje trake kako bismo ga za potrebna izračunavanja nulfunkcije mogli uklopiti u odgovarajući fragment.

**Propozicija 32.** *Postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $x \in \mathbb{N}$ , za sve  $u, v \in \Gamma^*$ , prevodi konfiguraciju*

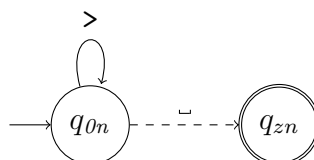
$$(q_{0n}, |u| + |\beta(x)| + |v| + 2, u[\beta(x)]v> \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{zn}, |u| + |\beta(x)| + |v| + 2, u[\beta(x)]v> \sqcup \dots).$$

*Dokaz.* Fragment u pitanju izvršit će jedan pomak glave stroja udesno, a potom jedan pomak ulijevo.

$$\begin{aligned} \delta(q_{0n}, >) &:= (q_{0n}, >, 1) \\ \delta(q_{0n}, \sqcup) &:= (q_{zn}, \sqcup, -1) \end{aligned} \quad \square$$



Slika 2.3: Grafički prikaz fragmenta iz propozicije 32.

### 2.1.2 Koordinatne projekcije

Prisjetimo se definicije 16: za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$ , za svaki  $n \in \{1, 2, \dots, k\}$ , funkciju  $I_n^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  definiranu s  $I_n^k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_n$  nazivamo  $n$ -ta  $k$ -mjesna koordinatna projekcija. Uočimo da je ulazni podatak  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  na traci Turingovog stroja zapisan u obliku  $\beta(\vec{x}) = \bullet^{x_1} / \dots / \bullet^{x_k}$ . Dakle, za izračunati  $n$ -tu koordinatnu projekciju potrebno je prepisati sadržaj između  $(n-1)$ -og i  $n$ -tog simbola  $/$  iz ulaznog podatka. Posebni su slučajevi za vrijednosti  $n = 1$ , kada trebamo prepisati sadržaj između  $[$  i prvog simbola  $/$  iz ulaznog podatka, te za  $n = k$ , kada trebamo prepisati sadržaj između zadnjeg simbola  $/$  i  $]$ .

**Lema 33.** Neka je  $k \in \mathbb{N}_+$  i  $n \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ . Postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{0p}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v \succ \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z1}, |u| + |\beta(x_1, \dots, x_n)|, u[\bullet^{x_1} / \bullet^{x_2} / \dots / \bullet^{x_n} \# \bullet^{x_{n+1}} / \dots / \bullet^{x_k}]v \succ \sqcup \dots).$$

*Dokaz.* Krećemo se ulijevo do simbola ], a potom korištenjem familije prijelaza pozicioniramo glavu na  $(k-n)$ -ti simbol / zdesna.

$$\delta(q_{0p}, \alpha) := (q_{0p}, \alpha, -1), \alpha \neq ]$$

$$\delta(q_{0p}, ]) := (q'_0, ], -1)$$

Familija prijelaza, za  $i \in \{0, \dots, k-n-2\}$ :

$$\delta(q'_i, \bullet) := (q'_i, \bullet, -1)$$

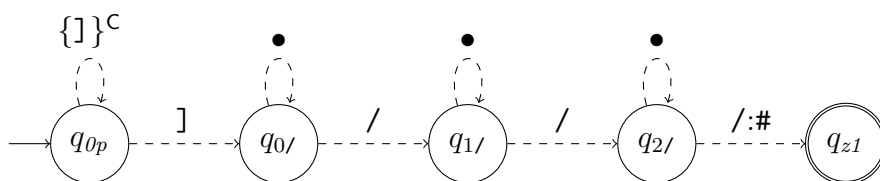
$$\delta(q'_i, /) := (q'_{i+1}, /, -1)$$

Dolazimo do  $(k-n)$ -tog simbola / te ga označavamo.

$$\delta(q'_{k-n-1}, \bullet) := (q'_{k-n-1}, \bullet, -1)$$

$$\delta(q'_{k-n-1}, /) := (q_{z1}, \#, -1)$$

□



Slika 2.4: Grafički prikaz fragmenta iz leme 33 za mjesnost  $k = 4$ , te  $n = 1$ .

**Lema 34.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{z1}, |u| + |\beta(x_1, \dots, x_n)|, u[\bullet^{x_1} / \bullet^{x_2} / \dots / \bullet^{x_n} \# \bullet^{x_{n+1}} / \dots / \bullet^{x_k}]v \succ \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{zp}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v \succ \bullet^{x_n} \sqcup \dots).$$



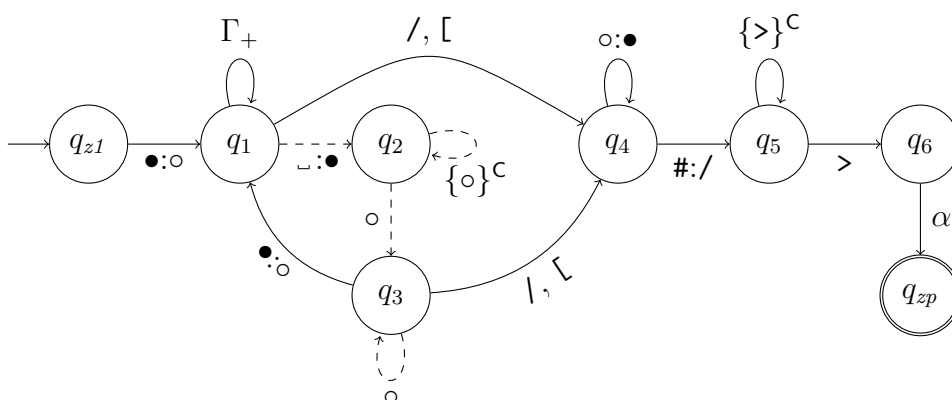
*Dokaz.* Uočimo da se nalazimo u jednoj od sljedećih situacija:

- Glava je iznad simbola  $\bullet$ : njega trebamo označiti tako što ćemo ga zamijeniti simbolom  $\circ$ , te ga zapisati na desni kraj trake. Ponavljamo postupak.
- Glava je iznad simbola  $/$  ili  $\sqcup$ . Tada smo gotovi sa zapisivanjem; vratimo simbole koji su označeni u neoznačeno stanje, te namjestimo glavu stroja iznad simbola  $>$ .

$$\begin{array}{ll}
 \delta(q_{z1}, \bullet) := (q_1, \circ, 1) & \delta(q_{z1}, /) := (q_4, /, 1) \\
 \delta(q_{z1}, \sqcup) := (q_4, \sqcup, 1) & \delta(q_1, \alpha) := (q_1, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ \\
 \delta(q_1, \_ ) := (q_2, \bullet, -1) & \delta(q_2, \alpha) := (q_2, \alpha, -1), \alpha \neq \circ \\
 \delta(q_2, \circ) := (q_3, \circ, -1) & \delta(q_3, \circ) := (q_3, \circ, -1) \\
 \delta(q_3, \bullet) := (q_1, \circ, 1) & \delta(q_3, /) := (q_4, /, 1) \\
 \delta(q_3, \sqcup) := (q_4, \sqcup, 1) & \delta(q_4, \circ) := (q_4, \bullet, 1) \\
 \delta(q_4, \#) := (q_5, /, 1) & \delta(q_5, \alpha) := (q_5, \alpha, 1), \alpha \neq >
 \end{array}$$

Stanje  $q_6$  služi pozicioniranju glave stroja iznad simbola  $>$  za zadovoljavanje svojstva urednog izračunavanja.

$$\delta(q_5, >) := (q_6, >, 1) \quad \delta(q_6, \alpha) := (q_{zp}, \alpha, -1), \alpha \in \Gamma \quad \square$$



Slika 2.5: Grafički prikaz fragmenta iz leme 34.

Fragmenti iz lema 33 i 34 računaju  $n$ -tu  $k$ -mjesnu koordinatnu projekciju kada je  $n < k \in \mathbb{N}_+$ . Potrebno je još promotriti slučaj kada je  $n = k$ .

**Lema 35.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{0p}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v \triangleright \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{zp}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v \triangleright \bullet^{x_k} \sqcup \dots).$$

*Dokaz.* Krećemo se ulijevo do simbola  $]$  i promatramo prvi simbol slijeva.

$$\begin{aligned} \delta(q_{0p}, \alpha) &:= (q_{0p}, \alpha, -1), \alpha \neq ] \\ \delta(q_{0p}, ] &:= (q_0, ], -1) \end{aligned}$$

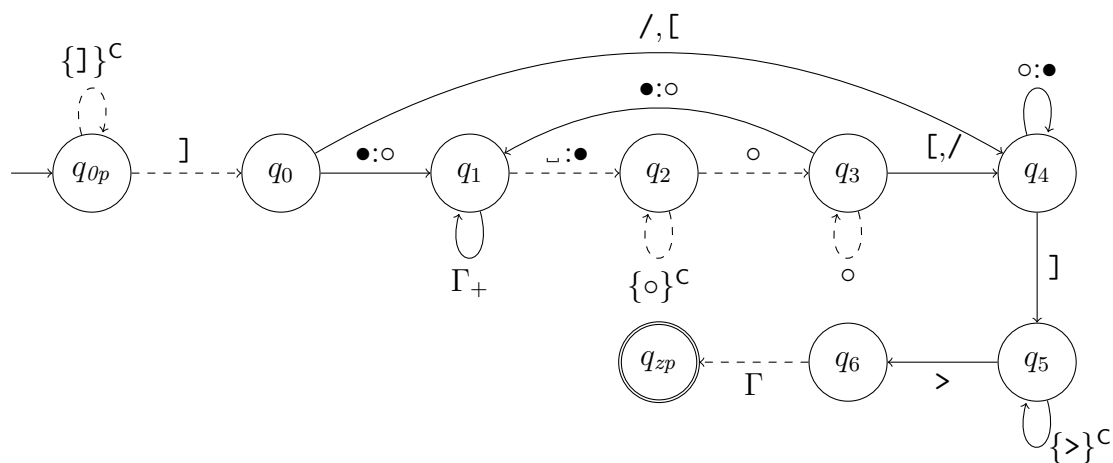
Kao i u dokazu leme 34, uočimo da se nalazimo u jednoj od sljedećih situacija:

- Glava je nad simbolom  $\bullet$  kojeg trebamo označiti tako što ćemo ga zamijeniti simbolom  $\circ$ , te ga zapisati u prvu ćeliju zdesna u kojoj je zapisan  $\sqcup$ . Ponavljamo postupak.
- Glava je nad simbolom  $/$  ili  $[$ . Tada smo gotovi sa zapisivanjem; vratimo simbole koji su označeni u neoznačeno stanje, te namjestimo glavu stroja iznad simbola  $\triangleright$ .

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, \bullet) := (q_1, \circ, 1) & \delta(q_0, /) := (q_4, /, 1) \\ \delta(q_0, [) := (q_4, [, 1) & \delta(q_1, \alpha) := (q_1, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ \\ \delta(q_1, \sqcup) := (q_2, \bullet, -1) & \delta(q_2, \alpha) := (q_2, \alpha, -1), \alpha \neq \circ \\ \delta(q_2, \circ) := (q_3, \circ, -1) & \delta(q_3, \circ) := (q_3, \circ, -1) \\ \delta(q_3, \bullet) := (q_1, \circ, 1) & \delta(q_3, /) := (q_4, /, 1) \\ \delta(q_3, [) := (q_4, [, 1) & \delta(q_4, \circ) := (q_4, \bullet, 1) \\ \delta(q_4, ] & \delta(q_5, \alpha) := (q_5, \alpha, 1), \alpha \neq \triangleright \end{array}$$

Stanje  $q_6$  služi pozicioniranju glave stroja iznad simbola  $\triangleright$ , za zadovoljavanje svojstva urednog izračunavanja.

$$\delta(q_5, \triangleright) := (q_6, \triangleright, 1) \quad \delta(q_6, \alpha) := (q_{zp}, \alpha, -1), \alpha \in \Gamma \quad \square$$



Slika 2.6: Grafički prikaz fragmenta iz leme 35.

Sljedeća propozicija objedinjuje leme 33, 34 i 35 u tvrdnju da je  $n$ -ta  $k$ -mjesna koordinatna projekcija uredno izračunljiva.

