Redukcija kategorija pro*-Grp i pro*-HTop

Miroševič, Ivančica

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivančica Mirošević

Redukcija kategorija pro^*-Grp i pro^*-$HTop$

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivančica Mirošević

Reduction of pro^*-Grp and pro^*-$HTop$ categories

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2019

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivančica Mirošević

Redukcija kategorija pro^*-Grp i pro^*-$HTop$

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof.dr.sc. Nikola Koceić Bilan

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivančica Mirošević

Reduction of pro^*-Grp and pro^*-$HTop$ categories

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Professor Nikola Koceić Bilan

Zagreb, 2019

Zahvala

Neizmjerno sam zahvalna svom mentoru što mi je pomogao vratiti se znanstvenom radu kad sam već bila odustala. Hvala mu na predanosti i entuzijazmu, hrabrenju i poticanju kad god mi je to trebalo.

Također želim zahvaliti svim članovima Topološkog seminara Odjela za matematiku PMF-a u Splitu što su me bez zadrške prihvatili, strpljivo slušali moja izlaganja i pratili moj napredak. Posebno veliko hvala dragim profesorima Vlasti Matijević i Nikici Uglešiću jer su uvijek puni dobronamjernih korisnih savjeta i ideja koje nesebično dijele s drugima.

Hvala Borki Jadrijević što me uputila na Topološki seminar. Hvala i mojim dragim kolegicama s FESB-a na podršci.

Na kraju, veliko hvala mojoj cijeloj obitelji, bili ste mi uvijek velika pomoć, podrška i poticaj. Hvala Zoranu, Viti, Lovri i Mirti na ljubavi, potpori, razumijevanju, strpljenju. Obećavam da više neću propuštati planinarenja.

Sažetak

U ovom radu dajemo novu karakterizaciju grupa gruboga oblika punktiranih topoloških prostora, temeljnih invarijanti teorije gruboga oblika. Uvodimo novi funktor $\widetilde{R}$ iz pro^*-Grp u pro-Grp kategoriju. Pokaže se da je $\left(\widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\pi_k\right)(X, x_0)$ za neki punktirani topološki prostor (X, x_0) upravo pro-grupa gruboga oblika $pro\text{-}\check{\pi}_k^*(X, x_0)$. Nadalje, pokaže se da za $pro\text{-}\check{\pi}_k^* \equiv \widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\check{\pi}_k$ vrijedi $\varprojlim pro\text{-}\check{\pi}_k^* = \check{\pi}_k^*$, što znači da je $pro\text{-}\check{\pi}_k^*$ puni analogon funktoru $pro\text{-}\pi_k$.

Funktor $\widetilde{R}$ nam omogućuje i da definiramo homološku grupu gruboga oblika i homološku pro-grupu gruboga oblika topološkog prostora. Koristeći rezultate iz [5], [9] i [16], u radu istražujemo vezu između pro-grupa gruboga oblika i homoloških pro-grupa gruboga oblika u smislu Hurewiczeva teorema, te konačno i vezu između grupa gruboga oblika i homoloških grupa gruboga oblika. Navodimo analogne rezultate i u relativnom slučaju, za punktirane parove topoloških prostora.

U radu također proučavamo redukciju kategorije pro^*-Top s pomoću novog funktora $\widetilde{R}\colon pro^*\text{-}Top \to pro\text{-}Top$ koji $*$-morfizme prikazuje kao morfizme pro-kategorije među inverznim sustavima u kojima su termi reducirane potencije topoloških prostora. S ciljem reduciranja pro^*-$HTop$ kategorije, ponudili smo poopćenje pojma homotopije, relaciju koju smo nazvali box-homotopijom. Dokazali smo da je box-homotopija relacija ekvivalencije na $Top(X, Y)$ i da je dobro usklađena s kompozicijom, što omogućuje konstrukciju nove kvocijentne kategorije. Pokazalo se, međutim, da su sva preslikavanja međusobno box-homotopna, odnosno da je klasifikacija morfizama po relaciji box-homotopnosti trivijalna.

Ključne riječi: grupa gruboga oblika, funktor grupa gruboga oblika, Hurewiczev teorem, homotopija, homologija, reducirana potencija topološkog prostora.

Extended summary

The coarse shape theory is a relatively new branch of algebraic topology. It was introduced in [11] about ten years ago as a generalization of the shape theory, providing a rougher tool for classifying locally bad topological spaces. In this thesis, we give a new characterization of the coarse shape groups of pointeed topological spaces, the fundamental invariants of this theory. We propose a functor $\widetilde{R}$ from *pro**-*Grp* to *pro*-*Grp*, which represents morphisms in *pro**-category as morphisms in *pro*-category between more complex objects. It turns out that $\left(\widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\pi_k\right)(X, x_0)$ is a *pro*-coarse shape group $pro\text{-}\check{\pi}_k^*(X, x_0)$. Furthermore, for $pro\text{-}\check{\pi}_k^* \equiv \widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\check{\pi}_k$, the equality $\lim\limits_{\leftarrow} pro\text{-}\check{\pi}_k^* = \check{\pi}_k^*$ holds. Since the shape group functor $\check{\pi}_k$ is defined by $\check{\pi}_k = \lim\limits_{\leftarrow} pro\text{-}\pi_k$, the functor $pro\text{-}\check{\pi}_k^*$ is a full analog of $pro\text{-}\pi_k$. Naturally, $pro\text{-}\check{\pi}_k^*$ gives more informations then $\check{\pi}_k^*$ because we lose some information in limit (as well as with $pro\text{-}\pi_k$ and $\check{\pi}_k$).

We use this new functor to define coarse shape homology group of a topological space. The Hurewicz theorem, fundamental result of algebraic topology that relates homotopy and homology groups, was established also for *pro*-groups as well as for *pro**-groups, and now we bring its version for *pro*-coarse shape groups. This enables us to relate coarse shape groups and coarse shape homology groups. We prove that the first nontrivial coarse shape group and coarse shape homology group of a pointed continuum are isomorphic, assertion that does not hold for shape groups.

In this thesis we observe a reduced power $\widetilde{X}$ of a topological space X, a product of topological space X by itself countably many times, given the box topology, and reduced to a quotient space by an equivalence relation saying that two sequences of elements in X are related if they differ only on finite number of coordinates. We list some of its properties. For instance, it preserves separation properties from the original space. Also, in $\widetilde{X}$, intersections of countably many open sets, in other words G_δ sets, are open. In literature such a space is called a P-space in the sense of Gillman–Henriksen. This construction enables us to introduce a new functor $\widetilde{R}$ from *pro**-Top to *pro*-Top, which represents morphisms in *pro**-category as morphisms in *pro*-category between more complex objects.

In the sequel we propose a generalisation of the notion of homotopy, a relation that we call box-homotopy and denote by $\underset{\square}{\sim}$. Naturally, all homotopic maps are box-homotopic, and we provide an example showing that the opposite does not hold. Then we construct a new category, $\underset{\square}{\sim}$, with topological spaces as objects and box-homotopy classes of continuous maps as morphisms, as it proves out that box-homotopy is an equivalence relation on $Top(X, Y)$, and that it is well adjusted with the composition. Unfortunately, all the mappings were shown to be box-homotopic, that is, the classification of morphisms by box-homotopy relation is trivial. Nevertheless, we have provided the results of the research because of the interesting constructs and useful inner-conclusions.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Teorija oblika je grana topologije nastala iz potrebe da se uoče i istraže klase topoloških prostora koji se lokalno "loše ponašaju", na kojima se ne mogu primijeniti teoremi i metode homotopske teorije. Najčešće istican motivirajući primjer za razvoj teorije oblika je Varšavska kružnica W. Naime, po Whiteheadovom teoremu je svako preslikavanje među povezanim CW-kompleksima koje inducira izomorfizam među svim odgovarajućim homotopskim grupama homotopska ekvivalencija. Na primjeru Varšavske kružnice vidi se da tvrdnja ne vrijedi općenito za metričke kontinuume. Prostor W je putovima povezan kontinuum koji nije lokalno povezan pa su sve homotopske grupe prostora W trivijalne. Po tome, svako preslikavanje f iz W u jednotočkovni prostor inducira izomorfizam među odgovarajućim homotopskim grupama. Međutim, f nije homotopska ekvivalencija budući da W nije kontraktibilan. S druge strane, pokaže se da kružnica S^1 i Varšavska kružnica W, iako nisu istog homotopskog tipa, imaju isti topološki oblik. Time teorija oblika razvrstava topološke prostore u grublje klase nego homotopska teorija, što omogućuje uočavanje finijih razlika među prostorima, a pri tome se podudara s homotopskom teorijom kada se primjenjuje na "lijepe" prostore kao što su mnogostrukosti, CW-kompleksi ili apsolutni okolinski retrakti. Međutim, postoje prostori, kao što su npr. solenoidi, za koje ni alati teorije oblika nisu dovoljno prikladni. Naime, grupe oblika su algebarske invarijante u kategoriji oblika, a sve grupe oblika solenoida su trivijalne.

Teorija grubog oblika je relativno nova teorija, nastala prije nešto više od 10 godina kao generalizacija teorije oblika, dajući još grublje alate za razvrstavanje topoloških prostora. Usporedno s teorijom grubog oblika uvodi se i pojam grupe grubog oblika, algebarske invarijante grubog oblika, koja je istovremeno i invarijanta oblika i homotopska invarijanta. Grupe gruboga oblika razlikuju se od grupa oblika već za poliedre, a na primjeru solenoida u [6] je pokazano da čuvaju sve podatke koje daju homotopske pro-grupe, a koje se gube u inverznom limesu pri računanju grupa oblika. Drugim riječima, grupa gruboga oblika punktiranog topološkog prostora daje više podataka od grupe oblika koju sadrži kao svoju podgrupu.

1.1 Kratki povijesni pregled

Temelje teorije oblika postavio je Karol Borsuk (1905-1982), poljski topolog, ujedno začetnik i teorije apsolutnih retrakata i apsolutnih okolinskih retrakata. Njegov rad [2], objavljen 1968., te izlaganje iste godine na međunarodnoj konferenciji u Herceg Novom na kojoj je prvi put upotrijebio izraz "oblik topološkog prostora", smatra se početkom teorije oblika. Jedan od najvećih hrvatskih matematičara, S. Mardešić, dao je veliki doprinos razvoju teorije oblika svojim brojnim radovima, te posebno knjigom *Shape theory* [16] izdanom 1982. godine u suautorstvu s J. Segalom. U knjizi se sustavno razrađuje tada novi pristup teoriji oblika preko inverznih sustava i pro-kategorija. Sama teorija oblika se u njihovom zajedničkom radu iz 1971. godine s metrizabilnih kompakata proširuje na sve kompaktne Hausdorffove prostore, a nekoliko godina poslije S. Mardešić i odvojeno K. Morita teoriju proširuju i na sve topološke prostore.

N. Uglešić i N. Koceić Bilan u [11] poopćuju teoriju oblika konstruirajući kategoriju gruboga oblika, Sh^*, čiji izomorfizmi razvrstavaju topološke prostore grublje nego izomorfizmi u kategoriji oblika Sh. Sama se kategorija oblika može smatrati potkategorijom kategorije gruboga oblika. Teorija gruboga oblika temelji se na inverznim sustavima kao i teorija oblika, ali njezini morfizmi su bitno bogatiji. U kategoriji oblika članovi inverznih sustava bili su povezani po jednim morfizmom, a u kategoriji gruboga oblika povezani su cijelim nizovima dobro usklađenih morfizama. U [8] je uveden pojam grupe gruboga oblika kao bitne invarijante gruboga oblika, te je dana eksplicitna formula za računanje grupa gruboga oblika poliedra, a u [6] je dana eksplicitna formula za računanje grupa gruboga oblika solenoida. U [7] je dokazano da se svaka grupa gruboga oblika može prikazati kao inverzni limes sustava grupa dobivenih s pomoću $HPol_{\circ}$-ekspanzije.

Jedan od fundamentalnih teorema algebarske topologije je Hurewiczev teorem o izomorfizmu (vidjeti npr. [21]), teorem koji povezuje homotopske i homološke grupe punktiranih topoloških prostora. Za svaki punktirani prostor (X, x_0) i za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji tzv. Hurewiczev homomorfizam φ_k iz k-te homotopske grupe prostora (X, x_0) u njegovu k-tu homološku grupu, a po Hurewiczevom teoremu homomorfizam φ_k između prve netrivijalne homotopske grupe jednostavno povezanog prostora (X, x_0) i odgovarajuće homološke grupe tog prostora (koja je također prva netrivijalna) je izomorfizam. Time je dan alat za jednostavnije proučavanje homotopskih grupa (koje su komplicirane za konstruiranje) preko odgovarajućih homoloških grupa. Računanje homoloških grupa je mnogo jednostavnije, razvijeni su algoritmi za njihovo relativno brzo računanje i s unapređivanjem alata linearne algebre ubrzava se i proces računanja homoloških grupa. Po Hurewiczevom teoremu, s pretpostavkom da znamo homološke grupe prostora, možemo odrediti njegovu prvu netrivijalnu homotopsku grupu.

Hurewiczev homomorfizam φ_k inducira Hurewiczeve morfizme $\boldsymbol{\varphi_k}$ i $\boldsymbol{\varphi_k^*}$ između homotopskih i homoloških *pro*-grupa u kategoriji *pro-Grp* i *pro**-*Grp*, redom, a oni opet induciraju homomorfizme $\check{\varphi}_k$ i $\check{\varphi}_k^*$ između grupa oblika i homoloških grupa oblika, te grupa gruboga oblika i homoloških grupa gruboga oblika (redom). U [16] je dana varijanta Hurewiczeva teorema u teoriji oblika, veza između homotopskih i homoloških *pro*-grupa povezanog topološkog prostora. Dokazano je da je morfizam $\boldsymbol{\varphi_k}$ između prvih netrivijalnih homotopskih i homoloških *pro*-grupa izomorfizam. Također je dana veza između grupa oblika i homoloških grupa oblika povezanog prostora koji pripada klasi pokretljivih metričkih kontinuuma (pokretljive metričke kontinuume definirao je Borsuk kao poopćenje prostora koji imaju oblik ANR-a). U [9] je dana varijanta Hurewiczeva teorema u teoriji gruboga oblika, za homotopske i homološke *pro*-grupe u *pro**-*Grp* kategoriji.

U pokušaju da ponudimo redukciju kategorije *pro**-*HTop* bavili smo se tzv. reduciranim potencijama topoloških prostora. Reducirana potencija topološkog prostora X je produkt prostora X sa samim sobom prebrojivo mnogo puta, snabdjeven box topologijom, te reduciran na kvocijentni prostor relacijom ekvivalencije po kojoj su dva niza elemenata iz X ekvivalentna ako se razlikuju najviše na konačno mnogo koordinata. Ovakvi prostori se pojavljuju u radovima M. E. Rudin, K. Kunena i P. Bankstona (npr. u [1], [13] i [20]), uglavnom 70-ih godina prošloga stoljeća. U [13] i [20] je dokazano da je svaki reducirani produkt P-prostor u smislu Gillman-Henriksena, što znači da je u njemu presjek prebrojivo mnogo otvorenih skupova uvijek otvoren skup (vidjeti npr. [17]). Također, pokazano je da reducirani produkt prostora X nasljeđuje njegova separacijska svojstva.

1.2 Opis strukture rada

Rad je podijeljen na pet poglavlja. Nakon uvodnog poglavlja, u drugom poglavlju navest ćemo većinu definicija pojmova i teorema na koje ćemo se pozivati u radu. Započet ćemo s definicijom kategorije i funktora i primjerima konkretnih kategorija i funktora koje ćemo spominjati u nastavku. Definirat ćemo inverzne sustave, *inv* i *pro* kategorije kojima su inverzni sustavi objekti, a zatim i njihova poopćenja, inv^* i pro^* kategorije. Nakon objašnjenja bitnih pojmova - inverznog limesa i ekspanzije, navest ćemo definiciju kategorije oblika $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ za par kategorija $(\mathcal{C},\mathcal{D})$, a onda, nakon što definiramo rezolventu, i definiciju kategorije topološkog oblika Sh. Prirodno slijedi definicija kategorije gruboga oblika $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ za par kategorija $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ i definicija kategorije topološkog gruboga oblika Sh^*, te funktori koji povezuju navedene kategorije. Poglavlje završavamo definicijama grupa oblika i grupa gruboga oblika koje su bitne algebarske invarijante teorije oblika i teorije gruboga oblika redom, te istaknutim primjerima tih grupa.

Treće poglavlje započinjemo definicijom novog pridruživanja R iz kategorije inv^*-*Grp* u *inv*-*Grp*, koje reprezentira morfizme kategorije inv^*-*Grp* kao morfizme u *inv*-*Grp* između složenijih objekata, te dokazujemo da je R dobro definirani funktor. Pokazujemo zatim da R inducira novi funktor $\widetilde{R}$ iz kategorije pro^*-*Grp* u *pro*-*Grp*. Glavna motivacija za uvođenje novog funktora je kvocijentna struktura grupe gruboga oblika punktiranoga poliedra. Naime, po [8], (k-ta) grupa gruboga oblika punktiranoga poliedra je kvocijentna grupa prebrojivog produkta (k-tih) homotopskih grupa tog poliedra po prebrojivoj direktnoj sumi njegovih (k-tih) homotopskih grupa. Ideja je da funktor $\widetilde{R}$ inverznom sustavu grupa pridruži inverzni sustav odgovarajućih kvocijentnih grupa, te da se uskladi djelovanje funktora na $*$-morfizme, što će rezultirati morfizmima u *pro*-*Grp* kategoriji. U drugom dijelu trećeg poglavlja ispitujemo djelovanje funktora $\widetilde{R}$ na homotopske *pro*-grupe punktiranoga topološkog prostora u pro^*-*Grp* kategoriji. S pomoću teorema o neprekidnosti grupa gruboga oblika iz [7] pokazujemo da je grupa gruboga oblika punktiranoga topološkog prostora inverzni limes slike po funktoru $\widetilde{R}$ homotopske *pro*-grupe tog prostora u pro^*-Grp kategoriji i da je kompozicija pro^*-homotopskog funktora i funktora $\widetilde{R}$ puni analogon pro-homotopskom funktoru pro-π_k u teoriji oblika. Drugim riječima, na ovaj način dobivamo novu karakterizaciju grupe gruboga oblika, kao i funktora grupa gruboga oblika.

Funktor $\widetilde{R}$ nam omogućuje i da definiramo homološku grupu gruboga oblika topološkog prostora, objekt kojeg do sada nismo imali, a onda i homološku pro-grupu gruboga oblika. U četvrtom poglavlju, koristeći rezultate iz [5], [9] i [16], istražujemo vezu između pro-grupa gruboga oblika i homoloških pro-grupa gruboga oblika u smislu Hurewiczeva teorema, te konačno i vezu između grupa gruboga oblika i homoloških grupa gruboga oblika. Pokazat ćemo da su prva netrivijalna grupa gruboga oblika i prva netrivijalna homološka grupa gruboga oblika punktiranoga kontinuuma međusobno izomorfne, što je tvrdnja koja ne vrijedi za grupe oblika. Također, navest ćemo analogne rezultate i u relativnom slučaju, za punktirane parove topoloških prostora.

U petom poglavlju proučavamo redukciju kategorije pro^*-Top, te navodimo pokušaj reduciranja i na kategoriji pro^*-$HTop$, a time i na kategoriji pro^*-$HPol$ koja je realizirajuća kategorija kategorije gruboga oblika. Analogno prethodnoj konstrukciji, inverznim sustavima topoloških prostora pridružujemo inverzne sustave odgovarajućih kvocijentnih prostora. S tim ciljem smo u petom poglavlju proučavali reducirane potencije topoloških prostora i njihova svojstva. Definirali smo funktor $\widetilde{R}\colon pro^*\text{-}Top \to pro\text{-}Top$ koji $*$-morfizme prikazuje kao morfizme pro-kategorije među složenijim objektima. Prirodno je, međutim, da nam je zanimljivija redukcija kategorije pro^*-$HTop$. To znači da moramo naći način kako $*$-morfizmu koji se sastoji od nizova homotopskih klasa preslikavanja pridružiti jedan morfizam u pro-kategoriji koji neće ovisiti o reprezentantima homotopskih klasa. Budući da dva niza preslikavanja koji su homotopni na svakoj koordinati ne moraju imati homotopne produkte, proučavamo u nastavku prirodno poopćenje pojma homotopije koju smo nazvali box-homotopijom. Očekivano, svaka dva međusobno homotopna preslikavanja su i box-homotopna, a na primjeru ćemo pokazati da obratno ne vrijedi. Pokaže se također da je box-homotopnost relacija ekvivalencije na $Top(X, Y)$ i $HTop(X, Y)$ i da je dobro usklađena s kompozicijom, što znači da je kongruencija na kategorijama Top i $HTop$. To nam omogućuje da konstruiramo novu kategoriju, $H_\Box Top$, čiji su objekti topološki prostori, a morfizmi box-homotopske klase preslikavanja među topološkim prostorima. Posljedično možemo definirati funktor $\widetilde{R}_\Box$ iz pro^*-$HTop$ kategorije u pro-$H_\Box Top$ kategoriju. Na kraju se pokaže da su sva preslikavanja međusobno box-homotopna, odnosno da je klasifikacija morfizama po relaciji box-homotopnosti trivijalna.

POGLAVLJE 2

Osnovni pojmovi, definicije i teoremi

U ovom poglavlju navest ćemo osnovne definicije pojmova koje ćemo koristi i teoreme na koje ćemo se pozivati u radu. Teoreme navodimo bez dokaza koji se često mogu pronaći u više izvora. Započet ćemo od samih temelja, od definicija kategorije i funktora, s primjerima konkretnih kategorija i funktora koje ćemo najčešće spominjati u nastavku.

2.1 Kategorije i funktori

Definicija 2.1. **Kategorija** $\mathcal{C}$ se sastoji od

- klase $Ob(\mathcal{C})$ **objekata** u $\mathcal{C}$;
- klase $Mor(\mathcal{C})$ koja se sastoji od skupova $\mathcal{C}(X,Y)$, pridruženih svakom uređenom paru (X,Y) objekata u $\mathcal{C}$, elemente kojih nazivamo **morfizmima** (ili strelicama) s **domenom** X i **kodomenom** Y i zapisujemo u obliku $f : X \to Y$. Pri tome svaki morfizam kategorije pripada samo jednom skupu $\mathcal{C}(X,Y)$;
- funkcije
$$\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z),$$
koju nazivamo **komponiranjem morfizama**, definirane za svaku uređenu trojku (X,Y,Z) objekata u $\mathcal{C}$. Sliku para (f,g) tada označujemo s $g \circ f$ ili s gf i nazivamo **kompozitom** ili **kompozicijom** morfizama f i g.

Pri tome moraju biti ispunjena sljedeća dva aksioma.

1. **Asocijativnost**

   Ako je $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ i $h \in \mathcal{C}(Z,W)$, onda je

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2. **Postojanje identitete**

   Ako je X objekt, onda postoji element $1_X \in \mathcal{C}(X,X)$ kojeg nazivamo **identičkim morfizmom**, a za kojega vrijedi

$$f \circ 1_X = f, \quad \text{za svaki } f \in \mathcal{C}(X,Y),$$

$$1_X \circ g = g, \quad \text{za svaki } g \in \mathcal{C}(Z,X).$$

Primijetimo da iz navedenih aksioma slijedi jedinstvenost identičkog morfizma.

Definicija 2.2. *Za morfizam $f : X \to Y$ kažemo da je:*

- ***monomorfizam*** *ako za morfizme $g, h : Z \to X$ iz $f \circ g = f \circ h$ slijedi $g = h$;*

- ***epimorfizam*** *ako za morfizme $g, h : Y \to Z$ iz $g \circ f = h \circ f$ slijedi $g = h$;*

- ***bimorfizam*** *ako je epimorfizam i monomorfizam;*

- ***izomorfizam*** *ako postoji $g : Y \to X$ takav da je $g \circ f = 1_X$ i $f \circ g = 1_Y$. Morfizam g tada nazivamo **inverzom** morfizma f.*

Može se pokazati da je svaki izomorfizam bimorfizam, dok obrat vrijedi samo u nekim kategorijama.

Definicija 2.3. *Kažemo da je $\mathcal{C}'$ **potkategorija** kategorije $\mathcal{C}$ i pišemo $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

$Ob(\mathcal{C}') \subset Ob(\mathcal{C})$;

$\mathcal{C}'(X',Y') \subset \mathcal{C}(X',Y')$ za svaki $X', Y' \in Ob(\mathcal{C}')$;

Ako su $f' \in \mathcal{C}'(X',Y')$ i $g' \in \mathcal{C}'(Y',Z')$, onda se njihova kompozicija $g'f'$ u $\mathcal{C}'$ podudara s kompozicijom $g'f'$ u $\mathcal{C}$.

Posebno, ako je $\mathcal{C}'(X', Y') = \mathcal{C}(X', Y')$ *za svaki par objekata* (X', Y') *u* $\mathcal{C}'$*, kažemo da je* $\mathcal{C}'$ ***puna potkategorija*** *kategorije* $\mathcal{C}$*.*

Primjer 2.4. *Kategorije koje ćemo u ovom radu najčešće spominjati su:*

- ***Kategorija skupova*** *Set kojoj su objekti svi skupovi, morfizmi funkcije među skupovima i izomorfizmi bijekcije;*

- ***Kategorija grupa*** *Grp kojoj su objekti sve grupe, morfizmi homomorfizmi među grupama i izomorfizmi bijektivni homomorfizmi;*

- ***Kategorija topoloških prostora*** *Top kojoj su objekti svi topološki prostori, morfizmi preslikavanja (neprekidne funkcije) među prostorima i izomorfizmi homeomorfizmi među prostorima;*

- ***Punktirana topološka kategorija*** $Top_\circ$ *kojoj su objekti svi punktirani topološki prostori* (X, x_0)*, gdje je* $x_0 \in X$ *istaknuta bazna točka, a morfizmi* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *sva preslikavanja* $f : X \to Y$ *takva da je* $f(x_0) = y_0$*. Morfizme u ovoj kategoriji nazivamo* ***punktiranim preslikavanjima****. Izomorfizmi su punktirani homeomorfizmi među punktiranim prostorima;*

- ***Kategorija topoloških parova*** Top^2 *kojoj su objekti svi uređeni parovi* (X, A) *topoloških prostora, pri čemu je* A *potprostor prostora* X*, a morfizmi* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *preslikavanja* $f : X \to Y$ *takva da je* $f(A) \subset B$ *i koja nazivamo* ***preslikavanjima parova****. Izomorfizmi u ovoj kategoriji su homeomorfizmi parova među parovima prostora;*

- ***Punktirana kategorija topoloških parova*** $Top^2_\circ$ *kojoj su objekti svi topološki parovi* (X, A) *prostora s istaknutom baznom točkom* $x_0 \in A$*, a morfizmi* $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ *preslikavanja parova* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *takva da je* $f(x_0) = y_0$*. Izomorfizmi u ovoj kategoriji su homeomorfizmi punktiranih parova među punktiranim parovima prostora;*

- ***Kategorija poliedara*** *Pol, puna potkategorija kategorije Top kojoj su objekti svi poliedri;*

- ***Kategorija punktiranih poliedara*** $Pol_\circ$*, puna potkategorija kategorije* $Top_\circ$ *kojoj su objekti svi punktirani poliedri.*

Napomena 2.5. *Budući da je Pol jako bitna kategorija u teoriji oblika i teoriji gruboga oblika, kasnije u radu navest ćemo definiciju i neka važnija svojstva poliedara.*

Definicija 2.6. ***Kongruencijom*** *na kategoriji $\mathcal{C}$ nazivamo klasu relacija ekvivalencije $\sim_{(X,Y)}$ zadanih na $\mathcal{C}(X,Y)$, za svaki $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ (oznaku para objekata obično izostavljamo), takvih da iz $f \sim f'$ i $g \sim g'$, ako kompozicija $g \circ f$ postoji, slijedi*

$$g \circ f \sim g' \circ f',$$

za sve morfizme f, f', g i g' kategorije $\mathcal{C}$.

Uz pomoć kongruencije zadane na nekoj kategoriji $\mathcal{C}$ možemo definirati njoj pridruženu **kvocijentnu kategoriju** $\mathcal{C}/_\sim$ koja ima iste objekte kao i $\mathcal{C}$, a morfizmi su joj klase ekvivalencije morfizama kategorije $\mathcal{C}$. Kompozicija klasa ekvivalencije definira se kao klasa ekvivalencije kompozicije. Preciznije, ako $[f]$ označuje klasu ekvivalencije morfizma $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ s obzirom na $\sim$, za novu kategoriju $\mathcal{C}/_\sim$ vrijedi

$$Ob(\mathcal{C}/_\sim) := Ob(\mathcal{C}),$$

$$\mathcal{C}/_\sim(X,Y) := \mathcal{C}(X,Y)/_\sim, \quad \text{te}$$

$$[g] \circ [f] := [g \circ f]$$

čim kompozicija $g \circ f$ postoji. Lako se pokaže da klasa $[g \circ f]$ ne ovisi o izboru predstavnika f i g klasa $[f]$ i $[g]$.

Primjer kongruencije na nekoj kategoriji je homotopnost preslikavanja u kategoriji Top. Prisjetimo se definicije homotopije.

Definicija 2.7. *Neka je $f, g \in Top(X,Y)$. Kažemo da je f* ***homotopno*** *g ako postoji preslikavanje $H : X \times I \to Y$, gdje je $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$, takvo da je*

$$H(x,0) = f(x) \quad i \quad H(x,1) = g(x) \quad za\ svaki \ \ x \in X.$$

Preslikavanje H nazivamo ***homotopijom****.*

Analogno se definira i homotopija među preslikavanjima parova topoloških prostora, te punktirana homotopija.

Definicija 2.8. *Neka su* $f, g \in Top^2((X, A), (Y, B))$ *preslikavanja parova. Kažemo da je* f ***homotopno*** g *ako postoji preslikavanje parova* $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ *takvo da je*

$$H(x, 0) = f(x) \quad i \quad H(x, 1) = g(x) \quad za\ svaki \quad x \in X.$$

Kada su A *i* B *jednotočkovni skupovi, preslikavanje* H *nazivamo* ***punktiranom homotopijom****.*

Pokaže se da je homotopnost morfizama na kategorijama Top i $Top_\circ$ zaista kongruencija, što znači da možemo promatrati pridružene kvocijentne kategorije. Njihove oznake su $HTop$ i $HTop_\circ$. Objekti su im ponovo topološki prostori, odnosno punktirani topološki prostori, a morfizmi homotopske klase odgovarajućih morfizama iz Top i $Top_\circ$ (redom).

U navedenim homotopskim kategorijama svako preslikavanje f kojemu je homotopska klasa $[f]$ izomorfizam nazivamo **homotopskom ekvivalencijom**. Također, za izomorfne objekte u kategorijama $HTop$ i $HTop_\circ$ i njihovim potkategorijama kažemo da imaju isti **homotopski tip**.

Primjer 2.9. *Prostor* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *i sfera* S^{n-1} *imaju isti homotopski tip.*

Spomenimo ovdje homotopske grupe, važne homotopske invarijante koje pridružujemo topološkim prostorima. Za po volji odabran $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, skup $\pi_k(X, x_0)$ pridružen punktiranom topološkom prostoru (X, x_0) definira se kao skup homotopskih klasa preslikavanja parova $\alpha : (I^k, \partial I^k) \to (X, \{x_0\})$, koje nazivamo **petljama**. I^k je ovdje jedinična k-dimenzionalna kocka, a ∂I^k njezin rub koji se sastoji od točaka iz I^k kojima je barem jedna koordinata 0 ili 1. U slučaju $k = 0$ podrazumijeva se da je I^0 jednotočkovan skup i da je njegov rub prazan, pa je $\pi_0(X, x_0)$ skup komponenti povezanosti putovima prostora X.

Napomena 2.10. *Elemente skupa* $\pi_k(X, x_0)$ *smo mogli definirati i kao klase preslikavanja* $\alpha\colon (S^k, s_0) \to (X, x_0)$ *s obzirom na punktiranu homotopnost.*

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ skup $\pi_k(X, x_0)$ ima strukturu grupe uz operaciju

$$+ : \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$$

takvu da je za $[\alpha], [\beta] \in \pi_k(X, x_0)$ petlja $[\alpha] + [\beta]$ reprezentirana preslikavanjem $(\alpha + \beta) : (I^k, \partial I^k) \to (X, \{x_0\})$ definiranim s

$$(\alpha + \beta)(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \begin{cases} \alpha(2s_1, s_2, \ldots, s_k) \ , & s_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \beta(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_k) \ , & s_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

i s neutralnim elementom $[0]$, gdje je $0 : (I^k, \partial I^k) \to (X, \{x_0\})$ konstantno preslikavanje,

$$0(x) = x_0 \ , \quad \text{za svaki } x \in I^k.$$

Može se provjeriti da $[\alpha] + [\beta]$ ne ovisi o reprezentantima, odnosno da je operacija $+$ dobro definirana. Inverz petlje $[\alpha]$ je petlja $[\overline{\alpha}]$ reprezentirana preslikavanjem $\overline{\alpha}$ za koje vrijedi

$$\overline{\alpha}(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \alpha(1 - s_1, s_2, \ldots, s_k)$$

za svaki $(s_1, s_2, \ldots, s_k) \in I^k$.

Grupu $(\pi_k(X, x_0), +)$ s neutralnim elementom $[0]$ nazivamo ***k*-dimenzionalnom** (ili k-tom) **homotopskom grupom** punktiranog prostora (X, x_0).

Punktirani skup $\pi_0(X, x_0)$ se sastoji od svih komponenti povezanosti putovima prostora X (bez obzira na baznu točku). Iako nema strukturu grupe, nazivamo ga 0-dimenzionalnom homotopskom grupom. 1-dimenzionalnu homotopsku grupu nazivamo još i **fundamentalnom grupom**.

Pokaže se da je za $k \geq 2$ grupa $\pi_k(X, x_0)$ abelovska, što objašnjava zašto se grupna operacija označuje s $+$.

Homotopske grupe punktiranih prostora su homotopske invarijante, što znači da homotopski ekvivalentni punktirani prostori imaju izomorfne homotopske grupe. Također, ako je prostor putovima povezan, njegove su k-dimenzionalne homotopske grupe za sve bazne točke međusobno izomorfne.

Prostor nazivamo ***n*-povezanim** ako je putovima povezan i ako je $\pi_k(X, x_0)$ trivijalna grupa za svaku baznu točku $x_0 \in X$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $1 \leq k \leq n$. 1-povezan prostor nazivamo **jednostavno povezanim**.

Primjer 2.11. *Fundamentalna grupa punktirane sfere* (S^1, s_0) *izomorfna je aditivnoj grupi cijelih brojeva* $(\mathbb{Z}, +)$. *Punktirana sfera* (S^k, s_0), *za bilo koji* $k \in \mathbb{N}$, *ima* k*-tu homotopsku grupu izomorfnu grupi* $(\mathbb{Z}, +)$, *a sve njezine homotopske grupe dimenzije manje od* k *su trivijalne.*

Primjer 2.12. *Sve homotopske grupe kontraktibilnog prostora su trivijalne. S druge strane, trivijalnost homotopskih grupa ne povlači kontraktibilnost prostora. Primjer prostora koji ima sve homotopske grupe trivijalne, a nije kontraktibilan je Varšavska kružnica.*

Definicija 2.13. *(Kovarijantni)* ***funktor*** F *iz kategorije* $\mathcal{C}$ *u kategoriju* $\mathcal{D}$ *je pridruživanje koje svakom objektu* X *u* $\mathcal{C}$ *pridružuje objekt* $F(X)$ *u* $\mathcal{D}$ *i svakom morfizmu* $f : X \to Y$ *u* $\mathcal{C}$ *pridružuje morfizam* $F(f) : F(X) \to F(Y)$ *u* $\mathcal{D}$ *tako da identiteta i kompozicija budu očuvane, odnosno da vrijedi*

$$F(1_X) = 1_{F(X)}, \quad \textit{za svaki} \;\; X \in Ob(\mathcal{C}) \;\; \textit{i}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f). \;\; \textit{za svaki} \;\; f \in \mathcal{C}(X, Y), \; g \in \mathcal{C}(Y, Z).$$

Napomena 2.14. *Navodimo definiciju kovarijantnog funktora jer se u radu pojavljuju samo takvi funktori. Kontravarijantni funktor se slično definira, razlika je u tome što takav funktor mijenja orijentaciju strelica i obrće redoslijed morfizama u kompoziciji.*

Definicija 2.15. *Za funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *kažemo da je* ***vjeran*** *ako za svaka dva morfizma* $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ *iz* $F(f) = F(g)$ *slijedi* $f = g$, *odnosno ako je njegovo djelovanje na skupovima morfizama injektivno.*

Za funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *kažemo da je* ***pun*** *ako za svaki par* $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ *i svaki morfizam* $g \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ *postoji morfizam* $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ *takav da je* $F(f) = g$, *odnosno ako je njegovo djelovanje na skupovima morfizama surjektivno.*

Primjer 2.16. ***Homotopski funktor***

$$H : Top \to HTop$$

ne mijenja objekte, a sva međusobno homotopna preslikavanja $f \in Top(X, Y)$ *šalje u* *homotopsku klasu* $[f] \in HTop(X,Y)$. *Na analogan način možemo definirati i homotopski funktor* $H : Top_\circ \to HTop_\circ$. *To su primjeri punih funktora koji nisu vjerni.*

Primjer 2.17. ***Funktor k-tih homotopskih grupa***

$$\pi_k : HTop_\circ \to Grp,$$

gdje je $k \in \mathbb{N}$, *svakom punktiranom prostoru* (X, x_0) *pridružuje homotopsku grupu* $\pi_k(X, x_0)$ *i svakoj homotopskoj klasi preslikavanja* $[f] : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *pridružuje homomorfizam* $\pi_k([f]) : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$ *definiran s*

$$(\pi_k([f]))([\alpha]) = [f] \circ [\alpha] = [f \circ \alpha] .$$

Funktor $\pi_0 : HTop_\circ \to Set_\circ$ *svakom punktiranom prostoru* (X, x_0) *pridružuje punktirani skup* $\pi_0(X, x_0)$ *i svakoj homotopskoj klasi preslikavanja* $[f] : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *pridružuje punktiranu funkciju* $\pi_0([f]) : \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, y_0)$ *definiranu s* $(\pi_0([f]))([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.