**Propozicija 36.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{0p}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v>\_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{zp}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v>\bullet^{x_n}\_ \dots).$$

*Dokaz.* Ako je  $n < k$ , prvo pokrenemo fragment iz leme 33, a potom fragment iz leme 34. U slučaju da je  $n = k$ , pokrećemo fragment iz leme 35. Na kraju trake, desno od simbola  $>$ , nalazit će se upravo  $I_n^k(\vec{x})$ .  $\square$

### 2.1.3 Funkcija sljedbenika

**Lema 37.** Postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $x \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

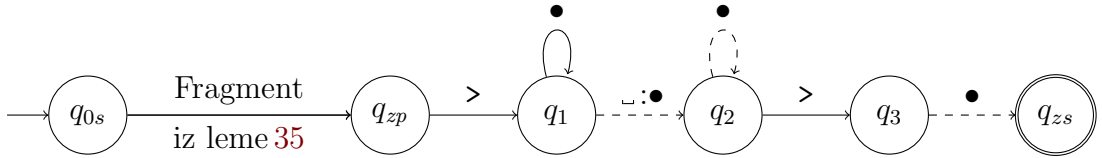
$$(q_{0s}, |u| + |\beta(x)| + |v| + 2, u[\beta(x)]v>\_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{zs}, |u| + |\beta(x)| + |v| + 2, u[\beta(x)]v>\bullet^{x+1}\_ \dots).$$

*Dokaz.* Jedan mogući način jest primijeniti fragment za izračunavanje koordinatne projekcije  $I_1^1$ , te potom na desni kraj trake dopisati simbol  $\bullet$ . Fragment iz leme 35 prevodi konfiguraciju  $(q_{0p}, |u| + |\beta(x)| + |v| + 2, u[\beta(x)]v \succ \_ \dots)$  u konfiguraciju  $(q_{zp}, |u| + |\beta(x)| + |v| + 2, u[\beta(x)]v \succ \bullet^x \_ \dots)$ . Potom primjenjujemo sljedeća pravila prijelaza:

$$\begin{aligned} \delta(q_{zp}, \succ) &:= (q_1, \succ, 1) & \delta(q_1, \bullet) &:= (q_1, \bullet, 1) \\ \delta(q_1, \_ ) &:= (q_2, \bullet, -1) & \delta(q_2, \bullet) &:= (q_2, \bullet, -1) \\ \delta(q_2, \succ) &:= (q_3, \succ, 1) & \delta(q_3, \bullet) &:= (q_{zs}, \bullet, -1) \end{aligned} \quad \square$$



Slika 2.7: Grafički prikaz fragmenta iz propozicije 37.

## 2.2 Kompozicija

Neka je funkcija  $F$  definirana s  $F(\vec{x}) := H(G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x}))$ . Pretpostavimo da se funkcije  $H$  i  $G_i$ , za sve  $i \in \{1, \dots, l\}$  mogu uredno izračunati. S danim  $\vec{x}$  i riječima  $u \in \Gamma_+^*$ ,  $v \in (\Gamma_+ \setminus \{[, ]\})^*$ , primijenimo fragment za uredno računanje  $G_1$ , što nam daje izlaz koji potom „uokvirimo” drugim znakovima tako da dobijemo  $u[\beta(\vec{x})]v\{G_1(\vec{x})\}$ . To nam omogućuje primjenu fragmenta za uredno računanje  $G_2$ . Nastavljamo postupak dalje do  $G_l$ , odvajajući rezultate separatorima. To nam daje izlaz  $u[\beta(\vec{x})]v\{z_1/z_2/z_3/\dots/z_l\}$ , gdje su  $z_i := \bullet^{G_i(\vec{x})}$ . Sačuvamo  $\vec{x}$  tako što zamijenimo simbole  $[i]$  simbolima  $\{i\}$ , a  $z_1, \dots, z_l$  „ogradimo” simbolima  $[i]$ , jer ćemo ih upotrijebiti za uredno računanje funkcije  $H$ . Tako dobivamo  $u\{\beta(\vec{x})\}v[z_1/z_2/z_3/\dots/z_l]$ , što je prikladno stanje trake za primjenu funkcije  $H$ , nakon koje je na traci zapisano  $u\{\beta(\vec{x})\}v[z_1/z_2/z_3/\dots/z_l] \succ \beta(H(G_1(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x})))$ . Konačno, vratimo simbole  $[i]$  oko  $\beta(\vec{x})$  i brišemo simbole između riječi  $v$  i simbola  $\succ$ . Time smo dobili odgovarajući oblik izlaznih podataka  $u[\beta(\vec{x})]v \succ \beta(F(\vec{x}))$ .

Navedeni postupak prikazujemo u fragmentima. Sljedeći fragment omogućuje da prvi izlazni podatak dobiven izračunavanjem premjestimo i sačuvamo za dalji račun. Dopisujemo simbol  $\{$  iza postojećih „nevažnih” podataka kako bismo ih separirali od podataka koje ćemo zapisati i koristiti za računanje kompozicije.

**Lema 38.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{0k}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v > \bullet^y \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z1}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + y + 2, u[\beta(\vec{x})]v\{\bullet^y > \sqcup \dots\}.$$

*Dokaz.* Primijetimo da je glava stroja nad simbolom  $>$ . Dovoljno je zamijeniti ga simbolom  $\{\}$ , a potom u prvu praznu ćeliju na traci zapisati simbol  $>$ .

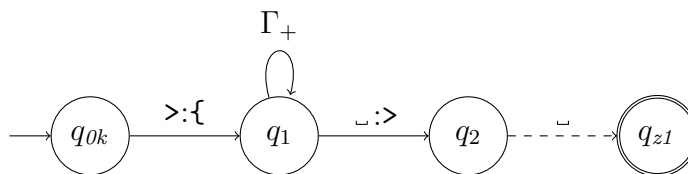
$$\delta(q_{0k}, >) := (q_1, \{\}, 1)$$

$$\delta(q_1, \alpha) := (q_1, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+$$

$$\delta(q_1, \sqcup) := (q_2, >, 1)$$

$$\delta(q_2, \sqcup) := (q_{z1}, \sqcup, -1)$$

□



Slika 2.8: Grafički prikaz fragmenta iz leme 38.

Sljedeći fragment također omogućuje čuvanje dobivenih izlaznih podataka za dalji račun. Dopisujemo simbol  $/$  iza već sačuvane riječi  $z$  kako bismo je separirali od simbola koje ćemo tek zapisati.

**Lema 39.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{]\})^*$ ,  $z \in \{\{\}, /, \bullet\}^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{2k}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + |z| + 2, u[\beta(\vec{x})]vz > \bullet^y \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z2}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + |z| + y + 2, u[\beta(\vec{x})]vz/\bullet^y > \sqcup \dots).$$

*Dokaz.* Postupak je analogan postupku iz dokaza leme 38, samo sada simbol  $\succ$  zamjenjujemo simbolom  $/$  kako bismo separirali podatke od prethodno sačuvanih.

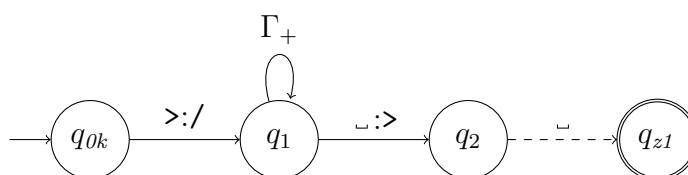
$$\delta(q_{1k}, \succ) := (q_1, /, 1)$$

$$\delta(q_1, \alpha) := (q_1, \alpha, 1), \quad \alpha \in \Gamma_+$$

$$\delta(q_1, \sqcup) := (q_2, \succ, 1)$$

$$\delta(q_2, \sqcup) := (q_{z1}, \sqcup, -1)$$

□



Slika 2.9: Grafički prikaz fragmenta iz leme 39.

Sljedeće što bismo trebali napraviti je zamijeniti simbole  $[i]$  simbolima  $\{i\}$  redom, a simbol  $\{$  zamijeniti s  $[$ . Kako bi  $z_1, \dots, z_k$  bili omeđeni simbolima  $[i]$  još je preostalo dopisati simbol  $]$  prije simbola  $\succ$ .

**Lema 40.** *Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{]\})^*$ ,  $z \in \{/, \bullet\}^*$ , prevodi konfiguraciju*

$$(q_{k3}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + |z| + 3, u[\beta(\vec{x})]v\{z>\sqcup \dots\})$$

*u konfiguraciju*

$$(q_{z3}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + |z| + 4, u\{\beta(\vec{x})\}v[z]>\sqcup \dots).$$

*Dokaz.*

$$\delta(q_{k3}, \succ) := (q_0, \succ, 1)$$

$$\delta(q_0, \succ) := (q_0, ], -1)$$

$$\delta(q_0, ] ) := (q_0, \} , -1)$$

$$\delta(q_0, [ ) := (q_1, \{ , 1)$$

$$\delta(q_1, ] ) := (q_{z3}, ] , 1)$$

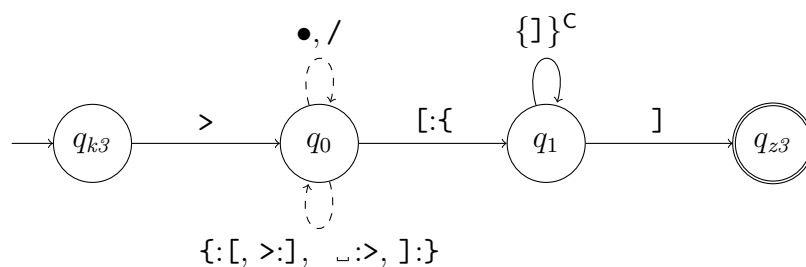
$$\delta(q_0, \sqcup) := (q_0, \succ, -1)$$

$$\delta(q_0, \{ ) := (q_0, [ , -1)$$

$$\delta(q_0, \alpha) := (q_0, \alpha, -1), \quad \alpha \in \{\bullet, /\}$$

$$\delta(q_1, \alpha) := (q_1, \alpha, 1), \quad \alpha \neq ]$$

□



Slika 2.10: Grafički prikaz fragmenta iz leme 40.

Po završetku računanja je potrebno vratiti simbole [ i ] na njihova izvorna mjesta.

**Lema 41.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{]\})^*$ ,  $z \in \{\bullet, /\}^*$ , prevodi konfiguraciju

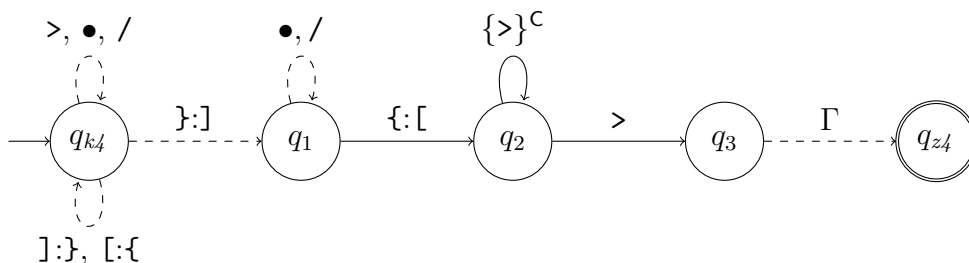
$$(q_{k4}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + |z| + 4, u\{\beta(\vec{x})\}v[z]>\bullet^y \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z4}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + |z| + 4, u[\beta(\vec{x})]v\{z\}>\bullet^y \_ \dots).$$

*Dokaz.* Uočimo da se glava stroja nalazi nad simbolom >. Pomičemo se ulijevo i zamjenjujemo simbole prema sljedećim prijelazima:

$$\begin{aligned} \delta(q_{k4}, >) &:= (q_{k4}, >, -1) & \delta(q_{k4}, ]) &:= (q_{k4}, }, -1) \\ \delta(q_{k4}, [) &:= (q_{k4}, \{, -1) & \delta(q_{k4}, \alpha) &:= (q_{k4}, \alpha, -1), \alpha \in \{\bullet, /\} \\ \delta(q_{k4}, }) &:= (q_1, ], -1) & \delta(q_1, \{) &:= (q_2, [, 1) \\ \delta(q_1, \alpha) &:= (q_1, \alpha, -1), \alpha \in \{\bullet, /\} & \delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \alpha, 1), \alpha \neq > \\ \delta(q_2, >) &:= (q_3, >, 1) & \delta(q_3, \alpha) &:= (q_{z4}, \alpha, -1), \alpha \in \Gamma \quad \square \end{aligned}$$



Slika 2.11: Grafički prikaz fragmenta iz leme 41.

Potrebno je još obrisati simbole između riječi  $v$  i simbola  $>$  kako bismo poštivali pravilo urednog računanja, te premjestiti rezultat izračunavanja neposredno iza  $>$ .

**Lema 42.** *Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{ \} )^*$ ,  $z \in \{ \bullet, / \}^*$ , prevodi konfiguraciju*

$$(q_{z4}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + |z| + 4, u[\beta(\vec{x})]v\{z\}\>\bullet^y \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z5}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v\>\bullet^y \_ \dots).$$

*Dokaz.* Brišemo riječ  $z$ , tako da umjesto  $z$  budu simboli  $\_$  omeđeni slijeva simbolom  $>$ , a zdesna rezultatom. Također, rezultat s desne strane omeđimo graničnikom  $!$  što će nam olakšati kasnije premještanje. Time dobivamo konfiguraciju  $(q_3, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 3, u[\beta(\vec{x})]v\>\_^{z+2}\bullet^y ! \_ \dots)$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_{z4}, \alpha) &:= (q_{z4}, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ & \delta(q_{z4}, \_ ) &:= (q_1, !, -1) \\ \delta(q_1, \bullet) &:= (q_1, \bullet, -1) & \delta(q_1, >) &:= (q_2, \_ , -1) \\ \delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \_ , -1), \alpha \neq \{ \} & \delta(q_2, \{ \} ) &:= (q_3, >, 1) \end{aligned}$$

Potom uzimamo jedan po jedan simbol  $\bullet$  s kraja i prenosimo ga do simbola  $>$  ili do prethodno prenesenog simbola  $\bullet$  i zapisujemo ga na sljedeću poziciju desno.

$$\begin{aligned} \delta(q_3, \_ ) &:= (q_3, \_ , 1) & \delta(q_3, \bullet) &:= (q_4, \_ , -1) \\ \delta(q_4, \_ ) &:= (q_4, \_ , -1) & \delta(q_4, >) &:= (q_5, >, 1) \\ \delta(q_4, \bullet) &:= (q_5, \bullet, 1) & \delta(q_5, \_ ) &:= (q_3, \bullet, 1) \end{aligned}$$

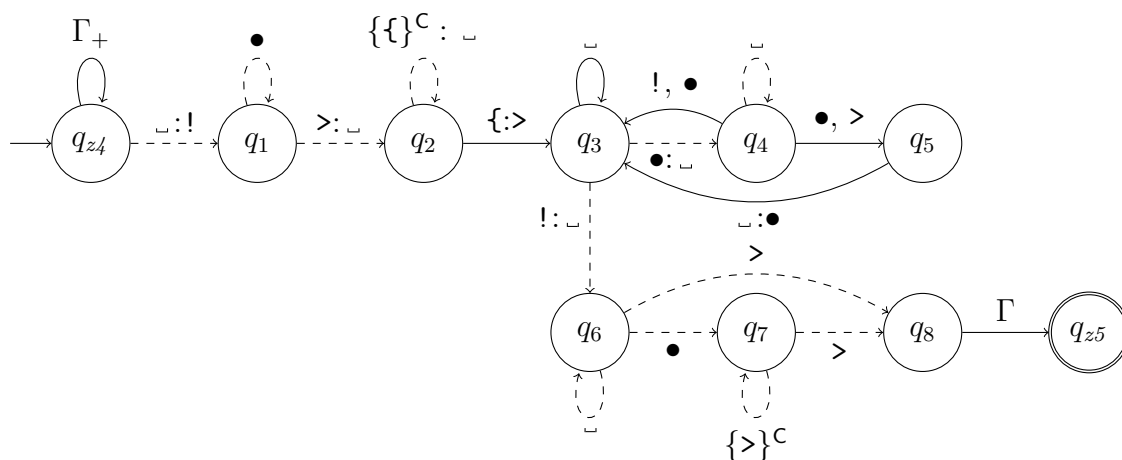
Preostaje još obrisati završni graničnik, te proći kroz sve praznine ulijevo dok ne dođemo do zadnjeg znaka od  $\bullet^y$  ako je  $y \neq 0$ , ili do  $>$  ako je  $y = 0$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_3, !) &:= (q_6, \_ , -1) & \delta(q_6, \_ ) &:= (q_6, \_ , -1) \\ \delta(q_6, \bullet) &:= (q_7, \bullet, -1) & \delta(q_6, >) &:= (q_8, >, -1) \end{aligned}$$

Konačno, postavljamo glavu stroja iznad simbola  $>$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_7, \alpha) &:= (q_7, \alpha, -1), \alpha \neq > & \delta(q_7, >) &:= (q_8, >, -1) \\ \delta(q_8, \alpha) &:= (q_{z5}, \alpha, 1) \end{aligned} \quad \square$$





Slika 2.12: Grafički prikaz fragmenta iz leme 42.

Sljedećom propozicijom objedinjujemo sve fragmente potrebne za uredno izračunavanje kompozicije  $H \circ (G_1, G_2, \dots, G_l)$ .

**Propozicija 43.** Za sve  $k, l \in \mathbb{N}_+$ , za sve uredno izračunljive funkcije  $H^l, G_1^k, G_2^k, \dots, G_l^k$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k, u \in \Gamma^*, v \in (\Gamma \setminus \{ \} )^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_0, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v > \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_z, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v'| + 4, u[\beta(\vec{x})]v' > \bullet^{H(G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x}))} \_ \dots)$$

ako je  $\vec{x} \in \mathcal{D}_{H \circ (G_1, G_2, \dots, G_l)}$  iz definicije 17. Ako  $\vec{x} \notin \mathcal{D}_{H \circ (G_1, G_2, \dots, G_l)}$ , fragment nikada ne stiže u stanje  $q_z$ .

*Dokaz.* Korištenjem fragmenata iz lema 38, 39, 40, 41 te fragmenata za uredno računanje  $G_1, G_2, \dots, G_l$  provodimo iduće korake:

- $u[\vec{x}]v >$  — pokrenemo fragment za uredno računanje  $G_1$
- $u[\vec{x}]v > G_1(\vec{x})$  — primijenimo lemu 38
- $u[\vec{x}]v\{G_1(\vec{x}) >$  — pokrenemo fragment za uredno računanje  $G_2$
- $u[\vec{x}]v\{G_1(\vec{x}) > G_2(\vec{x})$  — primijenimo lemu 39

- $u[\vec{x}]v\{G_1(\vec{x})/G_2(\vec{x})\}$

Ponavljamo postupak do  $G_l$ .

- $u[\vec{x}]v\{G_1(\vec{x})/G_2(\vec{x})/\cdots/G_{l-1}(\vec{x})\}G_l(\vec{x})$  — primijenimo lemu 39
- $u[\vec{x}]v\{G_1(\vec{x})/G_2(\vec{x})/\cdots/G_{l-1}(\vec{x})/G_l(\vec{x})\}$  — primijenimo lemu 40
- $u\{\vec{x}\}v[G_1(\vec{x})/G_2(\vec{x})/\cdots/G_{l-1}(\vec{x})/G_l(\vec{x})]$  — pokrenemo fragment za uredno računanje  $H$
- $u\{\vec{x}\}v[G_1(\vec{x})/G_2(\vec{x})/\cdots/G_{l-1}(\vec{x})/G_l(\vec{x})] > H(G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x}))$  — primijenimo lemu 41
- $u[\vec{x}]v\{G_1(\vec{x})/G_2(\vec{x})/\cdots/G_{l-1}(\vec{x})/G_l(\vec{x})\} > H(G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x}))$  — primijenimo lemu 42
- $u[\vec{x}]v > H(G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \dots, G_l(\vec{x}))$

Navedeno je upravo tražena uredno izračunata kompozicija.

S druge strane, ako  $\vec{x} \notin \mathcal{D}_{H \circ (G_1, G_2, \dots, G_l)}$ , prema definiciji 17, to se može dogoditi na dva načina. Ako  $\vec{x} \notin \bigcap_{i=1}^l \mathcal{D}_{G_i}$ , postoji neki  $i$  takav da  $\vec{x} \notin \mathcal{D}_{G_i}$ , pa označimo s  $i_0$  najmanji takav. Gore prikazani postupak neće se više izvršavati do  $G_l$ , već do  $G_{i_0}$ , jer će stroj pri izvršavanju postupka za  $i_0$  ući u stanje koje smo formalno nazvali  $q_x$ . Stoga izvršavanje s takvim  $\vec{x}$  nikad neće završiti. Ako pak  $l$ -torka povratnih vrijednosti nije u  $\mathcal{D}_H$ , pri pokretanju fragmenta za uredno izvršavanje funkcije  $H$  ćemo završiti u stanju  $q_x$ , stoga ni izvršavanje s takvim  $\vec{x}$  neće nikada završiti.  $\square$

## 2.3 Primitivna rekurzija

Neka je funkcija  $F$  definirana sa:

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, 0) &:= G(\vec{x}), \\ F(\vec{x}, y + 1) &:= H(\vec{x}, y, F(\vec{x}, y)). \end{aligned}$$

Po pretpostavci indukcije, funkcije  $G^k$  i  $H^{k+2}$  mogu se uredno izračunati. Pretpostavimo da se na traci nalazi konfiguracija  $u[\beta(\vec{x}, y)]v$ . Izračunavanje provodimo pomoću fragmenata. Dupliciramo  $\beta(\vec{x})$  i nakon korištenja za računanje  $F(\vec{x}, 0)$  „zamotoamo” ga u oble zgrade kako bismo olakšali njegovo ponovno korištenje. Potom računamo  $H(\vec{x}, k, F(\vec{x}, k))$ ,  $k \leq y$  za zadani  $y \in \mathbb{N}$ , pritom uklanjajući nepotrebne podatke s trake kako bi, konačno, na traci bilo zapisano  $u[\beta(\vec{x}, y)]v > \beta(F(\vec{x}, y))$ .

Prvi fragment priprema stanje na traci kako bismo mogli kopirati  $\beta(\vec{x})$  i  $\beta(y)$  na mjesta prikladna za dalji račun.

**Lema 44.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

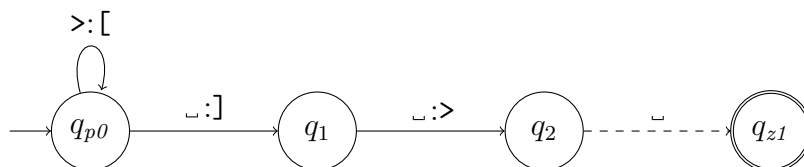
$$(q_{p0}, |u| + |\beta(\vec{x}, y)| + |v| + 3, u[\beta(\vec{x}, y)]v > \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z1}, |u| + |\beta(\vec{x}, y)| + |v| + 5, u[\beta(\vec{x}, y)]v [] > \_ \dots).$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} \delta(q_{p0}, >) &:= (q_{p0}, [, 1) & \delta(q_{p0}, \_ ) &:= (q_1, ], 1) \\ \delta(q_1, \_ ) &:= (q_2, >, 1) & \delta(q_2, \_ ) &:= (q_{z1}, \_ , -1) \end{aligned} \quad \square$$



Slika 2.13: Grafički prikaz fragmenta iz leme 44.

U fragmentu iz leme 44 zapisali smo još jedne uglate zagrade na traku. Kako riječ  $v$  ne sadrži uglate zagrade, uvijek možemo biti sigurni koje zagrade su najdesnije, i njih ćemo zvati *aktivne*. Korištenje aktivnih zagrada u izračunavanju omogućuje nam da namjestimo ulazne podatke za iduću funkciju koja se treba izračunati, te osigurava da su ugniježđena računanja primitivne rekurzije korektna. Za ugniježđena računanja važno je da se za svaku dublju primitivnu rekurziju koriste nove aktivne zagrade i podaci unutar i desno od njih, te će se po završetku računanja konkretne primitivne rekurzije brisati.

U idućem fragmentu zapisujemo broj ponavljanja  $y$  iza uglatih zagrada kako bismo mogli označiti koliko smo ponavljanja već napravili. U samom prepisivanju koristimo simbole  $\#$  i  $\$$ ; simbol  $\#$  služi kako bismo označili simbol  $/$  koji razdvaja zapise  $\beta(\vec{x})$  i  $\beta(y)$ , a simbol  $\$$  označava već prepisane simbole  $\bullet$ .