Za svaki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *funktor* π_k *nije ni vjeran ni pun.*

Napomena 2.18. *U nastavku ćemo, radi jednostavnosti, homotopsku klasu preslikavanja označavati samo slovom, bez uglatih zagrada, ako je jasno iz konteksta o kakvom se morfizmu radi.*

Definicija 2.19. *Neka su* F *i* G *dva funktora iz kategorije* $\mathcal{C}$ *u kategoriju* $\mathcal{D}$. ***Prirodna transformacija*** φ *funktora* F *u funktor* G *je pravilo koje svakom objektu* X *iz kategorije* $\mathcal{C}$ *pridružuje morfizam*

$$\varphi_X : F(X) \to G(X)$$

u kategoriji $\mathcal{D}$ *tako da za svaki morfizam* $f : X \to Y$ *u* $\mathcal{C}$ *sljedeći dijagram komutira.*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Definicija 2.20. ***Produkt*** *neke familije* $(X_i\,,\ i \in I)$ *objekata kategorije* $\mathcal{C}$ *je objekt* X *u* $\mathcal{C}$ *s pridruženom familijom* $(p_i \in \mathcal{C}(X, X_i) \mid i \in I)$ *morfizama koje nazivamo* ***projekcijama****, za koje je ispunjeno sljedeće univerzalno svojstvo:*

> *Za svaki objekt* Y *u* $\mathcal{C}$ *i svaku familiju* $(f_i \in \mathcal{C}(Y, X_i) \mid i \in I)$ *morfizama postoji jedinstveni morfizam* $f : Y \to X$ *u* $\mathcal{C}$ *takav da je*
>
> $$p_i \circ f = f_i\ , \quad \textit{za svaki}\ \ i \in I.$$

Univerzalno svojstvo produkta obično prikazujemo dijagramom

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\
X_i & X \arrow[l, "p_i"]
\end{tikzcd}$$

Produkt X označujemo s

$$\prod_{i \in I} X_i,$$

a za konačni indeksni skup $I = \{i_1, i_2, \ldots i_n\}$, pišemo

$$X = X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_n}.$$

Primijetimo da je produkt proizvoljne familije objekata kategorije $\mathcal{C}$, ako postoji, jedinstven do na izomorfizam u $\mathcal{C}$. Za kategoriju u kojoj postoji produkt bilo koje familije objekata kažemo da **dopušta produkte**.

Primjer 2.21. *Kategorije Set, Grp, Top i HTop dopuštaju produkte, dok kategorija konačnih skupova i kategorija cikličkih grupa ne dopuštaju produkte.*

2.2 *inv* i *pro* kategorije

Definicija 2.22. ***Predurеđaj*** *na skupu* Λ *je binarna relacija* $\leq$ *na* Λ *koja je refleksivna i tranzitivna. Predurеđen skup* $(\Lambda, \leq)$ *je* ***usmjeren*** *ako za svaki par* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ *postoji*

$\lambda \in \Lambda$ *takav da je* $\lambda_1 \leq \lambda$ *i* $\lambda_2 \leq \lambda$.

Definicija 2.23. Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija. **Inverzni sustav** $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u kategoriji $\mathcal{C}$ se sastoji od

- usmjerenog predurеđenog skupa Λ kojeg nazivamo **indeksnim skupom**,

- objekta X_λ u $\mathcal{C}$ za svaki $\lambda \in \Lambda$, kojeg nazivamo **termom** ili **članom sustava** i

- morfizma $p_{\lambda\lambda'} \in \mathcal{C}(X_{\lambda'}, X_\lambda)$ za svaki usporedivi par $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \leq \lambda'$, kojeg nazivamo **veznim morfizmom**.

Pri tome je $p_{\lambda\lambda}$ identiteta na X_λ (obično ju označujemo s 1_{X_λ}), a za usporedive $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda$ takve da je $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$ vrijedi

$$p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''},$$

odnosno dijagram

$$\begin{tikzcd}
{} & X_\lambda \arrow[l] \arrow[loop above, "1_{X_\lambda}"] & X_{\lambda'} \arrow[l, "p_{\lambda\lambda'}"] & X_{\lambda''} \arrow[l, "p_{\lambda'\lambda''}"] \arrow[ll, bend right, "p_{\lambda\lambda''}"'] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

komutira.

Napomena 2.24. *Inverzne sustave nazivamo još i projektivnim sustavima, što objašnava predmetak "pro" u nazivu kategorija koje ćemo u nastavku definirati i koje su temeljne pri konstrukciji kategorija oblika i gruboga oblika.*

Inverzni sustav kojemu je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ indeksni skup nazivamo **inverznim nizom** i skraćeno ga označujemo s $\boldsymbol{X} = (X_n, p_{nn+1})$. Naime, takav sustav je u potpunosti određen morfizmima p_{nn+1} za svaki $n \in \mathbb{N}$, svi ostali vezni morfizmi su njihove kompozicije.

Sustav kojemu je indeksni skup jednočlan nazivamo **rudimentarnim** i označujemo ga s (X), gdje je X jedini član tog sustava.

Definicija 2.25. ***Morfizam između inverznih sustava*** $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *i* $\boldsymbol{Y} = \big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\big)$ *se sastoji od funkcije* $f : M \to \Lambda$ *koju nazivamo* ***indeksnom*** *i od morfizama* $f_\mu : X_{f(\mu)} \to Y_\mu$ *u* $\mathcal{C}$*, po jednog za svaki* $\mu \in M$*, takvih da za svaki usporedivi par* $\mu, \mu' \in M$*,* $\mu \le \mu'$*, postoji* $\lambda \in \Lambda$ *takav da je* $\lambda \ge f(\mu), f(\mu')$ *i da vrijedi*

$$f_\mu p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{f(\mu')\lambda},$$

što se obično zorno prikazuje sljedećim komutativnim dijagramom.

$$\begin{tikzcd}
X_{f(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & X_{f(\mu')} \arrow[d, "f_{\mu'}"'] & X_\lambda \arrow[l, "p_{f(\mu')\lambda}"] \arrow[ll, bend right, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \\
Y_\mu & Y_{\mu'} \arrow[l, "q_{\mu\mu'}"] &
\end{tikzcd}$$

Morfizam između inverznih sustava označujemo s $(f, f_\mu) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$.

Ako je indeksna funkcija f morfizma $(f, f_\mu) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ uzlazna i ako su za svaki usporedivi par $\mu, \mu' \in M$, $\mu \le \mu'$, usporedivi i $f(\mu), f(\mu') \in \Lambda$, te ako vrijedi

$$f_\mu p_{f(\mu)f(\mu')} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'},$$

za morfizam kažemo da je **jednostavan**. Ako su pri tome još i indeksni skupovi Λ i M jednaki, a indeksna funkcija je identiteta, za morfizam kažemo da je **razinski**.

Morfizam iz rudimentarnog inverznog sustava (X) u inverzni sustav $\boldsymbol{Y}$ određen je familijom morfizama $\big(f_\mu : X \to Y_\mu, \mu \in M\big)$ pa ga skraćeno označujemo s (f_μ). Isto tako, morfizam iz inverznog sustava $\boldsymbol{X}$ u rudimentarni inverzni sustav (Y) određen je indeksom $\mu_0 \in M$ i morfizmom $f_{\mu_0} : X_{\mu_0} \to Y$.

Kompoziciju dvaju morfizama između inverznih sustava definiramo na sljedeći način.

Definicija 2.26. *Neka su dani inverzni sustavi* $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $\boldsymbol{Y} = \big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\big)$ *i*

$\boldsymbol{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ *i morfizmi* $(f, f_\mu) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *i* $(g, g_\nu) : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$*. Tada je s*

$$(g, g_\nu)(f, f_\mu) = (h, h_\nu) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z},$$

gdje je

$$h = fg : N \to \Lambda \quad i \quad h_\nu = g_\nu f_{g(\nu)} : X_{fg(\nu)} \to Z_\nu$$

definirana ***kompozicija morfizama*** (f, f_μ) *i* (g, g_ν)*.*

Lako se provjeri da je (h, h_ν) zaista morfizam između inverznih sustava i da je komponiranje morfizama asocijativno.

Identički morfizam na inverznom sustavu $\boldsymbol{X}$ se definira s $(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$. Očigledno vrijedi $(f, f_\mu)(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}) = (f, f_\mu)$ i $(1_M, 1_{Y_\mu})(f, f_\mu) = (f, f_\mu)$.

Na ovaj način smo dobili kategoriju *inv*-$\mathcal{C}$ koja za objekte ima sve inverzne sustave u kategoriji $\mathcal{C}$, a morfizmi su joj upravo opisani morfizmi $\big(f, f_\mu\big)$ između inverznih sustava uz prethodno definiranu kompoziciju morfizama.

Na skupu morfizama *inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ sada možemo definirati razredbenu relaciju na sljedeći način.

Definicija 2.27. *Neka su dani morfizmi* $(f, f_\mu), (f', f'_\mu) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$*. Kažemo da su oni* ***ekvivalentni*** *i pišemo* $(f, f_\mu) \sim (f', f'_\mu)$ *ako svaki indeks* $\mu \in M$ *dopušta* $\lambda \in \Lambda$*,* $\lambda \geq f(\mu), f'(\mu)$ *takav da je*

$$f_\mu p_{f(\mu)\lambda} = {f'}_\mu p_{f'(\mu)\lambda},$$

odnosno ako dijagram

$$\begin{tikzcd}
X_{f(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & X_{f'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l, "p_{f'(\mu)\lambda}"] \arrow[ll, bend right, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \\
Y_\mu & &
\end{tikzcd}$$

komutira.

Pokaže se da je $\sim$ zaista razredbena relacija i da iz $(f, f_\mu) \sim (f', f'_\mu)$ i $(g, g_\nu) \sim (g', g'_\nu)$ slijedi $(g, g_\nu)(f, f_\mu) \sim (g', g'_\nu)(f', f'_\mu)$ čim kompozicija $(g, g_\nu)(f, f_\mu)$ postoji, što znači da je na ovaj način definirana kongruencija na kategoriji *inv*-$\mathcal{C}$.

Ako, za svaki par inverznih sustava $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ u kategoriji $\mathcal{C}$, poistovijetimo sve morfizme skupa *inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ iz iste klase određene prethodno definiranom razredbenom relacijom, dobivamo novu, kvocijentnu kategoriju *inv*-$\mathcal{C}/_\sim$, koju označujemo s *pro*-$\mathcal{C}$. Njezini objekti se podudaraju s objektima kategorije *inv*-$\mathcal{C}$, a morfizmi su klase $\boldsymbol{f} := \left[\left(f, f_\mu\right)\right]$ svih morfizama $\left(f, f_\mu\right)$ između inverznih sustava. Ako su $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ morfizmi u *pro*-$\mathcal{C}$, onda je njihova kompozicija $\boldsymbol{gf}$ klasa ekvivalencije morfizama iz *inv*-$\mathcal{C}$ koja sadrži morfizam $(g, g_\nu)\left(f, f_\mu\right)$. Isto tako, jedinični morfizam $\boldsymbol{1_X} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ se prirodno definira kao klasa morfizama iz *inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$ koja sadrži morfizam $(1_\Lambda, 1_{X_\lambda})$.

2.3 *inv** i *pro** kategorije

Kategorije *inv* i *pro* možemo poopćiti ako između odgovarajućih članova dvaju inverznih sustava promatramo cijeli niz morfizama umjesto samo jednoga. Na taj način dobivamo bogatije kategorije koje omogućuju grublju klasifikaciju, odnosno omogućuju uočavanje manjih sličnosti među objektima kategorije $\mathcal{C}$.

Definicija 2.28. *Morfizam između inverznih sustava* $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *i* $\boldsymbol{Y} = \left(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ *koji se sastoji od indeksne funkcije* $f : M \to \Lambda$ *i od nizova morfizama* $f_\mu^n : X_{f(\mu)} \to Y_\mu$ *u* $\mathcal{C}$*, po jedan niz za svaki* $\mu \in M$*, takvih da za svaki usporedivi par* $\mu, \mu' \in M$*,* $\mu \leq \mu'$*, postoje* $\lambda \in \Lambda$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $\lambda \geq f(\mu), f(\mu')$ *i da za svaki* $n' \geq n$ *vrijedi*

$$f_\mu^{n'} p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'}^{n'} p_{f(\mu')\lambda},$$

odnosno da dijagram

$$
\begin{tikzcd}
X_{f(\mu)} \arrow[d, "f_\mu^n"'] & X_{f(\mu')} \arrow[d, "f_{\mu'}^n"'] & X_\lambda \arrow[l, "p_{f(\mu')\lambda}"] \arrow[ll, bend right, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \\
Y_\mu & Y_{\mu'} \arrow[l, "q_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd}
$$

komutira za svaki $n \in \mathbb{N}$ osim za konačno mnogo njih, nazivamo ***∗-morfizmom između inverznih sustava** $\boldsymbol{X}$ **i** $\boldsymbol{Y}$* *i označujemo s* $(f, f_\mu^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$.

Kao i u kategoriji *inv*-$\mathcal{C}$, ako je indeksna funkcija f $*$-morfizma $(f, f_\mu^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ uzlazna i ako su za svaki usporedivi par $\mu, \mu' \in M$, $\mu \leq \mu'$, usporedivi i $f(\mu), f(\mu') \in \Lambda$, te ako vrijedi

$$f_\mu^n p_{f(\mu)f(\mu')} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'}^n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ osim za konačno mnogo njih, za $*$-morfizam kažemo da je **jednostavan**. I ponovo, ako su još i indeksni skupovi Λ i M jednaki, a indeksna funkcija je identiteta, za $*$-morfizam kažemo da je **razinski**.

Definicija 2.29. *Neka su dani inverzni sustavi* $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $\boldsymbol{Y} = \Big(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\Big)$ *i* $\boldsymbol{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ *i $*$-morfizmi* $(f, f_\mu^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *i* $(g, g_\nu^n) : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$. *Tada je s*

$$(g, g_\nu^n)(f, f_\mu^n) = (h, h_\nu^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z},$$

gdje je

$$h = fg : N \to \Lambda \quad i \quad h_\nu^n = g_\nu^n f_{g(\nu)}^n : X_{fg(\nu)} \to Z_\nu \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

definirana ***kompozicija ∗-morfizama*** (f, f_μ^n) *i* (g, g_ν^n).

Identički $*$-morfizam na inverznom sustavu $\boldsymbol{X}$ se definira s $(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, gdje je $1_{X_\lambda}^n = 1_{X_\lambda}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $\lambda \in \Lambda$.

Na ovaj način smo dobili kategoriju *inv**-$\mathcal{C}$ koja za objekte ima sve inverzne sustave u kategoriji $\mathcal{C}$, a morfizmi su joj $*$-morfizmi $\Big(f, f_\mu^n\Big)$ između inverznih sustava uz prethodno definiranu kompoziciju $*$-morfizama.

Definicija 2.30. *Neka su dani* $*$*-morfizmi* $(f, f_\mu^n), (f', f_\mu'^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$*. Kažemo da su oni* ***ekvivalentni*** *i pišemo* $(f, f_\mu^n) \sim (f', f_\mu'^n)$ *ako svaki indeks* $\mu \in M$ *dopušta* $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f'(\mu)$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *takve da za svaki* $n' \geq n$ *vrijedi*

$$f_\mu^{n'} p_{f(\mu)\lambda} = f_\mu'^{n'} p_{f'(\mu)\lambda},$$

odnosno ako dijagram

$$\begin{tikzcd}
X_{f(\mu)} \arrow[d, "f_\mu^n"'] & X_{f'(\mu)} \arrow[dl, "f_\mu'^n"] & X_\lambda \arrow[l, "p_{f'(\mu)\lambda}"] \arrow[ll, bend right, "p_{f(\mu)\lambda}"'] \\
Y_\mu & &
\end{tikzcd}$$

komutira za svaki $n \in \mathbb{N}$ *osim za konačno mnogo njih.*

Na ovaj način je definirana kongruencija na kategoriji inv^*-$\mathcal{C}$.

Razvrstamo li, za svaki par inverznih sustava $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ u kategoriji $\mathcal{C}$, $*$-morfizme skupa inv^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ u klase ekvivalencije, i ako te klase promatramo kao nove morfizme između objekata, dobivamo novu, kvocijentnu kategoriju inv^*-$\mathcal{C}/_\sim$, koju označujemo s pro^*-$\mathcal{C}$. Njezini objekti su ponovo svi inverzni sustavi u kategoriji $\mathcal{C}$, a morfizmi su klase $\boldsymbol{f^*} := \left[\left(f, f_\mu^n\right)\right]$ svih $*$-morfizama $\left(f, f_\mu^n\right)$ između inverznih sustava. Ako su $\boldsymbol{f}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{g}^* : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ $*$-morfizmi u pro^*-$\mathcal{C}$, onda je njihova kompozicija $\boldsymbol{g}^* \boldsymbol{f}^*$ klasa ekvivalencije $*$-morfizama iz inv^*-$\mathcal{C}$ koja sadrži $*$-morfizam $(g, g_\nu^n)\left(f, f_\mu^n\right)$. Isto tako, jedinični morfizam $\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{X}}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ se definira kao klasa $*$-morfizama iz inv^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$ koja sadrži $*$-morfizam $(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}^n)$.

Kategorije *pro*-$\mathcal{C}$ i pro^*-$\mathcal{C}$ povezuje vjeran, ali ne i pun funktor

$$\underline{J}_{\mathcal{C}} : pro\text{-}\mathcal{C} \to pro^*\text{-}\mathcal{C}$$

koji inverzne sustave drži čvrstima, a svakom morfizmu $\boldsymbol{f} = \left[\left(f, f_\mu\right)\right]$ u *pro*-$\mathcal{C}$ pridružuje morfizam $\boldsymbol{f}^* = \left[\left(f, f_\mu^n\right)\right]$ u *pro**-$\mathcal{C}$, gdje je $f_\mu^n = f_\mu$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za morfizam $\boldsymbol{f}^* = \underline{J}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{f})$ kažemo da je **induciran** morfizmom $\boldsymbol{f}$.

2.4 Nul objekti

Definicija 2.31. *Za objekt $O \in Ob(\mathcal{C})$ kažemo da je **nul-objekt** u kategoriji $\mathcal{C}$ ako su za svaki $X \in Ob(\mathcal{C})$ skupovi morfizama $\mathcal{C}(X,O)$ i $\mathcal{C}(O,X)$ jednočlani. Kažemo da je kategorija $\mathcal{C}$ **kategorija s nul-objektima** ako postoji barem jedan nul-objekt u $\mathcal{C}$.*

Lako se provjeri da su svaka dva nul-objekta izomorfna, i da je svaki objekt koji je izomorfan s nul-objektom i sam nul-objekt.

Definicija 2.32. *Neka je O nul-objekt u kategoriji $\mathcal{C}$. Morfizam $o : X \to Y$ u $\mathcal{C}$ nazivamo **nul-morfizmom** čim se može faktorizirati u obliku $o = gf$ gdje je $f \in \mathcal{C}(X,O)$ i $g \in \mathcal{C}(O,Y)$.*

Očigledno je da u kategoriji s nul-objektom za svaki par objekata X, Y postoji jedinstveni nul-morfizam $f : X \to Y$.

Primjer 2.33. *Jednotočkovni skup (prostor) je nul-objekt u kategoriji $Set_\circ$ ($Top_\circ$), a konstantne funkcije su nul-morfizmi. Kategorije Set i Top nemaju nul-objekte.*

Primjer 2.34. *Trivijalna grupa O koja se sastoji samo od neutralnog elementa je nul-objekt u kategoriji Grp, a trivijalni homomorfizam je nul-morfizam. Isto tako, rudimentarni inverzni sustav (O) je nul-objekt u kategorijama pro-Grp i pro*-Grp. Zaista, za bilo koji inverzni sustav grupa $\boldsymbol{G} = (G_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, morfizam određen bilo kojim indeksom $\lambda_0 \in \Lambda$ i jedinstvenim nul-homomorfizmom $o_{\lambda_0} : G_{\lambda_0} \to O$ je jedini morfizam u skupu pro-Grp$(\boldsymbol{G}, (O))$, a morfizam određen familijom jedinstvenih nul-homomorfizama $(o_\lambda : O \to G_\lambda\,,\ \lambda \in \Lambda)$ je jedini morfizam u skupu pro-Grp$((O), \boldsymbol{G})$.*

Analogna tvrdnja vrijedi i općenito.

Teorem 2.35. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija s nul-objektom O. Tada je rudimentarni inverzni sustav (O) nul-objekt u kategorijama pro-$\mathcal{C}$ i pro*-$\mathcal{C}$.*

Dokaz. Očigledno. □

Sljedeći teorem daje karakterizaciju nul-objekta u *pro*-$\mathcal{C}$ i *pro**-$\mathcal{C}$ kategorijama.

Teorem 2.36. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija s nul-objektom i $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustav u $\mathcal{C}$. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(i) $\boldsymbol{X}$ je nul-objekt u pro-$\mathcal{C}$;

(ii) $\boldsymbol{X}$ je nul-objekt u pro*-$\mathcal{C}$;

(iii) Za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoji $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda' \geq \lambda$, takav da je $p_{\lambda\lambda'}$ nul-morfizam u $\mathcal{C}$.

Dokaz. Tvrdnja teorema slijedi iz Teorema II.2.7 u [16] i Teorema 4.4 u [9]. □

Primjer 2.37. *Neka je u inverznom nizu grupa $\boldsymbol{G} = (G_n, p_{nn+1})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ $G_n = \mathbb{Z}$ i neka je vezni homomorfizam p_{nn+1} množenje s 2. Očigledno, ni za jedan $n' \geq n$ ne vrijedi $p_{nn'} = p_{nn+1} \cdots p_{n'-1n'} = 0$, pa $\boldsymbol{G}$ nije nul-objekt u kategoriji pro-Grp.*

2.5 Inverzni limesi i ekspanzije

Definicija 2.38. *Neka je dana kategorija $\mathcal{C}$ i neka je $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in Ob(pro\text{-}\mathcal{C})$. Pod **inverznim limesom** sustava $\boldsymbol{X}$ podrazumijevamo objekt $X \in Ob(\mathcal{C})$ i morfizam $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X) \to \boldsymbol{X}$ u pro-$\mathcal{C}$ sa sljedećim univerzalnim svojstvom:*
Za svaki morfizam $\boldsymbol{g} : (Y) \to \boldsymbol{X}$ u pro-$\mathcal{C}$ postoji jedinstveni morfizam $g : Y \to X$ u $\mathcal{C}$ takav da je

$$\boldsymbol{p}\,[(g)] = \boldsymbol{g},$$

odnosno da dijagram

$$\begin{tikzcd} & (Y) \arrow[dl, "\boldsymbol{g}"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,[(g)]"] \\ \boldsymbol{X} & (X) \arrow[l, "\boldsymbol{p}"] \end{tikzcd}$$

komutira u pro-$\mathcal{C}$.

Na terme u inverznom sustavu $\boldsymbol{X}$ možemo gledati kao na aproksimacije objekta X i veći indeks terma podrazumijeva bolju aproksimaciju.

Ako postoji, inverzni limes sustava je jedinstven do na izomorfizam. Drugim riječima, ako su $\boldsymbol{p} : (X) \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{p}' : (X') \to \boldsymbol{X}$ inverzni limesi, onda postoji jedinstveni izomorfizam $g : X' \to X$ takav da vrijedi $\boldsymbol{p}\,[(g)] = \boldsymbol{p}'$. Često sam objekt X nazivamo inverznim limesom sustava $\boldsymbol{X}$ i pišemo

$$X = \lim \boldsymbol{X},$$

a morfizme $p_\lambda : X \to X_\lambda$ nazivamo projekcijama.

Ako svaki inverzni sustav u kategoriji $\mathcal{C}$ ima limes, kažemo da $\mathcal{C}$ **dopušta limese**.

Primjer 2.39. *Kategorije Grp, Top, Set i Cpt (kategorija kompaktnih Hausdorffovih prostora) dopuštaju inverzne limese.*

U kategorijama koje dopuštaju produkte (na primjer u kategorijama Grp, Top, Set ili Cpt) inverzni limes X inverznog sustava $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ možemo smatrati podskupom produkta $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, s odgovarajućom strukturom (topološkom, grupnom, ...), čiji elementi $(x_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ zadovoljavaju relaciju

$$p_{\lambda\lambda'}(x_{\lambda'}) = x_\lambda,$$

za svaki usporedivi par indeksa $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \leq \lambda'$. Elemente inverznog limesa tada nazivamo **nitima**.

Primjer 2.40. *Inverzni limes inverznog niza grupa iz Primjera 2.37 je* $\{(0, 0, \dots)\}$ *(ili skraćeno* 0*). Naime, ako je* $(x_1, x_2, \dots) \in \lim \boldsymbol{G}$*, onda je* $x_n = 2x_{n+1}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, pa je* $x_n = 2^k x_{n+k}$ *djeljiv s* 2^k *za svaki* $k \in \mathbb{N}$*, a to je moguće jedino ako je* $x_n = 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Iz ovog primjera vidimo da inverzni limes inverznog sustava može biti nul-objekt i ako sam sustav nije nul-objekt u kategoriji pro-*$\mathcal{C}$*, što znači da se neke informacije u limesu gube.*

Navedimo tri teorema o inverznim limesima inverznih sustava kompaktnih topoloških prostora na koje ćemo se pozivati u nastavku.

Teorem 2.41 ([16], Teorem I.5.6)**.** *Neka je X kompaktni Hausdorffov prostor, $\boldsymbol{X}$ kompaktni sustav (inverzni sustav kojemu su termi neprazni kompaktni Hausdorffovi prostori) i $\boldsymbol{p} : (X) \to \boldsymbol{X}$ morfizam u pro-Top. Ako je $p_\lambda : X \to X_\lambda$ surjektivno preslikavanje za svaki $\lambda \in \Lambda$ i ako za svake dvije različite točke $x, x' \in X$ postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $p_\lambda(x) \neq p_\lambda(x')$, odnosno ako $\boldsymbol{p}$ razlikuje točke, onda je $\boldsymbol{p}$ inverzni limes sustava $\boldsymbol{X}$.*

Teorem 2.42. *Inverzni limes inverznog niza nepraznih kompaktnih metričkih prostora je neprazan kompaktan metrički prostor (kompaktum).*
Inverzni limes inverznog niza nepraznih povezanih kompaktnih metričkih prostora je neprazan povezan kompaktan metrički prostor (kontinuum).

Dokaz. Posljedica Teorema I.5.3 u [16] i Teorema 2.7 u [15]. □

Teorem 2.43 ([16], Teorem I.5.7)**.** *Svaki je kompaktni Hausdorffov prostor X inverzni limes inverznog sustava kompaktnih poliedara.*

Prisjetimo se definicije poliedra.

Definicija 2.44. ***Apstraktni simplicijalni kompleks*** *L s (nepraznim) skupom vrhova V je množina nepraznih podskupova $\sigma \in \mathcal{P}(V)$ koje nazivamo simpleksima. Pri tome je $\{v\} \in L$ za svaki $v \in V$ i za svaki $\sigma \in L$ iz $\tau \subset \sigma$ slijedi $\tau \in L$ čim je $\tau \neq \emptyset$.*
Tijelo *$|L|$ apstraktnog simplicijalnog kompleksa L sa skupom vrhova V tvore sve funkcije $\gamma : V \to I$ takve da je $\sum\limits_{v \in V} \gamma(v) = 1$.*
Prostor X nazivamo ***poliedrom*** *ako je $X = |L|$ sa slabom topologijom s obzirom na množinu prostora $\{|\sigma| \mid \sigma \in L\}$, za neki apstraktni simplicijalni kompleks L.*

Poliedri imaju dobra lokalna svojstava zbog kojih se lako mogu razvrstavati u skupine i analizirati, i za to su dovoljni alati homotopske teorije. Nabrojimo neka od tih svojstava:

- Svaki poliedar je parakompaktan (vidjeti Korolar 1.1.3 u prvom dodatku u [16]) i normalan topološki prostor ([21], Teorem 3.1.17);

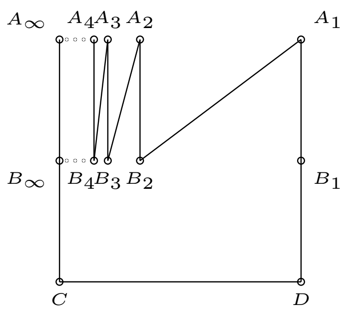
- Svaki poliedar je lokalno kontraktibilan u smislu da za svaku otvorenu okolinu U točke $x \in X$ postoji otvorena okolina V točke x sadržana u U takva da je V kontraktibilna u U, odnosno da je inkluzija $V \hookrightarrow U$ homotopna konstantnom preslikavanju (posljedica Teorema 6.1 i Teorema 6.6 iz drugog poglavlja u [14]);

- Svaki poliedar je lokalno povezan i lokalno putovima povezan u smislu da za svaku otvorenu okolinu U točke $x \in X$ postoji otvorena okolina V točke x sadržana u U koja je povezana odnosno putovima povezana (slijedi iz lokalne kontraktibilnosti);

- Svaki povezani poliedar je putovima povezan ([3], Korolar 1.4.12 i Napomena na str. 107.);

- Svaki otvoren podskup poliedra je poliedar (vidjeti Teorem 1.1.5 u prvom dodatku u [16]).

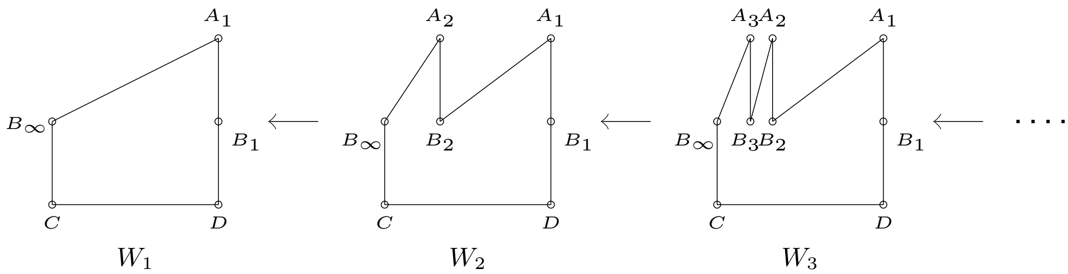
Primjer 2.45. *Kategorija CPol kompaktnih poliedara i preslikavanja među njima nije kategorija koja dopušta limese. To se vidi iz primjera Varšavske kružnice W koja nije poliedar (nije lokalno putovima povezana), a izomorfna je inverznom limesu inverznog niza kompaktnih poliedara. W se može prikazati kao beskonačna poligonalna crta u $\mathbb{R}^2$ sa slike*



gdje je $C = (0,0)$, $D = (1,0)$, te za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left(\frac{1}{2n-1}, 1\right) \quad i \quad B_n = \left(\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2}\right).$$

Pogledajmo inverzni niz $\boldsymbol{W} = (W_n, p_{nn+1})$ dan na slici



s veznim preslikavanjima $p_{nn+1} : W_{n+1} \to W_n$ *takvim da je, uz oznaku*

$$C_{n+1} = \overline{A_n B_{n+1}} \cup \overline{B_{n+1} A_{n+1}} \cup \overline{A_{n+1} B_\infty} \subset W_{n+1},$$

$p_{nn+1}/_{(W_{n+1} \setminus C_{n+1})}$ *inkluzija, i* $p_{nn+1}/_{C_{n+1}}$ *horizontalna projekcija na* $\overline{A_n B_\infty}$. *Inverzni limes ovog niza je upravo Varšavska kružnica* W. *Naime, možemo definirati morfizam* $\boldsymbol{p} = [(p_n)] : (W) \to \boldsymbol{W}$ *tako da je suženje od* $p_n : W \to W_n$ *na* $W_n \setminus \overline{A_n B_\infty} \subset W$ *inkluzija i suženje od* p_n *na* $W \setminus W_n$ *horizontalna projekcija. Morfizam* $\boldsymbol{p}$ *je dobro definiran jer vrijedi* $p_{nn+1} p_{n+1} = p_n$, *i po Teoremu 2.41 to je inverzni limes.*

Primjer 2.46. *Limes inverznoga niza* $\boldsymbol{C} = (C_i, p_{ii+1})$ *u pro-Top, gdje su* $C_i = \{0, 2\}^i$, *a* $p_{ii+1} : C_{i+1} \to C_i$ *projekcije, je Cantorov skup.*

Ako je $\mathcal{C}$ kategorija koja dopušta limese, svaki morfizam $\boldsymbol{f} = \left[(\varphi, f_\mu)\right] : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ u *pro*-$\mathcal{C}$ inducira jedinstveni morfizam

$$f : \lim \boldsymbol{X} \to \lim \boldsymbol{Y}$$

u $\mathcal{C}$ za kojeg vrijedi

$$f_\mu p_{\varphi(\mu)} = q_\mu f, \quad \text{za svaki} \quad \mu \in M,$$

gdje je $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (\lim \boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{q} = \left[(q_\mu)\right] : (\lim \boldsymbol{Y}) \to \boldsymbol{Y}$, odnosno

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}\,[(f)]\,.$$

Tada obično pišemo $f = \lim \boldsymbol{f}$. Lako se pokaže da za morfizme $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ u *pro*-$\mathcal{C}$ za koje postoji

$\boldsymbol{gf}$ vrijedi

$$\lim(\boldsymbol{gf}) = (\lim \boldsymbol{g}) \circ (\lim \boldsymbol{f}).$$

Također, za svaki inverzni sustav $\boldsymbol{X}$ u $\mathcal{C}$ je $\lim \mathbf{1}_{\boldsymbol{X}} = 1_{\lim \boldsymbol{X}}$. Po tome, inverzni limes u kategorijama koje dopuštaju limese možemo promatrati kao funktor

$$\lim : \mathit{pro}\text{-}\mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

Definirajmo sada ekspanziju objekta neke kategorije na inverzni sustav njezine potkategorije. Cilj nam je uspostaviti veze među objektima na osnovi veze među njihovim ekspanzijama. Naravno, zanimljive su nam ekspanzije objekata na inverzne sustave koji imaju ljepša svojstva, prvenstveno ekspanzije topoloških prostora na inverzne sustave poliedara.

Definicija 2.47. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija i $\mathcal{D}$ njezina potkategorija. Za $X \in Ob(\mathcal{C})$,* **$\mathcal{D}$-*ekspanzijom*** *objekta X ili razvojem objekta X u objekte potkategorije $\mathcal{D}$ nazivamo morfizam $\boldsymbol{p} : (X) \to \boldsymbol{X}$ (skraćeno $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$) u pro-$\mathcal{C}$, gdje je $\boldsymbol{X}$ inverzni sustav u $\mathcal{D}$, sa sljedećim univerzalnim svojstvom:*
Za svaki inverzni sustav $\boldsymbol{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ u kategoriji $\mathcal{D}$ i svaki morfizam $\boldsymbol{h} : (X) \to \boldsymbol{Y}$ u pro-$\mathcal{C}$, postoji jedinstveni morfizam $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ u pro-$\mathcal{D}$ takav da je

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{fp},$$

odnosno da dijagram

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[dr, dashed, "\boldsymbol{f}"'] & (X) \arrow[l, "\boldsymbol{p}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{h}"] \\ & \boldsymbol{Y} \end{tikzcd}$$

komutira u pro-$\mathcal{C}$.

Ako su $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ dvije ekspanzije istog objekta X, tada postoji jedinstveni izomorfizam $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ u *pro*-$\mathcal{D}$ takav da je

$$\boldsymbol{ip} = \boldsymbol{p}'.$$

Izomorfizam $\boldsymbol{i}$ nazivamo **kanonskim**.

Očigledno, ako je $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ izomorfizam u *pro*-$\mathcal{D}$, a $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ $\mathcal{D}$-ekspanzija objekta $X \in Ob(\mathcal{C})$, onda je i $\boldsymbol{ip}$ također $\mathcal{D}$-ekspanzija objekta X. Također, ako je $X \in Ob(\mathcal{D})$, a $\mathcal{D}$ puna potkategorija kategorije $\mathcal{C}$, onda je $[(1_X)] : X \to (X)$ $\mathcal{D}$-ekspanzija od X.

Definicija 2.48. *Kažemo da je potkategorija $\mathcal{D}$ kategorije $\mathcal{C}$ **gusta** u $\mathcal{C}$ (ili **pro-reflektivna**) ako za svaki objekt X u $\mathcal{C}$ postoji $\mathcal{D}$-ekspanzija $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$.*

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete da morfizam $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ bude ekspanzija.

Teorem 2.49 ([16], Teorem I.2.1)**.** *Neka je $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustav u $\mathcal{D}$. Morfizam $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ je $\mathcal{D}$-ekspanzija objekta $X \in Ob(\mathcal{C})$ ako i samo ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

(E1) Za svaki objekt P u $\mathcal{D}$ i svaki morfizam $h : X \to P$ u $\mathcal{C}$ postoji $\lambda \in \Lambda$ i morfizam $f : X_\lambda \to P$ u $\mathcal{D}$ takvi da je $fp_\lambda = h$.