**Lema 45.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{z1}, |u| + |\beta(\vec{x}, y)| + |v| + 4, u[\beta(\vec{x}, y)]v [] > \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z2}, |u| + |\beta(\vec{x})| + 1, u[\beta(\vec{x})\#\$\^y]v [] \bullet^y > \_ \dots).$$

*Dokaz.* Glava stroja se na početku nalazi nad znakom  $>$ . Pomičemo je ulijevo do prvog znaka lijevo od drugog znaka  $]$ . Ako se na tom mjestu nalazi simbol  $/$ , to znači da je  $y = 0$ , pa smo gotovi s prepisivanjem broja  $y$ . Moramo označiti simbol  $/$  kako bismo znali da separira  $\beta(\vec{x})$  i  $\beta(y)$ . Ako je prvi pročitani simbol  $\bullet$ , to znači da je  $y \neq 0$ . U tom slučaju označujemo  $\bullet$  i prepisujemo ga desno od aktivnih uglatih zagrada. Vraćamo se natrag do prvog neoznačenog simbola lijevo od neaktivne zagrade  $]$  i ponavljamo postupak dok konačno ne označimo simbol  $/$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_{z1}, \alpha) &:= (q_{z1}, \alpha, -1), \alpha \neq ] & \delta(q_{z1}, ] &:= (q_{00}, ], -1) \\ \delta(q_{00}, \alpha) &:= (q_{00}, \alpha, -1), \alpha \neq ] & \delta(q_{00}, ] &:= (q_0, ], -1) \\ \delta(q_0, /) &:= (q_{z2}, \#, -1) \end{aligned}$$

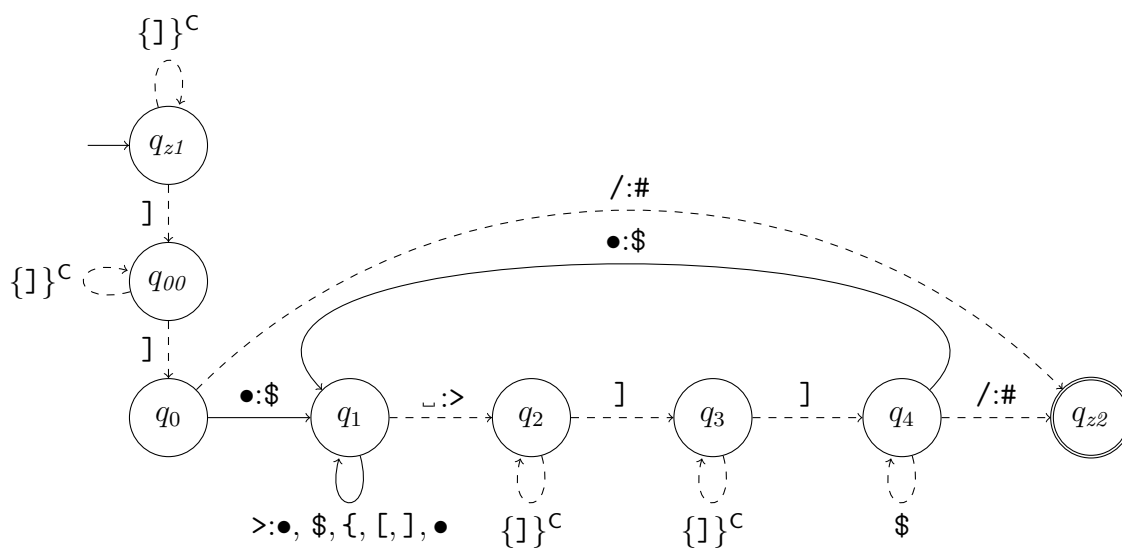
Označavamo  $\bullet$  i kopiramo ga iza aktivnih uglatih zagrada.

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \bullet) &:= (q_1, \$, 1) & \delta(q_1, \alpha) &:= (q_1, \alpha, 1), \alpha \in \{\$, ], [, ], \bullet\} \\ \delta(q_1, >) &:= (q_1, \bullet, 1) & \delta(q_1, \_) &:= (q_2, >, -1) \end{aligned}$$

Stanje  $q_2$  nas vraća do idućeg simbola koji je potrebno prepisati, ili do simbola  $/$  koji je potrebno zamijeniti s  $\#$  kako bismo separirali  $\beta(\vec{x})$  i  $\beta^y$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \alpha, -1), \alpha \neq ] & \delta(q_2, ] &:= (q_3, ], -1) \\ \delta(q_3, \alpha) &:= (q_3, \alpha, -1), \alpha \neq ] & \delta(q_3, ] &:= (q_4, ], -1) \\ \delta(q_4, \$) &:= (q_4, \$, -1) & \delta(q_4, \bullet) &:= (q_1, \$, 1) \\ \delta(q_4, /) &:= (q_{z2}, \#, -1) \end{aligned}$$

Glava stroja se na kraju rada nalazi neposredno lijevo od  $\#$ . □



Slika 2.14: Grafički prikaz fragmenta iz leme 45.

Sljedeći korak je prepisati riječ  $\beta(\vec{x})$  unutar aktivnih uglatih zagrada, za što će nam biti potrebno prepisivanje znakova. Kako će nam takvo prepisivanje biti potrebno više puta, izdvajamo ga u zasebnu lemu. Na dijagramu 2.15 su označena dva inicijalna stanja jer u ovaj fragment možemo doći na dva načina; pročitavši  $\bullet$  ili  $/$ , stoga u ovisnosti od pročitanoj simbolu koristimo fragment s početkom u jednom od stanja,  $q_a$  ili  $q_b$ .

**Lema 46.** Za  $\alpha \in \{\bullet, /\}$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \in \Gamma_+^*$  prevodi konfiguraciju

$$(q_a, |w_0| + |w_1| + 1, w_0 [w_1 \alpha w_2 [w_1 w_3] w_4 > w_5 \_ \dots))$$

u konfiguraciju

$$(q_c, \sum_{i=0}^5 |w_i| + 5, w_0 [w_1 \alpha w_2 [w_1 \alpha w_3] w_4 > w_5 \_ \dots)).$$

*Dokaz.*

Prijenos ako je pročitano  $\bullet$ :

$$\delta(q_a, \alpha) := (q_a, \alpha, 1), \alpha \neq [ \qquad \delta(q_a, [) := (q_\bullet, [, 1)$$

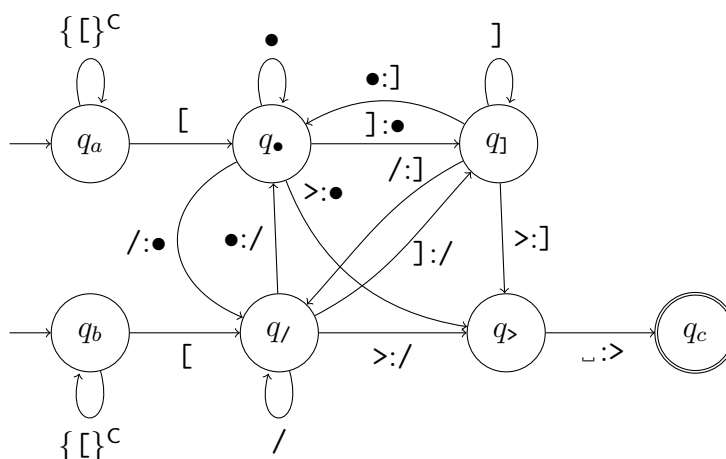
Prijenos ako je pročitano /:

$$\delta(q_b, \alpha) := (q_b, \alpha, 1), \alpha \neq [ \quad \delta(q_b, [) := (q_l, [, 1)$$

Pamtimo koji simbol je pročitano, te ga zapisujemo nakon što se pomaknemo na iduće mjesto udesno:

$$\begin{aligned} \delta(q_\bullet, \bullet) &:= (q_\bullet, \bullet, 1) & \delta(q_\bullet, /) &:= (q_l, \bullet, 1) \\ \delta(q_\bullet, ] &:= (q_l, \bullet, 1) & \delta(q_\bullet, >) &:= (q_\bullet, \bullet, 1) \\ \delta(q_l, \bullet) &:= (q_\bullet, ], 1) & \delta(q_l, /) &:= (q_l, ], 1) \\ \delta(q_l, ] &:= (q_l, ], 1) & \delta(q_l, >) &:= (q_\bullet, ], 1) \\ \delta(q_l, /) &:= (q_\bullet, /, 1) & \delta(q_l, /) &:= (q_l, /, 1) \\ \delta(q_l, ] &:= (q_l, /, 1) & \delta(q_l, >) &:= (q_\bullet, /, 1) \\ \delta(q_\bullet, \_ &:= (q_\bullet, >, -1) \end{aligned}$$

□



Slika 2.15: Grafički prikaz fragmenta iz leme 46.

Kao što je najavljeno, u idućem fragmentu prepisujemo riječ  $\beta(\vec{x})$  unutar aktivnih uglatih zagrada. U prepisivanju ćemo koristiti simbol  $\#$  koji služi za označavanje simbola  $/$  unutar  $\beta(\vec{x})$ . Kada završimo prepisivanje, vraćamo sve simbole  $/$  i  $\bullet$  u njihovo prvotno stanje.

**Lema 47.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{z2}, |u| + |\beta(\vec{x})|, u[\beta(\vec{x})\#\$^y]v[[]\bullet^y > \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z3}, |u| + 2|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + 5, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v[\beta(\vec{x})]\bullet^y > \_ \dots).$$

*Dokaz.* Uočimo da se glava stroja nalazi na prvom mjestu lijevo od simbola #. Jedini simboli koje možemo pročitati na tom mjestu su [ ako je  $k = 1$  i  $x_1 = 0$ , / ako je  $x_k = 0$ , te  $\bullet$  ako je  $x_k \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_{z2}, \lceil) &:= (q_5, \lceil, 1) & \delta(q_{z2}, \bullet) &:= (q_a, \$, 1) \\ \delta(q_{z2}, /) &:= (q_b, +, 1) \end{aligned}$$

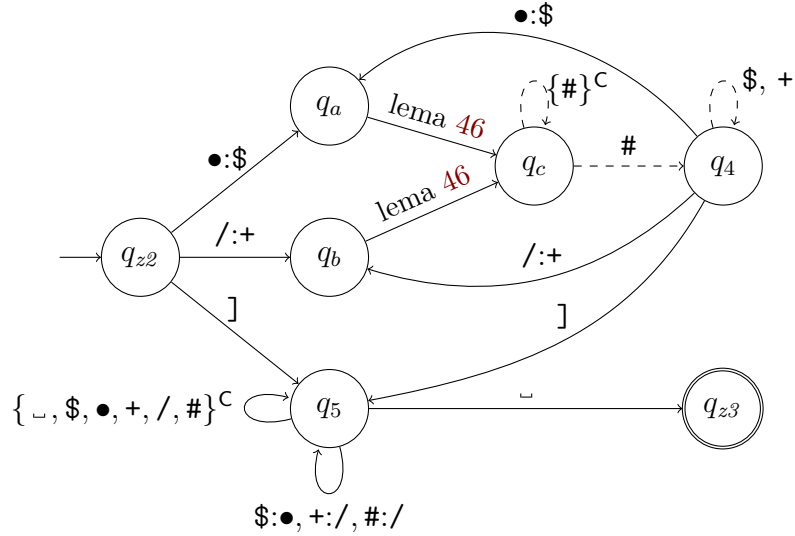
Koristimo fragment za prepisivanje iz leme 46. Potom stanja  $q_3$  i  $q_4$  pozicioniraju glavu stroja na prvi nepreneseni simbol ako takav postoji.

$$\begin{aligned} \delta(q_c, \alpha) &:= (q_c, \alpha, -1), \alpha \neq \# & \delta(q_c, \#) &:= (q_4, \#, -1) \\ \delta(q_4, \$) &:= (q_4, \$, -1) & \delta(q_4, +) &:= (q_4, +, -1) \\ \delta(q_4, \bullet) &:= (q_a, \$, 1) & \delta(q_4, /) &:= (q_b, +, 1) \\ \delta(q_4, \lceil) &:= (q_5, \lceil, 1) \end{aligned}$$

Ako su preneseni svi simboli, ulazimo u stanje  $q_5$  koje će vratiti zamijenjene simbole  $\bullet$  i / u prvotno stanje, a ostale simbole ostavlja nepromijenjene.

$$\begin{aligned} \delta(q_5, \$) &:= (q_5, \bullet, 1) & \delta(q_5, +) &:= (q_5, /, 1) \\ \delta(q_5, \#) &:= (q_5, /, 1) & \delta(q_5, \alpha) &:= (q_5, \alpha, 1), \alpha \notin \{\_, \$, \bullet, +, /, \#\} \\ \delta(q_5, \_ ) &:= (q_{z3}, \_ , -1) \end{aligned}$$

Glava stroja se na kraju ovog fragmenta nalazi iznad simbola  $>$ . □



Slika 2.16: Grafički prikaz fragmenta iz leme 47.

Iduće što nam je potrebno kako bismo izračunali  $F(\vec{x}, 1) := H(\vec{x}, 0, F(\vec{x}, 0)) = H(\vec{x}, 0, G(\vec{x}))$  jest pripremiti ulazne podatke za funkciju  $H$ . Također, moramo na neki način označiti o kojem se broju ponavljanja radi u pojedinom koraku. To ćemo ponovo riješiti označavanjem: zamjenjivat ćemo simbole  $\bullet$  simbolima  $\circ$ . Prvo prilagodimo trenutno stanje podataka na traci.