(E2) Ako su $f, f' : X_\lambda \to P$ morfizmi u $\mathcal{D}$ za koje vrijedi $fp_\lambda = f'p_\lambda$, onda postoji $\lambda' \geq \lambda$ takav da je $fp_{\lambda\lambda'} = f'p_{\lambda\lambda'}$.

Smisao navedenih uvjeta je da se svaki morfizam iz X u objekt potkategorije $\mathcal{D}$ može faktorizirati kroz neki član $\mathcal{D}$-ekspanzije od X i da je ta faktorizacija na neki način jedinstvena.

2.6 Kategorija oblika

Definicija 2.50. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija, i $\mathcal{D}$ njezina puna i gusta potkategorija. Neka su $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ $\mathcal{D}$-ekspanzije objekta $X \in Ob(\mathcal{C})$, i $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{q}' : Y \to \boldsymbol{Y}'$ $\mathcal{D}$-ekspanzije objekta $Y \in Ob(\mathcal{C})$. Kažemo da su morfizmi $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{f}' : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ u pro-$\mathcal{D}$ **ekvivalentni**, i pišemo $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{f}'$, ako dijagram*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, "\boldsymbol{i}"] \arrow[d, "\boldsymbol{f}"'] & \boldsymbol{X}' \arrow[d, "\boldsymbol{f}'"] \\ \boldsymbol{Y} \arrow[r, "\boldsymbol{j}"] & \boldsymbol{Y}' \end{tikzcd}$$

komutira. Ovdje su $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ *i* $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}'$ *kanonski izomorfizmi među ekspanzijama istog objekta.*

Pokaže se da je relacija $\sim$ kongruencija na *pro*-$\mathcal{D}$ kategoriji. Naime, relacija $\sim$ *pro*-$\mathcal{D}$ ekvivalencije je ekvivalencija na klasi svih morfizama u kategoriji *pro*-$\mathcal{D}$ između inverznih sustava u kategoriji $\mathcal{D}$ koji su ekspanzije objekata u $\mathcal{C}$. Također, ako je $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{f}'$ i $\boldsymbol{g} \sim \boldsymbol{g}'$, onda je i $\boldsymbol{g}\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{g}'\boldsymbol{f}'$ ako navedene kompozicije postoje.

Klasu ekvivalencije morfizma $\boldsymbol{f}$ označujemo s $\langle \boldsymbol{f} \rangle$. Nadalje, vrijedi i sljedeći teorem.

Teorem 2.51. *Za bilo koje* $\mathcal{D}$*-ekspanzije* $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ *i* $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{q}' : Y \to \boldsymbol{Y}'$ *objekata* X *i* Y*, redom, za svaki morfizam* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *u pro-*$\mathcal{D}$ *postoji jedinstveni morfizam* $\boldsymbol{f}' : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ *takav da je* $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{f}'$*. Posebno, ako je* $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}' : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *i* $\boldsymbol{g} \sim \boldsymbol{g}'$*, onda je* $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}'$*.*

Dokaz. Lako se provjeri prolazeći odgovarajućim dijagramom. $\square$

Po prethodnom, za par kategorija $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, gdje je $\mathcal{D}$ puna i gusta potkategorija kategorije $\mathcal{C}$, možemo promatrati novu kategoriju koju nazivamo **kategorijom oblika** i označujemo s $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$. Objekti ove nove kategorije se podudaraju s objektima kategorije $\mathcal{C}$, a morfizmi $F : X \to Y$ među objektima $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ su klase ekvivalencije $\langle \boldsymbol{f} \rangle$ morfizama $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ s obzirom na relaciju $\sim$ u *pro*-$\mathcal{D}$ kategoriji. Pri tome su $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$ bilo koje $\mathcal{D}$-ekspanzije objekata X i Y redom.

Morfizam oblika $F : X \to Y$ možemo predočiti sljedećim dijagramom.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[d, "\boldsymbol{f}"'] & X \arrow[l, "\boldsymbol{p}"'] \arrow[d, dashed, "F"] \\
\boldsymbol{Y} & Y \arrow[l, "\boldsymbol{q}"']
\end{tikzcd}$$

Prirodno, kompozicija morfizama oblika $F = \langle \boldsymbol{f} \rangle : X \to Y$ i $G = \langle \boldsymbol{g} \rangle : Y \to Z$ jednaka je klasi ekvivalencije kompozicije reprezentanata čija kompozicija postoji (po Teoremu 2.51 takve uvijek možemo pronaći), odnosno $G \circ F = \langle \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} \rangle$.

Identitički morfizam oblika $1_X : X \to X$ je dan s $1_X = \langle \mathbf{1}_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \rangle$, gdje je $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ neka $\mathcal{D}$-ekspanzija objekta X.

Po sljedećem teoremu, svakom morfizmu $f : X \to Y$ u kategoriji $\mathcal{C}$ možemo pridružiti klasu ekvivalentnih morfizama $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ u kategoriji *pro*-$\mathcal{D}$, a to znači i morfizam oblika $F : X \to Y$ u kategoriji $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$.

Teorem 2.52. *Za svaki morfizam $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ i za svake dvije $\mathcal{D}$-ekspanzije $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$ postoji jedinstveni morfizam $\boldsymbol{f} \in$ pro-$\mathcal{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ takav da dijagram*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[d, "\boldsymbol{f}"'] & (X) \arrow[l, "\boldsymbol{p}"'] \arrow[d, "{[(f)]}"] \\
\boldsymbol{Y} & (Y) \arrow[l, "\boldsymbol{q}"']
\end{tikzcd}$$

komutira u pro-$\mathcal{C}$. Ako su $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ i $\boldsymbol{q}' : Y \to \boldsymbol{Y}'$ neke druge dvije $\mathcal{D}$-ekspanzije i $\boldsymbol{f}' \in$ pro-$\mathcal{D}(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}')$ takav da je

$$\boldsymbol{f}'\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}' \, [(f)] \, ,$$

onda je $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{f}'$.

Dokaz. Slijedi iz svojstava ekspanzije. $\square$

Sada možemo definirati pridruživanje $S = S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : \mathcal{C} \to Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ s

$$S(f) = F \quad \text{i} \quad S(X) = X.$$

Lako se provjeri da je S funktor, a nazivamo ga **funktorom oblika**. Iz sljedećih primjera se vidi da S općenito nije ni vjeran ni pun.

Primjer 2.53. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija potpuno regularnih prostora i preslikavanja među njima, a $\mathcal{D}$ njezina puna potkategorija kompaktnih Haussdorfovih prostora. Tada je, za svaki $X \in Ob(\mathcal{C})$ prirodna inkluzija $p : X \to \beta X$ prostora X u njegovu Stone-Čechovu kompaktifikaciju βX ujedno i $\mathcal{D}$-ekspanzija objekta X. Naime, svako preslikavanje $f : X \to P$, gdje je $P \in Ob(\mathcal{D})$, ima jedinstveno proširenje $g : \beta X \to P$ takvo da je $gp = f$. To znači da su za $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ morfizmi oblika $F : X \to Y$ u $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ dani preslikavanjima $\beta X \to \beta Y$.*
Uzmemo li, na primjer, za X jednotočkovni skup $\{x\}$, a za Y prostor koji nije kompaktan, morfizmi oblika $F : \{x\} \to Y$ predstavljeni preslikavanjima $f : \{x\} \to \beta Y$, $f(x) \in \beta Y \backslash Y$, nisu slike preslikavanja iz $\mathcal{C}(\{x\}, Y)$.

Primjer 2.54. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija kompaktnih metričkih prostora i homotopskih klasa preslikavanja, a $\mathcal{D}$ njezina puna potkategorija kompaktnih poliedara. Neka su $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, neka je X ponovno jednotočkovan, a Y kontinuum koji nije putovima povezan. Tada točke u različitim komponentama povezanosti putovima određuju različite morfizme u $\mathcal{C}(X, Y)$. Međutim, kao što ćemo u nastavku vidjeti (po teoremima 2.43, 2.42, 2.66 i 2.68 i koristeći činjenicu da je svaki povezani poliedar i putovima povezan), u proizvoljnoj $\mathcal{D}$-ekspanziji $\boldsymbol{Y}$ prostora Y svi članovi inverznog sustava su povezani, pa i putovima povezani poliedri, što znači da postoji samo jedan morfizam $\boldsymbol{f} : (X) \to \boldsymbol{Y}$ u pro-$\mathcal{D}$ kategoriji, a time i samo jedan morfizam oblika $F : X \to Y$. Drugim riječima, slike svih morfizama iz $\mathcal{C}(X, Y)$ po funktoru $S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ su iste.*

Međutim, restrikcija funktora S na kategoriju $\mathcal{D}$,

$$S/_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}/_{\mathcal{D}}$$

je izomorfizam kategorija. Štoviše, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.55 ([16], Teorem I.2.4)**.** *Neka je $P \in Ob(\mathcal{D})$ i $X \in Ob(\mathcal{C})$. Tada za svaki morfizam oblika $F : X \to P$ postoji jedinstveni morfizam $f : X \to P$ u $\mathcal{C}$ takav da je $S(f) = F$.*

Napomena 2.56. *Morfizme F i f iz prethodnog teorema ćemo najčešće poistovjećivati. Također, budući da funktor S drži objekte čvrstima, kategoriju $\mathcal{D}$ smijemo smatrati punom potkategorijom kategorije $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$.*

Ako su objekti X i Y izomorfni u $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, kažemo da su oni **istoga oblika** i pišemo

$$sh(X) = sh(Y).$$

Lako se vidi da je morfizam oblika $F = \langle \boldsymbol{f} \rangle : X \to Y$ izomorfizam u $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ ako i samo ako je $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ izomorfizam u *pro*-$\mathcal{D}$. Drugim riječima, X i Y su istoga oblika ako i samo ako su njihove proizvoljne $\mathcal{D}$-ekspanzije izomorfne u *pro*-$\mathcal{D}$. Očigledno, izomorfnost objekata u kategoriji $\mathcal{C}$ povlači izomorfnost u kategoriji oblika $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ jer svaki funktor pa tako i funktor S, čuva izomorfnost, dok obrat ne vrijedi (na primjer, kao što ćemo vidjeti, kružnica i Varšavska kružnica imaju isti oblik, a nisu izomorfne, tj. nisu homotopski ekvivalentne). To znači da je razvrstavanje objekata kategorije $\mathcal{C}$ po obliku grublje od razvrstavanja po izomorfnosti, što je ključni doprinos teorije oblika.

U literaturi se pod teorijom oblika podrazumijeva proučavanje **kategorije topološkog oblika** $Sh = Sh_{(HTop,HPol)}$. $HPol$ je puna potkategorija homotopske kategorije topoloških prostora $HTop$ i ona za objekte ima sve topološke prostore homotopskog tipa poliedra.

Da bismo naveli tvrdnje iz kojih slijedi da je $HPol$ gusta potkategorija kategorije $HTop$ treba nam definicija rezolvente, morfizma u *pro*-Top koji je istovremeno i inverzni limes ako su termi inverznih sustava na kojima je definiran kompaktni. Rezolventa u stvari igra ulogu inverznog limesa u konstrukciji ekspanzija za topološke prostore koji nisu kompaktni.

Prisjetimo se najprije definicije apsolutnog okolinskog retrakta.

Definicija 2.57. *Neka je X topološki prostor, $A \subset X$ njegov potprostor i $r : X \to A$ preslikavanje. Kažemo da je r **retrakcija** ako je $r \circ i = 1_A$, gdje je $i : A \hookrightarrow X$ inkluzija.*

Ako $A \subset X$ dopušta retrakciju $r : X \to A$, kažemo da je A ***retrakt*** *od X. Potprostor $A \subset X$ je* ***okolinski retrakt*** *od X ako je retrakt nekog otvorenog potprostora U od X.*

Primjer 2.58. *Svaki jednotočkovni ili otvoreno-zatvoreni podskup topološkog prostora X retrakt je od X. Zatvorena kugla $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ je retrakt prostora $\mathbb{R}^n$, dok sfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ nije retrakt od $\mathbb{R}^n$, ali je okolinski retrakt tog prostora jer je retrakt prostora $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Definicija 2.59. *Za klasu $\mathcal{C}$ topoloških prostora kažemo da je* ***slabo nasljedna*** *ako vrijedi:*

(i) Svaki $X \in \mathcal{C}$ je Hausdorffov prostor;

(ii) Ako je $A \subset X$ zatvoreni podskup od $X \in \mathcal{C}$, onda je $A \in \mathcal{C}$;

(iii) Ako su X i X' homeomorfni prostori i $X \in \mathcal{C}$, onda je i $X' \in \mathcal{C}$.

Primjer 2.60. *Slabo nasljedne klase su npr. klasa svih regularnih prostora $Ob(\mathcal{R})$ ili skraćeno $\mathcal{R}$, klasa svih normalnih prostora $\mathcal{N}$, klasa svih 1-prebrojivih prostora $\mathcal{C}_1$, klasa svih kompaktnih prostora Cpt, klasa svih diskretnih prostora $\mathcal{D}$ i klasa svih metrizabilnih prostora $\mathcal{M}$.*

Definicija 2.61. *Neka je $\mathcal{C}$ slabo nasljedna klasa i Y prostor. Kažemo da je Y* ***apsolutni retrakt za klasu*** *$\mathcal{C}$ i pišemo $Y \in AR(\mathcal{C})$ ako vrijedi:*

(i) $Y \in \mathcal{C}$;

(ii) Ako je Y homeomorfan Y', $Y' \subset Z$ zatvoren podskup od Z i $Z \in \mathcal{C}$, onda je Y' retrakt od Z.

Definicija 2.62. *Neka je $\mathcal{C}$ slabo nasljedna klasa i Y prostor. Kažemo da je Y* ***apsolutni okolinski retrakt za klasu*** *$\mathcal{C}$ i pišemo $Y \in ANR(\mathcal{C})$ ako vrijedi:*

(i) $Y \in \mathcal{C}$;

(ii) Ako je Y homeomorfan Y', $Y' \subset Z$ zatvoren podskup od Z i $Z \in \mathcal{C}$, onda je Y' okolinski retrakt od Z.

Na ovaj su način dobivene dvije nove kategorije, $AR(\mathcal{C})$ i $ANR(\mathcal{C})$, koje su pune potkategorije kategorije Top. Objekti kategorije $AR(\mathcal{C})$ su svi apsolutni retrakti za klasu

$\mathcal{C}$, a objekti kategorije $ANR(\mathcal{C})$ su svi apsolutni okolinski retrakti za klasu $\mathcal{C}$. Naravno, $AR(\mathcal{C}) \subset ANR(\mathcal{C})$. Specijalno, ako je $\mathcal{C}$ klasa metrizabilnih prostora $\mathcal{M}$, kategorije $AR(\mathcal{M})$ i $ANR(\mathcal{M})$ označujemo samo s AR i ANR, a njihove objekte nazivamo AR-ovima, odnosno ANR-ovima.

Kategorija ANR obuhvaća široku klasu topoloških prostora i jedna je od temeljnih kategorija u teoriji oblika. Kao i poliedri, ANR-ovi se dobro lokalno ponašaju, i na njih se može primjenjivati homotopska teorija. Neka od tih dobrih svojstava su:

- Svaki ANR X je lokalno kontraktibilan (za dokaz vidjeti dokaz Teorema I.3.7 u [16]).
- Svaki ANR X je lokalno putovima povezan (posljedica lokalne kontraktibilnosti).
- Svaki otvoren podskup ANR-a je ANR.
- Svaki ANR je homotopski ekvivalentan nekom poliedru, i obratno, svaki poliedar je homotopski ekvivalentan nekom ANR-u (za dokaz vidjeti Teorem 2.2.3 i Teorem 2.2.4 u prvom dodatku u [16]).

Zbog posljednjeg svojstva kategorija $Sh_{(HTop,HPol)}$ izomorfna je kategoriji $Sh_{(HTop,HANR)}$, a budući da obje za objekte imaju istu klasu, poistovjećujemo ih i za obje koristimo istu oznaku Sh.

Navedimo primjere dvaju prostora koji nemaju dobra lokalna svojstva, koje homotopska teorija ne prepoznaje niti ih može klasificirati, ali ih zato uočava teorija oblika.

Primjer 2.63. *Varšavska kružnica W je kompaktan, povezan, putovima povezan topološki prostor, ali nije lokalno kompaktan, ni lokalno putovima povezan, pa ni lokalno kontraktibilan prostor (svaki lokalno kontraktibilan prostor je lokalno putovima povezan, dok obratno ne mora vrijediti). W nije ni kontraktibilan prostor. Po prethodnome, W nije ANR, štoviše, može se pokazati da nema homotopski tip ANR-a. Sve homotopske grupe prostora W su trivijalne, ali W nije homotopski ekvivalentan točki.*

Primjer 2.64. *Havajska naušnica $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ s potprostorskom topologijom je kompaktna, povezana, lokalno putovima povezana, ali nije lokalno kontraktibilna jer svaka okolina ishodišta sadrži kružnicu koja nije kontraktibilna. Po tome, ni H nije ANR, niti ima homotopski tip ANR-a.*

Definirajmo konačno rezolventu topološkog prostora, koju u teoriji oblika koristimo za aproksimaciju topoloških prostora koji nisu kompaktni.

Definicija 2.65. ***Rezolventa*** *topološkog prostora* X *je morfizam* $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X) \to \boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *u pro-Top kategoriji koji ima sljedeća dva svojstva:*

(R1) Neka je P *ANR,* $\mathcal{V}$ *otvoreni pokrivač od* P *i* $h : X \to P$ *preslikavanje. Tada postoji* $\lambda \in \Lambda$ *i preslikavanje* $f : X_\lambda \to P$ *takvo da su* h *i* fp_λ $\mathcal{V}$*-bliski, odnosno da za svaki* $x \in X$ *postoji element* V *pokrivača* $\mathcal{V}$ *takav da je* $h(x), fp_\lambda(x) \in V$.

(R2) Neka je P *ANR i* $\mathcal{V}$ *otvoreni pokrivač od* P. *Tada postoji otvoreni pokrivač* $\mathcal{V}'$ *od* P *sa sljedećim svojstvom:*
Za svaki $\lambda \in \Lambda$ *i svaka dva preslikavanja* $f, f' : X_\lambda \to P$ *takva da su* fp_λ *i* $f'p_\lambda$ $\mathcal{V}'$*-bliski postoji* $\lambda' \geq \lambda$ *takav da su* $fp_{\lambda\lambda'}$ *i* $f'p_{\lambda\lambda'}$ $\mathcal{V}$*-bliski.*

Ako su u rezolventi $\boldsymbol{p} : (X) \to \boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ prostora X svi termi X_λ poliedri, kažemo da je $\boldsymbol{p}$ **poliedarska rezolventa**. Isto tako, ako su termi ANR-ovi, kažemo da je $\boldsymbol{p}$ **ANR-rezolventa**.

Teorem 2.66 ([16], Teorem I.6.1)**.** *Neka je* $\boldsymbol{p} : (X) \to \boldsymbol{X}$ *morfizam u pro-Cpt kategoriji. Tada je* $\boldsymbol{p}$ *rezolventa prostora* $\boldsymbol{X}$ *ako i samo ako je* $\boldsymbol{p}$ *inverzni limes prostora* $\boldsymbol{X}$.

Navodimo dva bitna teorema iz kojih slijedi da svaki topološki prostor ima $HPol$-ekspanziju, odnosno da je kategorija $HPol$ zaista gusta u $HTop$ kategoriji.

Teorem 2.67 ([16], Teorem I.6.7)**.** *Svaki topološki prostor* X *dopušta svoju poliedarsku rezolventu* $\boldsymbol{p} : (X) \to \boldsymbol{X}$.

Teorem 2.68 ([16], Teorem I.6.2)**.** *Neka je* $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X) \to \boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *rezolventa prostora* X. *Tada je* $H\boldsymbol{p} = [([p_\lambda])] : X \to H\boldsymbol{X} = (X_\lambda, [p_{\lambda\lambda'}], \Lambda)$ $HPol$*-ekspanzija prostora* X.

Napomena 2.69. *Funktor* H : *pro-*$Top \to$ *pro-*$HTop$ *prirodno je induciran funktorom* $H : Top \to HTop$ *definiranim u Primjeru 2.16.*

Primjer 2.70. *Pogledajmo ponovo primjer Varšavske kružnice. U Primjeru 2.45 prostor* W *je prikazan kao inverzni limes kompaktnih poliedara* $\boldsymbol{p} : W \to \boldsymbol{W} = (W_n, p_{nn+1})$,

a po Teoremu 2.66 je $\boldsymbol{p}$ i rezolventa prostora W. To znači da je, po Teoremu 2.68, $H\boldsymbol{p} : W \to H\boldsymbol{W} = (W_n, [p_{nn+1}])$ poliedarska ekspanzija od W. Budući da su u inverznom sustavu $\boldsymbol{W}$ sva vezna preslikavanja p_{nn+1} homotopske ekvivalencije, vezni morfizmi u sustavu $H\boldsymbol{W}$ su izomorfizmi u kategoriji $HPol$. Posljedica toga je da je $H\boldsymbol{W}$ izomorfan rudimentarnom sustavu (W_n) za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ (vidjeti Napomenu I.5.2 u [16]).
Odaberimo neki $n \in \mathbb{N}$. W_n je poliedar pa je $[([1_{W_n}])] : W_n \to (W_n)$ njegova ekspanzija. To znači da W i W_n imaju izomorfne ekspanzije pa su izomorfni u kategoriji oblika Sh, odnosno $sh(W) = sh(W_n)$. S druge strane, W_n i kružnica S^1 su izomorfni pa su i homotopski ekvivalentni i istog su oblika. Dakle, Varšavska kružnica W i kružnica S^1 nisu homotopski ekvivalentni, imaju različite homotopske grupe ($\pi_1(W, x_0) = 0$ za svaki $x_0 \in W$, a $\pi_1(S^1, s_0) = \mathbb{Z}$ za svaki $s_0 \in S^1$), ali istog su oblika. To potvrđuje njihovu određenu sličnost jer ravninu dijele na isti način na dva dijela.

Pored kategorije topološkog oblika Sh promatrat ćemo i punktiranu kategoriju topološkog oblika $Sh_{(HTop_\circ, HPol_\circ)}$ koju označujemo sa $Sh_\circ$. Objekti su joj punktirani prostori, a morfizmi su konstruirani od punktiranih preslikavanja. Naime, po sljedećem teoremu, kategorije $HPol_\circ$ i $HANR_\circ$ su pro-reflektivne potkategorije kategorije $HTop_\circ$.

Teorem 2.71 ([16], Teorem I.6.8)**.** *Neka je*

$$\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X) \to \boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$$

poliedarska ili ANR-rezolventa topološkog prostora X, neka je $x_0 \in X$ i neka je, za svaki $\lambda \in \Lambda$, $x_\lambda = p_\lambda(x_0) \in X_\lambda$. Tada je punktirani morfizam

$$\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$$

u pro-$Top_\circ$ poliedarska (ANR-) rezolventa punktiranog prostora (X, x_0), a

$$H\boldsymbol{p} = [([p_\lambda])] : (X, x_0) \to H(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_\lambda, x_\lambda), [p_{\lambda\lambda'}], \Lambda)$$

je $HPol_\circ$ ($HANR_\circ$)-ekspanzija prostora (X, x_0).

Napomena 2.72. *U prethodnom teoremu se koristi pojam rezolvente punktiranog prostora, koji je prirodno poopćenje pojma rezolvente. Preciznije, morfizam $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) =$*

$((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *u kategoriji pro-*$Top_\circ$ *je rezolventa punktiranog prostora* (X, x_0) *ako ima svojstva* $(R1)$ *i* $(R2)$ *iz Definicije 2.65 za punktirani* ANR (P, p_0). *Pri tome, ako su svi* (X_λ, x_λ) *punktirani poliedri (ANR-ovi), kažemo da je* $\boldsymbol{p}$ *poliedarska (ANR-)rezolventa.*

Korolar 2.73. *Svaki punktirani topološki prostor* X *dopušta svoju* $HPol_\circ$*-ekspanziju.*

Primjer 2.74. *Neka je* (X_i, p_{ii+1}) *inverzni niz kontinuuma takav da je* $X_i = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, *a* $p_{ii+1} : X_{i+1} \to X_i$ *je dan s* $p_{ii+1}(z) = z^{p_i}$, *gdje je* $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i > 1$, $i \in \mathbb{N}$. *Inverzni limes niza* (X_i, p_{ii+1}) *je kontinuum kojeg označujemo s* $\Sigma_{(p_i)}$ *i nazivamo* ***solenoidom***. *Specijalno, ako je* $p_i = 2$ *za svaki* $i \in \mathbb{N}$, *solenoid nazivamo* ***dijadskim*** *i označujemo ga s* Σ_2. *Sve homotopske grupe dijadskog solenoida su trivijalne, ali solenoid nije homotopski ekvivalentan jednotočkovnom prostoru (nije kontraktibilan).*
Solenoidi su primjeri prostora koje ne prepoznaje ni homotopska teorija ni teorija oblika (pokazat ćemo u nastavku da je 1-dimenzionalna grupa oblika solenoida, algebarska invarijanta oblika, također trivijalna), što ukazuje na potrebu za razvijanjem alata za grublju klasifikaciju prostora od one koju nudi teorija oblika.

2.7 Kategorija gruboga oblika

Neka je ponovo $\mathcal{C}$ neka kategorija i $\mathcal{D}$ njezina puna i gusta potkategorija. Analogno *pro-*$\mathcal{D}$ ekvivalenciji morfizama u kategoriji *pro-*$\mathcal{D}$, u *pro**-$\mathcal{D}$ kategoriji imamo pojam *pro**-$\mathcal{D}$ ekvivalencije.

Definicija 2.75. *Neka su* $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ *i* $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ $\mathcal{D}$*-ekspanzije objekta* $X \in Ob(\mathcal{C})$, *i* $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$ *i* $\boldsymbol{q}' : Y \to \boldsymbol{Y}'$ $\mathcal{D}$*-ekspanzije objekta* $Y \in Ob(\mathcal{C})$. *Kažemo da su morfizmi* $\boldsymbol{f}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *i* $\boldsymbol{f}'^* : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ *u pro***-*$\mathcal{D}$ *kategoriji* ***ekvivalentni***, *i pišemo* $\boldsymbol{f}^* \sim \boldsymbol{f}'^*$, *ako u pro***-*$\mathcal{D}$ *komutira dijagram*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \xrightarrow{\boldsymbol{i}^*} & \boldsymbol{X}' \\ {\scriptstyle \boldsymbol{f}^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{f}'^*} \\ \boldsymbol{Y} & \xrightarrow{\boldsymbol{j}^*} & \boldsymbol{Y}' \end{array}$$

gdje je $\boldsymbol{i}^* = \underline{J}(\boldsymbol{i})$ *i* $\boldsymbol{j}^* = \underline{J}(\boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ *i* $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}'$ *su kanonski izomorfizmi* *među ekspanzijama istog objekta, a* $\underline{J} : pro\text{-}\mathcal{D} \to pro^*\text{-}\mathcal{D}$ *je funktor koji morfizmu u* $pro\text{-}\mathcal{D}$ *pridružuje odgovarajući inducirani morfizam u* $pro^*\text{-}\mathcal{D}$.

Prolazeći odgovarajućim dijagramima lako se provjeri da je relacija $\sim$ $pro^*\text{-}\mathcal{D}$ ekvivalencije relacija ekvivalencije na klasi svih morfizama u kategoriji $pro^*\text{-}\mathcal{D}$ između inverznih sustava u kategoriji $\mathcal{D}$ koji su ekspanzije objekata u $\mathcal{C}$. Pri tome vrijedi, ako je $\boldsymbol{f}^* \sim \boldsymbol{f}'^*$ i $\boldsymbol{g}^* \sim \boldsymbol{g}'^*$, onda je i $\boldsymbol{g}^*\boldsymbol{f}^* \sim \boldsymbol{g}'^*\boldsymbol{f}'^*$, čim navedene kompozicije postoje. Također, ako su zadani $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q}'$ i $\boldsymbol{f}^*$, onda je morfizam $\boldsymbol{j}^*\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{i}^*)^{-1}$ jedinstveni morfizam između ekspanzija $\boldsymbol{X}'$ i $\boldsymbol{Y}'$ ekvivalentan $\boldsymbol{f}^*$.

Klasu ekvivalencije morfizma $\boldsymbol{f}^*$ označujemo s $\langle \boldsymbol{f}^* \rangle$.

Sada za par kategorija $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, gdje je $\mathcal{D}$ puna i gusta potkategorija kategorije $\mathcal{C}$, možemo promatrati novu kategoriju koju nazivamo **kategorijom gruboga oblika** i označujemo s $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$. Objekti ove nove kategorije se podudaraju s objektima kategorije $\mathcal{C}$, a morfizmi $F^* : X \to Y$ među objektima $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ su klase ekvivalencije $\langle \boldsymbol{f}^* \rangle$ morfizama $\boldsymbol{f}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ s obzirom na relaciju $\sim$ u $pro^*\text{-}\mathcal{D}$ kategoriji. Pri tome su $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$ bilo koje $\mathcal{D}$-ekspanzije objekata X i Y redom.

Morfizam gruboga oblika $F^* : X \to Y$ obično predočavamo dijagramom

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[d, "\boldsymbol{f}^*"'] & X \arrow[l, "\boldsymbol{p}"'] \arrow[d, dashed, "F^*"] \\ \boldsymbol{Y} & Y \arrow[l, "\boldsymbol{q}"'] \end{tikzcd}$$

podrazumijevajući da je $pro\text{-}\mathcal{C}$ potkategorija kategorije $pro^*\text{-}\mathcal{C}$.

Kompozicija morfizama gruboga oblika $F^* = \langle \boldsymbol{f}^* \rangle : X \to Y$ i $G^* = \langle \boldsymbol{g}^* \rangle : Y \to Z$ jednaka je klasi ekvivalencije kompozicije reprezentanata čija kompozicija postoji (takve uvijek možemo pronaći), odnosno

$$G^* \circ F^* = \langle \boldsymbol{g}^* \circ \boldsymbol{f}^* \rangle .$$

Identitički morfizam gruboga oblika $1_X^* : X \to X$ je dan s

$$1_X^* = \langle \mathbf{1}_{\boldsymbol{X}}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \rangle ,$$

gdje je $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ neka $\mathcal{D}$-ekspanzija objekta X.

Budući da su, za svaki par objekata X i Y kategorije $\mathcal{C}$ i par fiksnih $\mathcal{D}$-ekspanzija $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ tih objekata, skupovi $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(X,Y)$ i $pro^*\text{-}\mathcal{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ međusobno bijektivno korespondentni, morfizam gruboga oblika $F^* : X \to Y$ smijemo poistovijetiti s morfizmom $\boldsymbol{f}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$. Obično se kaže da je kategorija $pro^*\text{-}\mathcal{D}$ realizacijska kategorija kategorije $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$.

Prisjetimo li se djelovanja funktora $\underline{J}_{\mathcal{C}} : pro\text{-}\mathcal{C} \to pro^*\text{-}\mathcal{C}$, prirodno dobivamo i funktorsku vezu između kategorija $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ i $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$. Pridruživanje

$$J_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} \to Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$$

koje objekte drži čvrstima, a morfizmu oblika $F = \langle \boldsymbol{f} \rangle : X \to Y$ pridružuje morfizam gruboga oblika $F^* = \langle \underline{J}(\boldsymbol{f}) \rangle : X \to Y$ je vjeran funktor koji, očigledno, nije pun. Zbog toga kategoriju $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ smatramo potkategorijom kategorije $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$.

Definirajmo još jedan važan funktor, analogon funktoru oblika. Budući da za svaki morfizam $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ i za svake dvije $\mathcal{D}$-ekspanzije $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$ postoji jedinstveni morfizam $\boldsymbol{f} \in pro\text{-}\mathcal{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[d, "\boldsymbol{f}"'] & (X) \arrow[l, "\boldsymbol{p}"'] \arrow[d, "{[(f)]}"] \\
\boldsymbol{Y} & (Y) \arrow[l, "\boldsymbol{q}"']
\end{tikzcd}$$

komutira u $pro\text{-}\mathcal{C}$ kategoriji, to postoji i jedinstveni morfizam $\boldsymbol{f}^* \in pro^*\text{-}\mathcal{D}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[d, "\boldsymbol{f}^*"'] & (X) \arrow[l, "\underline{J}(\boldsymbol{p})"'] \arrow[d, "\underline{J}([(f)])"] \\ \boldsymbol{Y} & (Y) \arrow[l, "\underline{J}(\boldsymbol{q})"'] \end{tikzcd}$$

komutira u pro^*-$\mathcal{C}$ kategoriji. I još, ako su $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ i $\boldsymbol{q}' : Y \to \boldsymbol{Y}'$ neke druge dvije $\mathcal{D}$-ekspanzije i $\boldsymbol{f}'^* \in pro^*$-$\mathcal{D}(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}')$ takav da je

$$\boldsymbol{f}'^* \underline{J}\left(\boldsymbol{p}'\right) = \underline{J}\left(\boldsymbol{q}'\right) \underline{J}\left([(f)]\right),$$

onda je $\boldsymbol{f}^* \sim \boldsymbol{f}'^*$.

To znači da svakom morfizmu $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ možemo pridružiti točno određeni morfizam gruboga oblika $F^* : X \to Y$, i s

$$S^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(X) = X\,, \quad X \in Ob(\mathcal{C}),$$

$$S^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(f) = F^* = \langle \boldsymbol{f}^* \rangle\ , \quad f \in Mor(\mathcal{C}),$$

je definiran **funktor gruboga oblika** $S^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : \mathcal{C} \to Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$.

Uočimo da je

$$S^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} = J_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} \circ S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})},$$

odnosno da je

$$S^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(f) = J_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}\left(S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(f)\right) = \langle \underline{J}(\boldsymbol{f}) \rangle\ , \quad f \in Mor(\mathcal{C}),$$

ako je $S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(f) = \langle \boldsymbol{f} \rangle$.

Ako su objekti X i Y izomorfni u $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, kažemo da su **istoga gruboga oblika** i pišemo

$$sh^*(X) = sh^*(Y).$$

Nadalje, morfizam gruboga oblika $F^* = \langle \boldsymbol{f}^* \rangle : X \to Y$ je izomorfizam u $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ ako i samo ako je $\boldsymbol{f}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ izomorfizam u pro^*-$\mathcal{D}$. Drugim riječima, X i Y su istoga grubog oblika ako i samo ako su njihove proizvoljne $\mathcal{D}$-ekspanzije izomorfne u pro^*-$\mathcal{D}$ kategoriji. Očigledno, izomorfnost objekata u kategoriji $\mathcal{C}$ povlači izomorfnost u kategoriji gruboga oblika $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, dok obrat ne vrijedi. Isto tako, izomorfnost u kategoriji oblika $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ povlači izomorfnost u kategoriji gruboga oblika $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, dok obrat ne vrijedi. Dokaz posljednje tvrdnje je Primjer 7.2 u [11].

To znači da je razvrstavanje objekata kategorije $\mathcal{C}$ po grubome obliku grublje od razvrstavanja po obliku, što je ključni doprinos teorije gruboga oblika. Pri tome, po sljedećem teoremu, klasifikacije koincidiraju na "lijepim" objektima.

Teorem 2.76 ([11], Tvrdnja 4.3)**.** *Neka su P i Q objekti kategorije $\mathcal{D}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) P i Q su izomorfni u kategoriji $\mathcal{D}$;

(ii) P i Q su istoga oblika;

(iii) P i Q su istoga gruboga oblika.

Kao i u teoriji oblika, pod teorijom gruboga oblika podrazumijevamo proučavanje **kategorije topološkog grubog oblika** $Sh^* = Sh^*_{(HTop,HPol)}$, odnosno kategorije $Sh^* = Sh^*_{(HTop,HANR)}$ koja joj je izomorfna. Budući da je pro^*-$HPol$ realizacijska kategorija kategorije Sh^*, jasno je da je ona bitan predmet istraživanja u teoriji gruboga oblika. Kao posljedica prethodnog teorema, za topološke prostore vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 2.77. *Neka su X i Y topološki prostori homotopskog tipa poliedra. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) $sh^*(X) = sh^*(Y)$;

(ii) $sh(X) = sh(Y)$;

(iii) $X \simeq Y$.

Dokaz. Korolar je direktna posljedica Teorema 2.76. □

Dakle, klasifikacije po homotopskom tipu, po obliku i po grubome obliku se podudaraju za prostore koji se lokalno dobro ponašaju.

Još dodajmo da ćemo pored kategorije Sh^* odnosno njezine realizacijske kategorije *pro-HPol*, promatrati i punktiranu kategoriju gruboga oblika $Sh^*_\circ (= Sh^*_{(HTop_\circ, HPol_\circ)})$ s realizacijskom kategorijom $pro^*\text{-}HPol_\circ$.

2.8 Grupe oblika i grupe gruboga oblika

Objasnimo sada važne algebarske invarijante teorije oblika i teorije gruboga oblika.

Neka je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Već smo vidjeli da svakom punktiranom topološkom prostoru (X, x_0) možemo pridružiti neku $HPol_\circ$-ekspanziju

$$\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda).$$

Ako je $\boldsymbol{p}' : (X, x_0) \to ((X'_\kappa, x'_\kappa), p'_{\kappa\kappa'}, K)$ neka druga $HPol_\circ$-ekspanzija prostora (X, x_0), tada postoji jedinstveni izomorfizam

$$\boldsymbol{i} = [(i, i_\kappa)] : ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \to ((X'_\kappa, x'_\kappa), p'_{\kappa\kappa'}, K)$$

u $pro\text{-}HPol_\circ$ takav da je $\boldsymbol{ip} = \boldsymbol{p}'$ (slijedi iz definicije ekspanzije). Taj izomorfizam inducira izomorfizam

$$[(i, \pi_k(i_\kappa))] : (\pi_k(X_\lambda, x_\lambda), \pi_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda) \to (\pi_k(X'_\kappa, x'_\kappa), \pi_k(p'_{\kappa\kappa'}), K)$$

u *pro-Grp* kada je $k \geq 1$, odnosno $pro\text{-}Set_\circ$ ako je $k = 0$.

Homotopsku *pro*-grupu dimenzije $\boldsymbol{k}$ prostora (X, x_0), s oznakom $pro\text{-}\pi_k(X, x_0)$, definiramo kao klasu ekvivalencije međusobno izomorfnih *pro*-grupa koja sadrži $(\pi_k(X_\lambda, x_\lambda), \pi_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda)$ za bilo koju $HPol_\circ$-ekspanziju $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ prostora (X, x_0).

U nastavku ćemo klasu $pro\text{-}\pi_k(X, x_0)$ poistovjećivati s njezinim reprezentantom, odnosno pisat ćemo

$$pro\text{-}\pi_k(X, x_0) = (\pi_k(X_\lambda, x_\lambda), \pi_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda).$$

Dakle, homotopske *pro*-grupe su objekti u kategoriji *pro-Grp*, s izuzetkom *pro*-$\pi_0(X, x_0)$ koja je objekt u kategoriji *pro*-$Set_\circ$.

Svaki morfizam oblika $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u kategoriji $Sh_\circ$ ima za reprezentanta neki morfizam $\boldsymbol{f} = \left[(f, f_\mu)\right] : (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y_0})$ u kategoriji *pro*-$HPol_\circ$. Lako se provjeri da je tada s

$$pro\text{-}\pi_k(F) = \left[(f, \pi_k(f_\mu))\right] : pro\text{-}\pi_k(X, x_0) \to pro\text{-}\pi_k(Y, y_0)$$

dobro definiran morfizam u kategoriji *pro-Grp*, odnosno *pro*-$Set_\circ$. Naime, ako je $\boldsymbol{f'} = [(f', f'_\nu)] : (\boldsymbol{X'}, \boldsymbol{x'_0}) \to (\boldsymbol{Y'}, \boldsymbol{y'_0})$ neki drugi reprezentant morfizma oblika F, onda je

$$\boldsymbol{f'}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{f},$$

gdje su $\boldsymbol{i} = [(i, i_\kappa)] : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X'}$ i $\boldsymbol{j} = [(j, j_\nu)] : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y'}$ kanonski izomorfizmi među ekspanzijama istog objekta. Tada vrijedi i

$$\left[(f', \pi_k(f'_\nu))\right] \left[(i, \pi_k(i_\kappa))\right] = \left[(j, \pi_k(j_\nu))\right] \left[(f, \pi_k(f_\mu))\right]$$

pa ako poistovjetimo $(\pi_k(X_\lambda, x_\lambda), \pi_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda)$ s $(\pi_k(X'_\kappa, x'_\kappa), \pi_k(p_{\kappa\kappa'}), K)$, te $(\pi_k(Y_\mu, y_\mu), \pi_k(q_{\mu\mu'}), M)$ s $(\pi_k(Y'_\nu, y'_\nu), \pi_k(q_{\nu\nu'}), N)$, morfizmi $[(f', \pi_k(f'_\nu))]$ i $\left[(f, \pi_k(f_\mu))\right]$ koincidiraju.

Kao posljedicu imamo sljedeći teorem.

Teorem 2.78. *Neka je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pridruživanje koje svakom punktiranom prostoru (X, x_0) pridružuje homotopsku pro-grupu pro-$\pi_k(X, x_0)$, a svakom morfizmu oblika $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u kategoriji $Sh_\circ$ pridružuje morfizam pro-$\pi_k(F)$: pro-$\pi_k(X, x_0) \to$ pro-$\pi_k(Y, y_0)$ u pro-Grp, odnosno pro-$Set_\circ$ za $k = 0$, određuje funktor*

$$pro\text{-}\pi_k : Sh_\circ \to pro\text{-}Grp$$

za $k \in \mathbb{N}$, *odnosno funktor* $pro\text{-}\pi_0 : Sh_\circ \to pro\text{-}Set_\circ$ *za* $k = 0$. *Također,* $pro\text{-}\pi_k(X, x_0)$ *je invarijanta oblika.*

Dokaz. Tvrdnja teorema se lako provjeri jer je π_k funktor. □

Spomenimo ovdje još i funktor $pro^*\text{-}\pi_k : Sh_\circ^* \to pro^*\text{-}Grp$, za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definiran s

$$pro^*\text{-}\pi_k\left(X, x_0\right) = \left(\pi_k\left(X_\lambda, x_\lambda\right), \pi_k\left(p_{\lambda\lambda'}\right), \Lambda\right)$$

i

$$pro^*\text{-}\pi_k\left(F^*\right) = \left[\left(f, \pi_k\left(f_\mu^n\right)\right)\right] : pro^*\text{-}\pi_k\left(X, x_0\right) \to pro^*\text{-}\pi_k\left(Y, y_0\right),$$

za $F^* = \left\langle\left[\left(f, f_\mu^n\right)\right]\right\rangle \in Sh_\circ^*\left(\left(X, x_0\right), \left(Y, y_0\right)\right)$. Primijetimo da se njegovo djelovanje nad $Ob(Sh_\circ^*) = Ob(Sh_\circ) = Ob(HTop_\circ)$ podudara s djelovanjem funktora $pro\text{-}\pi_k$.

Sljedeći primjer (vidjeti [11]) je dokaz da je klasifikacija po izomorfnosti u kategoriji $pro^*\text{-}Grp$ grublja od klasifikacije po izomorfnosti u $pro\text{-}Grp$ kategoriji.

Primjer 2.79. *Neka su* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = \left(\left(X_i, x_i\right), \left[p_{ii+1}\right]\right)$ *i* $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}_0) = \left((Y_j, y_j), \left[q_{jj+1}\right]\right)$ *inverzni nizovi punktiranih torusa, tj.* $X_i = Y_j = T$ *za sve* i, j. *Vezni morfizmi neka su homotopske klase* $\left[p_{ii+1}\right]$, $\left[q_{jj+1}\right] : T \to T$ *predstavljene homomorfizmima definiranim, za svaki* i, j, *matricama*

$$P_{ii+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2^{4i} \end{bmatrix} \quad i \quad Q_{jj+1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2^{2j} & -2^{4j} \end{bmatrix}.$$

Neka su (X, x_0) *i* (Y, y_0) *inverzni limesi nizova* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$ *i* $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}_0)$, *redom.*

Budući da su torusi kompaktni, inverzni nizovi $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$ *i* $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}_0)$ *su* $HPol_\circ$*-ekspanzije prostora* (X, x_0) *i* (Y, y_0), *redom, i vrijedi*

$$pro\text{-}\pi_1\left(X, x_0\right) = \left(\pi_1\left(X_i, x_i\right), \pi_1\left(\left[p_{ii+1}\right]\right)\right) = \left(\mathbb{Z}^2, \pi_1\left(\left[p_{ii+1}\right]\right)\right)$$

i

$$pro\text{-}\pi_1\left(Y, y_0\right) = \left(\pi_1\left(Y_j, y_j\right), \pi_1\left(\left[q_{jj+1}\right]\right)\right) = \left(\mathbb{Z}^2, \pi_1\left(\left[q_{jj+1}\right]\right)\right),$$

a homomorfizmi $\pi_1\left(\left[p_{ii+1}\right]\right), \pi_1\left(\left[q_{jj+1}\right]\right) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ *su dani matricama* P_{ii+1} *i* Q_{jj+1}, *redom, za svaki i, j. U [11] je dokazano da ne postoji izomorfizam između ovih nizova u pro-Grp kategoriji. Međutim, konstruiran je izomorfizam između njih, odnosno između nizova pro*-$\pi_1(X, x_0)$ i pro*-$\pi_1(Y, y_0)$, u kategoriji pro*-Grp.*

Grupa oblika dimenzije *k* punktiranog topološkog prostora (X, x_0), s oznakom $\check{\pi}_k(X, x_0)$, definira se formulom

$$\check{\pi}_k(X, x_0) = \lim pro\text{-}\pi_k(X, x_0).$$

Može se pokazati (vidjeti [18]) da je to skup koji se sastoji od morfizama oblika $A : (S^k, s_0) \to (X, x_0)$ predstavljenih morfizmima $\boldsymbol{a} = [(a_\lambda)] : (S^k, s_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u *pro-HPol*$_\circ$, s binarnom operacijom $+ : \check{\pi}_k(X, x_0) \times \check{\pi}_k(X, x_0) \to \check{\pi}_k(X, x_0)$ definiranom na sljedeći način.
Neka su $A = \left\langle [(a_\lambda)] \right\rangle$, $B = \left\langle [(b_\lambda)] \right\rangle \in \check{\pi}_k(X, x_0)$. Tada je

$$A + B = \left\langle [(a_\lambda)] \right\rangle + \left\langle [(b_\lambda)] \right\rangle = \left\langle [(a_\lambda + b_\lambda)] \right\rangle.$$

Budući da za svaki $\lambda \in \Lambda$ vrijedi $a_\lambda, b_\lambda \in \pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$, dobro je definiran morfizam $a_\lambda + b_\lambda \in \pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$ pa posljedično i $A + B$. Može se pokazati da morfizam oblika $A + B$ ne ovisi o izboru reprezentanata $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ morfizama A i B (redom) u *pro-HPol*$_\circ$, kao ni o izboru reprezentanata (a_λ) i (b_λ) morfizama $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ (redom) u kategoriji *inv-HPol*$_\circ$.

Za svaki $k \in \mathbb{N}$, skup $\check{\pi}_k(X, x_0)$ s operacijom $+$ ima strukturu grupe, i to komutativne čim je $k > 1$.

Napomena 2.80. *Kao i kod fundamentalnih grupa, binarna operacija u grupi $\check{\pi}_k(X, x_0)$ označuje se znakom $+$ iako $\check{\pi}_1(X, x_0)$ nije komutativna grupa. Također, iako se naziva grupom, $\check{\pi}_0(X, x_0)$ nije grupa već punktirani skup.*

Prirodno, neutralni element u grupi $\check{\pi}_k(X, x_0)$ je morfizam oblika $0 = \left\langle [(0_\lambda)] \right\rangle : (S^k, s_0) \to (X, x_0)$, gdje je $0_\lambda \in \pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$ neutralni element u homotopskoj grupi. Također, inverz morfizma oblika $A = \left\langle [(a_\lambda)] \right\rangle \in \check{\pi}_k(X, x_0)$ je morfizam oblika $\overline{A} = \left\langle [(\overline{a}_\lambda)] \right\rangle \in \check{\pi}_k(X, x_0)$.

Grupe oblika punktiranih prostora su invarijante oblika, što znači da punktirani prostori istog oblika imaju izomorfne grupe oblika. Također, ako je prostor putovima povezan, njegove grupe oblika ne ovise o baznoj točki (vidjeti Teorem II.8.9 u [16]).

Primjer 2.81. *Neka je $P \in HPol$. Tada je $\mathbf{1_P} : (P, p_0) \to ((P, p_0))$ $HPol_\circ$-ekspanzija od (P, p_0) za bilo koji $p_0 \in P$. To znači da za svaki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi pro-$\pi_k(P, p_0) = (\pi_k(P, p_0))$ pa je grupa oblika svakog punktiranog poliedra jednaka njegovoj homotopskoj grupi,*

$$\check{\pi}_k(P, p_0) = \pi_k(P, p_0).$$

Primjer 2.82. *Neka je $\Sigma_{(p_i)}$ solenoid definiran u primjeru 2.74 i neka je $x_0 \in \Sigma_{(p_i)}$. Budući da je inverzni limes $\boldsymbol{p} = [(p_i)] : \Sigma_{(p_i)} \to (X_i, p_{ii+1})$ morfizam u pro-Cpt, on je, po 2.66 i rezolventa solenoida $\Sigma_{(p_i)}$, a $H\boldsymbol{p} = [([p_i])] : \Sigma_{(p_i)} \to (X_i, [p_{ii+1}])$ je po 2.68 njegova $HPol$-ekspanzija. Nadalje, uz oznaku $x_i = p_i(x_0) \in X_i$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, morfizam $H\boldsymbol{p} : (\Sigma_{(p_i)}, x_0) \to ((X_i, x_i), [p_{ii+1}])$ je po 2.71 njegova $HPol_\circ$-ekspanzija. Budući da je $\pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$, 1-dimenzionalna homotopska pro-grupa solenoida,*

$$pro\text{-}\pi_1(\Sigma_{(p_i)}, x_0) = (\pi_1(X_i, x_i), \pi_1([p_{ii+1}])),$$

je inverzni niz

$$\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

u kojem su, za svaki $i \in \mathbb{N}$, vezni homomorfizmi množenja s p_i. Očigledno je da pro-$\pi_1(\Sigma_{(p_i)}, x_0)$ nije nul-objekt u kategoriji pro-Grp jer se komponiranjem veznih homomorfizama u tom nizu nikako ne može dobiti trivijalni homomorfizam.

Pogledajmo sada po volji odabrani $(x_1, x_2, \dots) \in \check{\pi}_1(\Sigma_{(p_i)}, x_0) = \lim pro\text{-}\pi_1(\Sigma_{(p_i)}, x_0)$. Za bilo koji $i \in \mathbb{N}$ je $x_i = p_i \cdot x_{i+1}$, odnosno $x_i = p_i \cdot p_{i+1} \cdot p_{i+2} \cdots p_{j-1} \cdot x_j$ za svaki $j > i$. To znači da je x_i djeljiv sa svakim produktom $p_i \cdot p_{i+1} \cdot p_{i+2} \cdot p_{i+3} \cdots p_{i+k}$, $k \in \mathbb{N}$, pa x_i mora biti 0. Zaključujemo da je

$$\check{\pi}_1(\Sigma_{(p_i)}, x_0) = \lim \circ\, pro\text{-}\pi_1(\Sigma_{(p_i)}, x_0) = 0.$$

Primijetimo da je inverzni niz iz Primjera 2.40 1-dimenzionalna homotopska pro-grupa pro-$\pi_1(\Sigma_2, x_0)$ dijadskog solenoida.

Kompozicija funktora *pro*-π_k i inverznog limesa je novi funktor kojeg nazivamo **fun-**

ktorom grupa oblika i označujemo s $\check{\pi}_k$. Dakle,

$$\check{\pi}_k = \lim \circ \, pro\text{-}\pi_k : Sh_\circ \to Grp$$

za $k \in \mathbb{N}$, odnosno

$$\check{\pi}_0 = \lim \circ \, pro\text{-}\pi_0 : Sh_\circ \to Set_\circ$$

za $k = 0$. Očigledno, funktor grupa oblika punktiranom topološkom prostoru (X, x_0) pridružuje grupu oblika $\check{\pi}_k(X, x_0)$. Može se pokazati da je njegovo djelovanje na morfizam oblika analogno djelovanju funktora homotopskih grupa π_k iz Primjera 2.17 na morfizam u kategoriji $HTop$ (vidjeti [18]). Preciznije, ako je $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ morfizam oblika u $Sh_\circ$, $\check{\pi}_k(F) : \check{\pi}_k(X, x_0) \to \check{\pi}_k(Y, y_0)$ je definiran s

$$(\check{\pi}_k(F))(A) = F \circ A.$$

Analogon funktoru grupa oblika $\check{\pi}_k$ u kategoriji gruboga oblika $Sh^*_\circ$ je, prirodno, **funktor grupa gruboga oblika**, u oznaci $\check{\pi}^*_k$. Dakle,

$$\check{\pi}^*_k : Sh^*_\circ \to Grp$$

za $k \in \mathbb{N}$, i $\check{\pi}^*_0 : Sh^*_\circ \to Set_\circ$. Sam funktor nije definiran kao funktorska kompozicija, već djelovanjem na objekte i morfizme kategorije $Sh^*_\circ$.

Svakom punktiranom topološkom prostoru $(X, x_0) \in Ob(Sh^*_\circ)$ funktor $\check{\pi}^*_k$ pridruži ***k*-tu grupu gruboga oblika**, $\check{\pi}^*_k(X, x_0)$, koja se sastoji od morfizama gruboga oblika $A^* : \left(S^k, s_0\right) \to (X, x_0)$, $A^* = \left\langle [(a^n_\lambda)] \right\rangle$, gdje je $a^n_\lambda \in \pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $\lambda \in \Lambda$.

Nadalje, za $k \in \mathbb{N}_0$ i morfizam gruboga oblika $F^* : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u $Sh^*_\circ$, homomorfizam $\check{\pi}^*_k(F^*) : \check{\pi}^*_k(X, x_0) \to \check{\pi}^*_k(Y, y_0)$ je definiran s

$$(\check{\pi}^*_k(F^*))(A^*) = F^* \circ A^*,$$

za svaki $A^* \in \check{\pi}^*_k(X, x_0)$.

U [8] se može vidjeti dokaz da ovako definirano pridruživanje ima funktorska svojstva. Isto tako, $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ ima strukturu grupe uz binarnu operaciju $+$ definiranu na sljedeći način.

Neka su $A^* = \left\langle [(a_\lambda^n)] \right\rangle,\ B^* = \left\langle [(b_\lambda^n)] \right\rangle \in \check{\pi}_k^*(X, x_0)$. Tada je

$$A^* + B^* = \left\langle [(a_\lambda^n)] \right\rangle + \left\langle [(b_\lambda^n)] \right\rangle = \left\langle [(a_\lambda^n + b_\lambda^n)] \right\rangle.$$

Pokaže se (vidjeti [8]) da je $[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)] : (S^k, s_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0})$ dobro definiran morfizam u *pro**-*HPol*$_\circ$ za svaki $\lambda \in \Lambda$, te da zbrajanje ne ovisi o izboru reprezentanata $\boldsymbol{a}^*$ i $\boldsymbol{b}^*$ morfizama A^* i B^* u *pro**-*HPol*$_\circ$, redom, kao ni o izboru reprezentanata (a_λ^n) i (b_λ^n) morfizama $\boldsymbol{a}^*$ i $\boldsymbol{b}^*$ u kategoriji *inv**-*HPol*$_\circ$, redom.

Neutralni element u grupi $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ je morfizam gruboga oblika $0^* = \left\langle [(0_\lambda^n)] \right\rangle : (S^k, s_0) \to (X, x_0)$, gdje je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $0_\lambda^n = 0 \in \pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$ neutralni element u homotopskoj grupi. Inverz morfizma gruboga oblika $A^* = \left\langle [(a_\lambda^n)] \right\rangle \in \check{\pi}_k^*(X, x_0)$ je morfizam gruboga oblika $\overline{A}^* = \left\langle \left[(\overline{a_\lambda^n}) \right] \right\rangle \in \check{\pi}_k^*(X, x_0)$, gdje je $\overline{a_\lambda^n} \in \pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$ inverz petlje a_λ^n.

Kao i u slučaju homotopskih grupa i grupa oblika, grupa gruboga oblika $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ je abelovska kada je $k \geq 2$.

Grupe gruboga oblika punktiranih prostora su invarijante gruboga oblika, što znači da punktirani prostori istoga gruboga oblika imaju izomorfne grupe gruboga oblika. Također, ako je prostor putovima povezan, njegove grupe gruboga oblika ne ovise o baznoj točki (vidjeti Korolar 1 u [10] i Teorem 3.3 u [12]). Specijalno, grupe gruboga oblika kontinuuma ne ovise o baznoj točki (Teorem 3.5 u [12])

Sljedeći teorem govori o vezi između grupa oblika i grupa gruboga oblika.

Teorem 2.83 ([8], Teorem 3.2)**.** *Za svaki punktirani prostor* (X, x_0) *i svaki* $k \in \mathbb{N}_0$ *postoji homomorfizam smještenja* $j : \check{\pi}_k(X, x_0) \hookrightarrow \check{\pi}_k^*(X, x_0)$ *induciran inkluzijskim funktorom* $J : Sh_\circ \hookrightarrow Sh_\circ^*$. *Štoviše, za svaki morfizam oblika* $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *sljedeći dijagram komutira u kategoriji Grp, odnosno Set*$_\circ$.

$$\begin{tikzcd}
\check{\pi}_k(X,x_0) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\check{\pi}_k(F)"'] & \check{\pi}_k^*(X,x_0) \arrow[d, "\check{\pi}_k^*(J(F))"] \\
\check{\pi}_k(Y,y_0) \arrow[r, hook, "j"] & \check{\pi}_k^*(Y,y_0)
\end{tikzcd}$$

Drugim riječima, za svaki punktirani prostor (X, x_0) i svaki $k \in \mathbb{N}_0$, grupu oblika $\check{\pi}_k(X, x_0)$ smijemo smatrati podgrupom, odnosno podskupom u slučaju $k = 0$, grupe gruboga oblika $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$. To znači da grupe gruboga oblika sadrže više podataka o punktiranom prostoru nego grupe oblika, što se vidi na primjeru solenoida kojima je 1-dimenzionalna grupa oblika trivijalna, a 1-dimenzionalna grupa gruboga oblika netrivijalna i neprebrojiva (eksplicitnu formulu za računanje grupa gruboga oblika solenoida iz [6] navest ćemo u nastavku).

U Primjeru 2.81 smo vidjeli da se homotopske grupe i grupe oblika svakog punktiranog poliedra podudaraju, a u sljedećem primjeru ćemo vidjeti strukturu njegove grupe gruboga oblika.

Primjer 2.84. *Neka je (P, p_0) punktirani poliedar i neka je $k \in \mathbb{N}$. Budući da je $\mathbf{1}_{\boldsymbol{P}} : (P, p_0) \to ((P, p_0))$ HPol-ekspanzija od (P, p_0) za bilo koji $p_0 \in P$, grupa gruboga oblika $\check{\pi}_k^*(P, p_0)$ se sastoji od morfizama gruboga oblika $A^* = \left\langle [(a^n)] \right\rangle$ takvih da je $[(a^n)] : (S^k, s_0) \to (P, p_0)$ morfizam između rudimentarnih inverznih sustava u pro*-HPol$_\circ$, i da je $a^n \in \pi_k(P, p_0)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Morfizam (a^n) u inv*-HPol$_\circ$ možemo shvatiti kao niz u homotopskoj grupi $\pi_k(P, p_0)$, to jest kao element grupe $\prod_{\mathbb{N}} \pi_k(P, p_0)$. Pri tome dva niza (a^n) i (a'^n) u $\pi_k(P, p_0)$ određuju isti $[(a^n)]$ ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n \geq n_0$ ispunjeno $a^n = a'^n$. Za takve (a^n) i (a'^n) vrijedi $(a^n + \overline{a'^n}) \in \bigoplus_{\mathbb{N}} \pi_k(P, p_0)$. Kao što ćemo pokazati u sljedećem poglavlju, grupa $\bigoplus_{\mathbb{N}} \pi_k(P, p_0)$ je normalna podgrupa grupe $\prod_{\mathbb{N}} \pi_k(P, p_0)$ pa je dobro definirana kvocijentna grupa grupe $\prod_{\mathbb{N}} \pi_k(P, p_0)$ po $\bigoplus_{\mathbb{N}} \pi_k(P, p_0)$ i stoga vrijedi*

$$\check{\pi}_k^*(P, p_0) = \prod_{\mathbb{N}} \pi_k(P, p_0) / _{\bigoplus_{\mathbb{N}} \pi_k(P,p_0)}.$$

Napomena 2.85. *U primjeru smo koristili oznake $\prod_{\mathbb{N}} G := \prod_{n \in \mathbb{N}} G^n$ i $\bigoplus_{\mathbb{N}} G := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G^n$, gdje je $G^n = G$ za sve $n \in \mathbb{N}$, za $G \in$ Ob(Grp).*

Primjer 2.86. *Grupa gruboga oblika punktirane kružnice je kvocijentna grupa $\check{\pi}_1^*(S^1, s_0) =$*

$\prod\limits_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} / \bigoplus\limits_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$. *Budući da Varšavska kružnica i kružnica imaju isti oblik, to imaju i isti grubi oblik i vrijedi*

$$\check{\pi}_1^*(W, x_0) = \check{\pi}_1^*(S^1, s_0) = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} / \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}.$$

Jednakost vrijedi za svaki $x_0 \in W$ i za svaki $s_0 \in S^1$ jer su W i S^1 kontinuumi.

Inače, netrivijalne grupe gruboga oblika su složene i komplicirane za računanje. Stoga rezultat dan u [6] predstavlja značajan doprinos računanju grupa gruboga oblika. Tamo je ponuđena eksplicitna formula za računanje grupe gruboga oblika za svaki punktirani kompaktni metrički prostor čiji su vezni homomorfizmi u pridruženoj homotopskoj *pro*-grupi monomorfizmi.

Teorem 2.87 ([6], Korolar 2.1)**.** *Neka je $k \in \mathbb{N}_0$ i neka je (X, x_0) punktirani metrički kompakt koji dopušta nizovnu $HPol_\circ$-ekspanziju $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_i, x_i), p_{ii+1})$ takvu da su svi vezni homomorfizmi $\pi_k(p_{ii+1})$, $i \in \mathbb{N}$, homotopske pro-grupe pro-$\pi_k(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0})$ monomorfizmi. Neka je $M \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ skup strogo uzlaznih nizova. Tada je, uz oznake $G_1^k = \pi_k(X_1, x_1)$ i $G_i^k = \pi_k(p_{1i})(\pi_k(X_i, x_i))$,*

$$\check{\pi}_k^*(X, x_0) = \left(\bigcup_{(j_i) \in M} \prod_{i \in \mathbb{N}} (G_i^k)^{j_i} \right) \Big/ _{\sim} ,$$

gdje je $\sim$ relacija ekvivalencije "biti jednak svugdje osim na konačno mnogo koordinata".

Kao posljedicu prethodnog teorema imamo formulu za računanje grupa gruboga oblika solenoida.

Primjer 2.88. *Neka je $\left(\Sigma_{(p_i)}, x_0\right) = \lim((X_i, x_i), p_{ii+1})$ solenoid iz Primjera 2.82. To je kompaktan punktiran metrički prostor, $H\boldsymbol{p} : (\Sigma_{(p_i)}, x_0) \to ((X_i, x_i), [p_{ii+1}])$ je njegova $HPol_\circ$-ekspanzija, a vezni homomorfizmi $\pi_1([p_{ii+1}]) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ u pro-$\pi_1\left(\Sigma_{(p_i)}, x_0\right)$ su množenja s p_i, za svaki $i \in \mathbb{N}$, dakle monomorfizmi. Po prethodnom teoremu je*

$$\check{\pi}_1^*\left(\Sigma_{(p_i)}, x_0\right) = \left(\bigcup_{(j_i) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \prod_{i \in \mathbb{N}} (G_i)^{j_i} \right) \Big/ _{\sim} ,$$

gdje je $G_1 = \pi_1(X_1, x_1) = \mathbb{Z}$ *i* $G_i = \pi_1(p_{1i})(\pi_1(X_i, x_i)) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} \cdot \mathbb{Z}$*, odnosno*

$$\check{\pi}_1^* \left(\Sigma_{(p_i)}, x_0\right) = \left(\bigcup_{(j_i)\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \prod_{i\in\mathbb{N}} (p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1} \cdot \mathbb{Z})^{j_i} \right) \Big/ \sim \quad .$$

Elementi grupe $\check{\pi}_1^* \left(\Sigma_{(p_i)}, x_0\right)$ *su klase ekvivalencije čiji su predstavnici elementi grupe*

$$\mathbb{Z}^{j_1} \times (p_1\mathbb{Z}^{j_2}) \times (p_1p_2\mathbb{Z}^{j_3}) \times \cdots \ ,$$

za neki niz (j_i) *u* $\mathbb{N}$*, znači nizovi oblika*

$$(k_1^1, \ldots, k_{j_1}^1, p_1k_1^2, \ldots, p_1k_{j_2}^2, p_1p_2k_1^3, \ldots, p_1p_2k_{j_3}^3, \ldots),$$

i dva su ovakva niza u istoj klasi ako se podudaraju svugdje osim, možda, na konačno mnogo koordinata. U slučaju dijadskog solenoida (Σ_2, x_0) *je* $p_i = 2$ *za svaki* $i \in \mathbb{N}$ *pa je grupa* $\check{\pi}_1^* (\Sigma_2, x_0)$ *sastavljena od klasa nizova oblika*

$$(k_1^1, \ldots, k_{j_1}^1, 2k_1^2, \ldots, 2k_{j_2}^2, 4k_1^3, \ldots, 4k_{j_3}^3, \ldots).$$

Navedimo još bitan teorem o neprekidnosti grupa gruboga oblika.

Teorem 2.89 ([7], Teorem 2.1)**.** *Neka je* $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ $HPol_\circ$*-ekspanzija prostora* (X, x_0)*. Tada, za svaki* $k \in \mathbb{N}$*, homomorfizmi* $\check{\pi}_k^*(p_\lambda) : \check{\pi}_k^*(X, x_0) \to \check{\pi}_k^*(X_\lambda, x_\lambda)$*,* $\lambda \in \Lambda$*, definiraju morfizam*

$$\check{\pi}_k^*(\boldsymbol{p}) = [(\check{\pi}_k^*(p_\lambda))] : \check{\pi}_k^*(X, x_0) \to \check{\pi}_k^*(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0}) = (\check{\pi}_k^*(X_\lambda, x_\lambda), \check{\pi}_k^*(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda)$$

kategorije pro-Grp. Inducirani homomorfizam $\lim \check{\pi}_k^*(\boldsymbol{p}) : \check{\pi}_k^*(X, x_0) \to \lim \check{\pi}_k^*(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0})$ *je izomorfizam grupa.*

Napomena 2.90. *U prethodnom teoremu smo, na osnovi Teorema 2.55 i Napomene 2.56, te koristeći definiciju funktora gruboga oblika* $S^* : HTop_\circ \to Sh_\circ$*, umjesto* $\check{\pi}_k^*(S^*(p_\lambda))$ *pisali jednostavnije* $\check{\pi}_k^*(p_\lambda)$*.*

Neposredna posljedica prethodnog teorema, Teorema 2.66 i Teorema 2.68 je sljedeći korolar.

Korolar 2.91 ([7], Korolar 3.1)**.** *Neka je* $((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *inverzni sustav punktiranih kompaktnih poliedara u kategoriji* $Top_\circ$*. Tada vrijedi*

$$\lim\left(\check{\pi}_k^*(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0})\right) = \check{\pi}_k^*\left(\lim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0})\right).$$

Poglavlje 3

Reduciranje *pro**-*Grp* kategorije na *pro*-*Grp*

Cilj nam je uvesti novi funktor koji će reducirati *pro**-*Grp* kategoriju na *pro*-*Grp*. Na taj način ćemo morfizme kategorije *pro**-*Grp* prikazati kao morfizme u *pro*-*Grp* među složenijim objektima.

3.1 Redukcijski funktor

Ideja za uvođenje redukcijskog funktora korijene ima u kvocijentnom obliku grupe gruboga oblika punktiranog poliedra. Naime, kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, za grupu gruboga oblika punktiranog poliedra (P, p_0) vrijedi

$$\check{\pi}_k^* (P, p_0) = \left(\prod_{\mathbb{N}} \pi_k (P, p_0) \right) / \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} \pi_k (P, p_0) \right),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Na početku, dokažimo nekoliko pomoćnih tvrdnji o rudimentarnim inverznim sustavima grupa. Pri tome ćemo koristiti oznake iz Napomene 2.85.

Lema 3.1. *Neka je* $G \equiv (G, *)$, $H \equiv (H, *) \in Ob(Grp)$ *i* $(f^n) \in inv^*\text{-}Grp\left((G), (H)\right)$. *Pridruživanje* $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} f^n : \prod\limits_{\mathbb{N}} G \to \prod\limits_{\mathbb{N}} H$ *dano s*

$$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} f^n \right) ((a_n)) = (f^n (a_n)),$$

za $(a_n) \in \prod\limits_{\mathbb{N}} G$, *je dobro definirani homomorfizam.*

Dokaz. Neka su $\prod\limits_{\mathbb{N}} G$ i $\prod\limits_{n} H$ produkti s projekcijama $\left(p_n : \prod\limits_{\mathbb{N}} G \to G\ ,\ n \in \mathbb{N}\right)$ i $\left(q_n : \prod\limits_{\mathbb{N}} H \to H\ ,\ n \in \mathbb{N}\right)$, redom. Očigledno,

$$q_{n'}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right) = f^{n'} p_{n'}\ :\ \prod_{\mathbb{N}} G \to H,$$

za svaki $n' \in \mathbb{N}$ i, po univerzalnom svojstvu produkta, $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n$ je dobro definirano pridruživanje s $\prod\limits_{\mathbb{N}} G$ u $\prod\limits_{\mathbb{N}} H$. Neka je $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \prod\limits_{\mathbb{N}} G$, $\boldsymbol{a} = (a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_n)$. Tada, budući da je f^n homomorfizam za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) = (f^n(a_n * b_n)) = (f^n(a_n) * f^n(b_n)) =$$
$$= (f^n(a_n)) * (f^n(b_n)) = \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)(\boldsymbol{a}) * \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)(\boldsymbol{b}),$$

pa zaključujemo da je $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n$ homomorfizam. □

Lema 3.2. *Grupa $\bigoplus\limits_{\mathbb{N}} G$ je normalna podgrupa grupe $\prod\limits_{\mathbb{N}} G$.*

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{b} = (b_n) \in \prod\limits_{\mathbb{N}} G$. Tvrdimo da je $\boldsymbol{b} * \left(\bigoplus\limits_{\mathbb{N}} G\right) * \boldsymbol{b}^{-1} \subset \bigoplus\limits_{\mathbb{N}} G$. Neka je $\boldsymbol{a} = (a_n) \in \bigoplus\limits_{\mathbb{N}} G$. Postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a_{n'} = 0$, za svaki $n' \geq n$, pa je $b_{n'} * a_{n'} * (b_{n'})^{-1} = 0$, za svaki $n' \geq n$, i $\boldsymbol{b} * \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}^{-1}$ je u $\bigoplus\limits_{\mathbb{N}} G$, čime je dokazana tvrdnja leme. □

Po prethodnoj lemi, kvocijentna grupa $\left(\prod\limits_{\mathbb{N}} G\right) / \left(\bigoplus\limits_{\mathbb{N}} G\right)$ je dobro definirana. U nastavku ćemo koristiti oznaku

$$\widetilde{G} \equiv \left(\prod_{\mathbb{N}} G\right) / \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} G\right).$$

Lema 3.3. *Neka je $G, H \in Ob(Grp)$ i $(f^n) \in inv^*\text{-}Grp\,((G), (H))$. Pridruživanje*

$$\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} f^n : \widetilde{G} \to \widetilde{H}$$

inducirano s $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n$ je dobro definirani homomorfizam, i dva ekvivalentna morfizma $(f^n), (f'^n) \in inv^*\text{-}Grp\,((G), (H))$ induciraju isti $\mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n$.

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{a} = (a_n) \in \bigoplus\limits_{\mathbb{N}} G$, što znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a_{n'} = 0$, za svaki $n' \geq n$. Tada je, budući da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ morfizam f^n homomorfizam, $f^{n'}(a_{n'}) = 0$ za svaki $n' \geq n$ pa vrijedi

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)(\boldsymbol{a}) = (f^n(a_n)) \in \bigoplus_{\mathbb{N}} H.$$

Neka je $\boldsymbol{a} = (a_n) \in \prod\limits_{\mathbb{N}} G$, $(f^n), (f'^n) \in inv^*\text{-}Grp\left((G), (H)\right)$ i $(f^n) \sim (f'^n)$, što znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f^{n'} = f'^{n'}$, za svaki $n' \geq n$. Očigledno, u

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)(\boldsymbol{a}) = (f^n(a_n))$$

i

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f'^n\right)(\boldsymbol{a}) = \left(f'^n(a_n)\right),$$

je

$$f^{n'}(a_{n'}) = f'^{n'}(a_{n'}) \ , \quad \text{za sve} \quad n' \geq n,$$

pa vrijedi

$$\left(f^n(a_n) * \left(f'^n(a_n)\right)^{-1}\right) \in \bigoplus_{\mathbb{N}} H.$$

Dakle, (f^n) i (f'^n) induciraju isti homomorfizam, odnosno $\mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n = \mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} f'^n$. □

Lema 3.4. *Neka je* $(f^n) \in inv^*\text{-}Grp\left((G), (H)\right)$ *i* $(g^n) \in inv^*\text{-}Grp((H), (K))$. *Tada je*

$$\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} (g^n \circ f^n) = \left(\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} g^n\right) \circ \left(\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} f^n\right).$$

Dokaz. Očigledno vrijedi

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (g^n \circ f^n) = \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} g^n\right) \circ \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right).$$

Budući da svaki homomorfizam neutralni element preslikava u neutralni element, za po volji odabrani $\boldsymbol{a} = (a_n) \in \bigoplus\limits_{\mathbb{N}} G$ vrijedi

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (g^n \circ f^n)(\boldsymbol{a}) \in \bigoplus_{\mathbb{N}} K,$$

te

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)(\boldsymbol{a}) \in \bigoplus_{\mathbb{N}} H$$

i

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} g^n\right)\circ\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n\right)(\boldsymbol{a})\in\bigoplus_{\mathbb{N}} K,$$

iz čega slijedi tvrdnja leme. $\square$

Napomena 3.5. *U radu ćemo za homomorfizam* $\widetilde{G}\to\widetilde{H}$ *induciran s* $\prod_{n\in\mathbb{N}} f^n$*, gdje je* $(f^n)\in inv^*\text{-}Grp\,((G),(H))$*, koristiti oznaku* $\nabla_{n\in\mathbb{N}} f^n$*, a za homomorfizam* $\widetilde{G}\to\widetilde{H}$ *induciran s* $\prod_{\mathbb{N}} f$*, gdje je* $f\in Grp\,(G,H)$*, ćemo koristiti oznaku* $\nabla_{\mathbb{N}} f$*.*

Lema 3.6. *Neka je* $(f^n),(g^n)\in inv^*\text{-}Grp\,((G),(H))$*. Tada iz* $\nabla_{n\in\mathbb{N}} f^n=\nabla_{n\in\mathbb{N}} g^n$ *slijedi* $(f^n)\sim(g^n)$ *u inv*-Grp kategoriji. Specijalno, ako je* $f^n=f$ *i* $g^n=g$ *za svaki* $n\in\mathbb{N}$*, iz* $\nabla_{\mathbb{N}} f=\nabla_{\mathbb{N}} g$ *slijedi* $f=g$*.*

Dokaz. Neka je $\nabla_{n\in\mathbb{N}} f^n=\nabla_{n\in\mathbb{N}} g^n$ i neka je $(a_n)\in\prod_{\mathbb{N}} G$ po volji odabran niz. Tada za $[(a_n)]\in\widetilde{G}$ vrijedi

$$\nabla_{n\in\mathbb{N}} f^n\left([(a_n)]\right)=\nabla_{n\in\mathbb{N}} g^n\left([(a_n)]\right),$$

odnosno

$$\Big[(f^n(a_n))\Big]=\Big[(g^n(a_n))\Big],$$

što znači da postoji $n\in\mathbb{N}$ takav da za svaki $n'\geq n$ vrijedi

$$f^{n'}(a_n)=g^{n'}(a_n).$$

Budući da je niz (a_n) bio po volji odabran, zaključujemo da je $f^{n'}=g^{n'}$ za svaki $n'\geq n$, što znači da je $(f^n)\sim(g^n)$ u *inv**-*Grp* kategoriji. $\square$

Definirajmo sada novo pridruživanje, R, koje povezuje kategorije *inv**-*Grp* i *inv*-*Grp*. Neka je

$$R\left(G_\lambda,p_{\lambda\lambda'},\Lambda\right)=\left(\widetilde{G}_\lambda,\nabla_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'},\Lambda\right)$$

za neki inverzni sustav $(G_\lambda,p_{\lambda\lambda'},\Lambda)\in inv^*\text{-}Grp$. Morfizmu $\left(f,f_\mu^n\right):(G_\lambda,p_{\lambda\lambda'},\Lambda)\to\left(H_\mu,q_{\mu\mu'},M\right)$ u *inv**-*Grp* pridružimo morfizam

$$R\left(\left(f,f_\mu^n\right)\right)=\left(f,\nabla_{n\in\mathbb{N}} f_\mu^n\right)$$

u *inv*-*Grp*.