**Lema 48.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{ ] \})^*$ ,  $z \in \{ \bullet \}^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{z3}, |u| + 2|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + 5, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v[\beta(\vec{x})]\bullet^y > z \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z4}, |u| + 2|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + |z| + 7, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v(\beta(\vec{x}))\bullet^y\{z\} > \_ \dots).$$

*Dokaz.* Zamjenjujemo zagrade  $[ i ]$  s  $( i )$ , te  $>$  s  $\{$ . Na kraj trake zapisujemo  $\}$ .

$$\delta(q_{z3}, \alpha) := (q_{z3}, \alpha, -1), \alpha \notin \{ [, ] \}$$

$$\delta(q_{z3}, [) := (q_1, (, 1)$$

$$\delta(q_1, >) := (q_1, \{, 1)$$

$$\delta(q_2, \_ ) := (q_3, >, 1)$$

$$\delta(q_{z3}, ]) := (q_{z3}, ), -1)$$

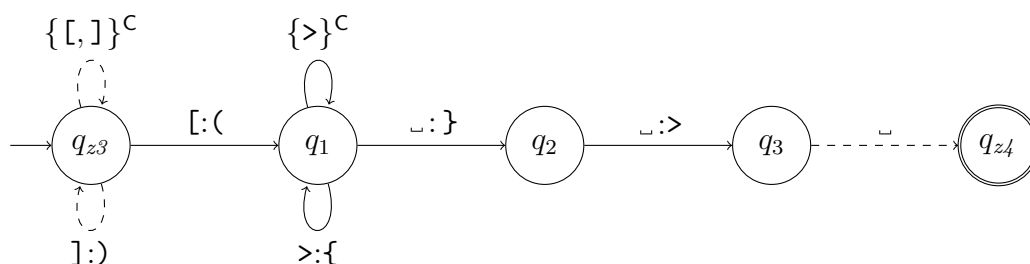
$$\delta(q_1, \alpha) := (q_1, \alpha, 1), \alpha \neq >$$

$$\delta(q_1, \_ ) := (q_2, \}, 1)$$

$$\delta(q_3, \_ ) := (q_{z4}, \_ , -1)$$

□





Slika 2.17: Grafički prikaz fragmenta iz leme 48.

Promotrimo nakratko kako napredujemo s izračunavanjem primitivne rekurzije. Korištenjem do sada napisanih fragmenata, te fragmenta za uredno računanje funkcije  $G$  možemo napraviti sljedeće:

- $u[\vec{x}/y]v>$  — pokrenemo fragmente za dupliciranje (leme 44, 45, 47)
- $u[\vec{x}/y]v[\vec{x}]y>$  — pokrenemo fragment za uredno računanje  $G$
- $u[\vec{x}/y]v[\vec{x}]y>G(\vec{x})$  — pokrenemo fragment iz leme 48
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x})y\{G(\vec{x})\}>$

Sada je potrebno zapisati podatke koje koristimo za ulaz funkcije  $H$ .

**Lema 49.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \{0, \dots, y\}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ ,  $z \in \{\bullet\}^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{z4}, |u| + 2|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + |z| + 7, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v(\beta(\vec{x}))\bullet^{y-n} \circ^n \{z\}> \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z5}, |u| + 3|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + |z| + 10, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v(\beta(\vec{x}))\bullet^{y-n} \circ^n \{z\}[\beta(\vec{x})/]> \_ \dots).$$

*Dokaz.* Dopišemo prvo uglate zagrade:

$$\begin{aligned} \delta(q_{z4}, >) &:= (q_{z4}, [, 1) & \delta(q_{z4}, \_) &:= (q_1, ], 1) \\ \delta(q_1, \_) &:= (q_2, >, -1) \end{aligned}$$

Vraćamo se do simbola  $)$  i redom označavamo simbole od  $\beta(\vec{x})$  te ih prepisujemo unutar uglatih zagrada.

$$\begin{aligned} \delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \alpha, -1), \alpha \neq ) & \delta(q_2, ) &:= (q_3, ), -1) \\ \delta(q_3, \#) &:= (q_3, \#, -1) & \delta(q_3, \$) &:= (q_3, \$, -1) \end{aligned}$$

Ako smo došli do zagrade, tada smo gotovi s prepisivanjem  $\beta(\vec{x})$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_3, () := (q_8, (), 1) & \qquad \delta(q_3, \bullet) := (q_a, \$, 1) \\ \delta(q_3, /) := (q_b, \#, 1) \end{aligned}$$

Koristimo fragment za prepisivanje iz leme 46. Potom stanja  $q_6$  i  $q_7$  pozicioniraju glavu stroja na prvi nepreneseni simbol ako takav postoji.

$$\begin{aligned} \delta(q_c, \alpha) := (q_c, \alpha, -1), \alpha \neq ) & \qquad \delta(q_c, ) := (q_7, ), -1) \\ \delta(q_7, \$) := (q_7, \$, -1) & \qquad \delta(q_7, \#) := (q_7, \#, -1) \\ \delta(q_7, \bullet) := (q_a, \$, 1) & \qquad \delta(q_7, /) := (q_b, \#, 1) \\ \delta(q_7, () := (q_8, (), 1) \end{aligned}$$

Ako su preneseni svi simboli, ulazimo u stanje  $q_8$  koje će vratiti zamijenjene simbole  $\bullet$  i  $/$  u originalno stanje, te dopisati separator  $/$  iza upravo zapisanog  $\beta(\vec{x})$  unutar uglatih zagrada.

$$\begin{aligned} \delta(q_8, \$) := (q_8, \bullet, 1) & \qquad \delta(q_8, \#) := (q_8, /, 1) \\ \delta(q_8, \alpha) := (q_8, \alpha, 1), \alpha \notin \{[, >\} & \qquad \delta(q_8, ]) := (q_8, /, 1) \\ \delta(q_8, >) := (q_8, ], 1) & \qquad \delta(q_8, \_) := (q_9, >, 1) \\ \delta(q_9, \_) := (q_{z5}, \_, -1) & \qquad \square \end{aligned}$$

**Lema 50.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \{0, \dots, y\}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ ,  $z \in \{\bullet\}^*$ , prevodi konfiguraciju

$$\begin{aligned} (q_{z5}, |u| + 3|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + |z| + 10, \\ u[\beta(\vec{x})/y]v(\beta(\vec{x})) \bullet^{y-n} \circ^n \{z\} [\beta(\vec{x})/] > \_ \dots) \end{aligned}$$

u konfiguraciju

$$\begin{aligned} (q_{z6}, |u| + 3|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + |z| + n + 11, \\ u[\beta(\vec{x})/y]v(\beta(\vec{x})) \bullet^{y-n} \circ^n \{z\} [\beta(\vec{x})/ \bullet^n /] > \_ \dots). \end{aligned}$$

*Dokaz.* Pomičemo se ulijevo dok ne dođemo ili do simbola  $\circ$  koji u tom slučaju označimo i prepisemo unutar uglatih zagrada:

$$\delta(q_{z5}, \circ) := (q_1, \#, 1)$$

ili do simbola  $)$ , a u tom slučaju smo gotovi s prepisivanjem:

$$\delta(q_{z5}, ) := (q_2, ), 1)$$

Druge simbole ostavljamo nepromijenjenima.

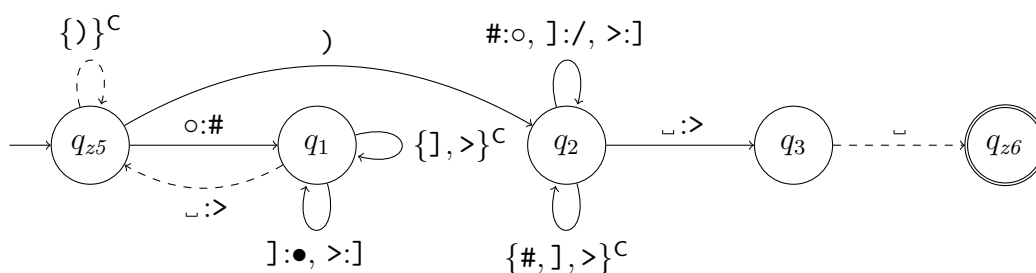
$$\delta(q_{z5}, \alpha) := (q_{z5}, \alpha, -1), \alpha \neq )$$

Prijenos označenog simbola:

$$\begin{aligned} \delta(q_1, \alpha) &:= (q_1, \alpha, 1), \alpha \notin \{], >\} & \delta(q_1, ] &:= (q_1, \bullet, 1) \\ \delta(q_1, >) &:= (q_1, ], 1) & \delta(q_1, \_ &:= (q_{z5}, >, -1) \end{aligned}$$

Nakon prijenesa simbola, stanje  $q_{z5}$  nas ponovo vraća do prvog neoznačenog simbola  $\circ$  ili do simbola  $)$  koji označava kraj prepisivanja. U potonjem slučaju, stanje  $q_2$  će vratiti označene simbole u prvotno stanje.

$$\begin{aligned} \delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \alpha, 1), \alpha \notin \{\#, ], >\} & \delta(q_2, \#) &:= (q_2, \circ, 1) \\ \delta(q_2, ] &:= (q_2, /, 1) & \delta(q_2, >) &:= (q_2, ], 1) \\ \delta(q_2, \_ &:= (q_3, >, 1) & \delta(q_3, \_ &:= (q_{z6}, \_, -1) \quad \square \end{aligned}$$



Slika 2.18: Grafički prikaz fragmenta iz leme 50.

Kako bi ulazni podaci bili potpuni, potrebno je u aktivne uglate zagrade zapisati još i riječ  $z$  koja je rezultat prethodnog izračunavanja.

**Lema 51.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \{0, \dots, y\}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ ,  $z \in \{\bullet\}^*$ , prevodi konfiguraciju

$$\begin{aligned} (q_{z6}, |u| + 3|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + |z| + n + 11, \\ u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v(\beta(\vec{x}))\bullet^{y-n}\circ^n\{z\}[\beta(\vec{x})/\bullet^n/]>\_ \dots) \end{aligned}$$

u konfiguraciju

$$\begin{aligned} (q_{z7}, |u| + 3|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + 2|z| + n + 11, \\ u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v(\beta(\vec{x}))\bullet^{y-n}\circ^n\{z\}[\beta(\vec{x})/\bullet^n/z]>\_ \dots). \end{aligned}$$

*Dokaz.* Pomaknimo glavu stroja do prvog simbola } koji se nalazi lijevo od aktivnih uglatih zagrada.

$$\begin{aligned}\delta(q_{z6}, \alpha) &:= (q_{z6}, \alpha, -1), \alpha \neq ] & \delta(q_{z6}, ] &:= (q_0, ], -1) \\ \delta(q_0, \alpha) &:= (q_0, \alpha, -1), \alpha \neq } & \delta(q_0, } &:= (q_{00}, }, -1)\end{aligned}$$

Postoje samo dvije opcije: možemo pročitati simbol •,

$$\delta(q_{00}, \bullet) := (q_1, \#, 1)$$

ili simbol {, a u tom slučaju smo gotovi s prepisivanjem.

$$\delta(q_{00}, \{) := (q_4, \{, 1)$$

Prijenos označenog simbola:

$$\begin{aligned}\delta(q_1, \alpha) &:= (q_1, \alpha, 1), \alpha \notin \{], >\} & \delta(q_1, ] &:= (q_1, \bullet, 1) \\ \delta(q_1, >) &:= (q_1, ], 1) & \delta(q_1, \_ ) &:= (q_2, >, -1)\end{aligned}$$

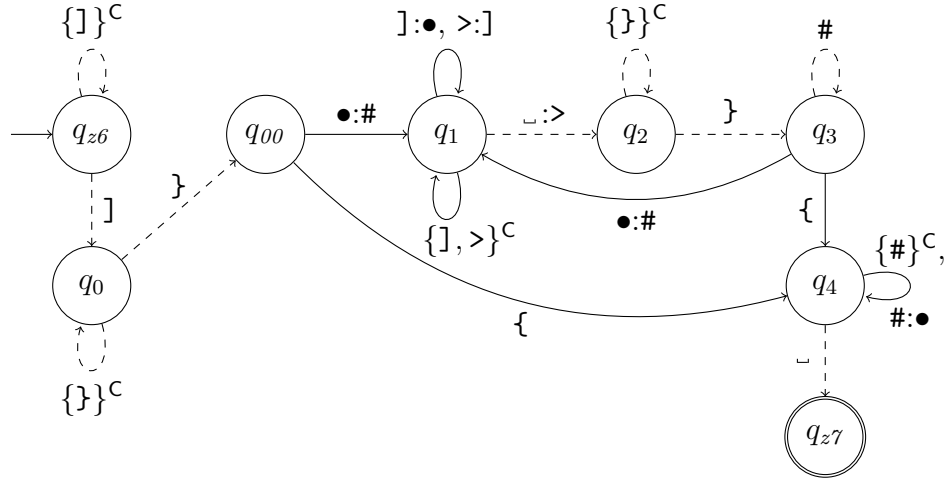
Nakon prijena simbola, stanja  $q_2$  i  $q_3$  nas vraćaju do prvog neoznačenog simbola •, ili do simbola { koji označava kraj prepisivanja.

$$\begin{aligned}\delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \alpha, -1), \alpha \neq } & \delta(q_2, } &:= (q_3, }, -1) \\ \delta(q_3, \#) &:= (q_3, \#, -1) & \delta(q_3, \bullet) &:= (q_1, \#, 1) \\ \delta(q_3, \{) &:= (q_4, \{, 1)\end{aligned}$$

Kada uđemo u stanje  $q_4$ , ono vraća označene simbole u prvotno stanje i vodi nas do praznine kako bismo pozicionirali glavu stroja iznad simbola >.

$$\begin{aligned}\delta(q_4, \alpha) &:= (q_4, \alpha, 1), \alpha \neq \# \\ \delta(q_4, \#) &:= (q_4, \bullet, 1) \\ \delta(q_4, \_ ) &:= (q_{z7}, \_ , -1)\end{aligned}$$

□



Slika 2.19: Grafički prikaz fragmenta iz leme 51.

**Lema 52.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \{0, \dots, y\}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ ,  $z \in \{\bullet\}^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{z7}, |u| + 3|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + 2|z| + n + 11, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v(\beta(\vec{x}))\bullet^{y-n}\circ^n\{z\}[\beta(\vec{x})/\bullet^n/z]>\_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z8}, |u| + 3|\beta(\vec{x})| + |v| + 2y + 2|z| + n + 11, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v(\beta(\vec{x}))\bullet^{y-n-1}\circ^{n+1}\{z\}[\beta(\vec{x})/\bullet^n/z]>\_ \dots).$$

*Dokaz.* U ovom fragmentu označavamo da ćemo u idućem koraku napraviti  $(n+1)$ -vo izračunavanje funkcije  $H$  ako je  $n < y$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_{z7}, \alpha) &:= (q_{z7}, \alpha, -1), \alpha \neq \{ \\ \delta(q_{z7}, \{) &:= (q_1, \{, -1) \end{aligned}$$

Krećući se ulijevo, poslije simbola  $\{$  mogu naići samo simboli  $\}$ ,  $\circ$  i  $\bullet$ ; pročitati bilo koji drugi simbol bilo bi pogrešno.

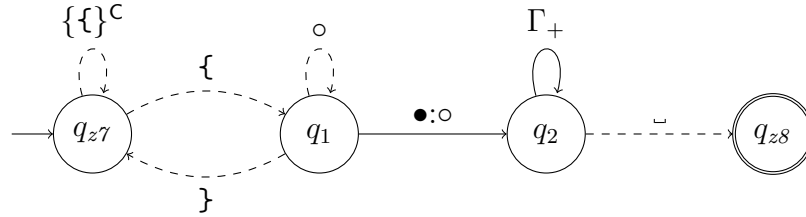
$$\begin{aligned} \delta(q_1, \}) &:= (q_{z7}, \}, -1) \\ \delta(q_1, \circ) &:= (q_1, \circ, -1) \\ \delta(q_1, \bullet) &:= (q_2, \circ, 1) \end{aligned}$$

Nakon što je označen odgovarajući simbol, potrebno je pomaknuti glavu stroja iznad simbola  $\succ$ .

$$\delta(q_2, \alpha) := (q_2, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+$$

$$\delta(q_2, \sqcup) := (q_{z8}, \sqcup, -1)$$

□



Slika 2.20: Grafički prikaz fragmenta iz leme 52.

Sljedeći fragment služi promjeni simbola  $[ i ]$  u  $\{ i \}$ .

**Lema 53.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{z8}, |u| + |\beta(\vec{x})| + 2, u[\beta(\vec{x})] \succ v \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z9}, |u| + |\beta(\vec{x})| + 2, u\{\beta(\vec{x})\} \succ v \sqcup \dots).$$

*Dokaz.*

$$\delta(q_{z8}, \alpha) := (q_{z8}, \alpha, -1), \alpha \notin \{[, ]\}$$

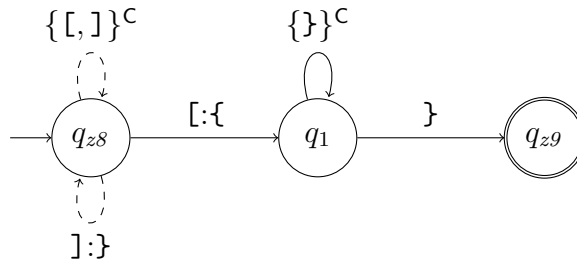
$$\delta(q_{z8}, ] := (q_{z8}, }, -1)$$

$$\delta(q_{z8}, [ := (q_1, {, 1)$$

$$\delta(q_1, \alpha) := (q_1, \alpha, 1), \alpha \neq }$$

$$\delta(q_1, } := (q_{z9}, }, 1)$$

□



Slika 2.21: Grafički prikaz fragmenta iz leme 53.

Sljedeći fragment služi da bismo provjerili jesmo li gotovi s radom. Ako je  $y = n$ , tada smo izvršili sva potrebna ponavljanja. Ako je  $n < y$ , nastavljamo ponavljati postupak iz prethodnih fragmenata.

**Lema 54.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \{0, \dots, y\}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $z \in \{[, ], \{, \}, /, \bullet\}^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{z9}, |u| + |\beta(\vec{x})| + y + |z| + 2, u(\beta(\vec{x})) \bullet^{y-n} \circ^n z \rangle \_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z10}, |u| + |\beta(\vec{x})| + y + |z| + 2, u(\beta(\vec{x})) \bullet^{y-n} \circ^n z \rangle \_ \dots)$$

ako vrijedi  $n < y$ , a u konfiguraciju

$$(q_=, |u| + |\beta(\vec{x})| + y + |z| + 2, u(\beta(\vec{x})) \circ^y z \rangle \_ \dots)$$

ako vrijedi  $n = y$ .

*Dokaz.* Pomičemo se ulijevo dok ne dođemo do simbola  $\rangle$ .

$$\delta(q_{z9}, \alpha) := (q_{z9}, \alpha, -1), \alpha \neq \rangle \quad \delta(q_{z9}, \rangle) := (q_1, \rangle, 1)$$

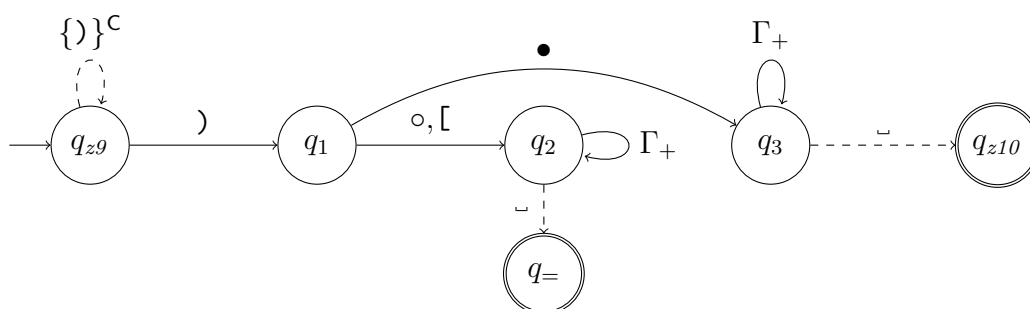
Ako desno od simbola  $\rangle$  nađemo  $\circ$  ili  $[$ , tada smo izvršili zadana ponavljanja.

$$\begin{aligned} \delta(q_1, \circ) &:= (q_2, \circ, 1) & \delta(q_1, [) &:= (q_2, [, 1) \\ \delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ & \delta(q_2, \_) &:= (q_=, \_, -1) \end{aligned}$$

Ako desno od simbola  $\bullet$  nađemo  $\bullet$ , trebamo nastaviti postupak ponavljanja.

$$\begin{aligned} \delta(q_1, \bullet) &:= (q_3, \bullet, 1) & \delta(q_3, \alpha) &:= (q_3, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ \\ \delta(q_3, \_) &:= (q_{z10}, \_, -1) \end{aligned}$$

□



Slika 2.22: Grafički prikaz fragmenta iz leme 54.

Ako nastavljamo postupak računanja primitivne rekurzije, idući korak je kao u lemi 48 izlazne podatke „zamotati” u vitičaste zagrade i pomaknuti  $>$  desno od njih.

**Lema 55.** *Postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $u \in \Gamma_+^*$ ,  $z \in (\Gamma_+ \setminus \{>\})^*$ , prevodi konfiguraciju*

$$(q_{z10}, |u|, u>z \_ \dots)$$

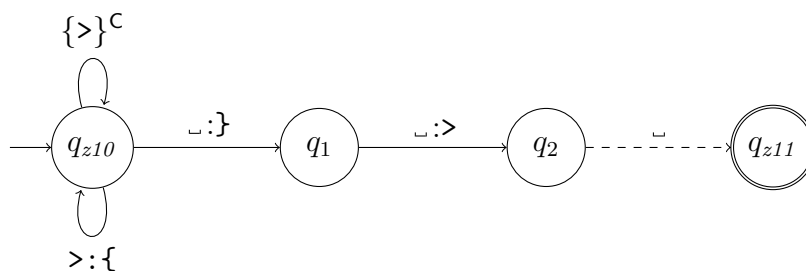
*u konfiguraciju*

$$(q_{z11}, |u| + |z| + 2, u\{z\}> \_ \dots).$$

*Dokaz.* Glava stroja se na početku rada fragmenta nalazi iznad simbola  $>$ . Njega zamjenjujemo s  $\{$ , te na desni kraj trake dopisujemo  $\}$  i  $>$ . Druge simbole ne mijenjamo.

$$\begin{aligned} \delta(q_{z10}, \alpha) &:= (q_{z10}, \alpha, 1), \quad \alpha \neq > & \delta(q_{z10}, >) &:= (q_{z10}, \{, 1) \\ \delta(q_{z10}, \_) &:= (q_1, \}, 1) & \delta(q_1, \_) &:= (q_2, >, 1) \\ \delta(q_2, \_) &:= (q_{z11}, \_, -1) & & \end{aligned}$$

□



Slika 2.23: Grafički prikaz fragmenta iz leme 55.

Kako bismo omogućili rekurzivno računanje primitivne rekurzije, te poštivali pravilo urednog računanja o tome da riječ  $v$  ostaje nepromijenjena, uz korištenje leme 42 za brisanje dodanih simbola nakon  $v$ , bit će nam potrebna još jedna lema kako bismo obrisali te simbole čim postanu nepotrebni za dalje računanje.

**Lema 56.** *Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $\alpha \in \{o, \cdot\}$ ,  $w \in \{\bullet\}^*$ ,  $v \in \{\bullet, / \}^*$ , prevodi konfiguraciju*

$$(q_{pb}, |u| + |w| + |v| + 5, u\alpha\{w\}[v]> \_ \dots)$$

*u konfiguraciju*

$$(q_{zb}, |u| + |v| + 3, u\alpha[v]> \_ \dots).$$



*Dokaz.* Slično postupku u dokazu leme 42, stavljamo graničnik ! na kraj trake, te počevši od aktivne zagrade [ do { brišemo simbole na traci. Na mjesto simbola { pišemo [, što će biti lijevi graničnik.

$$\begin{aligned} \delta(q_{pb}, \alpha) &:= (q_{pb}, \alpha, 1), \quad \alpha \in \Gamma_+ & \delta(q_{pb}, \_) &:= (q_1, !, -1) \\ \delta(q_1, \alpha) &:= (q_1, \alpha, -1), \quad \alpha \in \{>, ], /, \bullet\} & \delta(q_1, [) &:= (q_2, \_, -1) \\ \delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \_, -1), \quad \alpha \neq \{ & \delta(q_2, \{) &:= (q_3, [, 1) \end{aligned}$$

Potom uzimamo jedan po jedan simbol s kraja i prenosimo ga do [ ili do prethodno prenesenog simbola te ga zapisujemo na sljedeću poziciju desno.

$$\begin{aligned} \delta(q_3, \_) &:= (q_3, \_, 1) & \delta(q_3, \bullet) &:= (q_4, \_, -1) \\ \delta(q_3, /) &:= (q_6, \_, -1) & \delta(q_3, >) &:= (q_8, \_, -1) \\ \delta(q_3, ]) &:= (q_{10}, \_, -1) & \delta(q_4, \_) &:= (q_4, \_, -1) \\ \delta(q_4, [) &:= (q_5, [, 1) & \delta(q_4, \alpha) &:= (q_5, \alpha, 1), \quad \alpha \in \{\bullet, /, ]\} \\ \delta(q_5, \_) &:= (q_3, \bullet, 1) & \delta(q_6, \_) &:= (q_6, \_, -1) \\ \delta(q_6, [) &:= (q_7, [, 1) & \delta(q_6, \alpha) &:= (q_7, \alpha, 1), \quad \alpha \in \{\bullet, /, ]\} \\ \delta(q_7, \_) &:= (q_3, /, 1) & \delta(q_8, \_) &:= (q_8, \_, -1) \\ \delta(q_8, [) &:= (q_9, [, 1) & \delta(q_8, \alpha) &:= (q_9, \alpha, 1), \quad \alpha \in \{\bullet, /, ]\} \\ \delta(q_9, \_) &:= (q_3, >, 1) & \delta(q_{10}, \_) &:= (q_{10}, \_, -1) \\ \delta(q_{10}, [) &:= (q_{11}, [, 1) & \delta(q_{10}, \alpha) &:= (q_{11}, \alpha, 1), \quad \alpha \in \{\bullet, /, ]\} \\ \delta(q_{11}, \_) &:= (q_3, ], 1) \end{aligned}$$

Preostaje još obrisati završni graničnik, i proći kroz sve praznine ulijevo dok ne dođemo do zadnjeg prepisanog simbola. Kako je taj simbol >, postavljamo glavu stroja iznad njega.

$$\begin{aligned} \delta(q_3, !) &:= (q_{12}, \_, -1) & \delta(q_{12}, \_) &:= (q_{12}, \_, -1) \\ \delta(q_{12}, >) &:= (q_{13}, >, -1) & \delta(q_{13}, \alpha) &:= (q_{zb}, \alpha, 1), \quad \alpha \in \Gamma \quad \square \end{aligned}$$

Po završetku izračunavanja primitivne rekurzije potrebno je obrisati i pomoćne podatke s trake.