Lema 3.7. $\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f_\mu^n\right) : \left(\widetilde{G}_\lambda, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\right) \to \left(\widetilde{H}_\mu, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} q_{\mu\mu'}, M\right)$ *je morfizam u inv-Grp.*

Dokaz. Budući da je $\left(f, f_\mu^n\right) : (G_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \to \left(H_\mu, q_{\mu\mu'}, M\right)$ morfizam u *inv**-*Grp*, za svaki par $\mu, \mu' \in M$, $\mu \leq \mu'$, postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $\lambda \geq f(\mu), f(\mu')$, i postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n' \geq n$,

$$f_\mu^{n'} \circ p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'}^{n'} \circ p_{f(\mu')\lambda}.$$

To znači da su $\left(f_\mu^n \circ p_{f(\mu)\lambda}\right)$ i $\left(q_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'}^n \circ p_{f(\mu')\lambda}\right)$ ekvivalentni morfizmi u *inv**-*Grp* $\left((G_\lambda), \left(H_\mu\right)\right)$ po Definiciji 2.30. Po Lemi 3.3, produkti homomorfizama

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(f_\mu^n \circ p_{f(\mu)\lambda}\right) \quad \text{i} \quad \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(q_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'}^n \circ p_{f(\mu')\lambda}\right)$$

induciraju isti morfizam u *inv*-*Grp* $\left(\left(\widetilde{G}_\lambda\right), \left(\widetilde{H}_\mu\right)\right)$, to jest, vrijedi

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} \left(f_\mu^n \circ p_{f(\mu)\lambda}\right) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} \left(q_{\mu\mu'} \circ f_{\mu'}^n \circ p_{f(\mu')\lambda}\right).$$

Sada po prethodnom i po Lemi 3.4, za svaki par $\mu, \mu' \in M$, $\mu \leq \mu'$, postoji $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f(\mu')$, takav da je

$$\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f_\mu^n\right) \circ \left(\underset{\mathbb{N}}{\nabla} p_{f(\mu)\lambda}\right) = \left(\underset{\mathbb{N}}{\nabla} q_{\mu\mu'}\right) \circ \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f_{\mu'}^n\right) \circ \left(\underset{\mathbb{N}}{\nabla} p_{f(\mu')\lambda}\right),$$

iz čega slijedi da je $\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f_\mu^n\right)$ morfizam u *inv*-*Grp*. □

Teorem 3.8. *Pridruživanje* $R :$ *inv**-*Grp* $\to$ *inv*-*Grp je funktor.*

Dokaz. Neka su $\left(f, f_\mu^n\right) : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ i $(g, g_\nu^n) : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{K}$ morfizmi u *inv**-*Grp* i neka je $(h, h_\nu^n) := (g, g_\nu^n)\left(f, f_\mu^n\right) = \left(fg, g_\nu^n f_{g(\nu)}^n\right) : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{K}$. Tada je

$$R\left((g, g_\nu^n)\left(f, f_\mu^n\right)\right) = R\left((h, h_\nu^n)\right) = \left(h, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} h_\nu^n\right) = \left(fg, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}\left(g_\nu^n f_{g(\nu)}^n\right)\right).$$

S druge strane,

$$R\left((g, g_\nu^n)\right) R\left(\left(f, f_\mu^n\right)\right) = \left(g, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} g_\nu^n\right)\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f_\mu^n\right) = \left(fg, \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} g_\nu^n\right)\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f_{g(\nu)}^n\right)\right),$$

a $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}\left(g^n_\nu f^n_{g(\nu)}\right) = \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} g^n_\nu\right)\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n_{g(\nu)}\right)$ po Lemi 3.4.

Da je $\left(fg, \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} g^n_\nu\right)\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n_{g(\nu)}\right)\right)$ zbilja morfizam u inv^*-Grp slijedi iz komutativnosti dijagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{G}_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\widetilde{G}_{fg(\nu)} \arrow[d, "\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n_{g(\nu)}"] & \widetilde{G}_{\lambda_1} \arrow[l] \arrow[r] & \widetilde{G}_{f(\mu)} \arrow[d, "\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n_{\mu}"] & \widetilde{G}_{\lambda_2} \arrow[l] \arrow[r] & \widetilde{G}_{fg(\nu')} \arrow[d, "\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n_{g(\nu')}"] \\
\widetilde{H}_{g(\nu)} \arrow[d, "\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} g^n_{\nu}"] & & \widetilde{H}_\mu \arrow[ll] \arrow[rr] & & \widetilde{H}_{g(\nu')} \arrow[d, "\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} g^n_{\nu'}"] \\
\widetilde{K}_\nu & & & & \widetilde{K}_{\nu'} \arrow[llll]
\end{tikzcd}$$

Provjerimo još djelovanje pridruživanja R na identitičkom morfizmu u inv^*-Grp. Neka je $\left(1_\Lambda, 1^n_{G_\lambda}\right) : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$, gdje je $1^n_{G_\lambda} = 1_{G_\lambda}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$R\left(\left(1_\Lambda, 1^n_{G_\lambda}\right)\right) = \left(1_\Lambda, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} 1_{G_\lambda}\right),$$

a to je identiteta na inverznom sustavu $\widetilde{\boldsymbol{G}} = \left(\widetilde{G}_\lambda, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\right)$ u inv-Grp. □

Da bismo definirali funktor koji reducira kategoriju pro^*-Grp na pro-Grp, treba nam još jedna lema.

Lema 3.9. *Ako je* $\left(f, f^n_\mu\right) \sim \left(f', f'^n_\mu\right)$ *u* inv^*-$Grp(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})$, *onda je* $R\left(\left(f, f^n_\mu\right)\right) \sim R\left(\left(f', f'^n_\mu\right)\right)$ *u* inv-$Grp(\widetilde{\boldsymbol{G}}, \widetilde{\boldsymbol{H}})$.

Dokaz. Ako su $\left(f, f^n_\mu\right)$ i $\left(f', f'^n_\mu\right)$ ekvivalentni u inv^*-Grp, onda za svaki $\mu \in M$ postoje $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f'(\mu)$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $f^{n'}_\mu p_{f(\mu)\lambda} = f'^{n'}_\mu p_{f'(\mu)\lambda}$, za svaki $n' \geq n$. Po Lemi 3.3, iz toga slijedi

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n_\mu \ \underset{\mathbb{N}}{\nabla} p_{f(\mu)\lambda} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f'^n_\mu \ \underset{\mathbb{N}}{\nabla} p_{f'(\mu)\lambda},$$

pa zaključujemo da je $\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n_\mu\right) \sim \left(f', \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f'^n_\mu\right)$ u inv-Grp. □

Konačno, možemo definirati funktor $\widetilde{R} : pro^*\text{-}Grp \to pro\text{-}Grp$ kao inducirani funktor funktorom R. Dakle, vrijedi

$$\widetilde{R}(\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{G}) = \widetilde{\boldsymbol{G}} \ \text{ za } \ \boldsymbol{G} \in Ob\,(pro^*\text{-}Grp)\,,$$

$$\widetilde{R}(\boldsymbol{f}^*) = \left[R\left(\left(f, f_\mu^n\right)\right)\right] = \left[\left(f, \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} f_\mu^n\right)\right] \ \text{ za } \ \boldsymbol{f}^* = \left[\left(f, f_\mu^n\right)\right] \in pro^*\text{-}Grp\,(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H})\,.$$

Funktor $\widetilde{R}$ je vjeran po Lemi 3.6. Očigledno je da nije pun jer objekti u kategoriji pro-Grp nisu samo inverzni sustavi kvocijentnih grupa, pa ni svi morfizmi u toj kategoriji nisu slike morfizama iz pro^*-Grp po funktoru $\widetilde{R}$.

3.2 Nova karakterizacija funktora grupa gruboga oblika

Prethodno definirani funktor nam omogućava novu karakterizaciju funktora gruboga oblika, kao i grupe gruboga oblika. Također, s pomoću njega ćemo definirati homološke grupe gruboga oblika.

Neka je (X, x_0) punktirani topološki prostor, $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ jedna njegova $HPol_\circ$-ekspanzija (po Korolaru 2.73 ona uvijek postoji) i neka je $k \in \mathbb{N}$. Kao što smo naveli u drugom poglavlju, djelovanje funktora $pro^*\text{-}\pi_k : Sh_\circ^* \to pro^*\text{-}Grp$ je definirano s

$$pro^*\text{-}\pi_k\,(X, x_0) = \left(\pi_k\,(X_\lambda, x_\lambda)\,, \pi_k\,(p_{\lambda\lambda'})\,, \Lambda\right)$$

i

$$pro^*\text{-}\pi_k\,(F^*) = \left[\left(f, \pi_k\left(f_\mu^n\right)\right)\right] : pro^*\text{-}\pi_k\,(X, x_0) \to pro^*\text{-}\pi_k\,(Y, y_0)\,,$$

za $F^* = \left\langle\left[\left(f, f_\mu^n\right)\right]\right\rangle \in Sh_\circ^*\,((X, x_0)\,, (Y, y_0))$. Kada primijenimo funktor $\widetilde{R}$ na inverzni sustav $pro^*\text{-}\pi_k\,(X, x_0)$, dobijemo

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\pi_k\right)(X, x_0) &= \widetilde{R}\left(\left(\pi_k\,(X_\lambda, x_\lambda)\,, \pi_k\,(p_{\lambda\lambda'})\,, \Lambda\right)\right) = \\ &= \left(\widetilde{\pi_k\,(X_\lambda, x_\lambda)}, \mathop{\nabla}_{\mathbb{N}} \pi_k\,(p_{\lambda\lambda'})\,, \Lambda\right).\end{aligned}$$

Sjetimo se da je

$$\check{\pi}_k^* (P, p_0) = \widetilde{\pi_k (P, p_0)}, \quad \text{za svaki} \, (P, p_0) \in Ob \, (HPol_\circ) \, .$$

Također, za $f \in HPol_\circ((P,p_0),(Q,q_0))$, homomorfizam $\check{\pi}_k^*(f) \equiv \check{\pi}_k^*(S^*(f))$ je induciran s $\prod\limits_{\mathbb{N}} \pi_k(f)$, pa vrijedi $\check{\pi}_k^*(f) = \nabla\limits_{\mathbb{N}} \pi_k(f)$. Po tome je

$$\left(\widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\pi_k\right)(X, x_0) = \left(\check{\pi}_k^* \left(X_\lambda, x_\lambda\right), \check{\pi}_k^* \left(p_{\lambda\lambda'}\right), \Lambda\right).$$

Po Teoremu 2.89 je

$$\lim \left(\check{\pi}_k^* \left(X_\lambda, x_\lambda\right), \check{\pi}_k^* \left(p_{\lambda\lambda'}\right), \Lambda\right) = \check{\pi}_k^* \left(X, x_0\right),$$

pa je

$$\lim \left(\left(\widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\pi_k\right)(X, x_0)\right) = \check{\pi}_k^* \left(X, x_0\right).$$

Također, za $F^* = \left\langle \left[\left(f, f_\mu^n\right)\right] \right\rangle \in Sh_\circ^* \left((X,x_0),(Y,y_0)\right)$ vrijedi

$$\widetilde{R} \left(pro^*\text{-}\pi_k \left(F^*\right)\right) = \widetilde{R} \left(\left[\left(f, \pi_k \left(f_\mu^n\right)\right)\right]\right) = \left[\left(f, \nabla_{\mathbb{N}} \pi_k \left(f_\mu^n\right)\right)\right]$$

i

$$\lim \left(\left(\widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\pi_k\right)\left(F^*\right)\right) = \check{\pi}_k^* \left(F^*\right).$$

Dokažimo posljednju tvrdnju. Zaista, za svaki $\mu \in M$ je

$$\nabla_{n\in\mathbb{N}} \pi_k \left(f_\mu^n\right) \circ \check{\pi}_k^* \left(S^* \left(p_{f(\mu)}\right)\right) = \check{\pi}_k^* \left(S^* \left(q_\mu\right)\right) \circ \check{\pi}_k^* \left(F^*\right). \tag{3.1}$$

Naime, za po volji odabrani $A^* = \left\langle [(a_\lambda^n)] \right\rangle \in \check{\pi}_k^* \left(X, x_0\right)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{n\in\mathbb{N}} \pi_k \left(f_\mu^n\right) \circ \check{\pi}_k^* \left(S^* \left(p_{f(\mu)}\right)\right)\right)\left(A^*\right) &= \nabla_{n\in\mathbb{N}} \pi_k \left(f_\mu^n\right) \left(S^* \left(p_{f(\mu)}\right) \circ A^*\right) = \\
&= \nabla_{n\in\mathbb{N}} \pi_k \left(f_\mu^n\right) \left(\left\langle \left[\left(\imath, 1_{X_{f(\mu)}}\right)\right] \right\rangle \circ \left\langle [(a_\lambda^n)] \right\rangle\right) = \\
&= \nabla_{n\in\mathbb{N}} \pi_k \left(f_\mu^n\right) \left(\left\langle \left[\left(a_{f(\mu)}^n\right)\right] \right\rangle\right),
\end{aligned}$$

gdje je indeksna funkcija $\imath$ inkluzija $\imath : \{f(\mu)\} \hookrightarrow \Lambda$. Primijetimo da je

$$\left\langle \left[\left(a^n_{f(\mu)} \right) \right] \right\rangle \in \check{\pi}^*_k \left(X_{f(\mu)}, x_{f(\mu)} \right) = \widetilde{\pi_k \left(X_{f(\mu)}, x_{f(\mu)} \right)}.$$

Dakle,

$$\left(\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} \pi_k \left(f^n_\mu \right) \circ \check{\pi}^*_k \left(S^* \left(p_{f(\mu)} \right) \right) \right) (A^*) = \left\langle \left[\left(f^n_\mu a^n_{f(\mu)} \right) \right] \right\rangle .$$

Također,

$$\begin{aligned} \left(\check{\pi}^*_k \left(S^* \left(q_\mu \right) \right) \check{\pi}^*_k (F^*) \right) (A^*) &= S^* \left(q_\mu \right) \circ F^* \circ A^* = \\ &= \left\langle \left[\left(\imath, 1_{Y_\mu} \right) \right] \right\rangle \circ \left\langle \left[\left(f, f^n_\mu \right) \right] \right\rangle \circ \left\langle [(a^n_\lambda)] \right\rangle = \\ &= \left\langle \left[\left(f^n_\mu a^n_{f(\mu)} \right) \right] \right\rangle , \end{aligned}$$

gdje je indeksna funkcija $\imath$ inkluzija $\imath : \{\mu\} \hookrightarrow M$. Budući da je A^* bio po volji odabran, zaključujemo da vrijedi (3.1). Iz jedinstvenosti limesa sada slijedi da je $\lim \left(\left(\widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\pi_k \right) (F^*) \right)$ jednak upravo $\check{\pi}^*_k (F^*)$.

Primijetimo da je $\widetilde{R} \circ pro^*\text{-}\pi_k$, za $k \in \mathbb{N}$, funktor iz $Sh^*_\circ$ u *pro*-*Grp* induciran funktorom $\check{\pi}^*_k$. U nastavku ćemo ga označavati s *pro*-$\check{\pi}^*_k$.

Sada funktor grupa gruboga oblika $\check{\pi}^*_k$ za $k \in \mathbb{N}$ možemo prikazati kao funktorsku kompoziciju

$$\check{\pi}^*_k = \lim \ \circ \ \widetilde{R} \ \circ \ pro^*\text{-}\pi_k = \lim \ \circ \ pro\text{-}\check{\pi}^*_k : Sh^*_\circ \to Grp,$$

što znači da je *pro*-$\check{\pi}^*_k$ potpuni analogon funktora *pro*-π_k.

Kao zaključak, prikazat ćemo veze među funktorima koje smo promatrali, novim kao i onim poznatim otprije, sljedećim komutativnim dijagramom.

$$\begin{tikzcd}
 & Sh_\circ \arrow[rr, "J"] \arrow[dl, "\check{\pi}_k"'] \arrow[d, "pro\text{-}\pi_k"] & & Sh_\circ^* \arrow[dl, "pro^*\text{-}\pi_k"'] \arrow[d, "pro\text{-}\check{\pi}_k^*"'] \arrow[dr, "\check{\pi}_k^*"] & \\
Grp & pro\text{-}Grp \arrow[l, "\lim"] \arrow[r, "\underline{J}"'] & pro^*\text{-}Grp \arrow[r, "\widetilde{R}"'] & pro\text{-}Grp \arrow[r, "\lim"'] & Grp
\end{tikzcd}$$

Primjer 3.10. *Pogledajmo još jednom inverzne nizove grupa iz Primjera 2.79,*

$$pro\text{-}\pi_1(X, x_0) = \Big(\pi_1(X_i, x_i), \pi_1([p_{ii+1}])\Big) = \Big(\mathbb{Z}^2, \pi_1([p_{ii+1}])\Big)$$

i

$$pro\text{-}\pi_1(Y, y_0) = \left(\pi_1\left(Y_j, y_j\right), \pi_1\left(\left[q_{jj+1}\right]\right)\right) = \left(\mathbb{Z}^2, \pi_1\left(\left[q_{jj+1}\right]\right)\right).$$

Po [11], ova dva niza grupa nisu izomorfna u pro-Grp, ali jesu izomorfna u pro*-Grp.

To znači da su nizovi

$$pro\text{-}\check{\pi}_1^*(X, x_0) = (\check{\pi}_1^*(X_i, x_i), \check{\pi}_1^*(p_{ii+1})) = \left(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}^2/\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}^2 \ , \nabla_{\mathbb{N}}\pi_1(p_{ii+1})\right)$$

i

$$pro\text{-}\check{\pi}_1^*(Y, y_0) = \left(\check{\pi}_1^*\left(Y_j, y_j\right), \check{\pi}_1^*\left(q_{jj+1}\right)\right) = \left(\prod_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}^2/\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}^2, \nabla_{\mathbb{N}}\pi_1\left(q_{jj+1}\right)\right)$$

izomorfni u kategoriji pro-Grp, pa su grupe gruboga oblika $\check{\pi}_1^*(X, x_0)$ i $\check{\pi}_1^*(Y, y_0)$ izomorfne.

Poglavlje 4

Hurewiczev teorem u kategoriji gruboga oblika

Hurewiczev teorem o izomorfizmu je jedan od temeljnih teorema u algebarskoj topologiji. Budući da povezuje homotopske i homološke grupe jednostavno povezanog topološkog prostora, daje nam alat za jednostavnije proučavanje homotopskih grupa (koje su komplicirane za konstruiranje) preko odgovarajućih homoloških grupa. Po njemu, ako znamo strukturu homoloških grupa prostora, možemo odrediti njegovu prvu netrivijalnu homotopsku grupu.

U [16] je dana varijanta Hurewiczeva teorema u teoriji oblika, veza između homotopskih i homoloških *pro*-grupa povezanog topološkog prostora. Dokazano je da je morfizam između prvih netrivijalnih homotopskih i homoloških *pro*-grupa izomorfizam. Također je dana veza između grupa oblika i homoloških grupa oblika povezanog prostora koji pripada klasi pokretljivih metričkih kontinuuma. U [9] je dana varijanta Hurewiczeva teorema u teoriji gruboga oblika, za homotopske i homološke *pro**-grupe. Mi želimo dokazati da analogan teorem vrijedi u kategoriji Sh^* za *pro*-$\check{\pi}_k^*$ i *pro*-$\check{H}_k^*$, najprije u apsolutnom, a zatim i u relativnom slučaju.

4.1 Homološke grupe gruboga oblika

Funktor $\widetilde{R}$ nam omogućava da definiramo homološku grupu gruboga oblika topološkog prostora X kao limes *pro*-grupe, analogno definiciji homološke grupe oblika koja je dana u [16].

Prisjetimo se konstrukcije singularne homološke grupe topološkog prostora ([4]). Neka je dan prostor X i $k \in \mathbb{N}_0$. Svako neprekidno preslikavanje $\sigma \colon \Delta^k \to X$, gdje je

$$\Delta^k = \left\{ (t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \ , \quad t_i \geq 0 \ \text{ za svaki } i \right\}$$

orijentirani standardni k-simpleks, nazivamo (orijentiranim) **singularnim k-simpleksom** u prostoru X i označujemo s $[v_0, \dots, v_k] = [\sigma(1, 0, \dots, 0), \dots, \sigma(0, \dots, 0, 1)]$. Ovdje je bitno istaknuti da se na preslikavanje σ ne postavlja nikakav dodatni uvjet osim neprekidnosti (simpleks iz Definicije 2.44 homeomorfan je standardnom simpleksu).

Neka je $C_k(X)$ slobodna abelovska grupa kojoj je baza skup singularnih k-simpleksa u X. Elementi grupe $C_k(X)$ su konačne linearne kombinacije k-simpleksa (formalne sume)

$$\sum_{i=1}^{l} n_i \sigma_i$$

za $l \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{Z}$ i $\sigma_i \colon \Delta^k \to X$, koje nazivamo **singularnim k-lancima**. Rub singularnog k-simpleksa $[v_0, \dots, v_k]$ sastoji se od svih $(k-1)$-simpleksa $\left[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k\right]$, $j \in \{0, \dots k\}$, koje nazivamo njegovim **stranicama**.

Homomorfizam ruba $\partial_k \colon C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ je za $k \geq 1$ definiran djelovanjem na bazi,

$$\partial_k \left([v_0, \dots, v_k] \right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k \right],$$

a za $k = 0$ je

$$\partial_0 \colon C_0(X) \to 0$$

nul-homomorfizam.

Sljedeća lema daje osnovno svojstvo homomorfizma ruba.

Lema 4.1 ([4], Lema 2.1)**.** *Kompozicija* $C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2}(X)$ *je nul-homomorfizam.*

Na ovaj način smo dobili niz homomorfizama i abelovskih grupa

$$\cdots \to C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \to \cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

pri čemu vrijedi $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ za svaki k. Takav niz nazivamo **singularnim lančanim kompleksom**. Elemente podgrupe $\operatorname{Ker} \partial_k \subset C_k(X)$ nazivamo ***k*-ciklusima**, a elemente podgrupe $\operatorname{Im} \partial_{k+1} \subset C_k(X)$ ***k*-rubovima**.

Zbog $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ je $\operatorname{Im} \partial_{k+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_k$ i $\operatorname{Im} \partial_{k+1}$ je normalna podgrupa grupe $\operatorname{Ker} \partial_k$. Kvocijentnu grupu

$$H_k(X) = \operatorname{Ker} \partial_k / \operatorname{Im} \partial_{k+1}$$

nazivamo ***k*-tom homološkom grupom** topološkog prostora X. Njezini su elementi **homološke klase** $[z]$, gdje je $z \in \operatorname{Ker} \partial_k$, a za dva ciklusa koji pripadaju istoj homološkoj klasi kažemo da su **homologni**.

Propozicija 4.2 ([4], Propozicija 2.7)**.** *Za putovima povezan prostor X vrijedi $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

Teorem 4.3 ([19], Teorem 30.3)**.** *Ako je X jednotočkovan prostor, onda je $H_k(X) = 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

Primjer 4.4. *Homološke grupe kružnice S^1 su $H_0(S^1) = H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ i $H_k(S^1) = 0$, za svaki $k \geq 2$. Općenito, za n-sferu S^n je $H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ i $H_k(S^n) = 0$, za svaki $k \neq 0, n$.*

Primjer 4.5. *Za Varšavsku kružnicu W vrijedi $H_k(W) = 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $H_0(W) = \mathbb{Z}$.*

Neka je dano preslikavanje $f \in Top(X, Y)$. Za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ f inducira homomorfizam $f_{\#k} : C_k(X) \to C_k(Y)$ definiran s

$$f_{\#k}\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \sum_i n_i (f \circ \sigma_i)$$

Za homomorfizme $f_{\#k}$ vrijedi $f_{\#k-1}\partial_k = \partial_k f_{\#k}$ jer

$$\begin{aligned} f_{\#k-1}\partial_k(\sigma) &= f_{\#k-1}\partial_k\left([v_0, \dots, v_k]\right) = f_{\#k-1}\left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k\right]\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j f\left(\left[v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k\right]\right) = \partial_k f_{\#k}(\sigma) \end{aligned}$$

To znači da je dijagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1}(X) \arrow[r, "\partial_{k+1}"] \arrow[d, "f_{\#k+1}"] & C_k(X) \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "f_{\#k}"] & C_{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\#k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{k+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{k+1}"] & C_k(Y) \arrow[r, "\partial_k"] & C_{k-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

komutativan, odnosno da homomorfizmi $f_{\#k}$, $k \in \mathbb{N}$, određuju preslikavanje koje singularnom lančanom kompleksu prostora X pridružuje singularni lančani kompleks prostora Y. Takvo preslikavanje nazivamo **lančanim preslikavanjem**.

Iz $f_{\#k-1}\partial_k = \partial_k f_{\#k}$ slijedi da $f_{\#k}$ cikluse preslikava u cikluse jer za svaki k-ciklus $\alpha \in \operatorname{Ker} \partial_k$ iz $\partial_k \alpha = 0$ slijedi $\partial_k(f_{\#k}\alpha) = f_{\#k-1}(\partial_k \alpha) = 0$. Isto tako, $f_{\#k}$ rubove preslikava u rubove jer za svaki $\beta \in C_k(X)$ vrijedi $f_{\#k-1}(\partial_k \beta) = \partial_k(f_{\#k}\beta)$. Iz ovoga slijedi da $f_{\#k}$ inducira homomorfizam $f_k \colon H_k(X) \to H_k(Y)$ (u literaturi obično označavan s f_*) i da vrijede sljedeće tvrdnje.

Propozicija 4.6 ([4], Propozicija 2.9)**.** *Lančano preslikavanje lančanih kompleksa inducira homomorfizme homoloških grupa tih kompleksa.*

Teorem 4.7 ([4], Teorem 2.10)**.** *Neka je $f, g \in Top(X, Y)$. Ako je f homotopno g onda f i g induciraju isti homomorfizam $f_k = g_k \colon H_k(X) \to H_k(Y)$.*

Iz prethodnog teorema slijedi korolar po kojem su homološke grupe homotopske invarijante, što je jedan od glavnih rezultata homološke teorije.

Korolar 4.8. *Ako je $f \in Top(X, Y)$ homotopska ekvivalencija, onda je za svaki $k \in \mathbb{N}$ inducirani homomorfizam $f_k \colon H_k(X) \to H_k(Y)$ izomorfizam.*

Prirodno se postavlja pitanje postoji li veza između homoloških grupa topološkog prostora i homotopskih grupa koje su također homotopske invarijante. Promotrimo najprije fundamentalnu grupu po volji odabranog prostora. Njezini elementi su petlje oko bazne točke, dakle klase putova kojima se početna i krajnja točka podudaraju (s baznom točkom). Svaki put $f : I \to X$ u prostoru X možemo shvatiti i kao singularni 1-simpleks. Ako je, uz to $f(0) = f(1) = x_0$, f je 1-ciklus jer je $\partial_1 f = f(1) - f(0) = 0$. Dakle, $f \in \operatorname{Ker} \partial_1$. Pokaže se da je svaki put $g : I \to X$ za kojeg vrijedi $g(0) = g(1) = x_0$ i koji je homotopan

f, također element $\operatorname{Ker}\partial_1$ i da su u istoj homološkoj klasi. Na ovaj način dobivamo vezu između fundamentalne i prve homološke grupe prostora X. Sljedeći teorem je upravo Hurewiczev teorem o kojem će u nastavku biti riječi, i to za slučaj $n = 1$.

Teorem 4.9 ([4], Teorem 2A.1)**.** *Za svaki $X \in Ob(Top)$ postoji homomorfizam $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$. Ako je X povezan putovima, onda je h surjektivan i* $\operatorname{Ker} h$ *je komutatorska podgrupa od $\pi_1(X, x_0)$ pa h inducira izomorfizam iz abelizacije grupe $\pi_1(X, x_0)$ u $H_1(X)$.*

Prisjetimo se, za proizvoljnu grupu G i za bilo koje elemente $x, y \in G$ definira se njihov **komutator** $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1} \in G$ i podgrupa $[G, G]$ generirana svim komutatorima elemenata iz G naziva se **komutatorskom podgrupom** grupe G. Podgrupa $[G, G]$ je normalna podgrupa grupe G, kvocijentna grupa $G/[G, G]$ je abelovska i $[G, G]$ je najmanja normalna podgrupa grupe G za koju je odgovarajuća kvocijentna grupa abelovska. Grupa $G/[G, G]$ se naziva **abelizacijom** grupe G.

Homomorfizam $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ iz Teorema 4.9 definiran je s

$$h([\alpha]) = \alpha_1(a_1), \tag{4.1}$$

gdje je $\alpha_1\colon H_1(S^1) \to H_1(X)$ homomorfizam induciran preslikavanjem $\alpha\colon (S^1, s_0) \to (X, x_0)$, a a_1 je generator grupe $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

U poglavlju 4.2 ćemo se više pozabaviti vezom između homotopskih i homoloških grupa većih dimenzija.

Lema 4.10. *Ako je $f \in Top(X, Y)$ i $g \in Top(Y, Z)$, onda je $(gf)_k = g_k f_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Također, za svaki $X \in Ob(Top)$ je $(1_X)_k = 1_{H_k(X)}$.*

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz asocijativnosti kompozicije $g \circ f \circ \sigma$ za svaki singularni k-simpleks σ. Druga tvrdnja je očigledno točna. □

Iz Leme 4.10 i Teorema 4.7 slijedi da je, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$, pridruživanje

$$H_k : HTop \to Ab$$

koje svakom prostoru X pridružuje k-tu homološku grupu $H_k(X)$ i koje svakoj homotopskoj klasi preslikavanja $f : X \to Y$ pridružuje homomorfizam $f_k : H_k(X) \to H_k(Y)$ induciran s f dobro definiran funktor. Nazivamo ga ***k*-tim homološkim funktorom**.

Neka je $\boldsymbol{p} : X \to (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ neka $HPol$-ekspanzija prostora X. Po [16], ***k*-dimenzionalna homološka grupa oblika** (Čechova homološka grupa) $\check{H}_k(X)$ topološkog prostora X, za $k \in \mathbb{N}_0$, se definira formulom

$$\check{H}_k(X) = \lim\left(pro\text{-}H_k(X)\right),$$

gdje je $pro\text{-}H_k : Sh \to pro\text{-}Ab$ funktor (analogon funktoru $pro\text{-}\pi_k$) koji prostoru X pridružuje k-tu homološku pro-grupu

$$pro\text{-}H_k(X) = \left(H_k\left(X_\lambda\right), H_k\left(p_{\lambda\lambda'}\right), \Lambda\right),$$

a morfizmu oblika $F = \left\langle \left[\left(f, f_\mu \right) \right] \right\rangle$ pridružuje morfizam $\left[\left(f, H_k(f_\mu) \right) \right]$.

Očigledno je da je $\check{H}_k(X) = H_k(X)$ čim je $X \in Ob(HPol)$.

Primjer 4.11. *Varšavska kružnica W ima prvu homološku grupu oblika izomorfnu $\mathbb{Z}$. Naime, uz oznake iz Primjera 2.70 je $W = \lim(W_n, p_{nn+1})$ i $H\boldsymbol{p}\colon W \to (W_n, [p_{nn+1}])$ je njezina $HPol$-ekspanzija, pri čemu su $[p_{nn+1}]$ izomorfizmi za svaki n pa je*

$$pro\text{-}H_1(W) = (H_1(W_n), H_1([p_{nn+1}])) = \left(\mathbb{Z} \xleftarrow{H_1([p_{12}])} \mathbb{Z} \xleftarrow{H_1([p_{23}])} \mathbb{Z} \xleftarrow{H_1([p_{34}])} \cdots\right)$$

s veznim izomorfizmima i $\check{H}_1(W) = \mathbb{Z} \ \ (= \check{H}_1(S^1))$.

Primjer 4.12. *Prva homološka grupa oblika solenoida $\Sigma_{(p_n)}$ iz 2.74 je*

$$\check{H}_1(\Sigma_{(p_n)}) = (\lim pro\text{-}H_1)\left(\Sigma_{(p_n)}\right) = \lim\left(\mathbb{Z} \xleftarrow{p_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{p_2} \mathbb{Z} \xleftarrow{p_3} \cdots\right) = 0$$

iako $pro\text{-}H_1(\Sigma_{(p_n)})$ nije trivijalan inverzni niz.

Za svaki $k \in \mathbb{N}_0$, ***k*-ti homološki funktor grupa oblika** $\check{H}_k : Sh \to Ab$ prostoru X pridružuje grupu $\check{H}_k(X)$, a morfizmu oblika $F : X \to Y$ pridružuje homomorfizam

$\check{H}_k(F) = (\lim \circ\, pro\text{-}H_k)\,(F) : \check{H}_k(X) \to \check{H}_k(Y)$. Dakle,

$$\check{H}_k = \lim \circ\, pro\text{-}H_k.$$

U [9] je u kategoriji gruboga oblika definiran inducirani k-ti homološki funktor,

$$pro^*\text{-}H_k : Sh^* \to pro^*\text{-}Ab,$$

čije se djelovanje na objektima podudara s djelovanjem funktora $pro\text{-}H_k$, a koji morfizmu gruboga oblika $F^* = \left\langle \left[\left(f, f_\mu^n \right) \right] \right\rangle$ pridružuje morfizam $\left[\left(f, H_k(f_\mu^n) \right) \right]$.

Sada možemo definirati ***k*-ti homološki funktor grupa gruboga oblika** kao funktorsku kompoziciju

$$\check{H}_k^* = \lim\ \circ\ \widetilde{R}\ \circ\ pro^*\text{-}H_k : Sh^* \to Ab.$$

Označimo funktor $\widetilde{R}\ \circ\ pro^*\text{-}H_k$ s $pro\text{-}\check{H}_k^*$ pa imamo

$$\check{H}_k^* = \lim\ \circ\, pro\text{-}\check{H}_k^*.$$

Posljedično, ***k*-ta homološka grupa gruboga oblika** poliedra $P \in Ob(HPol)$ je

$$\check{H}_k^*\,(P) = \widetilde{H_k\,(P)},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$, i k-ta homološka grupa gruboga oblika topološkog prostora X je

$$\begin{aligned} \check{H}_k^*\,(X) &= \left(\lim\ \circ\ \widetilde{R}\ \circ\ pro^*\text{-}H_k\right)(X) = \left(\lim\ \circ\ pro\text{-}\check{H}_k^*\right)(X) = \\ &= \lim\ \left(\check{H}_k^*\,(X_\lambda)\,, \check{H}_k^*\,(p_{\lambda\lambda'})\,, \Lambda\right), \end{aligned}$$

ako je $\boldsymbol{p} : X \to (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ njegova $HPol$-ekspanzija.