**Lema 57.** *Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma_+ \setminus \{[, ]\})^*$ ,  $z \in \{\bullet\}^*$ , prevodi konfiguraciju*

$$(q_{pv}, |u| + 2|\beta(\vec{x})| + 2y + |v| + 5, u[\beta(\vec{x}, y)]v(\beta(\vec{x})) \circ^y > z \_ \dots)$$

*u konfiguraciju*

$$(q_{zv}, |u| + |\beta(\vec{x})| + y + |v| + 3, u[\beta(\vec{x}, y)]v > z \_ \dots).$$

*Dokaz.* Stavljamo graničnik ! na kraj trake, te počevši od prvog slijeva simbola o ili ) do simbola ( brišemo simbole na traci. Na mjesto simbola ( pišemo >, što će biti lijevi graničnik.

$$\begin{aligned} \delta(q_{pv}, \alpha) &:= (q_{pv}, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ & \delta(q_{pv}, \_ ) &:= (q_1, !, -1) \\ \delta(q_1, \bullet) &:= (q_1, \bullet, -1) & \delta(q_1, >) &:= (q_2, \_ , -1) \\ \delta(q_2, \alpha) &:= (q_2, \_ , -1), \alpha \neq ( & \delta(q_2, ( &:= (q_3, >, 1) \end{aligned}$$

Uzimamo jedan po jedan  $\bullet$  s kraja i prenosimo ga do > ili do prethodno prenesenog simbola  $\bullet$ .

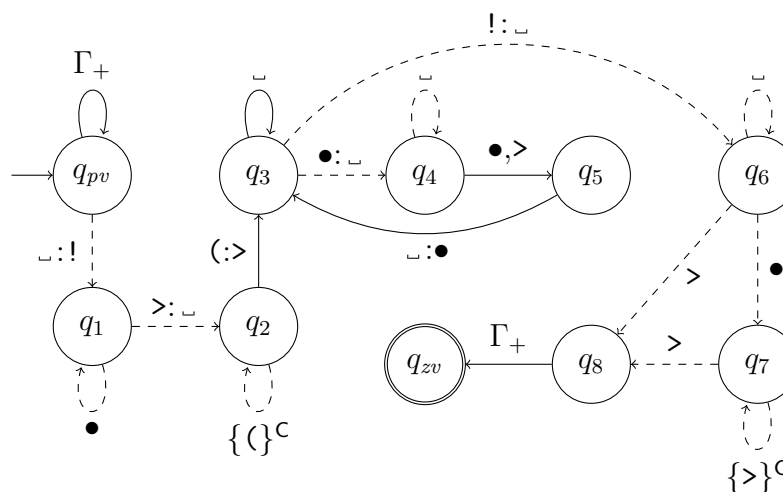
$$\begin{aligned} \delta(q_3, \_ ) &:= (q_3, \_ , 1) & \delta(q_3, \bullet) &:= (q_4, \_ , -1) \\ \delta(q_4, \_ ) &:= (q_4, \_ , -1) & \delta(q_4, >) &:= (q_5, >, 1) \\ \delta(q_4, \bullet) &:= (q_5, \bullet, 1) & \delta(q_5, \_ ) &:= (q_3, \bullet, 1) \end{aligned}$$

Brišemo završni graničnik, te prolazimo kroz praznine ulijevo dok ne dođemo do zadnjeg znaka od  $z$  ako je  $z \neq \epsilon$ , ili do > ako je  $z = \epsilon$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_3, !) &:= (q_6, \_ , -1) & \delta(q_6, \_ ) &:= (q_6, \_ , -1) \\ \delta(q_6, \bullet) &:= (q_7, \bullet, -1) & \delta(q_6, >) &:= (q_8, >, -1) \end{aligned}$$

Konačno, postavljamo poziciju stroja na odgovarajuće mjesto iznad simbola >.

$$\begin{aligned} \delta(q_7, \alpha) &:= (q_7, \alpha, -1), \alpha \neq > & \delta(q_7, >) &:= (q_8, >, -1) \\ \delta(q_8, \alpha) &:= (q_{zv}, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ \end{aligned} \quad \square$$



Slika 2.24: Grafički prikaz fragmenta iz leme 57.

Objedinjujemo fragmente za izračunavanje primitivne rekurzije  $F = G \text{ } \text{R} \text{ } H$  u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 58.** *Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$ , za sve uredno izračunljive totalne funkcije  $H^k$  i  $G^{k+2}$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $y \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju*

$$(q_0, |u| + |\beta(\vec{x})| + y + |v| + 3, u[\beta(\vec{x}, y)]v \rangle \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{z11}, |u| + |\beta(\vec{x})| + y + |v| + 3, u[\beta(\vec{x}, y)]v \rangle \bullet^{F(\vec{x}, y)} \sqcup \dots), \text{ gdje je } F = G \text{ } \text{R} \text{ } H.$$

*Dokaz.* Korištenjem fragmenata 44, 45, 47–55, te fragmenata za uredno izračunavanje funkcija  $G$  i  $H$  dobivamo sljedeći postupak:

- $u[\vec{x}/y]v \rangle$  — pokrenemo fragmente za dupliciranje (leme 44, 45, 47)
- $u[\vec{x}/y]v[\vec{x}] \bullet^y \rangle$  — pokrenemo fragment za uredno računanje  $G$
- $u[\vec{x}/y]v[\vec{x}] \bullet^y \rangle G(\vec{x})$  — pokrenemo fragment iz leme 48
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^y \{G(\vec{x})\} \rangle$  — pokrenemo fragmente iz lema 49, 50, 51
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^y \{G(\vec{x})\} [\vec{x} // G(\vec{x})] \rangle$  — pokrenemo fragment iz leme 52
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-1} \circ \{G(\vec{x})\} [\vec{x} // G(\vec{x})] \rangle$  — pokrenemo fragment iz leme 56
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-1} \circ [\vec{x} // G(\vec{x})] \rangle$  — fragment za uredno računanje  $H$
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-1} \circ [\vec{x} // G(\vec{x})] \rangle H(\vec{x}, 0, G(\vec{x}))$  — fragment iz leme 53
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-1} \circ \{ \vec{x} // G(\vec{x}) \} \rangle H(\vec{x}, 0, G(\vec{x}))$  — fragment iz leme 42
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-1} \circ \rangle H(\vec{x}, 0, G(\vec{x}))$  — fragment iz leme 54
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-1} \circ \rangle H(\vec{x}, 0, G(\vec{x}))$  — fragment iz leme 55
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-1} \circ \{ H(\vec{x}, 0, G(\vec{x})) \} \rangle$  — fragmenti iz lema 49, 50, 51
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-1} \circ \{ H(\vec{x}, 0, G(\vec{x})) \} [x / \bullet / H(\vec{x}, 0, G(\vec{x}))] \rangle$  — pokrenemo fragment iz leme 52
- $u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \bullet^{y-2} \circ^2 \{ H(\vec{x}, 0, G(\vec{x})) \} [x / \bullet / H(\vec{x}, 0, G(\vec{x}))] \rangle$

Dalje pokrećemo fragment iz leme 56 kako bismo obrisali nepotrebne podatke s trake. Pokrećemo fragment za uredno računanje  $H$ , pa fragmente iz lema 53 i 42. Iduće pokrećemo fragment iz leme 54, te u ovisnosti o njegovom rezultatu ponavljamo postupak (ako još nismo izvršili sva ponavljanja, pokrećemo fragment iz leme 55 i ponovo se vraćamo na lemu 49. Stanje na traci, nakon što smo izračunali funkciju  $H$  zadani broj  $y$  puta, je

$$u[\vec{x}/y]v(\vec{x}) \circ^y > F(\vec{x}, y) \sqcup \dots$$

Ako je fragment iz leme 54 završio u stanju  $q_+$ , završavamo izvođenje primitivne rekurzije. Potrebno je još obrisati višak podataka s trake primjenom fragmenta iz leme 57. Konačno stanje na traci je

$$u[\vec{x}/y]v > F(\vec{x}, y) \sqcup \dots \quad \square$$

## 2.4 Minimizacija

Ponovimo definiciju 22: Neka je  $k \in \mathbb{N}_+$  i  $R^{k+1}$  relacija. Za funkciju  $F^k$  definiranu s

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &:= \{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid \exists y R(\vec{x}, y)\}, \\ F(\vec{x}) &:= \min \{y \in \mathbb{N} \mid R(\vec{x}, y)\}, \text{ za sve } \vec{x} \in \mathcal{D}_F, \end{aligned}$$

kažemo da je dobivena *minimizacijom* relacije  $R$ . Pišemo  $F^k := \mu R^{k+1}$ . Vrijedi  $F(\vec{x}) = \mu y (\chi_R(\vec{x}, y) = 1)$ , gdje je  $\chi_R$  karakteristična funkcija relacije  $R$ . Ideja kako ćemo računati funkciju  $F$  je sljedeća: krenuvši od  $y = 0$ , izračunavamo vrijednost funkcije  $\chi_R$  s ulazom  $(\vec{x}, y)$ . Potom provjeravamo vrijedi li  $\chi_R(\vec{x}, y) = 1$ . U slučaju da vrijedi, broj  $y$  je izlazni podatak. U suprotnom, povećavamo  $y$  i ponavljamo postupak. Pritom će nam pomoći činjenica da uredno izračunavanje karakteristične funkcije može promijeniti najviše jednu ćeliju trake, jer njena vrijednost mora biti 0 ili 1.

U sljedećoj lemi postavljamo vrijednost  $y = 0$  kao zadnji ulazni podatak za  $\chi_R$ .

**Lema 59.** *Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju*

$$(q_{m0}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v > \sqcup \dots)$$

*u konfiguraciju*

$$(q_{m1}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 3, u[\beta(\vec{x})/]v > \sqcup \dots).$$

*Dokaz.* Pomaknemo se do simbola  $\sqsupset$ , zamijenimo ga s  $/$ , a potom pamtimo pročitani simbol koji zapisujemo u idućem koraku.

$$\delta(q_{m0}, \alpha) := (q_{m0}, \alpha, -1), \alpha \neq \sqsupset \qquad \delta(q_{m0}, \sqsupset) := (q_1, /, 1)$$

Prijenos simbola  $\sqsupset$ ,  $\bullet$  i  $/$ :

$$\delta(q_\alpha, \beta) := (q_\beta, \alpha, 1), \alpha \in \{\sqsupset, \bullet, /\}, \beta \in \{/, >, \bullet\}$$

Prijenos simbola  $>$ :

$$\delta(q_{>}, \sqcup) := (q_1, >, 1) \qquad \delta(q_1, \sqcup) := (q_{m1}, \sqcup, -1) \qquad \square$$

**Lema 60.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{\sqsupset, \sqcup\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{m2}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v > \bullet \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{=1}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v > \sqcup \dots),$$

a konfiguraciju

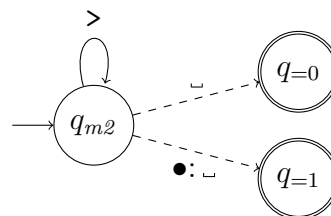
$$(q_{m2}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v > \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_{=0}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v > \sqcup \dots).$$

*Dokaz.* S obzirom na to da se glava stroja nalazi iznad simbola  $>$ , samo jedan pomak udesno bit će dovoljan da odluči u kojoj završnoj konfiguraciji fragment završava.

$$\begin{aligned} \delta(q_{m2}, >) &:= (q_{m2}, >, 1) \\ \delta(q_{m2}, \sqcup) &:= (q_{=0}, \sqcup, -1) \\ \delta(q_{m2}, \bullet) &:= (q_{=1}, \sqcup, -1) \end{aligned} \qquad \square$$



Slika 2.25: Grafički prikaz fragmenta iz leme 60.