Za $F^* = \left\langle \left[\left(f, f_\mu^n \right) \right] \right\rangle \in Sh^*\,(X, Y)$ vrijedi

$$\check{H}_k^*\,(F^*) = \lim \widetilde{R} \left(\left[\left(f, H_k \left(f_\mu^n \right) \right) \right] \right) = \lim \left[\left(f, \mathop{\nabla}_{n \in \mathbb{N}} H_k \left(f_\mu^n \right) \right) \right],$$

4.2 Apsolutni Hurewiczev teorem

Po Teoremu 4.9 za svaki punktirani topološki prostor (X, x_0) postoji homomorfizam $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$. Na analogan način može se konstruirati homomorfizam

$$h_k \equiv h_{k,(X,x_0)} : \pi_k(X, x_0) \to H_k(X)$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Homomorfizam h_k nazivamo **Hurewiczevim homomorfizmom**. Prirodno, h_k je definiran s

$$h_k\left([\alpha]\right) = H_k(\alpha)(a_k),$$

gdje je a_k generator grupe $H_k(S^k) \approx \mathbb{Z}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Pokaže se da za svaki $f \in HTop_\circ\left((X, x_0), (Y, y_0)\right)$, dijagram

$$\begin{tikzcd}
\pi_k\left(X, x_0\right) \arrow[r, "h_{k,(X,x_0)}"] \arrow[d, "\pi_k\left(f\right)"'] & H_k\left(X\right) \arrow[d, "H_k\left(f\right)"] \\
\pi_k\left(Y, y_0\right) \arrow[r, "h_{k,(Y,y_0)}"] & H_k\left(Y\right)
\end{tikzcd}$$

komutira, odnosno da vrijedi

$$h_{k,(Y,y_0)}\pi_k(f) = H_k(f)h_{k,(X,x_0)},$$

što znači da je h_k prirodna transformacija funktora π_k u funktor H_k (dokaz ove tvrdnje kao i dokaz da je h_k dobro definirani homomorfizam može se pronaći u [21], poglavlje 7.4).

Navedimo najprije definiciju n-povezanog prostora i klasični Hurewiczev teorem.

Definicija 4.13. *Za punktirani prostor (X, x_0) kažemo da je **n-povezan** ako $\pi_k(X, x_0) = 0$ za svaki $0 \leq k \leq n$.*

Teorem 4.14. *Neka je (X, x_0) punktirani $(n-1)$-povezan topološki prostor. Ako je $n \geq 2$, onda je $H_k(X) = 0$ za $1 \leq k \leq n-1$, $h_n : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ je izomorfizam, a h_{n+1} je epimorfizam. Ako je $n = 1$, onda je h_1 epimorfizam.*

Dokaz. Dokaz se može pogledati npr. u [21] (poglavlje 7.5) $\square$

U [16] je pokazano da za $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0)=((X_\lambda,x_\lambda),p_{\lambda\lambda'},\Lambda)\in pro^*\text{-}HTop_\circ$ i $k\geq 1$, Hurewiczev homomorfizam

$$\varphi_\lambda\equiv h_{k,(X_\lambda,x_\lambda)}:\pi_k(X_\lambda,x_\lambda)\to H_k(X_\lambda),\quad \lambda\in\Lambda,$$

definira razinski morfizam sustava

$$(1_\Lambda,\varphi_\lambda):\pi_k(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0)\to H_k(\boldsymbol{X}),$$

a time i morfizam *pro*-grupa $\boldsymbol{\varphi_{k,(X,x_0)}}=[(1_\Lambda,\varphi_\lambda)]$ kojeg nazivamo Hurewiczevim morfizmom sustava $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0)$. Pri tome, ako su $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0)$ i $(\boldsymbol{X'},\boldsymbol{x}'_0)$ dvije $HPol_\circ$-ekspanzije punktiranog prostora (X,x_0) i $\boldsymbol{i}$ kanonski izomorfizam među ekspanzijama istog objekta, dijagram

$$\begin{array}{ccc}
\pi_k(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x_0}) & \xrightarrow{\pi_k(\boldsymbol{i})} & \pi_k(\boldsymbol{X'},\boldsymbol{x'_0}) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x_0})}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{(\boldsymbol{X'},\boldsymbol{x'_0})}} \\
H_k(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{H_k(\boldsymbol{i})} & H_k(\boldsymbol{X'})
\end{array}$$

komutira, pa svakom punktiranom prostoru (X,x_0) možemo pridružiti morfizam

$$\boldsymbol{\varphi}_k\equiv\boldsymbol{\varphi}_{k,(X,x_0)}:pro\text{-}\pi_k(X,x_0)\to pro\text{-}H_k(X).$$

Po [16], za $\boldsymbol{\varphi}_k$ vrijede tvrdnje slične tvrdnjama klasičnog Hurewiczevog teorema.

Definicija 4.15. *Kažemo da je inverzni sustav punktiranih prostora* $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x_0})$ ***n*-povezan** *ako je* $\pi_k(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x_0})$ *nul-objekt u pro-Grp (pro-Set za* $k=0$*) za svaki* $0\leq k\leq n$*. Za punktirani prostor* (X,x_0) *kažemo da je* ***n*-povezan po obliku** *ako su njegove* $HPol_\circ$*-ekspanzije n-povezane, odnosno ako je pro-*$\pi_k(X,x_0)$ *nul-objekt u pro-Grp (pro-Set za* $k=0$*) za* $0\leq k\leq n$*.*

Teorem 4.16 ([16], Teorem II.4.1)**.** *Neka je* (X,x_0) *punktirani topološki prostor koji je* $(n-1)$*-povezan po obliku. Ako je* $n\geq 2$*, onda vrijedi*

(H1) pro-$H_k(X)$ *je nul-objekt u pro-Grp za* $1\leq k\leq n-1$*;*

(H2) $\boldsymbol{\varphi}_n : pro\text{-}\pi_n(X, x_0) \to pro\text{-}H_n(X)$ *je izomorfizam pro-grupa;*

(H3) $\boldsymbol{\varphi}_{n+1} : pro\text{-}\pi_{n+1}(X, x_0) \to pro\text{-}H_{n+1}(X)$ *je epimorfizam pro-grupa.*

Ako je $n = 1$*, onda vrijedi*

(H4) $\boldsymbol{\varphi}_1 : pro\text{-}\pi_1(X, x_0) \to pro\text{-}H_1(X)$ *je epimorfizam pro-grupa.*

U [16] je dana i verzija Hurewiczeva teorema o vezi između grupa oblika i homoloških grupa oblika punktiranih topoloških prostora, a tvrdnje su dokazane za pokretljive povezane kompaktne punktirane metričke prostore.

Definicija 4.17. *Za inverzni sustav* $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *u kategoriji pro-*$\mathcal{C}$ *kažemo da je* ***pokretljiv*** *ako za svaki* $\lambda \in \Lambda$ *postoji* $\lambda' \geq \lambda$ *takav da se vezni morfizam* $p_{\lambda\lambda'}$ *faktorizira kroz* $X_{\lambda''}$ *za svaki* $\lambda'' \geq \lambda$*, tj. za svaki* $\lambda'' \geq \lambda$ *postoji* $r : X_{\lambda'} \to X_{\lambda''}$ *takav da je*

$$p_{\lambda\lambda''} r = p_{\lambda\lambda'}.$$

Za topološki prostor X *kažemo da je pokretljiv ako dopušta pokretljivu* $HPol$*-ekspanziju. Za punktirani topološki prostor* (X, x_0) *kažemo da je pokretljiv ako dopušta pokretljivu* $HPol_\circ$*-ekspanziju.*

Napomena 4.18. *Svaka ekspanzija pokretljivog punktiranog topološkog prostora je pokretljiva. Naime, po Teoremu II.6.1 u [16], svaki inverzni sustav u pro-*$\mathcal{C}$ *koji je izomorfan nekom pokretljivom inverznom sustavu u pro-*$\mathcal{C}$ *je pokretljiv.*

Primjer 4.19. *Punktirani poliedri i punktirani* ANR*-ovi su pokretljivi. Punktirani solenoid* $(\Sigma_{(p_i)}, x_0)$ *iz Primjera 2.74 nije pokretljiv jer njegova fundamentalna pro-grupa*

$$pro\text{-}\pi_1(\Sigma_{(p_i)}, x_0) = \left(\mathbb{Z} \xleftarrow{p_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{p_2} \mathbb{Z} \xleftarrow{p_3} \cdots \right)$$

nije pokretljiva (funktorska slika pokretljivog inverznog sustava je uvijek pokretljivi inverzni sustav). Naime, ako je inverzni niz $\left(\mathbb{Z} \xleftarrow{p_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{p_2} \mathbb{Z} \xleftarrow{p_3} \cdots \right)$ *pokretljiv, za* $n = 1$ *bi morao postojati* $n' \geq 1$ *takav da za* $n' + 1$ *postoji morfizam* $r : X_{n'} = \mathbb{Z} \to X_{n'+1} = \mathbb{Z}$ *i da vrijedi*

$$p_1 p_2 \cdots p_{n'-1} p_{n'} r(1) = p_1 p_2 \cdots p_{n'-1},$$

što je nemoguće jer je $p_n > 1$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $r(1) \in \mathbb{Z}$*.*

Teorem 4.20 ([16], Teorem II.7.7)**.** *Neka je* (X, x_0) *pokretljivi punktirani metrički kontinuum i neka je* $\check{\pi}_k(X, x_0)$ *trivijalna grupa (skup u slučaju* $k = 0$*) za svaki* $0 \leq k \leq n-1$*. Ako je* $n \geq 2$*, onda je* $\check{H}_k(X) = 0$ *za* $1 \leq k \leq n-1$*,* $\check{\varphi}_n \equiv \lim(\boldsymbol{\varphi}_n) : \check{\pi}_n(X, x_0) \to \check{H}_n(X)$ *je izomorfizam, a* $\check{\varphi}_{n+1} \equiv \lim(\boldsymbol{\varphi}_{n+1})$ *je epimorfizam. Ako je* $n = 1$*, onda je* $\check{\varphi}_1 \equiv \lim(\boldsymbol{\varphi}_1)$ *epimorfizam.*

Prirodno se sada definira razinski morfizam u *inv**-*Grp*,

$$(1_\Lambda, \varphi_\lambda^n) : \pi_k\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0\right) \to H_k\left(\boldsymbol{X}\right),$$

s pomoću $\varphi_\lambda^n = h_{k,(X_\lambda, x_\lambda)}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. U [9] (Teorem 4.10) je pokazano da je $\boldsymbol{\varphi}_k^* = [(1_\Lambda, \varphi_\lambda^n)]$ prirodna transformacija funktora *pro**-π_k u *pro**-H_k i da analogan teorem teoremu 4.16 vrijedi i u $Sh_\circ^*$.

Definicija 4.21. *Za punktirani prostor* (X, x_0) *kažemo da je* ***n-povezan po grubome obliku*** *ako je pro**-$\pi_k(X, x_0)$ *nul-objekt u pro***-Grp (pro***-Set za* $k = 0$*) za* $0 \leq k \leq n$*.*

Napomena 4.22. *Lako se provjeri da je punktirani topološki prostor n-povezan po obliku ako i samo ako je n-povezan po grubome obliku.*

Teorem 4.23 ([9], Teorem 4.11)**.** *Neka je* (X, x_0) *punktirani topološki prostor koji je* $(n-1)$*-povezan po grubome obliku. Ako je* $n \geq 2$*, onda vrijedi*

(H1**)* *pro**-$H_k(X)$ *je nul-objekt u pro***-Grp za* $1 \leq k \leq n-1$*;*

(H2**)* $\boldsymbol{\varphi}_n^* :$ *pro**-$\pi_n(X, x_0) \to$ *pro**-$H_n(X)$ *je izomorfizam pro***-grupa;*

(H3**)* $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^* :$ *pro**-$\pi_{n+1}(X, x_0) \to$ *pro**-$H_{n+1}(X)$ *je epimorfizam pro***-grupa.*

Ako je $n = 1$*, onda vrijedi*

(H4**)* $\boldsymbol{\varphi}_1^* :$ *pro**-$\pi_1(X, x_0) \to$ *pro**-$H_1(X)$ *je epimorfizam pro***-grupa.*

Mi želimo dokazati da analogan teorem vrijedi za *pro*-grupe gruboga oblika i homološke *pro*-grupe gruboga oblika, te ustanoviti vezu između grupa gruboga oblika i homoloških grupa gruboga oblika.

Prisjetimo se teorema koji karakteriziraju epimorfizam i monomorfizam u *pro-Grp* kategoriji.

Teorem 4.24. *Neka su* $\boldsymbol{G} = (G_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *i* $\boldsymbol{H} = (H_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *pro-grupe i* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ *morfizam u pro-Grp koji dopušta razinskoga predstavnika* $(1_\Lambda, f_\lambda) : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$. *Morfizam* $\boldsymbol{f}$ *pro-groupa je epimorfizam ako i samo ako za svaki* $\lambda \in \Lambda$ *postoji* $\lambda' \geq \lambda$ *takav da je*

$$\mathrm{Im}(q_{\lambda\lambda'}) \subseteq \mathrm{Im}(f_\lambda).$$

Morfizam $\boldsymbol{f}$ *pro-grupa je monomorfizam ako i samo ako za svaki* $\lambda \in \Lambda$ *postoji* $\lambda' \geq \lambda$ *takav da je*

$$\mathrm{Ker}(f_{\lambda'}) \subseteq \mathrm{Ker}(p_{\lambda\lambda'}).$$

Dokaz. Pogledati dokaze Teorema II.2.1 i Teorema II.2.3 u [16]. □

Korolar 4.25 ([16], Korolar II.2.1)**.** *Neka je* $\boldsymbol{f} = [(1_\Lambda, f_\lambda)]$ *morfizam između pro-grupa. Ako je za svaki* $\lambda \in \Lambda$ *homomorfizam* f_λ *injektivan, onda je* $\boldsymbol{f}$ *monomorfizam.*

Teorem 4.26 ([16], Teorem II.2.6)**.** *Morfizam* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ *u pro-Grp kategoriji je izomorfizam pro-grupa ako i samo ako je monomorfizam i epimorfizam.*

Teorem 4.27 ([5], Teorem 3.3)**.** *Neka je* $\mathcal{C}$ *kategorija koja dopušta produkte. Morfizam* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *u pro-*$\mathcal{C}$ *je epimorfizam ako i samo ako je inducirani morfizam* $\boldsymbol{f}^* = \underline{J}(\boldsymbol{f}) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *epimorfizam u pro***-*$\mathcal{C}$ *kategoriji.*

Trebat će nam, također, i sljedeći teoremi.

Teorem 4.28 ([8], Teorem 4.4)**.** *Neka je* (X, x_0) *punktirani kompaktan metrički prostor ili bilo koji punktirani prostor koji dopušta nizovnu ekspanziju i neka je* $k \in \mathbb{N}_0$. *Tada je* $\check{\pi}^*_k(X, x_0) = 0$ *ako i samo ako je pro-*$\pi_k(X, x_0)$ *nul objekt u pro-Grp kategoriji.*

Teorem 4.29 ([16], Napomena II.4.1)**.** *Topološki prostor* X *je povezan ako i samo ako je pro-*$\pi_0(X, x_0)$ *nul objekt u pro-Grp kategoriji za svaku baznu točku* $x_0 \in X$.

Sada ćemo definirati prirodnu transformaciju funktora *pro-*π^*_k u funktor *pro-*H^*_k i ponuditi odgovarajući analogon Teoremu 4.23 u $Sh^*_\circ$. Započet ćemo s dvije opće leme.

Lema 4.30. *Neka je* O *nul-objekt u kategoriji Grp. Tada je i* $\widetilde{O}$ *nul-objekt u toj kategoriji, a* $(\widetilde{O})$ *je nul objekt u pro-Grp i pro***-Grp.*

Dokaz. Skup $Grp(G,\widetilde{O})$ ima samo jedan element, za svaki $G \in Ob\,(Grp)$ jer je $\widetilde{O}$ grupa s jednim elementom. Očigledno je da je i $Grp(\widetilde{O},G)$ jednočlan jer homomorfizam neutralni element preslikava u neutralni element. Ostatak tvrdnje slijedi po Primjeru 2.2.1 u [16] i Korolaru 4.6 u [9]. □

Lema 4.31. *Inverzni sustav $(G_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ je nul objekt u pro^*-Grp ako i samo ako je $\left(\widetilde{G}_\lambda, \nabla_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\right)$ nul-objekt u pro-Grp.*

Dokaz. Neka je $(G_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ nul-objekt u pro^*-Grp. Tada, za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoji $\lambda' \geq \lambda$ takav da je $p_{\lambda\lambda'}$ nul-morfizam u Grp. To znači da se $p_{\lambda\lambda'}$ faktorizira kroz nul-objekt u Grp, odnosno postoje $f \in Grp(G_{\lambda'}, O)$, $g \in Grp(O, G_\lambda)$ takvi da je

$$p_{\lambda\lambda'} = gf.$$

Tada je, po Lemi 3.4,

$$\nabla_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'} = \nabla_{\mathbb{N}} g \nabla_{\mathbb{N}} f,$$

gdje je $\nabla_{\mathbb{N}} f \in Grp(\widetilde{G}_{\lambda'}, \widetilde{O})$ i $\nabla_{\mathbb{N}} g \in Grp(\widetilde{O}, \widetilde{G}_\lambda)$, pa je po Teoremu 2.36 $\left(\widetilde{G}_\lambda, \nabla_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\right)$ nul-objekt u *pro-Grp*.

Obratno, pretpostavimo da je $\left(\widetilde{G}_\lambda, \nabla_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\right)$ nul-objekt u *pro-Grp*. Tada za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoji $\lambda' \geq \lambda$ takav da je $\nabla_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'}$ nul-morfizam u Grp. Neka je

$$\nabla_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'} = \psi \circ \varphi,$$

za $\varphi \in Grp(\widetilde{G}_{\lambda'}, \widetilde{O})$ i $\psi \in Grp(\widetilde{O}, \widetilde{G}_\lambda)$. Budući da su O i $\widetilde{O}$ nul-objekti u Grp, postoji jedinstveni homomorfizam $f \in Grp(G_{\lambda'}, O)$, i $\nabla_{\mathbb{N}} f : \widetilde{G}_{\lambda'} \to \widetilde{O}$ induciran s $\prod_{\mathbb{N}} f$ je jedinstveni homomorfizam u $Grp(\widetilde{G}_{\lambda'}, \widetilde{O})$. Po tome, $\varphi = \nabla_{\mathbb{N}} f$.

Slično, $\psi = \nabla_{\mathbb{N}} g$, gdje je $\nabla_{\mathbb{N}} g$ jedinstveni homomorfizam u $Grp(\widetilde{O}, \widetilde{G}_\lambda)$ induciran s $\prod_{\mathbb{N}} g$, gdje je g jedinstveni homomorfizam u $Grp(O, G_\lambda)$. Dakle,

$$\nabla_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'} = \left(\nabla_{\mathbb{N}} g\right)\left(\nabla_{\mathbb{N}} f\right) = \nabla_{\mathbb{N}} (gf),$$

i po Lemi 3.6 je $p_{\lambda\lambda'} = gf$, pa zaključujemo da je $p_{\lambda\lambda'}$ nul-morfizam. To znači da je $(G_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ zaista nul-objekt u pro^*-Grp. □

Korolar 4.32. *Neka je (X, x_0) kompaktan punktiran metrički prostor. Tada je, za svaki $k \in \mathbb{N}$, $\check{\pi}_k^*(X, x_0) = 0$ ako i samo ako je pro-$\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ nul-objekt u pro-Grp.*

Dokaz. Po Teoremu 4.28, ako je (X, x_0) kompaktan punktiran metrički prostor, vrijedi

$$\check{\pi}_k^*(X, x_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{pro-}\pi_k(X, x_0) \quad \text{je nul-objekt u } \textit{pro-Grp}.$$

Po Teoremu 2.36 je *pro*-$\pi_k(X, x_0)$ nul-objekt u *pro-Grp* ako i samo ako je *pro**-$\pi_k(X, x_0)$ nul-objekt u *pro**-*Grp*, a po Lemi 4.31 je *pro**-$\pi_k(X, x_0)$ nul-objekt u *pro**-*Grp* ako i samo ako je *pro*-$\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ nul objekt u *pro-Grp*. □

Sljedeći primjer pokazuje da ista tvrdnja ne vrijedi za grupe oblika punktiranog kompaktnog metričkog prostora.

Primjer 4.33. *Kao što smo vidjeli u Primjeru 2.82, 1-dimenzionalna pro-grupa*

$$(\pi_1(X_i, x_i), \pi_1(p_{ii+1})) = \left(\mathbb{Z} \xleftarrow{p_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{p_2} \mathbb{Z} \cdots\right)$$

punktiranog solenoida $\left(\Sigma_{(p_i)}, x_0\right)$ je netrivijalna. Po tome, pro-$\check{\pi}_1^*\left(\Sigma_{(p_i)}, x_0\right)$ je netrivijalna. S druge strane, grupa oblika $\check{\pi}_1\left(\Sigma_{(p_i)}, x_0\right)$ je trivijalna.

Teorem 4.34. *Za svaki punktirani poliedar (P, p_0) i svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji homomorfizam $\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_k \equiv \underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(P,p_0)} : \widetilde{\pi_k(P, p_0)} \to \widetilde{H_k(P)}$ (analogan Hurewiczevom homomorfizmu) takav da, za svaki morfizam $F^* = \left\langle [(f^n)] \right\rangle : (P, p_0) \to (Q, q_0)$ u $Sh_\circ^*$ među punktiranim poliedrima, dijagram*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\pi_k(P, p_0)} \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(P,p_0)}"] \arrow[d, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} \pi_k(f^n)"'] & \widetilde{H_k(P)} \arrow[d, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} H_k(f^n)"] \\
\widetilde{\pi_k(Q, q_0)} \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(Q,q_0)}"] & \widetilde{H_k(Q)}
\end{tikzcd}$$

komutira.

Dokaz. Homomorfizam $\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(P,p_0)} : \widetilde{\pi_k(P, p_0)} \to \widetilde{H_k(P)}$ je induciran s $\prod_{\mathbb{N}} h_k$. Neka je $F^* = \left\langle [(f^n)] \right\rangle : (P, p_0) \to (Q, q_0)$ morfizam u $Sh_\circ^*$ između punktiranih poliedara. Tada, za svaki $n \in \mathbb{N}$, za homotopsku klasu $f^n : (P, p_0) \to (Q, q_0)$ vrijedi

$$h_{k(Q,q_0)}\pi_k(f^n) = H_k(f^n)h_{k(P,p_0)}$$

jer je h_k prirodna transformacija funktora π_k u funktor H_k. Posljedično vrijedi i

$$\left(\prod_{\mathbb{N}} h_{k,(Q,q_0)}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \pi_k(f^n)\right) = \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} H_k(f^n)\right)\left(\prod_{\mathbb{N}} h_{k,(P,p_0)}\right),$$

i konačno,

$$\left(\nabla_{\mathbb{N}} h_{k,(Q,y_0)}\right)\left(\nabla_{n\in\mathbb{N}} \pi_k(f^n)\right) = \left(\nabla_{n\in\mathbb{N}} H_k(f^n)\right)\left(\nabla_{\mathbb{N}} h_{k,(P,p_0)}\right),$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Sada za punktirani topološki prostor (X, x_0) možemo promatrati morfizam

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\varphi}_k \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\varphi}_{k,(X,x_0)} : pro\text{-}\check{\pi}_k^*(X, x_0) \to pro\text{-}\check{H}_k^*(X)$$

u *pro-Grp* predstavljen razinskim morfizmom

$$(1_\Lambda, \nabla_{\mathbb{N}} \varphi_\lambda) : \left(\widetilde{\pi_k(X_\lambda, x_\lambda)}, \nabla_{\mathbb{N}} \pi_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda\right) \to \left(\widetilde{H_k(X_\lambda)}, \nabla_{\mathbb{N}} H_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda\right),$$

gdje je $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ fiksirana $HPol_\circ$-ekspanzija punktiranog prostora (X, x_0) i $\nabla_{\mathbb{N}} \varphi_\lambda = \nabla_{\mathbb{N}} h_{k,(X_\lambda,x_\lambda)}$.

Sljedeća lema tvrdi da je $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\varphi}_k$ prirodna transformacija funktora *pro*-$\check{\pi}_k^*$ u funktor *pro*-$\check{H}_k^*$.

Lema 4.35. *Za morfizam gruboga oblika $F^* : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ i $k \in \mathbb{N}$ dijagram*

$$\begin{tikzcd}
pro\text{-}\check{\pi}_k^*(X, x_0) \arrow[r, "\boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\varphi}_{k,(X,x_0)}"] \arrow[d, "pro\text{-}\check{\pi}_k^*(F^*)"'] & pro\text{-}\check{H}_k^*(X) \arrow[d, "pro\text{-}\check{H}_k^*(F^*)"] \\
pro\text{-}\check{\pi}_k^*(Y, y_0) \arrow[r, "\boldsymbol{\nabla}_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\varphi}_{k,(Y,y_0)}"] & pro\text{-}\check{H}_k^*(Y)
\end{tikzcd}$$

komutira u pro-Grp.

Dokaz. Neka je $F^* = \left\langle \left[\left(f, f_\mu^n \right) \right] \right\rangle \in Sh_\circ^* \left((X, x_0), (Y, y_0) \right)$ predstavljen s $\boldsymbol{f}^* = \left[\left(f, f_\mu^n \right) \right] : (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}_0)$ u $pro^*\text{-}HPol_\circ$. Tada je $pro\text{-}\check{\pi}_k^* \left(F^* \right) = \left[\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} \pi_k \left(f_\mu^n \right) \right) \right]$ predstavljen s

$$\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} \pi_k \left(f_\mu^n \right) \right) : \left(\widetilde{\pi_k(X_\lambda, x_\lambda)}, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \pi_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda \right) \to \left(\widetilde{\pi_k(Y_\mu, y_\mu)}, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \pi_k(q_{\mu\mu'}), M \right),$$

a morfizam $pro\text{-}\check{H}_k^* \left(F^* \right) = \left[\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} H_k \left(f_\mu^n \right) \right) \right]$ je predstavljen s

$$\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} H_k \left(f_\mu^n \right) \right) : \left(\widetilde{H_k(X_\lambda)}, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} H_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda \right) \to \left(\widetilde{H_k(Y_\mu)}, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} H_k(q_{\mu\mu'}), M \right).$$

Budući da, za svaki $\mu \in M$, dijagram

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\pi_k \left(X_{f(\mu)}, x_{f(\mu)} \right)} \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,\left(X_{f(\mu)}, x_{f(\mu)}\right)}"] \arrow[d, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} \pi_k \left(f_\mu^n \right)"'] & \widetilde{H_k \left(X_{f(\mu)} \right)} \arrow[d, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} H_k \left(f_\mu^n \right)"] \\
\widetilde{\pi_k \left(Y_\mu, y_\mu \right)} \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(Y_\mu, y_\mu)}"] & \widetilde{H_k \left(Y_\mu \right)}
\end{tikzcd}$$

komutira u Grp, vrijedi

$$(1_M, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \varphi_\mu) \left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} \pi_k \left(f_\mu^n \right) \right) = \left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} H_k \left(f_\mu^n \right) \right) (1_\Lambda, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \varphi_\lambda),$$

a onda i

$$(\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{k,(Y,y_0)})(pro\text{-}\check{\pi}_k^* \left(F^* \right)) = (pro\text{-}\check{H}_k^* \left(F^* \right))(\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{k,(X,x_0)}).$$

□

Konačno, možemo ponuditi Hurewiczev teorem u novom kontekstu.

Teorem 4.36. *Neka je* (X, x_0) *povezan punktiran topološki prostor. Ako je* $pro\text{-}\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ *nul-objekt u pro-Grp za svaki* $1 \le k \le n-1$, *pri čemu je* $n \ge 2$, *onda vrijedi*

$(\widetilde{H1})$ $pro\text{-}\check{H}_k^*(X)$ *je nul-objekt u pro-Grp za svaki* $1 \le k \le n-1$*;*

$(\widetilde{H2})$ $\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_n : pro\text{-}\check{\pi}_n^*(X, x_0) \to pro\text{-}\check{H}_n^*(X)$ *je izomorfizam u pro-Grp;*

($\widetilde{H3}$) $\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\varphi}_{n+1} : pro\text{-}\check{\pi}^*_{n+1}(X, x_0) \to pro\text{-}\check{H}^*_{n+1}(X)$ *je epimorfizam u pro-Grp.*

Ako $pro\text{-}\check{\pi}^*_1(X, x_0)$ *nije nul-objekt u pro-Grp, onda vrijedi*

($\widetilde{H4}$) $\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\varphi}_1 : pro\text{-}\check{\pi}^*_1(X, x_0) \to pro\text{-}\check{H}^*_1(X)$ *je epimorfizam u pro-Grp.*

Dokaz. Ako je, za $k \in \mathbb{N}$,

$$pro\text{-}\check{\pi}^*_k(X, x_0) = \left(\widetilde{\pi_k (X_\lambda, x_\lambda)}, \underset{\mathbb{N}}{\nabla}\pi_k (p_{\lambda\lambda'}), \Lambda\right)$$

nul-objekt u *pro-Grp*, onda je

$$pro^*\text{-}\pi_k(X, x_0) = (\pi_k (X_\lambda, x_\lambda), \pi_k (p_{\lambda\lambda'}), \Lambda),$$

po Lemi 4.31, nul-objekt u *pro***-Grp*. Po Teoremu 4.29, punktirani topološki prostor je 0-povezan po grubome obliku ako i samo ako je povezan. Dakle, zadovoljeni su uvjeti Teorema 4.23 pa vrijede tvrdnje ($H1^*$), ($H2^*$), ($H3^*$) i ($H4^*$). Ponovo po Lemi 4.31, ($H1^*$) i ($\widetilde{H1}$) su ekvivalentna svojstva. Budući da je funktorska slika izomorfizma izomorfizam, ($\widetilde{H2}$) vrijedi jer je

$$\widetilde{R}\left(\boldsymbol{\varphi}^*_{n,(X,x_0)}\right) = \underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\varphi}_{n,(X,x_0)}.$$

Nadalje, $\boldsymbol{\varphi}^*_k$ je induciran s $\boldsymbol{\varphi}_k$ pa, pozivajući se na Teorem 4.27, zaključujemo da je $\boldsymbol{\varphi}_k$ epimorfizam čim je $\boldsymbol{\varphi}^*_k$ epimorfizam (kategorija *Grp* dopušta produkte). Ako je $\boldsymbol{\varphi}_k$ epimorfizam, za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoji $\lambda' \geq \lambda$ takav da je

$$\mathrm{Im}(H_k (p_{\lambda\lambda'})) \subseteq \mathrm{Im}(h_{k,(X_\lambda,x_\lambda)}).$$

Onda je, također,

$$\mathrm{Im}(\underset{\mathbb{N}}{\nabla}H_k (p_{\lambda\lambda'})) \subseteq \mathrm{Im}(\underset{\mathbb{N}}{\nabla}h_{k,(X_\lambda,x_\lambda)}),$$

pa je po Teoremu 4.24 $\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\varphi}_k$ epimorfizam. Sada, budući da vrijede svojstva ($H3^*$) i ($H4^*$), možemo zaključiti da vrijede i ($\widetilde{H3}$) i ($\widetilde{H4}$). □

Definicija 4.37. *Za niz*

$$\cdots \longrightarrow G' \xrightarrow{f'} G \xrightarrow{f} G'' \longrightarrow \cdots$$

grupovnih homomorfizama kažemo da je ***egzaktan*** *ako vrijedi* $\operatorname{Im} f' = \operatorname{Ker} f$ *za svaki par susjednih homomorfizama.*

Teorem 4.38. *Neka su dani inverzni nizovi* $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G'}$, $\boldsymbol{G''} \in$ *inv-Grp i razinski morfizmi* $(f'_n) \in$ *inv-Grp*$(\boldsymbol{G'}, \boldsymbol{G})$ *i* $(f_n) \in$ *inv-Grp*$(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G''})$*, te neka je za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *niz homomorfizama*

$$0 \longrightarrow G'_n \xrightarrow{f'_n} G_n \xrightarrow{f_n} G''_n \longrightarrow 0$$

egzaktan. Ako je $\boldsymbol{G'}$ *pokretljiv inverzni niz, onda je*

$$0 \longrightarrow \lim \boldsymbol{G'} \xrightarrow{f'} \lim \boldsymbol{G} \xrightarrow{f} \lim \boldsymbol{G''} \longrightarrow 0,$$

gdje je $f' = \lim\,[(f'_n)]$ *i* $f = \lim\,[(f_n)]$*, egzaktan niz homomorfizama.*

Dokaz. Pogledati dokaze Teorema II.6.8, II.6.6 i II.6.10, te Korolar II.6.7. u [16]. □

Dokažimo sada da Hurewiczev teorem vrijedi i za grupe gruboga oblika punktiranih metričkih kontinuuma.

Teorem 4.39. *Neka je* (X, x_0) *punktirani metrički kontinuum i neka je* $\check{\pi}^*_k(X, x_0)$ *trivijalna grupa (skup u slučaju* $k = 0$*) za svaki* $0 \leq k \leq n-1$*. Ako je* $n \geq 2$*, onda vrijedi*

$(\check{H}1^*)$ $\check{H}^*_k(X) = 0$ *za svaki* $1 \leq k \leq n-1$*,*

$(\check{H}2^*)$ $\check{\varphi}^*_n \equiv \lim \left(\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{\;n} \right) : \check{\pi}^*_n(X, x_0) \to \check{H}^*_n(X)$ *je izomorfizam,*

Ako je pri tome (X, x_0) *pokretljiv prostor, vrijedi*

$(\check{H}3^*)$ $\check{\varphi}^*_{n+1} \equiv \lim \left(\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{\;n+1} \right)$ *je epimorfizam.*

Ako je $n = 1$*, a* (X, x_0) *je pokretljiv prostor, onda vrijedi*

$(\check{H}4^*)$ $\check{\varphi}^*_1 \equiv \lim \left(\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{\;1} \right)$ *je epimorfizam.*

Dokaz. Prostor (X, x_0) je povezan budući da je, po Teoremu 4.28, $\check{\pi}^*_0(X, x_0) = 0$ ako i samo ako je *pro*-$\pi_0(X, x_0)$ nul-objekt u *pro-Grp*, što je ekvivalentno povezanosti prostora

(X, x_0). Nadalje, po Korolaru 4.32, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\check{\pi}_k^*(X, x_0) = 0 \iff \textit{pro-}\check{\pi}_k^*(X, x_0) \text{ je nul-objekt u } \textit{pro-Grp}.$$

Sada je, po Teoremu 4.36, za svaki $1 \leq k \leq n-1$ *pro*-grupa *pro*-$\check{H}_k^*(X) \cong \mathbf{0}$, i posljedično, $\check{H}_k^*(X) = 0$. Time smo dokazali $(\check{H}1^*)$.

$(\check{H}2^*)$ očigledno vrijedi, ponovo po Teoremu 4.36, budući da je lim funktor.

U dokazu $(\check{H}3^*)$ ćemo se pozvati na tvrdnju Teorema 4.38. Neka je $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_i, x_i), p_{ii+1})$ nizovna *HPol*-ekspanzija prostora (X, x_0). Za svaki $i \in \mathbb{N}$ uvedimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}
G_i' &= \operatorname{Ker} \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \varphi_i \subset \check{\pi}_{n+1}^*(X_i, x_i),\\
G_i &= \check{\pi}_{n+1}^*(X_i, x_i),\\
G_i'' &= \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \varphi_i(G_i) \subset \check{H}_{n+1}^*(X_i),
\end{aligned}$$

gdje je

$$\varphi_i \equiv h_{n+1,(X_i,x_i)} : \pi_{n+1}(X_i, x_i) \to H_{n+1}(X_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

Hurewiczev homomorfizam. Nadalje, neka je $j_i \colon G_i'' \hookrightarrow \check{H}_{n+1}^*(X_i)$ inkluzija i $f_i \colon G_i \to G_i''$ restrikcija homomorfizma $\underset{\mathbb{N}}{\nabla}\varphi_i$ na sliku, odnosno homomorfizam takav da je

$$j_i f_i = \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \varphi_i. \tag{4.2}$$

Niz

$$0 \longrightarrow G_i' \xhookrightarrow{f_i'} G_i \xrightarrow{f_i} G_i'' \longrightarrow 0,$$

gdje je $f_i' \colon G_i' \hookrightarrow G_i$ inkluzija, je očigledno egzaktan. Pokažimo još da je $\boldsymbol{G'} = (G_i', q_{ii+1}')$, s veznim preslikavanjima $q_{ii+1}' = \check{\pi}_{n+1}^*(p_{ii+1})\Big|_{G_{i+1}'}$, pokretljiv inverzni niz grupa. Ako je (X, x_0) pokretljiv prostor, njegova *HPol*-ekspanzija je pokretljiva, što znači da za po volji odabrani $i \in \mathbb{N}$ postoji indeks pokretljivosti $i' \geq i$ takav da za svaki $i'' \geq i$ postoji homotopska klasa preslikavanja $r \colon (X_{i'}, x_{i'}) \to (X_{i''}, x_{i''})$ takva da vrijedi

$$p_{ii''} r = p_{ii'}. \tag{4.3}$$

Po Teoremu 4.34 dijagram

$$\begin{tikzcd}
\check{\pi}^*_{n+1}(X_{i'}, x_{i'}) \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla}\varphi_{i'}"] \arrow[d, "\check{\pi}^*_{n+1}(r)"'] & \check{H}^*_{n+1}(X_{i'}) \arrow[d, "\check{H}^*_{n+1}(r)"] \\
\check{\pi}^*_{n+1}(X_{i''}, x_{i''}) \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla}\varphi_{i''}"] & \check{H}^*_{n+1}(X_{i''})
\end{tikzcd}$$

komutira, a to znači da je $(\check{\pi}^*_{n+1}(r))(G'_{i'}) \subset G'_{i''}$.

Iz (4.3) slijedi

$$\left(\check{\pi}^*_{n+1}(p_{ii''})\check{\pi}^*_{n+1}(r)\right)\Big|_{G'_{i'}} = \check{\pi}^*_{n+1}(p_{ii'})\Big|_{G'_{i'}}.$$

Dakle, za po volji odabrani $i \in \mathbb{N}$ postoji indeks pokretljivosti $i' \geq i$ takav da za svaki $i'' \geq i$ postoji homomorfizam $r' \equiv \check{\pi}^*_{n+1}(r)\Big|_{G'_{i'}}$ takav da vrijedi

$$q'_{ii''}r' = q'_{ii'},$$

što znači da je $\boldsymbol{G'}$ pokretljiv.

Neka je $\boldsymbol{G} = (G_i, q_{ii+1})$ inverzni niz s veznim preslikavanjima $q_{ii+1} = \check{\pi}^*_{n+1}(p_{ii+1})$ i $\boldsymbol{G''} = (G''_i, q''_{ii+1})$ inverzni niz s veznim preslikavanjima $q''_{ii+1} = \check{H}^*_{n+1}(p_{ii+1})\Big|_{G''_{i+1}}$.

Po Teoremu 4.38 znamo da je za $\boldsymbol{f} := [(f_i)] : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G''}$

$$\lim \boldsymbol{f} \colon \lim \boldsymbol{G} \to \lim \boldsymbol{G''}$$

epimorfizam. Dokažimo još da je $\boldsymbol{j} = [(j_i)] : \boldsymbol{G''} \to \check{H}^*_{n+1}(\boldsymbol{X})$ izomorfizam *pro*-grupa. Budući da iz 4.2 slijedi

$$\boldsymbol{j}\boldsymbol{f} = \underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\varphi}_{n+1},$$

a $\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\varphi}_{n+1}$ je po Teoremu 4.36 epimorfizam, zaključujemo da je $\boldsymbol{j}$ epimorfizam. Po Korolaru 4.25 je i monomorfizam. Dakle, $\boldsymbol{j}$ je bimorfizam, a po Teoremu 4.26 je svaki bimorfizam u kategoriji *pro-Grp* izomorfizam. Posljedično je i $\lim \boldsymbol{j}$ izomorfizam grupa u limesu, iz čega slijedi da je

$$\lim \boldsymbol{G''} = \check{H}^*_{n+1}(X),$$

čime je dokazan $(\check{H}3^*)$.

$(\check{H}4^*)$ se dokaže analogno. □

Primijetimo da u kategoriji oblika tvrdnje analogne tvrdnjama $(\check{H}1^*)$ i $(\check{H}2^*)$ iz prethodnog teorema vrijede samo za pokretljive punktirane metričke metričke, pa je Teorem 4.36 još jedna potvrda razlike među kategorijama $Sh_\circ$ i $Sh_\circ^*$.

4.3 Relativni Hurewiczev teorem

Homotopske i homološke grupe, a posljedično i grupe oblika i homološke grupe oblika, te grupe gruboga oblika i homološke grupe gruboga oblika, mogu se definirati i za punktirane parove prostora (tada ih nazivamo **relativnim grupama**). U ovom poglavlju bismo htjeli istražiti vezu između grupa gruboga oblika i homoloških grupa gruboga oblika punktiranih parova prostora.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ po volji odabran. **Relativna $\boldsymbol{k}$-ta homotopska grupa** $\pi_k(X, X_0, x_0)$ punktiranog topološkog para (X, X_0, x_0) se sastoji od homotopskih klasa preslikavanja $\alpha : (D^k, S^{k-1}, s_0) \to (X, X_0, x_0)$ po homotopiji punktiranih parova koja se definira kao prirodno poopćenje homotopije parova. D^k ovdje označava k-dimenzionalni disk kojem je rub sfera S^{k-1}. Grupovna operacija je definirana na isti način kao i grupovna operacija u $\pi_k(X, x_0)$, ali za $k \geq 2$. Skup $\pi_1(X, X_0, x_0)$ se sastoji od homotopskih klasa putova koji povezuju baznu točku x_0 s po volji odabranom točkom $x \in X_0$ i on nema grupovnu strukturu.

Nadalje, za svaki $f\colon (X, X_0, x_0) \to (Y, Y_0, y_0)$ u $HTop_\circ^2$ definira se homomorfizam $\pi_k(f)\colon \pi_k(X, X_0, x_0) \to \pi_k(Y, Y_0, y_0)$ na isti način kao i za morfizme u kategoriji $HTop_\circ$.

Relativne homološke grupe definiramo na sljedeći način. Neka je dan punktiran topološki par (X, X_0, x_0) i neka je $k \in \mathbb{N}_0$. Označimo s $C_k(X, X_0)$ kvocijentnu grupu $C_k(X)/C_k(X_0)$, gdje je $C_k(X)$ slobodna abelovska grupa definirana u poglavlju 4.1. Na ovaj način se poistovjećuju svi lanci iz $C_k(X_0)$. Homomorfizam ruba $\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ grupu $C_k(X_0)$ šalje u $C_{k-1}(X_0)$ pa on inducira kvocijentni homomorfizam ruba $\partial_k : C_k(X, X_0) \to C_{k-1}(X, X_0)$. Pri tome svojstvo $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ vrijedi i za kvocijentni homomorfizam ruba. Na ovaj način se dobije lančani kompleks. Kvocijentnu grupu

$$H_k(X, X_0) = \operatorname{Ker} \partial_k / \operatorname{Im} \partial_{k+1}$$

nazivamo **relativnom k-tom homološkom grupom**. Njezini su elementi predstavljeni k-lancima $\alpha \in C_k(X)$ za koje je $\partial_k \alpha \in C_{k-1}(X_0)$ (nazivamo ih relativnim k-ciklusima). Također, relativni ciklus α je trivijalan u $H_k(X, X_0)$ ako i samo ako je $\alpha = \partial_{k+1}\beta + \gamma$ za neki $\beta \in C_{k+1}(X)$ i $\gamma \in C_k(X_0)$. Ova svojstva pojašnjavaju ideju iz [4] da se relativna homološka grupa može shvatiti kao "homologija od X modulo X_0".

Preslikavanje $f\colon (X, X_0) \to (Y, Y_0)$ u kategoriji Top^2 inducira homomorfizam $f_{\#k}\colon C_k(X) \to C_k(Y)$ (konstrukciju smo naveli u prethodnom poglavlju), i budući da $f_{\#k}$ grupu $C_k(X_0)$ preslikava u $C_k(Y_0)$, dobro je definiran homomorfizam na kvocijentima $C_k(X, X_0) \to C_k(Y, Y_0)$, koji onda inducira homomorfizam $H_k(f)\colon H_k(X, X_0) \to H_k(Y, Y_0)$. Kao i u apsolutnom slučaju, dva međusobno homotopna preslikavanja parova prostora induciraju isti homomorfizam među homološkim grupama.

Neka je dan punktiran topološki par (X, X_0, x_0) i $k \geq 1$. Po [21] (poglavlje 7.4, str. 387.), pridruživanje

$$h_k \equiv h_{k,(X,X_0,x_0)} : \pi_k(X, X_0, x_0) \to H_k(X, X_0)$$

definirano s

$$h_k([\alpha]) = H_k(\alpha)(a_k),$$

gdje je a_k generator grupe $H_k(D^k, S^{k-1}) \approx \mathbb{Z}$ (Primjer 2.17 u [4]), je dobro definirani homomorfizam i, kao i u apsolutnom slučaju, za svaki $f \in HTop^2_\circ((X, X_0, x_0), (Y, Y_0, y_0))$, dijagram

$$\begin{tikzcd}
\pi_k(X, X_0, x_0) \arrow[r, "h_{k,(X,X_0,x_0)}"] \arrow[d, "\pi_k(f)"'] & H_k(X, X_0) \arrow[d, "H_k(f)"] \\
\pi_k(Y, Y_0, y_0) \arrow[r, "h_{k,(Y,Y_0,y_0)}"] & H_k(Y, Y_0)
\end{tikzcd}$$

komutira. Homomorfizam h_k nazivamo **relativnim Hurewiczevim homomorfizmom**.

Navedimo sada klasični Hurewiczev teorem u relativnom slučaju.

Teorem 4.40. *Neka je (X, X_0, x_0) $(n-1)$-povezan punktirani par topoloških prostora ($\pi_i(X, X_0, x_0) = 0$ za svaki $i \leq n-1$), neka je $n \geq 2$ i neka je X prostor povezan putovima. Tada je $H_k(X, X_0) = 0$ za svaki $0 \leq k \leq n-1$. Ako je pri tome (X_0, x_0) jednostavno povezan, onda je $\varphi_n\colon \pi_n(X, X_0, x_0) \to H_n(X, X_0)$ izomorfizam, a φ_{n+1} je epimorfizam.*

Dokaz. Pogledati Poglavlje II.4.2 u [16]. Dokaz se može naći u [21] (poglavlje 7.5, str. 393.). $\square$

Pojam rezolvente se može poopćiti i na punktirane parove prostora. Prirodno, morfizam $\boldsymbol{p} : (X, X_0, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u kategoriji *pro*-$Top^2_\circ$ je rezolventa punktiranog para prostora (X, X_0, x_0) ako ima svojstva $(R1)$ i $(R2)$ iz Definicije 2.65 za punktirani par ANR-ova (P, P_0, p_0). Pri tome, ako su svi $(X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda)$ punktirani parovi poliedara (ANR-ova), kažemo da je $\boldsymbol{p}$ poliedarska (ANR-)rezolventa.

Teorem 4.41 ([16], Teorem I.6.8)**.** *Neka je*

$$\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X) \to \boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$$

poliedarska ili ANR-rezolventa topološkog prostora X, $x_0 \in X$, $X_0 \subset X$ i neka je, za svaki $\lambda \in \Lambda$, $x_\lambda = p_\lambda(x_0) \in X_\lambda$ i $X_{0\lambda} = p_\lambda(X_0)$. Tada je punktirani morfizam parova

$$\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X, X_0, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$$

u pro-$Top^2_\circ$ poliedarska (ANR-) rezolventa punktiranog para prostora (X, X_0, x_0), a

$$H\boldsymbol{p} = [([p_\lambda])] : (X, X_0, x_0) \to H(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{x_0}) = ((X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda), [p_{\lambda\lambda'}], \Lambda)$$

je $HPol^2_\circ$ ($HANR^2_\circ$)-ekspanzija punktiranog para prostora (X, X_0, x_0).

Po prethodnom teoremu svaki punktirani par prostora ima $HPol^2_\circ$-ekspanziju, pa možemo promatrati homotopske i homološke *pro*-grupe punktiranog para prostora i njihov odnos. Za punktirani topološki par (X, X_0, x_0) i $k \geq 1$ definira se u *pro-Grp* kategoriji relativni Hurewiczev morfizam

$$\boldsymbol{\varphi}_k \equiv \boldsymbol{\varphi}_{k,(X,X_0,x_0)} = [(1_\Lambda, \varphi_\lambda)] : pro\text{-}\pi_k(X, X_0, x_0) \to pro\text{-}H_k(X, X_0),$$

gdje je $((X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ po volji odabrana $HPol^2_\circ$-ekspanzija punktiranog para prostora (X, X_0, x_0) i $\varphi_\lambda \equiv h_{k,(X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda)}$, za svaki $\lambda \in \Lambda$.

Isto tako, u *pro*-Grp* kategoriji se definira relativni Hurewiczev morfizam

$$\boldsymbol{\varphi}^*_k \equiv \boldsymbol{\varphi}^*_{k,(X,X_0,x_0)} = [(1_\Lambda, \varphi^n_\lambda)] : pro^*\text{-}\pi_k(X, X_0, x_0) \to pro^*\text{-}H_k(X, X_0),$$

gdje je $\varphi^n_\lambda = \varphi_\lambda$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 4.42. *Neka je (X, X_0) par topoloških prostora. Ako za svaki normalni pokrivač $\mathcal{U}_0$ od X_0 postoji normalni pokrivač $\mathcal{U}$ od X takav da $\mathcal{U}|_{X_0} = (U \cap X_0, U \in \mathcal{U})$ profinjuje $\mathcal{U}_0$, kažemo da je X_0 **normalno smješten** u X.*

Primjer 4.43. *Svaki zatvoreni potprostor parakompaktnog prostora je normalno smješten u tom prostoru.*

Teorem 4.44 ([16], Teorem I.6.11)**.** *Neka je (X, X_0) par topoloških prostora i neka je X_0 normalno smješten u X. Tada postoji poliedarska rezolventa $\boldsymbol{p}\colon (X, X_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X_0})$ od (X, X_0) takva da su morfizmi $\boldsymbol{p}\colon X \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{p}|_{X_0}\colon X_0 \to \boldsymbol{X_0}$ također poliedarske rezolvente.*

Po [16], Teorem 4.16 vrijedi i u kategoriji $Sh^2_\circ = Sh_{(HTop^2_\circ, HPol^2_\circ)}$ za punktirani par prostora (X, X_0, x_0) ako je X povezan, a X_0 normalno smješten u X.

Teorem 4.45 ([16], Teorem II.4.6)**.** *Neka je (X, X_0, x_0) punktirani par topoloških prostora, pri čemu je X povezan, a X_0 normalno smješten u X. Ako je $n \geq 2$ i $pro\text{-}\pi_k(X, X_0, x_0)$ je nul-objekt u pro-Grp za svaki $1 \leq k \leq n-1$, onda vrijedi*

$(H1)$ *$pro\text{-}H_k(X, X_0)$ je nul-objekt u pro-Grp za svaki $0 \leq k \leq n-1$.*

Ako je još (X_0, x_0) 1-povezan po obliku, onda vrijedi

$(H2)$ *$\boldsymbol{\varphi}_n : pro\text{-}\pi_n(X, X_0, x_0) \to pro\text{-}H_n(X, X_0)$ je izomorfizam u pro-Grp;*

(*H3*) $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}: pro\text{-}\pi_{n+1}(X, X_0, x_0) \to pro\text{-}H_{n+1}(X, X_0)$ *je epimorfizam u pro-Grp.*

Po Napomeni 4.12 u [9], Teorem 4.23 vrijedi i u kategoriji $Sh^{*2}_{\circ} = Sh^{*}_{(HTop^2_{\circ}, HPol^2_{\circ})}$.

Za $k \geq 1$ se definira **relativna grupa oblika** $\check{\pi}_k(X, X_0, x_0)$ punktiranog para prostora (X, X_0, x_0) s

$$\check{\pi}_k(X, X_0, x_0) = \lim pro\text{-}\pi_k(X, X_0, x_0)$$

i po Teoremu II.7.8 u [16], relativni Hurewiczev teorem vrijedi i za grupe oblika punktiranih pokretljivih parova metričkih kontinuuma (X, X_0, x_0) ako je $\check{\pi}_1(X_0, x_0) = 0$.

Relativna grupa gruboga oblika $\check{\pi}^*_k(X, X_0, x_0)$ punktiranog para prostora (X, X_0, x_0) za $k \geq 1$ definirana je svojim elementima i grupovnom operacijom. Ona se sastoji od morfizama gruboga oblika $A^* : (D^k, S^{k-1}, s_0) \to (X, X_0, x_0)$ u kategoriji $Sh^{*2}_{\circ}$, a grupovna operacija je definirana za $k \geq 2$ s pomoću grupovne operacije u relativnim homotopskim grupama članova $HPol^2_{\circ}$-ekspanzije od (X, X_0, x_0), na isti način kao što je definirana grupovna operacija u grupama gruboga oblika.

Sada možemo ponuditi relativnu varijantu Hurewiczeva teorema za *pro*-grupe gruboga oblika i homološke *pro*-grupe gruboga oblika.

Za punktirani par prostora (X, X_0, x_0) definirajmo morfizam

$$\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_k \equiv \underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{k,(X,X_0,x_0)} : pro\text{-}\check{\pi}^*_k(X, X_0, x_0) \to pro\text{-}\check{H}^*_k(X, X_0)$$

u *pro-Grp* njegovim predstavnikom

$$(1_\Lambda, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \varphi_\lambda) : \left(\widetilde{\pi_k(X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda)}, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} \pi_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda\right) \to \left(\widetilde{H_k(X_\lambda, X_{0\lambda})}, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} H_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda\right),$$

gdje je $\boldsymbol{p} : (X, X_0, x_0) \to ((X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ neka $HPol^2_{\circ}$-ekspanzija od (X, X_0, x_0), i

$$\underset{\mathbb{N}}{\nabla} \varphi_\lambda = \underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(X_\lambda, X_{0\lambda}, x_\lambda)}.$$

Lema 4.46. *Neka je (P, P_0, p_0) punktirani par poliedara i $k \in \mathbb{N}$. Homomorfizam $\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_k \equiv \underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(P,P_0,p_0)} : \widetilde{\pi_k(P, P_0, p_0)} \to \widetilde{H_k(P, P_0)}$ ima svojstvo da dijagram*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\pi_k(P,P_0,p_0)} \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(P,P_0,p_0)}"] \arrow[d, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla}\pi_k(f^n)"'] & \widetilde{H_k\,(P,P_0)} \arrow[d, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla}H_k(f^n)"] \\
\widetilde{\pi_k(Q,Q_0,q_0)} \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\nabla} h_{k,(Q,Q_0,q_0)}"] & \widetilde{H_k\,(Q,Q_0)}
\end{tikzcd}$$

komutira za svaki morfizam $F^* = \left\langle [(f^n)] \right\rangle : (P, P_0, p_0) \to (Q, Q_0, q_0)$ *u* $Sh_\circ^{*2}$ *među punktiranim parovima poliedara.*

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Teorema 4.34. □

Lema 4.47. *Za morfizam gruboga oblika* $F^* : (X, X_0, x_0) \to (Y, Y_0, y_0)$ *i* $k \in \mathbb{N}$*, dijagram*

$$\begin{tikzcd}
pro\text{-}\check{\pi}_k^*\,(X,X_0,x_0) \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{k,(X,X_0,x_0)}"] \arrow[d, "pro\text{-}\check{\pi}_k^*\,(F^*)"'] & pro\text{-}\check{H}_k^*\,(X,X_0) \arrow[d, "pro\text{-}\check{H}_k^*\,(F^*)"] \\
pro\text{-}\check{\pi}_k^*\,(Y,Y_0,y_0) \arrow[r, "\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{k,(Y,Y_0,y_0)}"] & pro\text{-}\check{H}_k^*\,(Y,Y_0)
\end{tikzcd}$$

komutira u $pro - Grp$*.*

Dokaz. Tvrdnja se dokaže na isti način kao i Lema 4.35. □

Teorem 4.48. *Neka je* (X, X_0, x_0) *povezan punktirani par topoloških prostora, pri čemu je* X_0 *normalno smješten u* X*. Ako je* $n \geq 2$ *i pro-*$\check{\pi}_k^*(X, X_0, x_0)$ *nul-objekt u pro-Grp za svaki* $1 \leq k \leq n-1$*, onda vrijedi*

$(\widetilde{H1})$ *pro-*$\check{H}_k^*(X, X_0)$ *je nul-objekt u pro-Grp za svaki* $0 \leq k \leq n-1$*.*

Ako je još (X_0, x_0) *1-povezan po grubome obliku, onda vrijedi*

$(\widetilde{H2})$ $\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_n$: *pro-*$\check{\pi}_n^*(X, X_0, x_0) \to$ *pro-*$\check{H}_n^*(X, X_0)$ *je izomorfizam u pro-Grp;*

$(\widetilde{H3})$ $\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{n+1}$: *pro-*$\check{\pi}_{n+1}^*(X, X_0, x_0) \to$ *pro-*$\check{H}_{n+1}^*(X, X_0)$ *je epimorfizam u pro-Grp.*

Dokaz. Tvrdnja teorema je posljedica Leme 4.47 i Teorema 4.45. Dokaz je analogan dokazu Teorema 4.36.

□

Dokažimo još da Hurewiczev teorem vrijedi i za grupe gruboga oblika punktiranih parova metričkih kontinuuma. U dokazu ćemo koristiti tvrdnju sljedeće leme.

Lema 4.49 ([8], Napomena 4.2)**.** *Za svaki punktirani par (X, X_0, x_0) kompaktnih metričkih prostora i za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\check{\pi}_k^*(X, X_0, x_0) = 0 \iff \textit{pro-}\pi_k(X, X_0, x_0) \ \textit{ je nul-objekt u pro-Grp} \ .$$

Teorem 4.50. *Neka je (X, X_0, x_0) punktirani metrički par kontinuuma takav da je X_0 normalno smješten u X i neka je $\check{\pi}_k^*(X, X_0, x_0)$ trivijalna grupa (skup u slučaju $k = 1$) za svaki $1 \le k \le n-1$. Ako je $n \ge 2$, onda vrijedi*

($\check{H}1^*$) $\check{H}_k^*(X, X_0) = 0$ *za svaki* $0 \le k \le n-1$,

($\check{H}2^*$) $\check{\varphi}_n^* \equiv \lim \left(\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_n \right) : \check{\pi}_n^*(X, X_0, x_0) \to \check{H}_n^*(X, X_0)$ *je izomorfizam.*

Ako je pri tome (X, X_0, x_0) pokretljiv prostor i ako je $\check{\pi}_1^*(X_0, x_0) = 0$, vrijedi

($\check{H}3^*$) $\check{\varphi}_{n+1}^* \equiv \lim \left(\underset{\mathbb{N}}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\varphi}_{n+1} \right)$ *je epimorfizam.*

Dokaz. Po Lemi 4.49 je *pro-*$\pi_k(X, X_0, x_0)$ nul-objekt u *pro-Grp*, a onda je po Lemi 4.31 i *pro-*$\check{\pi}_k^*(X, X_0, x_0)$ nul-objekt u *pro-Grp*. Ispunjeni su uvjeti Teorema 4.48 pa vrijede ($\widetilde{H}1$), ($\widetilde{H}2$) i ($\widetilde{H}3$). Djelovanjem funktorom lim dobivamo tvrdnje ($\check{H}1^*$) i ($\check{H}2^*$). Konačno, da je $\check{\varphi}_{n+1}^*$ epimorfizam dokaže se na isti način kao u dokazu Teorema 4.39. □

Poglavlje 5

Redukcija kategorije *pro**-*Top*

U ovom poglavlju nudimo redukciju kategorije pro^*-Top. Analogno prethodnoj konstrukciji, inverznim sustavima topoloških prostora pridružujemo inverzne sustave odgovarajućih kvocijentnih prostora. Na kraju ćemo navesti i pokušaj reduciranja i na kategoriji pro^*-$HTop$ čime bismo dobili redukciju i na kategoriji pro^*-$HPol$ koja je realizirajuća kategorija kategorije gruboga oblika.

5.1 Reducirana potencija topološkog prostora

Neka je $\mathcal{F}$ prebrojiv filter na $\mathbb{N}$ koji se sastoji od svih $A \subseteq \mathbb{N}$ takvih da je $\mathbb{N} \setminus A$ konačan. Neka je X skup. Označimo s $\widetilde{X}$ kvocijentni skup $\prod\limits_{\mathbb{N}} X/\sim$, gdje je $(x_n) \sim (x'_n)$ za $(x_n), (x'_n) \in \prod\limits_{\mathbb{N}} X$ ako je $\{n \mid x_n = x'_n\} \in \mathcal{F}$.

Želimo definirati topologiju na $\widetilde{X}$ za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$. Prirodno je promatrati kvocijentnu topologiju koju dobijemo iz $\prod\limits_{\mathbb{N}} X$ projekcijom. To znači da se najprije moramo odlučiti koju ćemo topologiju uvesti na produktu. Pokažimo da je box-topologija na Kartezijevu produktu $\prod\limits_{\mathbb{N}} X$ bolji izbor za uvođenje topologije na $\widetilde{X}$ nego uobičajena produktna topologija.

Prisjetimo se definicije box-topologije.

Definicija 5.1. *Neka je* $(X_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ *proizvoljna množina topoloških prostora* $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$. *Topologiju* $\mathcal{T}_b$ *na* $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *kojoj bazu tvore skupovi oblika* $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, *gdje je* $U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ *za svaki* $\lambda \in \Lambda$, *nazivamo* ***box-topologijom***.

Napomena 5.2. *Primijetimo da je box-produkt zatvorenih skupova zatvoren.*

Lema 5.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka je $\mathcal{T}_p$ produktna topologija na $\prod_{\mathbb{N}} X$. Tada je kvocijentna topologija na $\widetilde{X}$ indiskretna.*

Dokaz. Kolekcija $\mathcal{B}_p = \left\{ \prod_{\mathbb{N}} U_n \mid U_n \in \mathcal{T}, U_n \neq X \text{ za konačno mnogo } n \right\}$ je baza topologije $\mathcal{T}_p$. Neka je $V \in \mathcal{B}_p$. To znači da je $V = \prod_{\mathbb{N}} U_n$, gdje je $U_n \in \mathcal{T}$ i

$$\{n \mid U_n = X\} \in \mathcal{F}. \tag{5.1}$$

Također, neka je $p : \prod_{\mathbb{N}} X \to \widetilde{X}$ projekcija. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} p(V) = p\left(\prod_{\mathbb{N}} U_n\right) &= \left\{[(x_n)] \in \widetilde{X} \mid \{n \mid x_n \in U_n\} \in \mathcal{F}\right\} \overset{(5.1)}{=} \\ &= \left\{[(x_n)] \in \widetilde{X} \mid \{n \mid x_n \in X\} \in \mathcal{F}\right\} = \widetilde{X}. \end{aligned}$$

Ako je $U \subseteq \widetilde{X}$ otvoren u $\widetilde{X}$, $U \neq \emptyset$, onda je $p^{-1}(U)$ otvoren u $\prod_{\mathbb{N}} X$. To znači da je $p^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_p$. Sada vidimo da vrijedi

$$p\left(p^{-1}(U)\right) = p\left(\bigcup_{V \in \mathcal{S}} V\right) = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} p(V) = \widetilde{X}.$$

Budući da je $p\left(p^{-1}(U)\right) \subseteq U$, vidimo da je $\widetilde{X} \subseteq U$ pa mora biti $\widetilde{X} = U$. $\square$

U nastavku ćemo koristiti oznaku

$$\mathop{\nabla}_{n \in \mathbb{N}} U_n \equiv p\left(\prod_{\mathbb{N}} U_n\right) = \left\{[(x_n)] \in \widetilde{X} \mid \{n \mid x_n \in U_n\} \in \mathcal{F}\right\}$$

za $U_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$.

Lema 5.4. *Ako Kartezijev produkt $\prod_{\mathbb{N}} X$ ima box-topologiju $\mathcal{T}_b$, familija skupova*

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \mathop{\nabla}_{n \in \mathbb{N}} U_n \mid U_n \in \mathcal{T}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N} \right\}$$

je baza kvocijentne topologije na $\widetilde{X}$.

Dokaz. Dokažimo najprije da je $\widetilde{\mathcal{B}}$ zaista topološka baza. Neka je $[(x_n)] \in \widetilde{X}$. Budući da je $\mathcal{T}$ pokrivač prostora X, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $U_n \in \mathcal{T}$ takav da je $x_n \in U_n$. Tada je $[(x_n)] \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} U_n$, pa zaključujemo da je $\widetilde{\mathcal{B}}$ pokrivač prostora $\widetilde{X}$.

Neka je $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} U_n, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} V_n \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} U_n \cap \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} V_n &= \Big\{[(x_n)] \in \widetilde{X} \mid \{n \mid x_n \in U_n\} \in \mathcal{F}\Big\} \cap \\
&\cap \Big\{[(x_n)] \in \widetilde{X} \mid \{n \mid x_n \in V_n\} \in \mathcal{F}\Big\} = \\
&= \Big\{[(x_n)] \in \widetilde{X} \mid \{n \mid x_n \in U_n \cap V_n\} \in \mathcal{F}\Big\} = \\
&= \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} \left(U_n \cap V_n\right),
\end{aligned}$$

što znači da je presjek bilo koja dva elementa iz $\widetilde{\mathcal{B}}$ također element familije $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Dokažimo sada da $\widetilde{\mathcal{B}}$ generira kvocijentnu topologiju

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \left\{U \subseteq \widetilde{X} \mid p^{-1}(U) \subseteq \prod_{\mathbb{N}} X \text{ je element } \mathcal{T}_b\right\}.$$

Neka je $U \in \widetilde{\mathcal{T}}$. To znači, ako je $\mathcal{T} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ topologija na X, da je $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha\in A} \prod_{\mathbb{N}} U_{\alpha_n}$ za neki $A \subseteq \Lambda^{\mathbb{N}}$ i $U_{\alpha_n} \in \mathcal{T}$ za svaki $\alpha \in A$. Budući da je p surjekcija, imamo

$$U = p\left(p^{-1}(U)\right) = p\left(\bigcup_{\alpha\in A} \prod_{\mathbb{N}} U_{\alpha_n}\right) = \bigcup_{\alpha\in A} p\left(\prod_{\mathbb{N}} U_{\alpha_n}\right) = \bigcup_{\alpha\in A} \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} U_{\alpha_n}$$

čime je tvrdnja leme dokazana. □

Napomena 5.5. *Uobičajeno je da produktni prostor* $\prod_{\mathbb{N}} X$ *označujemo s* $\square_{\mathbb{N}} X$ *ako je na njemu dana box-topologija, a s* X^ω *ako je na njemu dana produktna topologija.*

Prostor $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}}\right)$, ili skraćeno $\widetilde{X}$, spominje se u radovima M. E. Rudin, K. Kunena i P. Bankstona (npr. u [20], [13] ili [1]), najčešće pod nazivom **reducirani box-produkt** ili **reducirana potencija**.

U nastavku ćemo navesti neka od svojstava ovog prostora, i uključit ćemo neke dokaze s novim oznakama.

Teorem 5.6. *Ako je* X *diskretan prostor, onda je i* $\widetilde{X}$ *diskretan prostor.*

Dokaz. Tvrdnja je očigledna. $\square$

Lema 5.7. *Ako je (F_n) niz skupova takvih da je $F_n \subseteq X$ zatvoren u X za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je $\mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ zatvoren u $\widetilde{X}$.*

Dokaz. Komplement od $\mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ u $\widetilde{X}$ je dan s

$$\begin{aligned}\left(\mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^c &= \Big\{[(x_n)] \mid \{n \mid x_n \in F_n\} \notin \mathcal{F}\Big\} = \\ &= \Big\{[(x_n)] \mid \{n \mid x_n \in F_n^c\} \text{ je kofinalan u } \mathbb{N}\Big\}.\end{aligned}$$

Dakle, njegova praslika po porojekciji p je

$$p^{-1}\left(\left(\mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^c\right) = \bigcup_{\substack{K\subseteq\mathbb{N} \\ \text{kofinalan u } \mathbb{N}}} \prod_{\mathbb{N}} W_{Kn} \quad \text{gdje je} \quad W_{Kn} = \begin{cases} F_n^c, & n \in K \\ X, & n \in \mathbb{N}\setminus K \end{cases},$$

a to je otvoren skup u $\mathop{\square}\limits_{\mathbb{N}} X$. $\square$

Teorem 5.8. *Ako je X T_i prostor za $i = 0, 1, 2$ ili 3, onda je $\widetilde{X}$ također T_i prostor.*

Dokaz. Navest ćemo dokaz tvrdnje za T_1 i T_3 prostore. Ostalo se slično dokaže.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ T_1 prostor i neka je $[(x_n)], [(y_n)] \in \widetilde{X}$, $[(x_n)] \neq [(y_n)]$. To znači da postoji beskonačan skup $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da $x_n \neq y_n$ za svaki $n \in A$. X je T_1 prostor pa za svaki $n \in A$ postoji otvorena okolina $U_n \subseteq X$ od x_n koja ne sadrži y_n. Za $n \in \mathbb{N} \setminus A$ neka je $U_n = X$. Na ovaj način smo dobili okolinu $\mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ od $[(x_n)]$ koja ne sadrži $[(y_n)]$, pa zaključujemo da je i $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}}\right)$ T_1 prostor.

Pretpostavimo sada da je $(X, \mathcal{T})$ regularan prostor. Po prethodnom, $\widetilde{X}$ je T_1 prostor. Za po volji odabrane $[(x_n)] \in \widetilde{X}$ i $F \subseteq \widetilde{X}$ zatvoren u $\widetilde{X}$ takav da $[(x_n)] \notin F$, postoji bazni skup $\mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ takav da je $[(x_n)] \in \mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, i $F \subseteq \widetilde{X} \setminus \mathop{\nabla}\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Tada je $J := \{n \mid x_n \in U_n\} \in \mathcal{F}$. Budući da je X regularan, za svaki $n \in J$ možemo odabrati otvoren skup $V_n \subseteq X$ takav da je

$$x_n \in V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq U_n.$$

Za $n \notin J$ neka je $V_n = X$. Imamo

$$[(x_n)] \in \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} V_n \subseteq \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n \subseteq \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Po 5.7, skup $\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n$ je zatvoren u $\widetilde{X}$. Dakle, $\widetilde{X} \setminus \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n$ je otvoren skup u $\widetilde{X}$ koji sadrži F, i $\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap \left(\widetilde{X} \setminus \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n\right) = \emptyset$, pa zaključujemo da je $\widetilde{X}$ regularan prostor.

$\square$

Definicija 5.9. *Topološki prostor nazivamo* ***P-prostorom*** *ako je presjek svake prebrojive familije otvorenih skupova u $\widetilde{X}$ otvoren skup u $\widetilde{X}$.*

Sljedeća tvrdnja se može pronaći u [20] i [13] u općenitijem obliku.

Teorem 5.10. *$\widetilde{X}$ je P-prostor.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je presjek prebrojivo mnogo baznih elemenata otvoren skup u $\widetilde{X}$.

Neka je $[(x_n)] \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} U_n^k$, gdje je $U_n^k \in \mathcal{T}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $F(n) = \left\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n, x_n \in U_n^k\right\}$. Skup $F(n)$ je konačan pa je

$$V_n = \bigcap_{k\in F(n)} U_n^k$$

otvoren u X. Primijetimo da $F(n)$ može biti prazan za konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. U tom slučaju neka je V_n cijeli prostor X. Tvrdimo da je $[(x_n)] \in \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} V_n \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} U_n^k$. Odaberemo li neki čvrsti $k \in \mathbb{N}$, imamo

$$\{n \mid k \in F(n)\} = \left\{n \mid k \leq n, x_n \in U_n^k\right\} \in \mathcal{F}.$$

Također,

$$\{n \mid k \in F(n)\} \subseteq \left\{n \mid V_n \subseteq U_n^k\right\} \in \mathcal{F},$$

što implicira

$$[(x_n)] \in \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} V_n \subseteq \mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} U_n^k,$$

za po volji odabrani $k \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$[(x_n)] \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} V_n \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} U_n^k,$$

i možemo zaključiti da je $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} U_n^k$ otvoren u $\widetilde{X}$. □

Napomena 5.11. *U literaturi postoji više definicija P-prostora. Mi koristimo definiciju u smislu Gillman–Henriksena.*

Po [17], u P-prostoru su regularnost i potpuna regularnost ekvivalentna svojstva. To se lako može vidjeti iz činjenice da u regularnom prostoru X za svaki $x \in X$ i $F \subseteq X$ zatvoren u X koji ne sadrži x možemo konstruirati niz (V_n) otvorenih skupova takav da je

$$x \in V_n \subseteq X \backslash F \ , \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}$$

i

$$\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n \ , \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$, i ako je X P-prostor, skup $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ je otvoren u X. On je i zatvoren jer je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n$. Disjunktan je s F pa je funkcija $f : X \to [0,1]$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n, \\ 0\,, & x \in X \backslash \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n, \end{cases}$$

neprekidna.

Očigledno, svaki regularni P-prostor ima otvoreno-zatvorenu bazu. Iz toga slijedi da je svaki regularni P-prostor totalno nepovezan (svaka točka u takvom prostoru može se razdvojiti od bilo koje druge točke otvoreno-zatvorenom okolinom).

Dakle, ako je X potpuno regularan prostor, $\widetilde{X}$ je potpuno regularan i totalno nepovezan prostor.

Također, ako je X nul-dimenzionalan s obzirom na malu induktivnu dimenziju, ili totalno nepovezan, takav je i $\widetilde{X}$ (vidjeti [1]).

Primjer 5.12. *Prostor* $\underset{\mathbb{N}}{\square}\{0,2\}/_\sim$ *je diskretan. To je primjer reducirane potencije kompaktnog prostora koja nije kompaktna, što znači da se kompaktnost prostora ne čuva.*

Primjer 5.13. *Primjer P-prostora koji nije diskretan je reducirana potencija prostora Sierpińskog. Ako* $X = \{0,1\}$ *ima topologiju* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$*, onda* $\left\{[(x_n)]\right\}$ *nije otvoren u* $\widetilde{X}$ *čim* $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 1\} \notin \mathcal{F}$*.*

Primjer 5.14. *Prostor* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *je potpuno regularan jer je* $\mathbb{R}$ *takav, i on je nul-dimenzionalan i totalno nepovezan.*

Više o svojstvima prostora $\widetilde{X}$ može se pronaći u [17] i [20].

Neka je dan morfizam $[(f^n)] : (X) \to (Y)$ između rudimentarnih inverznih sustava u pro^*-Top. Označimo s $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n$ funkciju iz $(\widetilde{X})$ u $(\widetilde{Y})$ induciranu s $\prod\limits_{\mathbb{N}} f^n \colon \underset{\mathbb{N}}{\square}X \to \underset{\mathbb{N}}{\square}Y$, $\prod\limits_{\mathbb{N}} f^n((x_n)) = (f^n(x_n))$, za $(x_n) \in \underset{\mathbb{N}}{\square}X$.