Ako je  $\chi_R(\vec{x}, y) = 0$ , potrebno je ponovo provesti izračunavanje za  $y + 1$ . Stoga sljedeći fragment povećava vrijednost  $y$  za 1.

**Lema 61.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{=0}, |u| + |\beta(\vec{x})| + y + |v| + 3, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v>\_ \dots)$$

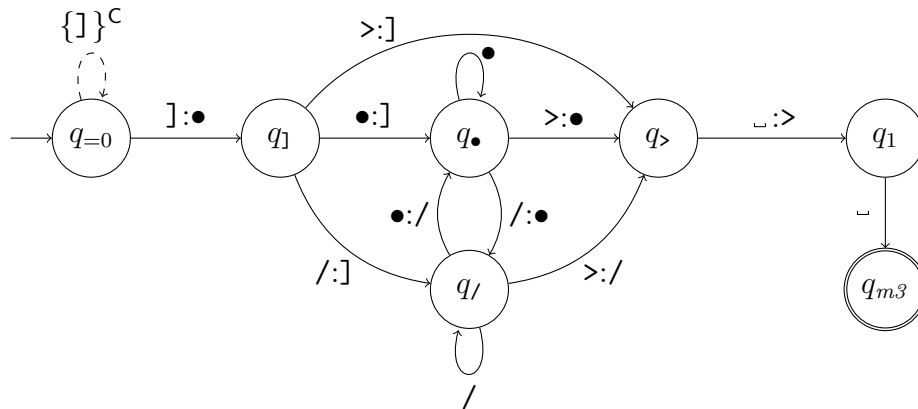
u konfiguraciju

$$(q_{m3}, |u| + |\beta(\vec{x})| + y + |v| + 4, u[\beta(\vec{x})/\bullet^{y+1}]v>\_ \dots).$$

*Dokaz.*

$\delta(q_{=0}, \alpha) := (q_{=0}, \alpha, -1), \alpha \neq ]$	$\delta(q_{=0}, ] := (q_1, \bullet, 1)$
$\delta(q_1, \bullet) := (q_\bullet, ], 1)$	$\delta(q_1, / := (q_/, ], 1)$
$\delta(q_1, >) := (q_>, ], 1)$	$\delta(q_\bullet, \bullet) := (q_\bullet, \bullet, 1)$
$\delta(q_\bullet, / := (q_/, \bullet, 1)$	$\delta(q_\bullet, >) := (q_>, \bullet, 1)$
$\delta(q_/, \bullet) := (q_\bullet, /, 1)$	$\delta(q_/, / := (q_/, /, 1)$
$\delta(q_/, >) := (q_>, /, 1)$	$\delta(q_>, \_ := (q_1, >, 1)$
$\delta(q_1, \_ := (q_{m3}, \_, -1)$	

□



Slika 2.26: Grafički prikaz fragmenta iz leme 61.

U sljedećoj lemi promatramo fragment u koji smo došli ako smo postigli  $R(\vec{x}, y)$ . Taj fragment nas vodi u završnu konfiguraciju.

**Lema 62.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$  postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_{=1}, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})/\bullet^y]v>\_ \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_z, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v>\bullet^y \_ \dots).$$

*Dokaz.* Prvo zapišemo  $y$  na desni kraj trake:

$$\delta(q_{=1}, \alpha) := (q_{=1}, \alpha, -1), \alpha \neq ] \quad \delta(q_{=1}, ]) := (q_1, ], -1)$$

Iza simbola  $]$  možemo pročitati simbol  $\bullet$  koji treba označiti i prepisati,

$$\delta(q_1, \bullet) := (q_2, \circ, 1)$$

simbol  $\circ$  koji treba ignorirati,

$$\delta(q_1, \circ) := (q_1, \circ, -1)$$

ili simbol  $/$ , što znači da smo gotovi s označavanjem i prelazimo na „brisanje”  $y$ .

$$\delta(q_1, /) := (q_3, ], 1)$$

Stanje  $q_2$  zapisuje označeni simbol  $\bullet$ .

$$\delta(q_2, \alpha) := (q_2, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ \quad \delta(q_2, \_) := (q_{=1}, \bullet, -1)$$

Stanje  $q_3$  služi kako bismo obrisali sve pomoćne simbole s trake.

$$\delta(q_3, \alpha) := (q_3, \_, 1), \alpha \neq ] \quad \delta(q_3, ]) := (q_4, \_, 1)$$

Potom stavljamo  $!$  za oznaku kraja trake.

$$\begin{aligned} \delta(q_4, \alpha) &:= (q_4, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ & \delta(q_4, \_) &:= (q_5, !, -1) \\ \delta(q_5, \alpha) &:= (q_5, \alpha, -1), \alpha \neq ] & \delta(q_5, ]) &:= (q_6, ], 1) \\ \delta(q_6, \_) &:= (q_6, \_, 1) \end{aligned}$$

Definiramo familiju prijelaza za svaki simbol  $\gamma \in \Gamma \setminus \{!\}$ :

$$\begin{aligned} \delta(q_6, \gamma) &:= (q_{1\gamma}, \_, -1) & \delta(q_{1\gamma}, \_) &:= (q_{1\gamma}, \_, -1) \\ \delta(q_{1\gamma}, \alpha) &:= (q_{2\gamma}, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma_+ & \delta(q_{2\gamma}, \_) &:= (q_6, \gamma, 1) \end{aligned}$$

Kada dođemo do kraja prijenosa, brišemo desni graničnik i vraćamo se ulijevo do  $>$  na kojem je konačna pozicija glave stroja.

$$\begin{aligned} \delta(q_6, !) &:= (q_7, \_, -1) & \delta(q_7, \alpha) &:= (q_7, \alpha, -1), \alpha \neq > \\ \delta(q_7, >) &:= (q_8, >, -1) & \delta(q_8, \alpha) &:= (q_{z5}, \alpha, 1), \alpha \in \Gamma \end{aligned} \quad \square$$

**Propozicija 63.** Za svaki  $k \in \mathbb{N}_+$ , za svaku relaciju  $R$  takvu da je  $\chi_R$  uredno izračunljiva postoji fragment Turingovog stroja koji za sve  $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ ,  $u \in \Gamma^*$ ,  $v \in (\Gamma \setminus \{[, ]\})^*$ , prevodi konfiguraciju

$$(q_0, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v| + 2, u[\beta(\vec{x})]v \succ \sqcup \dots)$$

u konfiguraciju

$$(q_z, |u| + |\beta(\vec{x})| + |v'| + 2, u[\beta(\vec{x})]v \succ \bullet^{\mu y R(\vec{x}, y)} \sqcup \dots),$$

ako je  $\vec{x} \in \mathcal{D}_{\mu R}$ . Ako  $\vec{x} \notin \mathcal{D}_{\mu R}$ , fragment nikad ne stigne u stanje  $q_z$ .

*Dokaz.* Promatramo izračunavanje funkcije  $F$  zadane s  $F(\vec{x}) = \mu y (\chi_R(\vec{x}, y) = 1)$ . Pretpostavimo da je  $F(\vec{x}) = n$ , za neki  $n \in \mathbb{N}$ .

- $u[\vec{x}]v \succ$  — primijenimo fragment iz leme 59
- $u[\vec{x}/]v \succ$  — primijenimo fragment za uredno računanje  $\chi_R$ ,
- $u[\vec{x}/]v \succ \bullet^{\chi_R(\vec{x}, 0)}$  — provjerimo je li  $\chi_R(\vec{x}, 0) = 1$  primjenom fragmenta iz leme 60; ako je  $\chi_R(\vec{x}, 0) = 0$  primjenjujemo fragment iz leme 61 koji povećava  $y$  za 1
- $u[\vec{x}/\bullet]v \succ$  — primijenimo fragment za uredno računanje  $\chi_R$
- $u[\vec{x}/\bullet]v \succ \bullet^{\chi_R(\vec{x}, 1)}$  — provjerimo je li  $\chi_R(\vec{x}, 1) = 1$  primjenom fragmenta iz leme 60; ako jest,  $n = 1$ , ako nije, ponavljamo postupak: primijenimo fragment iz leme 61 za povećavanje  $y$
- $u[\vec{x}/\bullet\bullet]v \succ$

Ponavljamo postupak do  $y = n$ .

- $u[\vec{x}/\bullet^n]v \succ$  — primijenimo uredni fragment koji računa  $\chi_R$
- $u[\vec{x}/\bullet^n]v \succ \bullet^{\chi_R(\vec{x}, n)}$  — fragment iz leme 60 nas vodi u stanje  $q_{=1}$  u ovom slučaju jer  $\chi_R(\vec{x}, n) = 1$ , stoga primjenjujemo fragment iz leme 62
- $u[\vec{x}]v \succ \bullet^n$  □

**Teorem 64.** [3] Svaka parcijalno rekurzivna funkcija je uredno izračunljiva.

*Dokaz.* Skup uredno izračunljivih brojevni funkcija sadrži nulfunkciju po propoziciji 32, sve koordinatne projekcije po propoziciji 36, funkciju sljedbenika po propoziciji 37, dakle, sadrži sve inicijalne funkcije. Zatvoren je na kompoziciju po propoziciji 43, na primitivnu rekurziju po propoziciji 58, te na minimizaciju po propoziciji 63. Dakle, sadrži sve parcijalno rekurzivne funkcije. □



**Korolar 65.** *Svaka parcijalno rekurzivna funkcija je Turing-izračunljiva.*

*Dokaz.* Neka je  $f$  parcijalno rekurzivna funkcija. Tada je, po teoremu 64,  $f$  uredno izračunljiva, a po teoremu 31 je tada i Turing-izračunljiva.  $\square$

*Napomena 66.* Uočimo kako smo pokazali da se svaka parcijalno rekurzivna funkcija može izračunati koristeći Turingov stroj potencijalno velike složenosti, ali s konačnim  $\Gamma = \{\bullet, /, >, [, ], (, ), \{, \}, \circ, \#, \$, !\}$ . Fragmenti prikazani u radu omogućuju kreiranje Turingovih strojeva za funkcije koje se sastoje od proizvoljno mnogo inicijalnih funkcija, kompozicija, primitivnih rekurzija i minimizacija. Takvi Turingovi strojevi mogu imati velik broj stanja, zato je važno napomenuti da su stanja u ovom radu često jednako nazivana, ali pri kreiranju Turingovog stroja smatramo da su stanja pojedinog „uklopljenog” fragmenta različita od svih stanja koja su korištenja u fragmentima prije njega.

# Bibliografija

- [1] Vedran Čačić. *Komputonomikon: izračunljivost za računarce*. 2019.
- [2] Hartley Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. The MIT Press, 1987.
- [3] Sebastiaan A. Terwijn. *Syllabus-Computability Theory*. 2004.

# Sažetak

Ukratko, u ovom radu pokazali smo da Turingovi strojevi mogu simulirati Kleenijev model parcijalno rekurzivnih funkcija. U uvodnom dijelu dajemo definicije vezane uz Turingov model, definicije iz teorije parcijalno rekurzivnih funkcija, kao i definiciju tehnike za zapis proizvoljno (konačno) mnogo prirodnih brojevana na traci Turingovog stroja. Definiramo pojam uredne izračunljivosti, te u glavnom dijelu rada pokazujemo da je moguće uredno izračunati inicijalne funkcije, kompoziciju, primitivnu rekurziju i minimizaciju. Turingovi strojevi koji ih računaju su eksplicitno dani nizom fragmenata uz objašnjenje kako se fragmenti slažu do cjelovitog stroja.

# Summary

In this paper, we show that Turing machines can simulate Kleene's model of partial recursive functions. In the introduction we give definitions of Turing's model and of partial recursive functions, as well as definition of a technique for writing arbitrarily (but finitely) many natural numbers on a Turing machine tape. We also define concept of tidy computations, and, in the main part of paper, we show that it is possible to compute initial functions, composition, primitive recursion and minimization in a tidy way. Turing machines computing them are explicitly given in a series of fragments with explanation of how to arrange those fragments into a complete machine.

# Životopis

Rođena sam 16. lipnja 1992. u Bosanskom Novom (BiH) od majke Verice i oca Dušana. Osnovnu školu pohađala sam u Korenici, a po završetku sam odlučila svoje dalje obrazovanje nastaviti u Zagrebu. Upisala sam Srpsku pravoslavnu opću gimnaziju „Kantakuzina Katarina Branković” koju sam 2011. godine završila. Iste godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Vođena novom željom za radom u području programiranja i računarstva 2017. godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij računarstva i matematike koji 2019. i završavam. Pri kraju studija počinjem raditi u Vestigu, gdje se nadam nastaviti svoj put.