Teorem 5.15. *Funkcija* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n$ *je dobro definirani morfizam u pro-Top.*

Dokaz. Neka je $(f^n) \in inv^*$-$Top((X),(Y))$. Funkcija $\prod\limits_{\mathbb{N}} f^n \colon \underset{\mathbb{N}}{\square}X \to \underset{\mathbb{N}}{\square}Y$ je neprekidna po Lemi 5.18. Neka su $p\colon \underset{\mathbb{N}}{\square}X \to \widetilde{X}$ i $q\colon \underset{\mathbb{N}}{\square}Y \to \widetilde{Y}$ kvocijentna preslikavanja. Tada je $q\left(\prod\limits_{\mathbb{N}} f^n\right) : \underset{\mathbb{N}}{\square}X \to \widetilde{Y}$ neprekidna funkcija i za $(x_n), (x'_n) \in \underset{\mathbb{N}}{\square}X$ takve da je $(x_n) \sim (x'_n)$ vrijedi

$$\left(q\left(\prod_{\mathbb{N}} f^n\right)\right)((x_n)) = \left(q\left(\prod_{\mathbb{N}} f^n\right)\right)((x'_n)).$$

To znači da postoji jedinstveno preslikavanje $g\colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ takvo da je

$$gp = q\left(\prod_{\mathbb{N}} f^n\right).$$

Očigledno je da je $g = \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n$. Neka su $(f^n), (f'^n) \in inv^*$-$Top((X),(Y))$ takvi da je $f^n = f'^n$ za svaki osim za konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$\left(\prod_{\mathbb{N}} f^n\right)((x_n)) \sim \left(\prod_{\mathbb{N}} f'^n\right)((x_n))$$

u $\underset{\mathbb{N}}{\square}Y$ za $(x_n) \in \underset{\mathbb{N}}{\square}X$. Dakle, $\prod\limits_{\mathbb{N}} f^n$ i $\prod\limits_{\mathbb{N}} f'^n$ induciraju istu funkciju $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n$. □

To znači da je pridruživanjem $pro^*\text{-}Top \to pro\text{-}Top$ definiranim s

$$\widetilde{R}((X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)) = \left(\widetilde{X_\lambda}, \underset{\mathbb{N}}{\nabla} p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\right),$$

za $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in Ob(pro^*\text{-}Top)$, i s

$$\widetilde{R}(\left[(f, f_\mu^n)\right]) = \left[\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f_\mu^n\right)\right],$$

za $\left[(f, f_\mu^n)\right] \in Mor(pro^*\text{-}Top)$, dobro definirana funkcija $\widetilde{R}$. Prolazeći odgovarajućim dijagramom lako se može provjeriti da je $\left[\left(f, \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla} f^n\right)\right]$ zaista morfizam u $pro\text{-}Top$ i da $\widetilde{R}$ ima funktorska svojstva.

Na ovaj način dobivamo funktor

$$\widetilde{R}\colon pro^*\text{-}Top \to pro\text{-}Top$$

koji reducira kategoriju $pro^*\text{-}Top$ na kategoriju $pro\text{-}Top$, čime se dobiju kompleksniji objekti, ali je broj morfizama bitno smanjen.

Funktor $\widetilde{R}$ je vjeran, ali nije pun. Na primjer, morfizmi u $pro\text{-}Top$ između inverznih sustava prostora koji nisu P-prostori nisu slike morfizama iz $pro^*\text{-}Top$ po funktoru $\widetilde{R}$.

5.2 Box-homotopija

Kategorija $pro^*\text{-}HPol$ je realizacijska kategorija kategorije gruboga oblika i svakako bi bilo zanimljivo i korisno konstruirati redukciju kategorije $pro^*\text{-}HTop$, a time i njezine potkategorije $pro^*\text{-}HPol$. Međutim, dva niza preslikavanja koji su homotopni na svakoj koordinati ne moraju imati homotopne produkte. Zbog toga u nastavku proučavamo prirodno poopćenje pojma homotopije, preslikavanje koje smo nazvali box-homotopijom.

Da razjasnimo problem neprekidnosti funkcija koje ćemo spominjati u nastavku, navedimo dvije jednostavne leme.

Lema 5.16. *Projekcija $p_n : \underset{\mathbb{N}}{\square} X \to X$ na n-tu koordinatu je neprekidna funkcija, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Tvrdnja je očigledna.

$\square$

Napomena 5.17. *Slična tvrdnja za produktnu topologiju je elementarna činjenica.*

Lema 5.18. *Neka su X_n i Y_n topološki prostori i $f_n : X_n \to Y_n$ funkcija, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Funkcija $\prod\limits_{\mathbb{N}} f_n : \prod\limits_{\mathbb{N}} X_n \to \prod\limits_{\mathbb{N}} Y_n$ između produkata, oba ili s produktnom ili s box-topologijom, definirana s*

$$\prod_{\mathbb{N}} f_n((x_n)) = (f_n(x_n)),$$

je neprekidna ako i samo ako je f_n neprekidna funkcija za svaki n.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju u slučaju box-topologije na produktu. Tvrdnja s produktnom topologijom na produktima je elementarna činjenica.

Neka je $\mathop{\square}\limits_{\mathbb{N}} V_n$ bazni skup u $\mathop{\square}\limits_{\mathbb{N}} Y_n$. To znači da je V_n otvoren u Y_n za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$\left(\prod_{\mathbb{N}} f_n\right)^{-1} \left(\mathop{\square}_{\mathbb{N}} V_n\right) = \mathop{\square}_{\mathbb{N}} \left((f_n)^{-1}(V_n)\right).$$

Ako je f_n neprekidna za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je $(f_n)^{-1}(V_n)$ otvoren u X_n za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $\mathop{\square}\limits_{\mathbb{N}} \left((f_n)^{-1}(V_n)\right)$ otvoren u $\mathop{\square}\limits_{\mathbb{N}} X_n$, što implicira da je $\prod\limits_{\mathbb{N}} f_n$ neprekidna funkcija.

Da dokažemo obratnu tvrdnju, odaberimo neki $k \in \mathbb{N}$. Neka je $V_k \subset Y_k$ otvoren skup u Y_k i neka je $V_n = Y_n$ za $n \neq k$. Tada je

$$\left(\prod_{\mathbb{N}} f_n\right)^{-1} \left(\mathop{\square}_{\mathbb{N}} V_n\right) = \mathop{\square}_{\mathbb{N}} W_n$$

gdje je $W_n = X_n$ za $n \neq k$ i $W_k = f_k^{-1}(V_k)$. Ako je $\prod\limits_{\mathbb{N}} f_n$ neprekidna funkcija, onda je $\mathop{\square}\limits_{\mathbb{N}} W_n$ otvoren u $\mathop{\square}\limits_{\mathbb{N}} X_n$. Dakle, W_k je otvoren u X_k, iz čega slijedi da je f_k neprekidna. Budući da je k bio odabran po volji, zaključujemo da je f_n neprekidna za svaki $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Napomena 5.19. *Tvrdnja prethodne leme je očigledna ako zamijenimo nizove konačnim (naravno, jednakim) brojem prostora i funkcija.*

Definicija 5.20. *Neka su X, Y topološki prostori, $f, g : X \to Y$ preslikavanja i neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Reći ćemo da je f n-homotopno g, i pisati $f \underset{n}{\sim} g$, ako postoji preslikavanje*

$H : X \times I^n \to Y$, gdje I^n ima produktnu topologiju, takvo da vrijedi

$$H(x, 0, 0, 0, \dots, 0) = f(x),$$
$$H(x, 1, 1, 1, \dots, 1) = g(x),$$

kada je $n \in \mathbb{N}$, i

$$H(x, 0, 0, 0, \dots) = f(x),$$
$$H(x, 1, 1, 1, \dots) = g(x),$$

kada je $n = \omega$, za svaki $x \in X$.

Propozicija 5.21. *Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ i $f, g \in Top(X, Y)$. Funkcija f je n-homotopna g ako i samo ako je f homotopna g.*

Dokaz. Tvrdnja teorema je očigledna ako je $n = 1$. Naime, $\underset{1}{\sim}$ se svodi na standardnu homotopnost.

Odaberimo neki $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, $n \neq 1$. Ako je $H \colon X \times I \to Y$ homotopija od f do g, onda je funkcija $H_n \colon X \times I^n \to Y$ definirana s $H_n = H \circ \left(\mathrm{id}_X \times p_1\right)$, gdje je $p_1 \colon I^n \to I$ projekcija na prvu koordinatu, neprekidna jer je projekcija neprekidna, i to je n-homotopija od f do g.

Slično, ako je $H_n \colon X \times I^n \to Y$ n-homotopija od f do g, onda možemo definirati funkciju $H \colon X \times I \to Y$ s
$$H = H_n \circ \left(\mathrm{id}_X \times \Delta_I\right),$$
gdje je $\Delta_I \colon I \to I^n$ definirana s $\Delta_I(t) = (t, t, \dots)$. Primijetimo da je funkcija Δ_I neprekidna zbog univerzalnog svojstva produktne topologije po kojem je funkcija u produkt bilo koje familije topoloških prostora (s produktnom topologijom) neprekidna ako i samo ako su sve njezine koordinatne funkcije neprekidne. Stoga je i H neprekidna i ona je homotopija od f do g. $\square$

Da poopćimo pojam homotopije, nudimo sljedeću definiciju.

Definicija 5.22. *Neka je $f, g \in Top(X, Y)$. Reći ćemo da je f box-homotopno g, $f \underset{\square}{\sim} g$,* *ako postoji preslikavanje* $H\colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$ *za koje vrijedi*

$$H(x,0,0,0,\dots) = f(x),$$
$$H(x,1,1,1,\dots) = g(x),$$

za svaki $x \in X$.

Da dokažemo da je box-homotopnost relacija ekvivalencije na $Top(X,Y)$, treba nam sljedeća lema.

Lema 5.23. $\triangle = \{(x,x,x,\dots) \mid x \in I\} \subset \underset{\mathbb{N}}{\square} I$ *je retrakt prostora* $\underset{\mathbb{N}}{\square} I$.

Dokaz. Skup

$$C = \Big\{(x_n) \in \underset{\mathbb{N}}{\square} I \mid (x_n) \text{ konvergira u } I\Big\} \subset \underset{\mathbb{N}}{\square} I$$

je otvoren u $\underset{\mathbb{N}}{\square} I$ jer svaki $(x_n) \in C$ ima otvorenu okolinu

$$\underset{\mathbb{N}}{\square}\left(\left\langle x_n - \frac{1}{2^n}, x_n + \frac{1}{2^n}\right\rangle \cap I\right) \subset C.$$

Skup

$$D = \Big\{(x_n) \in \underset{\mathbb{N}}{\square} I \mid (x_n) \text{ divergira u } I\Big\} \subset \underset{\mathbb{N}}{\square} I$$

je također otvoren u $\underset{\mathbb{N}}{\square} I$ jer svaki $(x_n) \in D$ ima otvorenu okolinu

$$\underset{\mathbb{N}}{\square}\left(\left\langle x_n - \frac{1}{2^n}, x_n + \frac{1}{2^n}\right\rangle \cap I\right) \subset D.$$

To znači da je $\{C, D\}$ separacija prostora $\underset{\mathbb{N}}{\square} I$.

Tvrdimo da je funkcija $f\colon C \to \underset{\mathbb{N}}{\square} I$ definirana s $f((x_n)) = (x,x,\dots)$, gdje je $x = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$, neprekidna. Neka je $\underset{n\in\mathbb{N}}{\square} V_n \subset \underset{\mathbb{N}}{\square} I$ po volji odabran bazni skup. Ako je $f^{-1}(\underset{n\in\mathbb{N}}{\square} V_n) \neq \emptyset$, i $(x_n) \in f^{-1}(\underset{n\in\mathbb{N}}{\square} V_n)$, uz $x = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$, onda je

$$f\left(\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\square}\left\langle x_n - \frac{1}{2^n}, x_n + \frac{1}{2^n}\right\rangle\right) \cap \underset{\mathbb{N}}{\square} I\right) = \{(x,x,x,\dots)\} \subset \underset{n\in\mathbb{N}}{\square} V_n.$$

Zaključujemo da je f neprekidna funkcija.

Sada možemo definirati $r\colon \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to \triangle$ s

$$r((x_n)) = \begin{cases} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots) & (x_n) \in D \\ f((x_n)) & (x_n) \in C \end{cases}.$$

Budući da je $\{C, D\}$ separacija prostora $\underset{\mathbb{N}}{\square} I$, r je neprekidna funkcija. Također, $r/_{\triangle} = \mathrm{id}_{\triangle}$. Zaključujemo da je r retrakcija prostora $\underset{\mathbb{N}}{\square} I$ na njegov potprostor $\triangle$. $\square$

Teorem 5.24. *Box-homotopnost je relacija ekvivalencije na $Top(X, Y)$.*

Dokaz. Refleksivnost. Funkcija $H\colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$ definirana s $H = f \circ p_1$ je neprekidna po Lemi 5.16, i to je box-homotopija od f do f.

Simetričnost. Ako je $H\colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$ box-homotopija od f do g, onda je funkcija $G\colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$, $G = H \circ \Big(\mathrm{id}_X \times (1 - \mathrm{id}_I) \times (1 - \mathrm{id}_I) \times \cdots\Big)$, neprekidna po Lemi 5.18, i to je box-homotopija od g do f.

Tranzitivnost. Pretpostavimo da je $H_1\colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$ box-homotopija od f do g i $H_2\colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$ box-homotopija od g do h. Funkcija $H\colon X \times \left(\prod_{\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \prod_{\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \to Y$, gdje $\prod_{\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \prod_{\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset \underset{\mathbb{N}}{\square} I$ ima potprostornu topologiju, definirana s

$$H/_{X \times \prod_{\mathbb{N}}[0, \frac{1}{2}]} = H_1 \circ \Big(\mathrm{id}_X \times (2 \cdot \mathrm{id}_{[0, \frac{1}{2}]}) \times (2 \cdot \mathrm{id}_{[0, \frac{1}{2}]}) \times \cdots\Big)$$
$$H/_{X \times \prod_{\mathbb{N}}[\frac{1}{2}, 1]} = H_2 \circ \Big(\mathrm{id}_X \times (2 \cdot \mathrm{id}_{[\frac{1}{2}, 1]} - 1) \times (2 \cdot \mathrm{id}_{[\frac{1}{2}, 1]} - 1) \times \cdots\Big)$$

neprekidna je po Lemi 5.18 i lemi o lijepljenju jer su po Napomeni 5.2 skupovi $X \times \prod_{\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2}\right]$ i $X \times \prod_{\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ zatvoreni u $X \times \left(\prod_{\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \prod_{\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, a $H/_{X \times \prod_{\mathbb{N}}[0, \frac{1}{2}]}$ i $H/_{X \times \prod_{\mathbb{N}}[\frac{1}{2}, 1]}$ koincidiraju na njihovom presjeku $X \times \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)\right\}$. Također,

$$H(x, 0, 0, \dots) = H_1(x, 0, 0, \dots) = f(x),$$
$$H(x, 1, 1, \dots) = H_2(x, 1, 1, \dots) = h(x).$$

Po tome, ako je r retrakcija prostora $\underset{\mathbb{N}}{\square} I$ na potprostor $\triangle$, funkcija $H \circ (\mathrm{id}_X \times r)$ je box-homotopija od f do h. $\square$

Teorem 5.25. *Neka su $f, f' \colon X \to Y$ i $g, g' \colon Y \to Z$ neprekidne funkcije i neka su gf, $g'f' \colon X \to Z$ njihove kompozicije. Ako je $f \underset{\square}{\sim} f'$ i $g \underset{\square}{\sim} g'$, onda je $gf \underset{\square}{\sim} g'f'$.*

Dokaz. Neka je $H_1 \colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$ box-homotopija od f do f', i $H_2 \colon Y \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Z$ box homotopija od g do g'. Funkcija $G_1 = g \circ H_1 \colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Z$ je box-homotopija od gf do gf', a funkcija $G_2 \colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Z$ definirana s $G_2 = H_2 \circ \left(f' \times \mathrm{id}_I \times \mathrm{id}_I \times \cdots\right)$ je box-homotopija od gf' do $g'f'$. Sada, koristeći tranzitivnost relacije $\underset{\square}{\sim}$, zaključujemo da vrijedi $gf \underset{\square}{\sim} g'f'$. $\square$

Teorem 5.26. *Ako su dva preslikavanja homotopna, onda su i box-homotopna.*

Dokaz. Neka je $H \colon X \times I \to Y$ homotopija od f do g. Možemo definirati box-homotopiju $G \colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$ od f do g s $G = H \circ \left(\mathrm{id}_X \times p_1\right)$. $\square$

Napomena 5.27. *Obrat tvrdnje ne vrijedi zbog toga što univerzalno svojstvo produktne topologije ne vrijedi i za box-topologiju. U nastavku ćemo navesti kontraprimjer.*

Relacija $\underset{\square}{\sim}$ dijeli skup $Mor(Top)$ u klase ekvivalencije, i to je kongruencija (dobro je usklađena s kompozicijom). To znači da postoji kvocijentna kategorija $Top/_{\underset{\square}{\sim}}$. Označavat ćemo je s $H_\square Top$, a box-homotopsku klasu preslikavanja f označavat ćemo s $[f]_\square$.

5.3 Pokušaj redukcije pro^*-$HTop$ kategorije

Lema 5.28. *Neka su X i Y dva topološka prostora i $p_n \colon \underset{\mathbb{N}}{\square} X \to X$ i $q_n \colon \underset{\mathbb{N}}{\square} Y \to Y$ projekcije na n-ti koordinatni prostor, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je funkcija*

$$i = (p_1 \times q_1, p_2 \times q_2, \dots) \colon \left(\underset{\mathbb{N}}{\square} X\right) \times \left(\underset{\mathbb{N}}{\square} Y\right) \to \underset{\mathbb{N}}{\square}(X \times Y)$$

homeomorfizam.

Dokaz. Funkcija i je očigledno bijekcija. Bazni skup u $\underset{\mathbb{N}}{\square}(X \times Y)$ je oblika $\underset{n \in \mathbb{N}}{\square}(U_n \times V_n)$, gdje je $U_n \subset X$ otvoren u X i $V_n \subset Y$ otvoren u Y, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Njegova praslika po i

je

$$
\begin{aligned}
&\Big((p_1\times q_1)^{-1}(U_1\times V_1)\Big)\cap\Big((p_2\times q_2)^{-1}(U_2\times V_2)\Big)\cap\dots=\\
&=\Big((p_1)^{-1}(U_1)\times(q_1)^{-1}(V_1)\Big)\cap\Big((p_2)^{-1}(U_2)\times(q_2)^{-1}(V_2)\Big)\cap\dots=\\
&=\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(p_n)^{-1}(U_n)\Big)\times\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(q_n)^{-1}(V_n)\Big)=\\
&=\Big(\mathop{\square}_{n\in\mathbb{N}}U_n\Big)\times\Big(\mathop{\square}_{n\in\mathbb{N}}V_n\Big),
\end{aligned}
$$

i to je otvoren skup u $\Big(\mathop{\square}_{\mathbb{N}}X\Big)\times\Big(\mathop{\square}_{\mathbb{N}}Y\Big)$. Dakle, i je neprekidna funkcija. Također, zbog

$$
i\left(\Big(\mathop{\square}_{n\in\mathbb{N}}U_n\Big)\times\Big(\mathop{\square}_{n\in\mathbb{N}}V_n\Big)\right)=\mathop{\square}_{n\in\mathbb{N}}(U_n\times V_n),
$$

i i^{-1} je neprekidna funkcija. $\square$

Teorem 5.29. *Neka su $(f^n),(f'^n)\in inv^*\text{-}Top((X),(Y))$ takvi da je f^n homotopno f'^n za svaki $n\in\mathbb{N}$. Tada je $\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}}f^n\underset{\square}{\sim}\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}}f'^n$.*

Dokaz. Neka je, za svaki $n\in\mathbb{N}$, preslikavanje $H_n\colon X\times I\to Y$ homotopija od f^n do f'^n. Neka je i homeomorfizam iz 5.28. Funkcija $H\colon\mathop{\square}_{\mathbb{N}}X\times\mathop{\square}_{\mathbb{N}}I\to\mathop{\square}_{\mathbb{N}}Y$ definirana s

$$
H=\Big(\prod_{\mathbb{N}}H_n\Big)\circ i
$$

je neprekidna po 5.18 i 5.28, i ona inducira neprekidnu funkciju $\widetilde{H}\colon\widetilde{X}\times\mathop{\square}_{\mathbb{N}}I\to\widetilde{Y}$. Zaista, za po volji odabrani $(t_n)\in\mathop{\square}_{\mathbb{N}}I$, ako je $(x_n)\sim(x'_n)$, onda je

$$
\Big\{n\mid H_n(x_n,t_n)=H_n(x'_n,t_n)\Big\}\in\mathcal{F}.
$$

To znači da je $(H_n(x_n,t_n))\sim(H_n(x'_n,t_n))$. Lako se provjeri da vrijedi $\widetilde{H}/_{\widetilde{X}\times\{(0,0,\dots)\}}=\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}}f^n$ i $\widetilde{H}/_{\widetilde{X}\times\{(1,1,\dots)\}}=\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}}f'^n$. $\square$

Lema 5.30. *Funkcija $j\colon\mathop{\square}_{\mathbb{N}}I\to\mathop{\square}_{\mathbb{N}}\Big(\mathop{\square}_{\mathbb{N}}I\Big)$ definirana s*

$$
j((x_n))=((y_n^1),(y_n^2),\dots)
$$

gdje je $y_n^m=x_{2^{m-1}(2n-1)}$ za svaki $m,n\in\mathbb{N}$, je homeomorfizam.

Dokaz. Primijetimo da je funkcija $c\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $c(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$ bijekcija koja se u literaturi koristi za dokazivanje da je Kartezijev produkt dva prebrojiva skupa prebrojiv skup. Dakle, j je bijekcija.

Neka je $\underset{m\in\mathbb{N}}{\square}\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\square}V_n^m\right)$ bazni skup u $\underset{\mathbb{N}}{\square}\left(\underset{\mathbb{N}}{\square}X\right)$. Tada je

$$j^{-1}\left(\underset{m\in\mathbb{N}}{\square}\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\square}V_n^m\right)\right)=j^{-1}\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\square}V_n^1\times\underset{n\in\mathbb{N}}{\square}V_n^2\times\cdots\right)=\underset{k\in\mathbb{N}}{\square}U_k,$$

gdje je $U_k=V_n^m$ za $k=c(m,n)$. Dakle, j je neprekidna funkcija.

Otvorenost funkcije j se dokaže analogno. $\square$

Napomena 5.31. *Analogna tvrdnja vrijedi ako se I zamijeni s X, za svaki $X\in Ob(Top)$.*

Teorem 5.32. *Neka su $(f^n),(f'^n)\in inv^*\text{-}Top((X),(Y))$ takvi da je f^n box-homotopan f'^n za svaki $n\in\mathbb{N}$. Tada je $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}f^n\underset{\square}{\simeq}\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}f'^n$.*

Dokaz. Neka je, za svaki $n\in\mathbb{N}$, funkcija $H_n\colon X\times\underset{\mathbb{N}}{\square}I\to Y$ box-homotopija od f^n do f'^n. Neka su i i j preslikavanja iz lema 5.28 i 5.30. Funkcija $H\colon\underset{\mathbb{N}}{\square}X\times\underset{\mathbb{N}}{\square}I\to\underset{\mathbb{N}}{\square}Y$ definirana s

$$H=\left(\prod_{\mathbb{N}}H_n\right)\circ i\circ(\mathrm{id}_{\square X}\times j)$$

je neprekidna po 5.18, 5.28 i 5.30, pa je to homotopija od $\prod_{\mathbb{N}}f^n$ do $\prod_{\mathbb{N}}f'^n$. Ona inducira neprekidnu funkciju $\widetilde{H}\colon\widetilde{X}\times\underset{\mathbb{N}}{\square}I\to\widetilde{Y}$, box-homotopiju od $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}f^n$ do $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}f'^n$. $\square$

Sljedeći primjer pokazuje da box-homotopna preslikavanja ne moraju biti homotopna.

Primjer 5.33. *Neka su $(f^n),(g^n)\in inv^*\text{-}Top((I),(I))$ takvi da je $f^n=0$ i $g^n=1$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Preslikavanja f^n i g^n su homotopna za svaki $n\in\mathbb{N}$, i, kao što smo vidjeli, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}f^n,\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}g^n\colon\widetilde{I}\to\widetilde{I}$ su box-homotopni po Teoremu 5.29. Ali, oni nisu homotopni. Zaista, ako je $H\colon\widetilde{I}\times I\to\widetilde{I}$ homotopija od $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}f^n$ do $\underset{n\in\mathbb{N}}{\nabla}g^n$, onda je $H([(x_n)],0)=[(0,0,\dots)]$, i $H([(x_n)],1)=[(1,1,\dots)]$ za svaki $[(x_n)]\in\widetilde{I}$. Tada je, za svaki $[(x_n)]$, preslikavanje $I\to\widetilde{I}$ definirano s $t\mapsto H([(x_n)],t)$ put od $[(0,0,\dots)]$ do $[(1,1,\dots)]$ u $\widetilde{I}$, a to je kontradikcija jer je $\widetilde{I}$ totalno nepovezan.*

Promotrimo sada morfizam $[([f^n])] \in pro^*\text{-}HTop((X),(Y))$. Sjetimo se da su $([f^n])$ i $([f'^n])$ ekvivalentni ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $[f^n] = [f'^n]$ za svaki $n \geq n_0$.

Tvrdimo da $([f^n])$ i $([f'^n])$ induciraju istu box-homotopsku klasu $\left[\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} f^n\right]_\square$. Da bismo to dokazali uzmimo dva niza preslikavanja, $(f^n),(f'^n)\colon X \to Y$, takva da je $f^n \sim f'^n$ po homotopiji H_n za svaki $n \geq n_0$. Možemo definirati funkciju $H\colon \mathop{\square}_{\mathbb{N}}(X \times I) \to \mathop{\square}_{\mathbb{N}} Y$ s

$$q_n \circ H = \begin{cases} H_n & n \geq n_0 \\ H_{n_0} & n \leq n_0 \end{cases},$$

gdje je $q_n\colon \mathop{\square}_{\mathbb{N}} Y \to Y$ projekcija. H je neprekidna i $H \circ i$, gdje je i preslikavanje iz 5.28, inducira box-homotopiju $\widetilde{H}\colon \widetilde{X} \times \mathop{\square}_{\mathbb{N}} I \to \widetilde{Y}$, $\widetilde{H}([(x_n)],(t_n)) = [H((x_n,t_n))]$, između $\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} f^n$ i $\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} f'^n$. Zaista,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}([(x_n)],(0,0,\dots)) &= [(f^n(x_n))], \\ \widetilde{H}([(x_n)],(1,1,\dots)) &= [(f'^n(x_n))]. \end{aligned}$$

Sada možemo definirati pridruživanje $\widetilde{R}_\square\colon pro^*\text{-}HTop \to pro\text{-}H_\square Top$ s

$$\widetilde{R}_\square((X_\lambda,[p_{\lambda\lambda'}],\Lambda)) = \left(\widetilde{X}_\lambda, \left[\mathop{\nabla}_{\mathbb{N}} p_{\lambda\lambda'}\right]_\square, \Lambda\right),$$

za $(X_\lambda,[p_{\lambda\lambda'}],\Lambda) \in Ob(pro^*\text{-}HTop)$, i s

$$\widetilde{R}_\square\left(\left[\left(f,\left[f^n_\mu\right]\right)\right]\right) = \left[\left(f, \left[\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} f^n_\mu\right]_\square\right)\right],$$

za $\left[\left(f,\left[f^n_\mu\right]\right)\right] \in Mor(pro^*\text{-}HTop)$. Prolazeći odgovarajućim dijagramom lako se može provjeriti da je $\left[\left(f,\left[\mathop{\nabla}_{n\in\mathbb{N}} f^n\right]_\square\right)\right]$ zaista morfizam u *pro*-$H_\square Top$ i da $\widetilde{R}_\square$ ima funktorska svojstva.

Na ovaj način dobivamo funktor koji reducira kategoriju *pro**-*HTop* na kategoriju *pro*-$H_\square Top$, čime se dobiju kompleksniji objekti, ali je broj morfizama bitno smanjen. Na žalost, pokazalo se da je klasifikacija morfizama po box-homotopnosti trivijalna. Naime, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 5.34. *Za svaka dva preslikavanja $f, g \in Top(X, Y)$ vrijedi $f \underset{\square}{\sim} g$.*

Dokaz. Neka je

$$A = \left\{ (x_n) \in \underset{\mathbb{N}}{\square} I \mid (x_n) \text{ konvergira nuli} \right\} \subset \underset{\mathbb{N}}{\square} I \quad \text{i}$$
$$B = \left\{ (x_n) \in \underset{\mathbb{N}}{\square} I \mid (x_n) \text{ ne konvergira nuli} \right\} \subset \underset{\mathbb{N}}{\square} I.$$

A i B su otvoreni skupovi u $\underset{\mathbb{N}}{\square} I$ i disjunktni, i vrijedi $A \cup B = \underset{\mathbb{N}}{\square} I$. Definirajmo funkciju $H\colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to Y$ s

$$H|_{X \times A} = f \circ p_1,$$
$$H|_{X \times B} = g \circ p_1,$$

gdje je $p_1\colon X \times \underset{\mathbb{N}}{\square} I \to I$ projekcija na prvu koordinatu. Po lemi o lijepljenju, H je neprekidna i to je box-homotopija od f do g. $\square$

Ovim klasifikacija po box-homotopnosti postaje trivijalna, ali zbog prirodnog poopćenja pojma homotopije i zanimljivih konstrukcija i pomoćnih tvrdnji prilažemo je disertaciji.

Zaključak

Grupe gruboga oblika punktiranih topoloških prostora temeljne su invarijante teorije gruboga oblika, i mi u ovom radu dajemo njihovu novu karakterizaciju s pomoću novog funktora $\widetilde{R} : pro^{*}\text{-}Grp \to pro\text{-}Grp$. Funktor $\widetilde{R}$ inverznom sustavu grupa pridružuje inverzni sustav odgovarajućih kvocijentnih grupa, čime se postižu kompleksniji objekti, ali se morfizmi među njima bitno reduciraju. Pokaže se da je $\left(\widetilde{R} \circ pro^{*}\text{-}\pi_k\right)(X, x_0)$ za neki punktirani topološki prostor (X, x_0) upravo *pro*-grupa gruboga oblika $pro\text{-}\check{\pi}_k^{*}(X, x_0)$. Nadalje, pokaže se da za $pro\text{-}\check{\pi}_k^{*} \equiv \widetilde{R} \circ pro^{*}\text{-}\check{\pi}_k$ vrijedi $\varprojlim pro\text{-}\check{\pi}_k^{*} = \check{\pi}_k^{*}$. Funktor grupa oblika $\check{\pi}_k$ definiran je s $\check{\pi}_k = \varprojlim pro\text{-}\pi_k$, što znači da je $pro\text{-}\check{\pi}_k^{*}$ puni analogon funktoru $pro\text{-}\pi_k$.

Funktor $\widetilde{R}$ nam omogućuje i da definiramo homološku grupu gruboga oblika topološkog prostora, objekt kojeg do sada nismo imali, a onda i homološku *pro*-grupu gruboga oblika. U radu smo istraživali vezu između *pro*-grupa gruboga oblika i homoloških *pro*-grupa gruboga oblika u smislu Hurewiczeva teorema, te vezu između grupa gruboga oblika i homoloških grupa gruboga oblika. Dokazali smo da su prva netrivijalna grupa gruboga oblika i prva netrivijalna homološka grupa gruboga oblika punktiranoga kontinuuma međusobno izomorfne, što je tvrdnja koja ne vrijedi za grupe oblika svih punktiranih kontinuuma.

U radu smo proučavali i redukciju kategorija $pro^{*}\text{-}Top$ i $pro^{*}\text{-}HTop$, a time i redukciju na kategoriji $pro^{*}\text{-}HPol$ koja je realizirajuća kategorija kategorije gruboga oblika. Analogno prethodnoj konstrukciji, inverznim sustavima topoloških prostora pridružujemo inverzne sustave odgovarajućih kvocijentnih prostora. S tim ciljem smo proučavali reduciranu potenciju $\widetilde{X}$ topološkog prostora X. To je produkt topološkog prostora X sa samim sobom prebrojivo mnogo puta, s box topologijom, reduciran na kvocijentni prostor relacijom ekvivalencije po kojoj su dva niza elemenata iz X u relaciji ako se razlikuju samo na konačno mnogo mjesta. Definirali smo funktor $\widetilde{R}\colon pro^*\text{-}Top \to pro\text{-}Top$ koji $*$-morfizme prikazuje kao morfizme *pro*-kategorije među inverznim sustavima u kojima su termi reducirane potencije topoloških prostora.

Prirodno je, međutim, da nam je zanimljivija redukcija kategorije $pro^*\text{-}HTop$. To znači da $*$-morfizmu koji se sastoji od nizova homotopskih klasa preslikavanja moramo pridružiti jedan morfizam u *pro*-kategoriji koji neće ovisiti o reprezentantima homotopskih klasa. Ponudili smo poopćenje pojma homotopije, relaciju koju smo nazvali box-homotopijom i označavali s $\underset{\square}{\sim}$. Očekivano, pokaže se da su sva homotopna preslikavanja ujedno i box-homotopna, dok obratno ne vrijedi. Dokazali smo da je box-homotopija relacija ekvivalencije na $Top(X,Y)$, i da je dobro usklađena s kompozicijom, što omogućuje konstrukciju nove kvocijentne kategorije koju smo označili s $H_{\square}Top$. Njezini objekti su topološki prostori, a morfizmi su joj box-homotopske klase preslikavanja. Pokazalo se, međutim, da su sva preslikavanja međusobno box-homotopna, odnosno da je klasifikacija morfizama po relaciji box-homotopnosti trivijalna.

Bibliografija

[1] P. Bankston. “Ultraproducts in topology”. *General Topology and its Applications* 7 (1977), str. 283–308.

[2] K. Borsuk. “Concerning homotopy properties of compacta”. *Fund. Math.* 62.3 (1968), str. 223–254.

[3] R. Fritsch i R. A. Piccinini. *Cellular structures in topology.* Cambridge University Press, 1990.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[5] N Koceić Bilan. “Comparing monomorphisms and epimorphisms in *pro* and *pro**-categories”. *Topology and its Applications* 155 (2008), str. 1840–1851.

[6] N Koceić Bilan. “Computing coarse shape groups of solenoids”. *Math. Commun.* 14 (2014), str. 243–251.

[7] N Koceić Bilan. “Continity of coarse shape groups”. *Homology, Homotopy and Applications* 18.2 (2016), str. 209–215.

[8] N Koceić Bilan. “The coarse shape groups”. *Topology and its Applications* 157 (2010), str. 894–901.

[9] N Koceić Bilan. “The induced homology and homotopy functors on the coarse shape category”. *Glasnik Matematički* 45.65 (2010), str. 531–557.

[10] N Koceić Bilan. “Towards the algebraic characterization of (coarse) shape path connectedness”. *Topology and its Applications* 160 (2013), str. 538–545.

[11] N Koceić Bilan i N Uglešić. “The coarse shape”. *Glasnik Matematički* 42.62 (2007), str. 145–187.

[12] N Koceić Bilan i N Uglešić. “The coarse shape path connectedness”. *Glasnik Matematički* 46.66 (2011), str. 489–503.

[13] K. Kunen. "Paracompactness of box products of compact spaces". *Trans. Amer. Math. Soc.* 240 (1978), str. 307–316.

[14] A. T. Lundell i S. Weingram. *The Topology of CW Complexes.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.

[15] S. Mardešić. "Approximating Topological Spaces by Polyhedra". *Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology, Elsevier Science* (2005).

[16] S. Mardešić i J. Segal. *Shape Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1982.

[17] A. K. Misra. "A topological view of P-spaces". *General Topology and its Applications* 2 (1972), str. 349–362.

[18] M. Moszynska. "Various approaches to the fundamental groups". *Fundamenta Mathematicae* 78 (1973), str. 107–118.

[19] J. R. Munkres. *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, 1984.

[20] M. E. Rudin. *Lectures on Set Theoretic Topology.* American Mathematical Society, 1975.

[21] E. H. Spanier. *Algebraic topology.* McGraw-Hill, Inc., New York, 1966.

Životopis

Ivančica Mirošević je rođena 14. veljače 1973. godine u Splitu. Pohađala je Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Splitu. Godine 1999. diplomirala je na Fakultetu prirodoslovno matematičkih znanosti i odgojnih područja Sveučilišta u Splitu obranom diplomskog rada *Kompaktifikacije topoloških prostora* pod mentorstvom prof. dr. sc. Nikice Uglešića, te tako stekla zvanje profesor matematike i informatike.

Godine 2000. upisala je znanstveni magistarski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu i 2005. godine je magistrirala s temom "*Spektralno particioniranje grafa i primjena na ekstrakciju znanja*", pod mentorstvom prof. dr. sc. Ivana Slapničara.

Godine 2016. upisuje Zajednički sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike Sveučilišta u Osijeku, Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišta u Splitu te Sveučilišta u Zagrebu. Članica je Topološkog seminara u Splitu i Hrvatskog matematičkog društva.

Trenutno radi kao viša predavačica na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu.

Znanstveni radovi

- N. Koceić-Bilan, I. Mirošević. "Functorial reducing *pro**-*Grp* category to *pro-Grp*". *Topology and its applications*, 263 (2019), str. 74-89.
- N. Koceić-Bilan, I. Mirošević. "Box-homotopy and the reduction of pro*-HTop category". *Homology, Homotopy and Applications* (prihvaćen za objavljivanje)

Izlaganja na znanstvenim skupovima i konferencijama

- 7th International Workshop on Accurate Solution of Eigenvalue Problems, Dubrovnik, srpanj 2008.
- The scientific meeting – 25 years of Topology seminar in Split, Split, srpanj 2018.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, Ivančica Mirošević, student/ica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi Šimićeva 9, Split, OIB __________, JMBAG 1191238083, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj doktorski rad pod naslovom: Redukcija kategorija pro*-Grp i pro*-HTop, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Splitu, 6. prosinca 2019.

Ivančica Mirošević

Potpis